DISTRITO UNIVERSITARIO DE MÁLAGA
2014
MATEMÁTICAS (Mayores de 25 años).

Ejercicio 1.-

a) **[5 puntos]** Sabiendo que $\log(a)=\frac{1}{2}$, $\log(b)=\frac{2}{3}$ y $\log(c)=\frac{3}{4}$, halla $\log\left(\frac{a^3}{b^2c}\right)$

b) **[5 puntos]** De un rectángulo sabemos que el área vale **192 metros cuadrados** y que une de sus lados mide 16 metros. Calcula cuanto mide la diagonal

$a)$

$$\log\left(\frac{a^3}{b^2c}\right)=\log\left(a^3\right)-\log\left(b^2c\right)=3\cdot\log(a)-\left[\log\left(b^2\right)+\log(c)\right]=3\cdot\frac{1}{2}-\log\left(b^2\right)-\log(c)=$$

$$=\frac{3}{2}-2\cdot\log(b)-\frac{3}{4}=\frac{3}{2}-2\cdot\frac{2}{3}-\frac{3}{4}=\frac{3}{2}-\frac{4}{3}-\frac{3}{4}=\frac{18-16-9}{12}=-\frac{7}{12}$$

b) Siendo el lado L el que no conocemos tendremos

$$192=16\cdot L\Rightarrow L=\frac{192}{16}=12\ m\Rightarrow Diagonal=\sqrt{16^2+L^2}=\sqrt{16^2+12^2}=\sqrt{196+144}=\sqrt{400}=20\ m$$

Ejercicio 2.-

a) **[5 puntos]** Halla el valor de **m** que el valor numérico del polinomio $P(x)=x^4+3x^3+2mx^2-m^2x+1$, vale **-2** cuando **x = -1**

b) **[5 puntos]** Halla la ecuación de una circunferencia que es concéntrica con la circunferencia de ecuación $x^2+y^2-2x-4y-1=0$ y que pase por el punto **P(2 , 2)**

$a)$

$$P(-1)=-2\Rightarrow(-1)^4+3\cdot(-1)^3+2m\cdot(-1)^2-m^2\cdot(-1)+1=-2\Rightarrow 1-3+2m+m^2+1+2=0\Rightarrow$$

$$m^2+2m+1=0\Rightarrow\Delta=2^2-4\cdot1\cdot1=0\Rightarrow m=\frac{-2\pm\sqrt{0}}{2\cdot1}=\frac{-2}{2}=-1$$

b)

$$Coordenadas\ del\ centro\Rightarrow\begin{cases}-2a=-2\Rightarrow a=1\\-2b=-4\Rightarrow b=2\end{cases}\Rightarrow Dis\tan cia\ centro\ a\ P\Rightarrow\overrightarrow{CP}=(2\ ,\ 2)-(1\ ,\ 2)=(1\ ,\ 0)\Rightarrow$$

$$Radio=\left|\overrightarrow{CP}\right|=\sqrt{1^2+0^2}=1\Rightarrow(x-1)^2+(y-2)^2=1^2\Rightarrow x^2-2x+1+y^2-4y+4=1\Rightarrow$$

$$C\equiv x^2+y^2-2x-4y+4=0$$

Ejercicio 3.-

a) **[5 puntos]** Resuelve la ecuación y comprueba las soluciones $x+\sqrt{x-4}=24$,

b) **[5 puntos]** Estudia las asíntotas de la función dadas por $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

$a)$

$$\sqrt{x-4}=24-x \Rightarrow \left(\sqrt{x-4}\right)^2=(24-x)^2 \Rightarrow x-4=576-48x+x^2 \Rightarrow x^2-49x+580=0 \Rightarrow$$

$$\Delta=(-49)^2-4\cdot 1\cdot 580=2401-2320=81\geq 0 \Rightarrow x=\frac{49\pm\sqrt{81}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{49+9}{2}=\dfrac{58}{2}=29 \\ x=\dfrac{49-9}{2}=\dfrac{40}{2}=20 \end{cases} \Rightarrow$$

$$Cuando \Rightarrow \begin{cases} x=29 \Rightarrow 29+\sqrt{29-4}=24 \Rightarrow 29+\sqrt{25}=24 \Rightarrow 29+5=24 \Rightarrow 34\neq 24 \Rightarrow No\ solución \\ x=20 \Rightarrow 20+\sqrt{20-4}=24 \Rightarrow 20+\sqrt{16}=24 \Rightarrow 20+4=24 \Rightarrow 24=24 \Rightarrow Solución \end{cases}$$

$b)$

Asíntotas verticales

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow f(1)=\dfrac{1^3}{1^2-1}=\dfrac{1}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow Asíntota\ vertical \\ f(-1)=\dfrac{(-1)^3}{(-1)^2-1}=-\dfrac{1}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow Asíntota\ vertical \end{cases}$$

Asíntotas verticales

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{\infty^3}{\infty^2-1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}-\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}=\frac{1}{0-0}=\frac{1}{0} \Rightarrow Sin\ solución$$

No hay asíntota vertical cuando $x\to\infty$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{(-\infty)^3}{(-\infty)^2-1}=\frac{-\infty^3}{\infty^2-1}=-\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}-\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{\frac{1}{-\infty}-\frac{1}{-\infty}}=\frac{1}{0} \Rightarrow Sin\ solución$$

No hay asíntota vertical cuando $x\to-\infty$

Continuación del Ejercicio 3

b) Continuación

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3-x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{1}{1-0}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{1-0}=0$$

Existe una asíntota oblicua, $y=x$, *cuando* $x\to\infty$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3-x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{1}{1-0}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-1}=\frac{-\infty}{\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{1}{-\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{1-0}=0$$

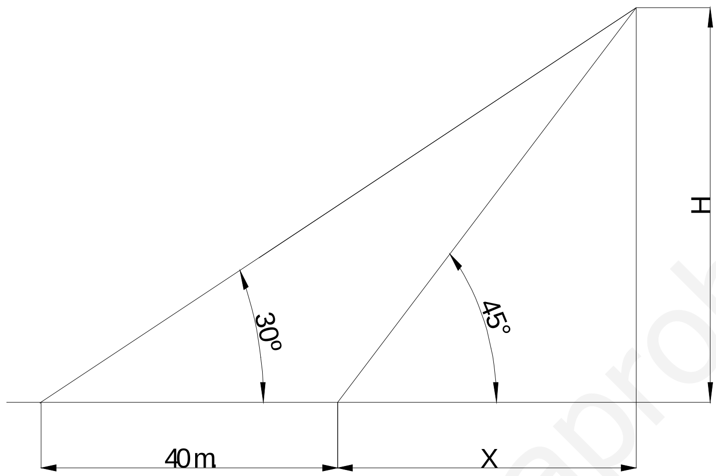
Existe una asíntota oblicua, $y=x$, *cuando* $x\to-\infty$

Ejercicio 4.-

a) [5 puntos] Al mirar la cima de una torre, lo hacemos bajo un ángulo de 45º con la horizontal. Como nos deslumbra el sol, nos alejamos 40 metros de la base de la torre y el ángulo se reduce a 30º. Calcula la distancia que nos separa de ella ahora que no nos deslumbra el sol.

b) [5 puntos] Calcula los valores **a** y **b**, sabiendo que la función $f(x) = 2x^3 + ax^2 - b$ tiene un extremo relativo en **x = 1** de valor **3**

a)



$$\begin{cases} tg\ 45º = \dfrac{H}{X} \Rightarrow H = X\ tg\ 45º \\ tg\ 30º = \dfrac{H}{X+40} \Rightarrow H = (X+40)\ tg\ 30º \end{cases} \Rightarrow X\ tg\ 45º = (X+40)\ tg\ 30º \Rightarrow X \cdot 1 = (X+40) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$X = X \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow X - X \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow X\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\frac{40\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}} = \frac{40\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

$$dis\tan cia\ a\ la\ torre = 40 + \frac{40\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = 40 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right) = 40 \cdot \left(\frac{3-\sqrt{3}+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right) = \frac{120}{3-\sqrt{3}} = 94'641\ m.$$

$b)$

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 3 \Rightarrow 2 \cdot 1^3 + a \cdot 1^2 - b = 3 \Rightarrow a - b = 1 \\ f'(1) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 = 0 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow a = -3 \end{cases} \Rightarrow (-3) - b = 1 \Rightarrow$$

$$b = -3 - 1 = -4 \Rightarrow f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$$

Ejercicio 5.-

a) [5 puntos] Calcula la distancia entre las rectas -2x + 3y +5 = 0 y 2x - 3y + 6 = 0

b) [5 puntos] Determinar el crecimiento y el decrecimiento de la función dada por

$$p(x) = 2x^3 - 15x^2 - 36x + 2$$

a) Solo si son rectas paralelas se podrá calcular la distancia entre ellas, para ello sus vectores directores son iguales o proporcionales

$$\begin{cases} r \equiv 2x - 3y - 5 = 0 \\ s \equiv 2x - 3y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{2} = \frac{-3}{-3} \Rightarrow d(r\,,\,s) = \frac{|(-5)-6|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|-11|}{\sqrt{13}} = \frac{11\sqrt{13}}{13}\ u$$

$b)$

$$p'(x) = 6x^2 - 30x - 36 = 6\left(x^2 - 5x - 6\right) \Rightarrow$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 + 24 = 49 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5+7}{2} = 6 \\ x = \dfrac{5-7}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

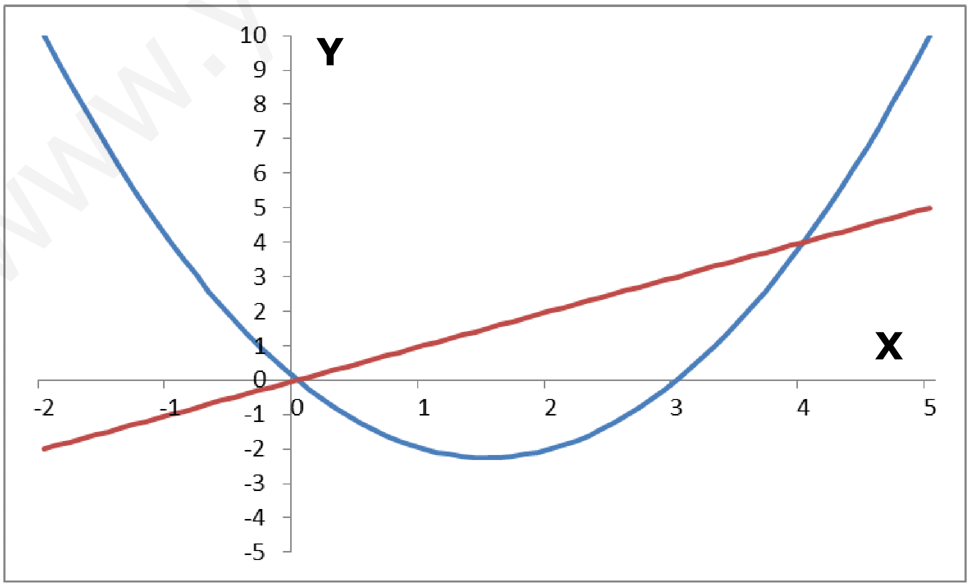
$$p'(x) = 6\,(x-6)\,(x+1) \Rightarrow Crecimiento \Rightarrow p'(x) > 0 \Rightarrow \begin{cases} 6 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ x - 6 > 0 \Rightarrow x > 6 \end{cases}$$

	$-\infty$	**-1**	**6** ∞
6 > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**
x > -1	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x > 6	**(-)**	**(-)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**

Creciente $\forall x \in \Re / (x < -1) \cup (x > 6)$ **Decreciente** $\forall x \in \Re / -1 < x < 6$

Ejercicio 6.-

[10 puntos] Dibuja el recinto limitado por $y = x^2 - 3x$ e $y = x$ .Halla su área



Continuación del Ejercicio 6

$$\textit{Puntos de corte con OX} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3x = 0 \Rightarrow (x-3)\,x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\textit{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow x^2 - 3x = x \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow (x-4)\,x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$A = \left| \int_0^3 \left(x^2 - 3x\right) dx \right| + \int_0^3 x\,dx + \int_3^4 x\,dx - \int_3^4 \left(x^2 - 3x\right) dx = \int_0^3 \left(-x^2 + 3x\right) dx + \int_3^4 \left(-x^2 + 3x\right) dx + \int_0^4 x\,dx$$

$$A = \int_0^4 \left(-x^2 + 3x\right) dx + \int_0^4 x\,dx = \int_0^4 \left(-x^2 + 4x\right) dx = -\frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^4 + 4 \cdot \frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^4 = -\frac{1}{3} \cdot \left(4^3 - 0^3\right) + 2 \cdot \left(4^2 - 0^3\right)$$

$$A = -\frac{64}{3} + 32 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{96 - 64}{3} = \frac{32}{3}\ u^2$$