SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

ALGEBRA -2-

La expresión matricial del sistema de m ecuaciones y n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

es AX = B , donde

$$A = (a_{ij})_{m\times n},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Método de Gauss

Consiste en transformar el sistema original en un sistema triangular, mediante las transformaciones elementales de Gauss:

- Multiplicar una fila por un número distinto de cero $(F_i \to \alpha F_i)$
- Sumar a una fila un múltiplo de otra $(F_j \to F_j + pF_i)$
- Intercambiar filas $(F_i \leftrightarrow F_j)$

Método de la mariz inversa

despejando X en AX = B -> $X = A^{-1}.B$

Regla de Cramer

$$\text{Si } D = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0,\ x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & v_1 & w_1 \\ b_2 & v_2 & w_2 \\ b_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}}{D}\ \ y = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & b_1 & w_1 \\ u_2 & b_2 & w_2 \\ u_3 & b_3 & w_3 \end{vmatrix}}{D}\ \ z = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & b_1 \\ u_2 & v_2 & b_2 \\ u_3 & v_3 & b_3 \end{vmatrix}}{D}$$

Discusión de un sistema de ecuaciones:

La discusión de sistemas de ecuaciones lineales es analizar de qué tipo es y cuántas soluciones tiene en función de un parámetro que no se conoce.

Teorema de Rouché:

Si Rango(A) =Rango(A*) = nº de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Determinado (SCD) y tiene solución única.

Si Rango(A) =Rango(A*) < nºde incógnitas se trata de un Sistema Compatible Indeterminado (SCI) y tiene infinitas soluciones.

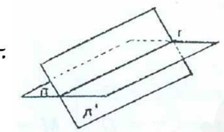
Si Rango(A) =Rango(A*) se trata de un Sistema Incompatible y no tiene solución.

Interpretación geométrica de un sistema:

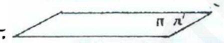
Dos planos en el espacio:

$$\left.\begin{matrix} \pi \equiv A\,x + B\,y + C\,z = D \\ \pi' \equiv A'\,x + B'\,y + C'z = D' \end{matrix}\right\} \quad M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$$

1) Rg M = Rg M* = 2
Sistema compatible indeterminado.
Se cortan en una recta.



2) Rg M = Rg M* = 1
Sistema compatible indeterminado.
Planos coincidentes.

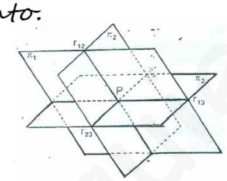


3) Rg M = 1 ; Rg M* = 2
Sistema incompatible.

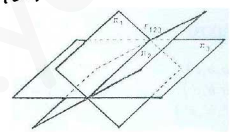
Tres planos en el espacio:

$$\left.\begin{matrix} \pi \equiv A\,x + B\,y + C\,z = D \\ \pi' \equiv A'\,x + B'\,y + C'z = D' \\ \pi'' \equiv A''x + B''y + C''z = D'' \end{matrix}\right\} \quad M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

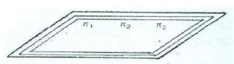
1) Rg M = Rg M* = 3
SCD. Se cortan en un punto.



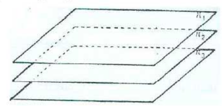
2) Rg M = Rg M* = 2
SCI. Se cortan en una recta.



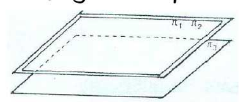
3) Rg M = Rg M* = 1
Sistema compatible indeterminado.
Planos coincidentes.



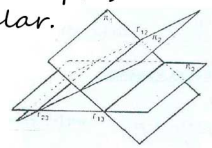
4) Rg M=1 ; Rg M*=2.
SI.
a) Planos paralelos.y distintos



b) Dos planos coincidentes y otro paralelo



5) Rg M=2 ; Rg M*=3
SI. a) Se cortan formando un prisma triangular.



b) Dos planos paralelos y otro incidente