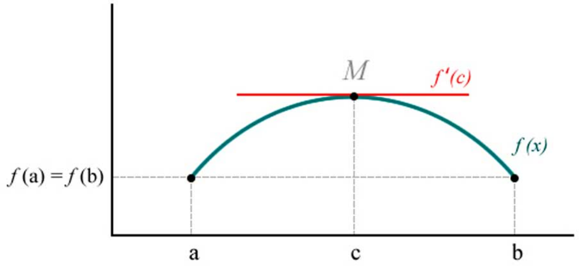
TEOREMAS DEL CALCULO

Teoremas sobre continuidad, derivabilidad y límites

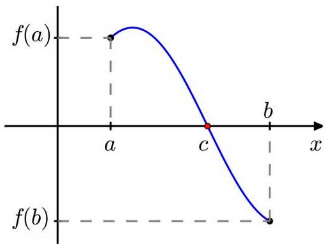
Teorema de Rolle

Si f(x) es una función continua en el intervalo cerrado [a, b].
Si f(x) es una función derivable en el intervalo abierto (a, b).
Si f(a)=f(b).
Entonces existe al menos un punto c perteneciente al intervalo abierto (a, b) tal que f '(c)=0



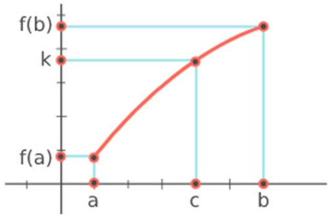
Teorema de Bolzano

Si f(x) es una función continua en el intervalo cerrado [a, b].
Si f(a) y f(b) tienen signos opuestos.
Entonces existe al menos un punto c perteneciente al intervalo abierto (a, b) tal que f(c)=0



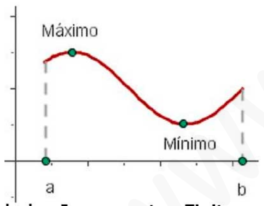
Teorema del Valor Intermedio

Si f(x) es una función continua en el intervalo cerrado [a, b].
Si k es un número comprendido entre f(a) y f(b).
Entonces existe al menos un punto c perteneciente al intervalo cerrado [a, b] tal que f(c)=k



Teorema de Bolzano - Weierstrass

Si f(x) es una función continua en el intervalo cerrado [a, b] entonces f(x) alcanza al menos un máximo y un mínimo en el intervalo [a, b].
Es decir, que hay al menos dos puntos x_1, x_2 pertenecientes a [a, b] donde f alcanza valores extremos.



Teorema de Lagrange o del Valor Medio o de los Incrementos Finitos

Si f(x) es una función continua en el intervalo cerrado [a, b].
Si f(x) es una función derivable en el intervalo abierto (a, b).
Entonces existe al menos un punto c perteneciente al intervalo abierto (a, b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Regla de L'Hôpital

La regla de L´Hôpital la utilizamos para resolver límites con indeterminaciones del tipo 0/0 y ∞/∞

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

donde a puede ser un número o infinito

Ejemplos de aplicacion de estos teoremas:

1. Probar que la ecuación $1+2x+3x^2+4x^3=0$ tiene una única solución en **R**

Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo.
Supongamos que la función $f(x)=1+2x+3x^2+4x^3$ tiene dos raíces distintas x_1 y x_2 con $x_1 < x_2$, entonces por ser raíces, se tiene que $f(x_1)=f(x_2)=0$.
Y como la función es continua y derivable en todo **R**, podemos aplicar el **teorema de Rolle.**
Por lo tanto existe un c ∈ (x_1,x_2) tal que $f'(c)=2+6c+12c^2=0$.
En otras palabras c es raíz real del polinomio $2+6c+12c^2$, lo cual es falso, ya que no admite raices reales porque su discriminante es negativo.
Concluyendo que, como la derivada no se anula en ningún valor está en contradicción con el teorema de Rolle, por lo que la hipótesis de que existen dos raíces es falsa.

2. Utilizando los teoremas de Bolzano y Rolle, demuestra que las curvas y=cos x e $y = \sqrt{x}$ se cortan en un único punto.

Sea $f(x)=\cos x - \sqrt{x}$. El problema es equivalente a demostrar que la función f(x) se anula en un unico valor de x.

Existencia:
f(0)=1>0
f(1)=cos(1)−1<0
f(x) es continua en el intervalo [0,1]
Por el teorema de Bolzano, $\exists c \in (0,1) / f(c) = 0$

Unicidad:
Supongamos que $\exists a, b \in [0,1] / f(a) = f(b) = 0$
Como f(x) es continua en el intervalo [0,1], derivable en (0,1) y, por hipótesis, f(a)=f(b), por el teorema de Rolle $\exists d \in (a,b) / f'(d) = 0$

Veamos que esto es imposible:

$$f'(x) = -sen\, x - \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(d) = -sen\, d - \frac{1}{2\sqrt{d}} = 0$$

Pero d pertenece al intervalo (a,b), que está incluido en (0,1), y en este intervalo el seno es positivo.
Como $1/2\sqrt{d}$ también es positivo, f′(d) no puede ser cero. Hemos llegado a una contradicción. Por lo tanto, el supuesto es falso, es decir: no hay dos soluciones en el intervalo [0,1].
Faltaría probar que no hay soluciones fuera de [0,1].
Para x<0 la raíz cuadrada no está definida.
Para x>1 se tiene que $\cos x \leq 1 < \sqrt{x}$ y, por tanto, f(x) no puede ser cero.
Luego la solución es única.

Teoremas fundamentales del cálculo integral (T.F.C.)

Primer teorema:

Dada una función f ingegrable en [a,b], llamamos F (primitiva de f) a una función defiida en [a,b] tal que:

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt \Rightarrow F'(x) = f(b(x)) \cdot b'(x) - f(a(x)) \cdot a'(x)$$

Por ejemplo:

$$Si\ F(x) = \int_{1}^{x} (t^3+1)\,dt \rightarrow F'(x) = x^3+1 \qquad b(x)=1 \quad b'(x)=0$$

$$Si\ F(x) = \int_{-x^2}^{x^3} \sqrt{t+1}\,dt \Rightarrow F'(x) = \sqrt{x^3+1} \cdot 3x^2 - \sqrt{-x^2+1} \cdot (-2x)$$

Segundo teorema (Regla de Barrow):

Dada una función f continua en [a,b] y una cualquiera de sus primitivas F(x), entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad donde\ f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$$