ALGEBRA -1-

MATRICES.

Matriz de dimensión nxm: conjunto de números dispuestosen n filas y m columnas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Matriz fila: la que tiene una sola fila.
a_{ij}: elemento que ocupa la fila i y la columna j.
Matriz columna: la que tiene una sola columna.
Matriz traspuesta: se obtiene al intercambiar las filas por las columnas
Matriz opuesta: Se cambián de signo los elementos de la matriz
Matriz cuadrada: tiene el mismo número de filas que de columnas nxn
Diagonal principal: En matrices cuadradas, va de izquierda a derecha.
Matriz simétrica: Es igual a su traspuesta
Matriz antisimétrica: Es igual a su traspuesta, pero cambiada de signo
Matriz diagonal: Los elementos fuera de la diagonal principal son ceros.
Matriz unidad: Los elementos de la diagonal principal son uno, y el resto son ceros.
Matriz nula: Todos los elementos valen cero.

Suma de matrices:
Para sumar o restar matrices, tienen que tener las mismas dimensiones.
Propiedades:

- Asociativa: $A+(B+C)=(A+B)+C$
- Conmutativa: $A+B=B+A$
- Sumar matriz nula: $A+0=A$
- Sumar matriz opuesta: $A+(-A)=0$

Multiplicación de una matriz por un número: se multiplican todos los elelemtos de la matriz,

- $k(A+B)=kA+kB$
- $(k+h)A=kA+hA$
- $(k\cdot h)\cdot A=k\cdot(h\cdot A)$
- $1\cdot A$

A y B son matrices, k y h son escalares

Multiplicación de matrices:
Dos matrices se pueden multiplicar si el número de columnas de la primera coincide con el número de filas de la segunda

Filas
Columnas
$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}$
IGUALES

Propiedades del producto de matrices: se multiplican todos los elelemtos de la matriz,

- Asociativa $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$
- Distributiva $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$
- Elemento neutro: $A\cdot I=I\cdot A$
- No conmutativa: $A\cdot B\neq B\cdot A$

Propiedades de la matriz traspuesta:

- $(A^t)^t=A$
- $(A+B)^t=A^t+B^t$
- $(k\cdot A)^t=k\cdot A^t$
- $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$

Rango de una matriz: Se define como el número de filas (o columnas) linealmente independientes que tiene dicha matriz. Para calcular el rango hay que ir eliminando filas (Gauss). EL rango lo determinan las que queden no nulas.
También se puede calcular por determinantes. Si tenemos una matriz de dimensión 3 x 4 cogemos matrices cuadradas que tengan el mayor orden posible, tendremos cuatro de orden 3.
Si el determinante de alguna de ellas es distinto de cero el rango es 3 y habremos terminado; si por el contrario todas son cero el rango ya no puede ser 3 y buscaremos menores de orden. Si alguno de estos menores es distinto de cero ya habremos terminado, y el rango sería 2, si por el contrario todos son cero El rango es 1 (si no se trata de la matriz nula).

Inversa de una matriz: Para que una matriz tenga inversa ha de ser cuadrada y su determinante distinto de cero.
Una matriz es invertible cuando:

$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$ (matriz identidad)

$$A^{-1}=\frac{(Adj(A))^T}{|A|}$$

DETERMINANTES

Propiedades de los determinantes:

1.
$$\begin{vmatrix} a+m & b+n & c+p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & n & p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

2. $|A^T|=|A|$ 3. $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$
4. Si cambiamos dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo.
5. Si una fila o una columna tiene todos sus elementos igual a cero el determinante vale cero.
6. Si dos filas o dos columnas son iguales el determinante vale cero.
7. Si dos filas o dos columnas son prop aorcionales el determinante vale cero.
8. Si una fila o columna es combinación lineal de las otras el determinante vale cero.
9. Si a una fila (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+a & h+b & i+c \end{vmatrix}$$

10. Si a una fila multiplicada por un número (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ xa & xb & xc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+xa & h+xb & i+xc \end{vmatrix}$$

Regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$+$ $-$