

DISTRITO UNIVERSITARIO DE ANDALUCÍA
2015
MATEMÁTICAS (Mayores de 25 años).

Ejercicio 1.-

a) [5 puntos] Dado el polinomio $x^3 - x^2 - 4x + 4$, halla sus raíces y factorízalo. [5 puntos]

b) [5 puntos] Calcula $\int \frac{3x}{x^2 + 1} dx$

a)

Posibles soluciones $\pm 1, 2, 4$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -1 & -4 & 4 \\ & 1 & 1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1) \cdot (x^2 - 4) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x+2)$$

$$\text{Raíces} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

b)

$$\int \frac{3x}{x^2 + 1} dx = 3 \int \frac{x dx}{x^2 + 1} = 3 \int \frac{1}{t} \frac{dt}{2} = \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{3}{2} \ln t = \frac{3}{2} \ln(x^2 + 1) = \ln(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} = \ln \sqrt{(x^2 + 1)^3} * K$$

$$x^2 + 1 = t \Rightarrow 2x dx = dt \Rightarrow x dx = \frac{dt}{2}$$

Ejercicio 2.-

a) [5 puntos] Calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + 2 - \sqrt{n^2 + n})$

b) [5 puntos] Resuelve la ecuación $\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1} = 5$

a)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (n + 2 - \sqrt{n^2 + n}) &= \infty - \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 2 - \sqrt{n^2 + n}) \cdot (n + 2 + \sqrt{n^2 + n})}{n + 2 + \sqrt{n^2 + n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 2)^2 - (n^2 + n)}{n + 2 + \sqrt{n^2 + n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4n + 4 - n^2 - n}{n + 2 + \sqrt{n^2 + n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 4}{n + 2 + \sqrt{n^2 + n}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \frac{n}{n} + \frac{4}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{2}{n} + \sqrt{\frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{4}{n}}{1 + \frac{2}{n} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \\ &= \frac{3 + \frac{4}{\infty}}{1 + \frac{2}{\infty} + \sqrt{1 + \frac{1}{\infty}}} = \frac{3 + 0}{1 + 0 + \sqrt{1 + 0}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Continuación del Ejercicio 2

b)

$$\begin{aligned}\sqrt{x-4} &= 5 - \sqrt{x+1} \Rightarrow (\sqrt{x-4})^2 = (5 - \sqrt{x+1})^2 \Rightarrow x-4 = 25 - 10\sqrt{x+1} + x+1 \Rightarrow 10\sqrt{x+1} = 30 \Rightarrow \\ \sqrt{x+1} &= 3 \Rightarrow (\sqrt{x+1})^2 = 3^2 \Rightarrow x+1 = 9 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow \sqrt{8-4} + \sqrt{8+1} = 5 \Rightarrow 2+3 = 5 \Rightarrow \text{Comprobado} \\ x &= 8\end{aligned}$$

Ejercicio 3.-

a) [5 puntos] Sabiendo que α es un ángulo que cumple $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ y $\text{sen}(\alpha) = \frac{3}{5}$ calcula $\cos(\alpha)$ y $\text{sen}(2\alpha)$

b) [5 puntos] Considera la recta $x + 2y - 3 = 0$. Calcula la recta paralela a ella que pasa por el punto $(1, -1)$

a)

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \pm \sqrt{1 - \text{sen}^2(\alpha)} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5} \Rightarrow \text{como } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5} \\ \text{sen}(2\alpha) &= 2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}\end{aligned}$$

b) La recta al ser paralela tiene la misma pendiente y es de la forma $x + 2y + D = 0$

$$1 + 2 \cdot (-1) + D = 0 \Rightarrow 1 - 2 + D = 0 \Rightarrow D = 1 \Rightarrow x + 2y + 1 = 0$$

$$H^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = L^2 \Rightarrow H^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} \Rightarrow H^2 = \frac{3L^2}{4} \Rightarrow L^2 = \frac{4}{3}H^2 \Rightarrow L = \pm \sqrt{\frac{4}{3}H^2} = \pm \frac{2H}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$L = \frac{2\sqrt{3}H}{3} \Rightarrow L = \frac{2\sqrt{3} \cdot 3}{3} = 2\sqrt{3} \text{ cm} \Rightarrow \text{Área} = \frac{1}{2}L \cdot H = \frac{1}{2} \frac{2H}{\sqrt{3}} \cdot H = \frac{H^2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}H^2}{3} = \frac{\sqrt{3} \cdot 3^2}{3} = 3\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Ejercicio 4.-

a) [5 puntos] La altura de un triángulo equilátero mide **3 cm**. Calcula cuanto mide un lado y el área del triángulo.

b) [5 puntos] Halla los valores de **a** y **b** sabiendo que la recta $y = ax + b$ pasa por los puntos de intersección de las parábolas de ecuaciones $y = x^2 - 3x - 1$, $y = -x^2 - 3x + 1$

a) Siendo **L** el lado del triángulo y **H** la altura

$$H^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = L^2 \Rightarrow H^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} \Rightarrow H^2 = \frac{3L^2}{4} \Rightarrow L^2 = \frac{4}{3}H^2 \Rightarrow L = \pm \sqrt{\frac{4}{3}H^2} = \pm \frac{2H}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$L = \frac{2\sqrt{3}H}{3} \Rightarrow L = \frac{2\sqrt{3} \cdot 3}{3} = 2\sqrt{3} \text{ cm} \Rightarrow \text{Área} = \frac{1}{2}L \cdot H = \frac{1}{2} \frac{2H}{\sqrt{3}} \cdot H = \frac{H^2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}H^2}{3} = \frac{\sqrt{3} \cdot 3^2}{3} = 3\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Continuación del Ejercicio 4

b)

$$x^2 - 3x - 1 = -x^2 - 3x + 1 \Rightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 1 = 1 + 3 - 1 = 3 \Rightarrow 3 = a \cdot (-1) + b \\ x = 1 \Rightarrow g(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1 \Rightarrow -1 = a \cdot 1 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = 3 \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$a + 2 = 1 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow y = x + 2$$

Ejercicio 5.-

a) [5 puntos] Resuelve la ecuación $\log(5x+4) - \log(2) = \frac{1}{2} \log(x+4)$

b) [5 puntos] Halla los valores de x para los que se alcanzan los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 5x + 2$

a)

$$\log\left(\frac{5x+4}{2}\right) = \log(x+4)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{5x+4}{2} = \sqrt{x+4} \Rightarrow 5x+4 = 2\sqrt{x+4} \Rightarrow (5x+4)^2 = (2\sqrt{x+4})^2 \Rightarrow$$

$$25x^2 + 40x + 16 = 4 \cdot (x+4) \Rightarrow 25x^2 + 40x + 16 = 4x + 16 \Rightarrow 25x^2 + 36x = 0 \Rightarrow x(25x + 36) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 25x + 36 = 0 \Rightarrow 25x = -36 \Rightarrow x = -\frac{36}{25} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow 5 \cdot 0 + 4 = 2\sqrt{0+4} \Rightarrow 4 = 2 \cdot 2 \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow x = 0 \\ x = -\frac{36}{25} \Rightarrow 5 \cdot \left(-\frac{36}{25}\right) + 4 = 2\sqrt{-\frac{36}{25} + 4} \Rightarrow -\frac{36}{5} + 4 = 2\sqrt{\frac{64}{25}} \Rightarrow -\frac{16}{5} \neq \frac{2 \cdot 8}{5} \Rightarrow \text{No es solución} \end{cases}$$

b)

$$f'(x) = 12x^2 - 16x + 5 \Rightarrow 12x^2 - 16x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = (-16)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 5 = 256 - 240 = 16 \geq 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 12} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{16+4}{24} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6} \\ x = \frac{16-4}{24} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f''(x) = 24x - 16 \Rightarrow \begin{cases} f''\left(\frac{5}{6}\right) = 24 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) - 16 = 20 - 16 = 4 \Rightarrow \text{Min} \\ f''\left(\frac{1}{2}\right) = 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 16 = 12 - 16 = -4 \Rightarrow \text{Max} \end{cases}$$

$$\text{Máximo relativo} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 2 = \frac{4}{8} - \frac{8}{4} + \frac{5}{2} + 2 = \frac{6}{2} = 3$$

$$\text{Mínimo relativo} \Rightarrow x = \frac{5}{6} \Rightarrow f\left(\frac{5}{6}\right) = 4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 - 8 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) + 2 = \frac{500}{216} - \frac{200}{36} + \frac{25}{6} + 2 = \frac{632}{216} = \frac{79}{27}$$

Ejercicio 6.-

a) [5 puntos] Halla todos los valores de x para los que $\frac{x-2}{2x+3} \leq 0$

b) [5 puntos] Halla la ecuación de una circunferencia sabiendo que uno de sus diámetros tiene por extremos los puntos **A(7, -2)** y **B(-1, 4)**.

a)

$$\frac{x-2}{2x+3} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ 2x+3 > 0 \Rightarrow 2x > -3 \Rightarrow x > -\frac{3}{2} \end{cases}$$

	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	2	∞
$x > 2$		(-)	(-)	(+)
$x > -\frac{3}{2}$		(-)	(+)	(+)
Solución		(+)	(-)	(+)

Solución $\forall x \in \mathbb{R} / -\frac{3}{2} \leq x \leq 2$

b) Hallaremos el centro **O** que es el punto medio de los puntos dados **A** y **B**, siendo el radio la mitad del módulo **AB**

$$\begin{cases} x_o = \frac{7+(-1)}{2} = 3 \\ y_o = \frac{(-2)+4}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow O(3, 1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 4) - (7, -2) = (-8, 6) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10 \Rightarrow r = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{2} = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow$$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 - 25 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$$

Continuación del Ejercicio 6

$$\text{Puntos de corte con } OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3x = 0 \Rightarrow (x-3)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow x^2 - 3x = x \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow (x-4)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-4 = 0 \Rightarrow x = 4 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$A = \left| \int_0^3 (x^2 - 3x) dx \right| + \int_0^3 x dx + \int_3^4 x dx - \int_3^4 (x^2 - 3x) dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x) dx + \int_3^4 (-x^2 + 3x) dx + \int_0^4 x dx$$

$$A = \int_0^4 (-x^2 + 3x) dx + \int_0^4 x dx = \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx = -\frac{1}{3}[x^3]_0^4 + 4 \cdot \frac{1}{2}[x^2]_0^4 = -\frac{1}{3} \cdot (4^3 - 0^3) + 2 \cdot (4^2 - 0^2)$$

$$A = -\frac{64}{3} + 32 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{96 - 64}{3} = \frac{32}{3} u^2$$

www.yoquieroaprobar.es