DISTRITO UNIVERSITARIO DE MÁLAGA
2013
MATEMÁTICAS (Mayores de 25 años).

<u>Ejercicio 1.-</u>

a) [5 puntos] Simplifique la siguiente expresión y calcule su valor para ***x* = 8**

$$x\sqrt{8x}+3\sqrt{2x^3}+\frac{2x^2}{\sqrt{x}}-x\sqrt[6]{2^6x^3}$$

b) [5 puntos] Resuelva la ecuación **ln(*x* + 2) - 2 ln(*x* - 1) = 2 ln(2)**, donde ln denota el logaritmo neperiano.

$a)$

$$2\sqrt{2}\cdot x\cdot x^{\frac{1}{2}}+3\sqrt{2}\cdot x^{\frac{3}{2}}+2\cdot x^2\cdot x^{-\frac{1}{2}}-2x\cdot x^{\frac{3}{6}}=2\sqrt{2}\cdot x^{1+\frac{1}{2}}+3\sqrt{2}\cdot x^{\frac{3}{2}}+2\cdot x^{2-\frac{1}{2}}-2x\cdot x^{\frac{1}{2}}=$$

$$=2\sqrt{2}\cdot x^{\frac{3}{2}}+3\sqrt{2}\cdot x^{\frac{3}{2}}+2\cdot x^{\frac{3}{2}}+2x^{1+\frac{1}{2}}=5\sqrt{2}\cdot x^{\frac{3}{2}}+2\cdot x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}=5\sqrt{2}\cdot x^{\frac{3}{2}}=5\sqrt{2x^3}=5x\sqrt{2x}=P(x)$$

$$P(8)=5\cdot 8\cdot\sqrt{2\cdot 8}=40\sqrt{16}=40\cdot 4=160$$

$b)$

$$\ln(x+2)-\ln(x-1)^2=\ln(2)^2\Rightarrow\ln\frac{(x+2)}{(x-1)^2}=\ln 4\Rightarrow\frac{(x+2)}{(x-1)^2}=4\Rightarrow x+2=4(x-1)^2\Rightarrow$$

$$x+2=4(x^2-2x+1)\Rightarrow x+2=4x^2-8x+4\Rightarrow 4x^2-9x+2=0\Rightarrow\Delta=(-9)^2-4\cdot 4\cdot 2=81-32=49\geq 0\Rightarrow$$

$$x=\frac{9\pm\sqrt{49}}{2\cdot 4}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{9+7}{8}=2\\ x=\dfrac{9-7}{8}=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

<u>Ejercicio 2.-</u>

a) [5 puntos] Halle la mediatriz del segmento que une los puntos ***A*(-1 , 0)** y ***B*(0 , 1)**.

b) [5 puntos] Calcule el siguiente límite: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n}-n\right)$

a) Sea el punto **P(x , y),** la distancia **AP** es igual a la distancia **BP**

$$\begin{cases}\overrightarrow{AP}=(x\,,\,y)-(-1\,,0)=(x+1\,,\,y)\\ \overrightarrow{BP}=(x\,,\,y)-(0\,,1)=(x\,,\,y-1)\end{cases}\Rightarrow\left|\overrightarrow{AP}\right|=\left|\overrightarrow{BP}\right|\Rightarrow\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}\Rightarrow$$

$$(x+1)^2+y^2=x^2+(y-1)^2\Rightarrow x^2+2x+1+y^2=x^2+y^2-2y+1\Rightarrow 2x+1+2y-1=0\Rightarrow x+y=0\Rightarrow$$

$$y=-x$$

Continuación del Ejercicio 2

$b)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n}-n\right)=\infty-\infty=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2-3n}-n\right)\left(\sqrt{n^2-3n}+n\right)}{\sqrt{n^2-3n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n-n^2}{\sqrt{n^2-3n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n}{\sqrt{n^2-3n}+n}=\frac{-\infty}{\infty}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-3\frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}-3\frac{n}{n^2}}+\frac{n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3}{\sqrt{1-\frac{3}{n}}+1}=\frac{-3}{\sqrt{1-\frac{3}{\infty}}+1}=\frac{-3}{\sqrt{1-0}+1}=-\frac{3}{2}$$

<u>**Ejercicio 3.-**</u>

a) [5 puntos] Sabiendo que $tg\ \alpha=-2$ y que $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, calcule $sen\left(2\alpha\right)\ y\ \cos\left(2\alpha\right)$

b) [5 puntos] Sea la función $f:\Re\to\Re$ definida por ***f(x) = x³ - 3x² - 9x - 5***. Calcule sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Calcule sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) indicando si se trata de un máximo o de un mínimo.

$a)$

$$\begin{cases}\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow 1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{1}{1+tg^2\alpha}\Rightarrow\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1}{1+tg^2\alpha}}\\ \frac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha}+\frac{sen^2\alpha}{sen^2\alpha}=\frac{1}{sen^2\alpha}\Rightarrow\cot g^2\alpha+1=\frac{1}{sen^2\alpha}\Rightarrow sen^2\alpha=\frac{1}{1+\cot g^2\alpha}\Rightarrow sen\ \alpha=\pm\sqrt{\frac{1}{1+\cot g^2\alpha}}\end{cases}\Rightarrow$$

$$Como\Rightarrow\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\Rightarrow\begin{cases}sen\ \alpha=\sqrt{\frac{1}{1+\cot g^2\alpha}}=\sqrt{\frac{1}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}}=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}=\sqrt{\frac{1}{\frac{5}{4}}}=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2}{\sqrt5}=\frac{2\sqrt5}{5}\\ \cos\alpha=-\sqrt{\frac{1}{1+tg^2\alpha}}=-\sqrt{\frac{1}{1+2^2}}=-\sqrt{\frac{1}{5}}=-\frac{1}{\sqrt5}=-\frac{\sqrt5}{5}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}sen\left(2\alpha\right)=2\cdot sen\ \alpha\cdot\cos\alpha=2\cdot\frac{2\sqrt5}{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt5}{5}\right)=-4\cdot\frac{5}{25}=-\frac{4}{5}\\ \cos\left(2\alpha\right)=\cos^2\alpha-sen^2\alpha=\left(-\frac{\sqrt5}{5}\right)^2-\left(\frac{2\sqrt5}{5}\right)^2=\frac{5}{25}-\frac{4\cdot5}{25}=\frac{1}{5}-\frac{4}{5}=-\frac{3}{5}\end{cases}$$

$b)$

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3\left(x^2-2x-3\right)$$

$$x^2-2x-3=0\Rightarrow\Delta=\left(-2\right)^2-4\cdot1\cdot\left(-3\right)=4+12=16\ge0\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{2+4}{2}=3\\ x=\frac{2-4}{2}=-1\end{cases}\Rightarrow$$

$$f'(x)=3\left(x-3\right)\left(x+1\right)\Rightarrow Creciente\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow\begin{cases}3>0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ x+1>0\Rightarrow x>-1\\ x-3>0\Rightarrow x>3\end{cases}$$

Continuación del Ejercicio 3

b) Continuación

$-\infty$	**-1**	**3**	∞
3 > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**

x > -1	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x > 3	**(-)**	**(-)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**

Creciente $\forall x \in \Re / (x < -1) \cup (x > 3)$ **Decreciente** $\forall x \in \Re / -1 < x < 3$

Máximo relativo $x = -1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) - 5 = 1 - 3 + 9 - 5 = 2$
De **crecimiento** pasa a **decrecimiento**

Mínimo relativo $x = 3 \Rightarrow f(6) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 - 5 = 27 - 27 - 27 - 5 = -32$
De **decrecimiento** pasa a **crecimiento**

Ejercicio 4.-

a) [5 puntos] Resuelva el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x - 2y + z = -3 \\ 2x + y + 2z = 6 \\ x + 3y + z = 9 \end{cases}$

b) [5 puntos] Halle la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto (1 , -1) y pasa por el origen de coordenadas.

$a)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 9 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 12 \\ 0 & 5 & 0 & 12 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang\,(A) = rang\,(A/B) = 2 < Numero \;\; incógnitas$$

$Sistema\ Compatible\ Deter\min ado \Rightarrow$

$$5y = 12 \Rightarrow y = \frac{12}{5} \Rightarrow x - 2 \cdot \frac{12}{5} + z = -3 \Rightarrow x = \frac{24}{5} - 3 - z = \frac{9}{5} - z \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\,,\,y\,,\,z) = \left(\frac{9}{5} - \lambda\,,\,\frac{12}{5}\,,\,\lambda\right)$$

b) El radio de la circunferencia es el módulo del vector **O** (centro de la circunferencia) y el punto dado **P**

$$\overrightarrow{OP} = (1\,,-1) - (0\,,0) = (1\,,-1) \Rightarrow R = \left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{1^2 - (-1)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow C \equiv x^2 + y^2 - 2 = 0$$

Ejercicio 5.-

a) [5 puntos] Resuelva la inecuación $\dfrac{-3x+9}{2x-8} \leq 0$ y represente las soluciones sobre la recta real.

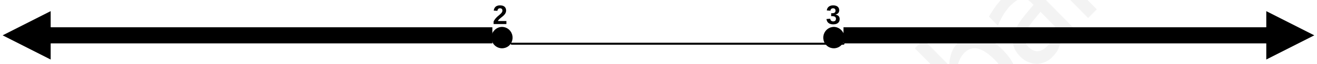
b) [5 puntos] Calcule $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$

$a)$

$$\frac{-3x+9}{2x-8} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -3x+9>0 \Rightarrow -3x>-9 \Rightarrow 3x<9 \Rightarrow x<\dfrac{9}{3} \Rightarrow x<3 \\ 2x-8>0 \Rightarrow 2x>8 \Rightarrow x>\dfrac{8}{4} \Rightarrow x>2 \end{cases}$$

	$-\infty$	2	3 ∞
x > 2	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x < 3	**(+)**	**(+)**	**(-)**
Solución	**(-)**	**(+)**	**(-)**

Solución $\forall x \in \Re / (x \leq 2) \cup (x \geq 3)$



Solución en línea gruesa

$b)$

$$x^2-3x+2=0 \Rightarrow \Delta=(-3)^2-4\cdot1\cdot2=9-8=1\geq0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2\cdot1} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3+1}{2}=2 \\ x=\dfrac{3-1}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{(x-2)(x-1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(x-2)}{(x-2)(x-1)} \Rightarrow A(x-1)+B(x-2)=1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} Si\ x=1 \Rightarrow A(1-1)+B(1-2)=1 \Rightarrow -B=1 \Rightarrow B=-1 \\ Si\ x=2 \Rightarrow A(2-1)+B(2-2)=1 \Rightarrow A=1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{(x-2)(x-1)}=\frac{1}{x-2}+\frac{(-1)}{x-1}$$

$$\int \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx=\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{dx}{x-1}=\int\frac{dt}{t}-\int\frac{du}{u}=\ln t-\ln u=\ln\frac{t}{u}=\ln\frac{x-2}{x-1}+K$$

$$\begin{cases} x-2=t \Rightarrow dx=dt \\ x-1=u \Rightarrow dx=du \end{cases}$$

Ejercicio 6.-

a) [5 puntos] Sea el polinomio ***p*(*x*) = *x*³ - 3*x*² - 9*x* - 5**. Resuelva ***p*(*x*) = 0** y factorice ***p*(*x*).**

b) [5 puntos] Calcule el área del triángulo de vértices ***A*(7 , -7), *B*(1 , -5) y *C*(3 , 1).**

a) Las posibles raíces del polinomio son los divisores de 5 $\Rightarrow \pm 1 , 5$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -9 & -5 \\ 1 & & 1 & -2 & -11 \\ \hline & 1 & -2 & -11 & |\underline{-16} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -9 & -5 \\ -1 & & -1 & 4 & 5 \\ \hline & 1 & -4 & -5 & |\underline{0} \end{array} \Rightarrow x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = (x+1)\cdot\left(x^2 - 4x - 5\right)$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot(-5) = 16 + 20 = 36 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4+6}{2} = 5 \\ x = \dfrac{4-6}{2} = -1 \end{cases}$$

$$Solución \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow p(x) = (x+1)^2 (x-5)$$

b) El área del triángulo es del producto del módulo del segmento **AB** por la distancia del punto **C** a la recta **AB** que es la altura del triángulo

$$Ecuación\ de\ la\ recta\ AB \Rightarrow \frac{y+7}{x-7} = \frac{-7-(-5)}{7-1} \Rightarrow \frac{y+7}{x-7} = \frac{-7+5}{6} \Rightarrow \frac{y+7}{x-7} = \frac{-2}{6} \Rightarrow \frac{y+7}{x-7} = \frac{-1}{3} \Rightarrow$$

$$-x + 7 = 3y + 21 \Rightarrow r \equiv x + 3y + 14 = 0$$

$$\overrightarrow{AB} = (1, -5) - (7, -7) = (-6, 2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 2^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$d(C\ ,\ r) = \frac{|3 + 3\cdot 1 + 14|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|20|}{\sqrt{10}} = \frac{20\sqrt{10}}{10} = 2\sqrt{10} \Rightarrow$$

$$A = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot d(C\ ,\ r) = 2\sqrt{10}\cdot 2\sqrt{10} = 400\ u^2$$