DISTRITO UNIVERSITARIO DE MÁLAGA
2011
MATEMÁTICAS (Mayores de 25 años).

Ejercicio 1.-

a) [5 puntos] Siendo **x** un número real positivo, exprese como un único radical la expresión,

$$4x\sqrt{3x} - \sqrt{108x^3} + 4\sqrt{3x} + \sqrt{12x^3} + \sqrt{243x}$$

y calcule el valor de la misma para **x = 3**

b) **[5 puntos]** Calcule $sen\,(2\alpha)$ y $\cos\,(2\alpha)$ sabiendo que $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ y $sen\,(\alpha) = -3\cos\,(\alpha)$

$a)$

$$4\sqrt{3}x\cdot x^{\frac{1}{2}} - 6\sqrt{3}\cdot x^{\frac{3}{2}} + 4\cdot\sqrt{3}\cdot x^{\frac{1}{2}} + 2\cdot\sqrt{3}\cdot x^{\frac{3}{2}} + 9\sqrt{3}\cdot x^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{3}x\cdot x^{\frac{1}{2}} - 6\sqrt{3}\cdot x\cdot x^{\frac{1}{2}} + 13\cdot\sqrt{3}\cdot x^{\frac{1}{2}} + 2\cdot\sqrt{3}\cdot x\cdot x^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 0\cdot\sqrt{3}x\cdot x^{\frac{1}{2}} + 13\cdot\sqrt{3}\cdot x^{\frac{1}{2}} = 13\cdot\sqrt{3x} = P(x)$$

$$P(3) = 13\cdot\sqrt{3\cdot 3} = 13\cdot\sqrt{9} = 13\cdot 3 = 39$$

$b)$

$$\frac{sen\,(\alpha)}{\cos\,(\alpha)} = -3 \Rightarrow tg\,(\alpha) = -3 \Rightarrow \cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow$$

$$1 + (-3)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = 10 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{10}} \Rightarrow Como\ \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$sen\,(2\alpha) = 2\cdot sen\,(\alpha)\cdot\cos\alpha = 2\cdot(-3)\cdot\cos\,(\alpha)\cdot\cos\alpha = (-6)\cdot\cos^2\alpha = (-6)\cdot\frac{1}{10} = -\frac{3}{5}$$

$$\cos\,(2\alpha) = \cos^2\alpha - sen^2\alpha = \cos^2\alpha - \left(1 - \cos^2\alpha\right) = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\frac{1}{10} - 1 = \frac{1}{5} - 1 = -\frac{4}{5}$$

Ejercicio 2.-

a) [5 puntos] Sea $f : \Re \to \Re$ la función definida por $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2+1}$ Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de ***f***. Halle los extremos relativos de la función ***f*** (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) [5 puntos] Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto **A(-1 , 2)** y es perpendicular a la recta de ecuación: **x + 2y - 3 = 0**.

$a)$

$$f'(x) = 2x - \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2} = 2x\left(1 - \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\right) = 2x\left[\frac{\left(x^2+1\right)^2 - 1}{\left(x^2+1\right)^2}\right] = 2x\cdot\frac{x^4 + 2x^2 + 1 - 1}{\left(x^2+1\right)^2} = 2x\cdot\frac{x^4 + 2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f'(x) = 2x^3\cdot\frac{x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Continuación del Ejercicio 2

$a)$*Continuación*

$$Crecimiento \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow 2x^3 \cdot \frac{x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}>0 \Rightarrow \begin{cases} 2>0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ x^3>0 \Rightarrow x>0 \\ x^2+2>0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ \left(x^2+1\right)^2>0 \Rightarrow \forall x \in \Re \end{cases}$$

2 > 0	**(+)**	**(+)**
x > 0	**(-)**	**(+)**
x^2+2 > 0	**(+)**	**(+)**
(x + 1)^2 > 0	**(+)**	**(+)**
Solución	**(-)**	**(+)**

Creciente $\forall x \in \Re / x>0$ **Decreciente** $\forall x \in \Re / x<0$

Máximo relativo $x=0 \Rightarrow f(0)=0^2+\frac{1}{0^2+1}=1$ **de Creciente pasa a Decreciente**

b) El vector director de la recta pedida es el valor negativo de la inversa del vector director de la dada

$$2y=-x+3 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \Rightarrow m=-\frac{1}{2} \Rightarrow m'=-\frac{1}{m}=-\frac{1}{-\frac{1}{2}}=2 \Rightarrow y-2=2\cdot(x+1) \Rightarrow y-2=2x+2 \Rightarrow$$

$$y=2x+4 \Rightarrow 2x-y+4=0$$

Ejercicio 3.-

a) **[5 puntos]** Determine la ecuación de la circunferencia de centro **P(-1 , 3)** que pasa por el punto **Q(-4 , 7).**Halle los puntos de corte de dicha circunferencia con el eje **OX**.

b) **[5 puntos]** Calcule el siguiente límite: $\lim_{n \to \infty}\left(\frac{3n^2-5n+4\sqrt{n}-7}{3n}-n+2\right)$

a) El módulo del vector **PQ** es el radio de la circunferencia.
La ecuación del eje **OX** es **y = 0**

$$\overrightarrow{PQ}=(-4\,,7)-(-1\,,3)=(-3\,,4) \Rightarrow \left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{25}=5 \Rightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=5^2 \Rightarrow$$

$$x^2+2x+1+y^2-6x+9-25=0 \Rightarrow C \equiv x^2+y^2+2x-6y-15=0$$

$$Si\ y=0 \Rightarrow x^2+0^2+2x-6\cdot 0-15=0 \Rightarrow x^2+2x-15=0 \Rightarrow \Delta=2^2-4\cdot 1\cdot(-15)=4+60=64 \geq 0 \Rightarrow$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{64}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-2+8}{2}=3 \\ x=\frac{-2-8}{2}=-5 \end{cases} \Rightarrow Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow \begin{cases} (-5\,,0) \\ (3\,,0) \end{cases}$$

Continuación del Ejercicio 3

$b)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-5n+4\sqrt{n}-7}{3n}-n+2\right)=\infty-\infty=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-5n+4\sqrt{n}-7-3n^2+6n}{3n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+4\sqrt{n}-7}{3n}=$$

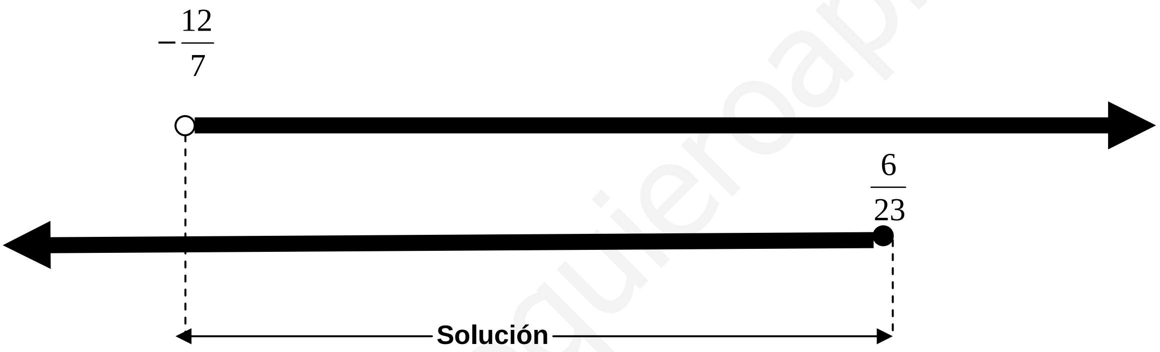
$$=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}+4\sqrt{\frac{n}{n^2}}-\frac{7}{n}}{3\frac{n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+4\sqrt{\frac{1}{n}}-\frac{7}{n}}{3}=\frac{1+4\sqrt{\frac{1}{\infty}}-\frac{7}{\infty}}{3}=\frac{1+4\sqrt{0}-0}{3}=\frac{1}{3}$$

Ejercicio 4.-

a) Resuelva el siguiente sistema de inecuaciones $\begin{cases}8x-4<15x+8\\ \frac{2x+6}{5}\le\frac{6-3x}{4}\end{cases}$ y represente gráficamente las soluciones sobre la recta real.

b) [5 puntos] Factorice el polinomio $p(x)=x^3+2x^2-x-2$. Calcule el resto de dividir p{x) entre (x -2).

$$\begin{cases}8x-4-15x-8<0\\ 8x+24\le 30-15x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-7x-12<0\\ 8x+24-30+15x\le 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-7x<12\\ 23x-6\le 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7x>-12\\ 23x\le 6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-\frac{12}{7}\\ x\le\frac{6}{23}\end{cases}$$



Solución $x\in\Re/-\frac{12}{7}<x\le\frac{6}{23}$

b) Los factores posibles son: ± 1, 2

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 2 & -1 & -2\\ 1 & & 1 & 3 & 2\\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0\end{array}\Rightarrow x^3+2x^2-x-2=(x-1)\left(x^2+2x+3\right)\Rightarrow x^2+3x+2\Rightarrow\Delta=3^2-4\cdot 1\cdot 2=1\ge 0$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{-3+1}{2}=-1\\ x=\frac{-3-1}{2}=-2\end{cases}\Rightarrow x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+1)(x+2)$$

$$R=P(2)=2^3+2\cdot 2^2-2-2=8+8-4=12$$

Ejercicio 5.-

a) **[5 puntos]** Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+2y-z=2 \\ 2x-y+3z=9 \end{cases}$

b) **[5 puntos]** Calcule el área del recinto limitado por la parábola de ecuación **$y = 3x - x^2$** y el eje **OX**

$a)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right) \Rightarrow -5z=-15 \Rightarrow z=\frac{-15}{-5}=3 \Rightarrow y-2\cdot 3=-4 \Rightarrow$$

$$y-6=-4 \Rightarrow y=2 \Rightarrow x+2+3=6 \Rightarrow x=1 \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\,,\,y\,,\,z)=(1\,,\,2\,,\,3)$$

$b)$

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow 3x-x^2=0 \Rightarrow x\,(3-x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 3-x=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

$$2 \in (0\,,\,3) \Rightarrow f(2)=3\cdot 2-2^2=2>0 \Rightarrow Positivo$$

$$A=\int_0^3 (3x-x^2)\,dx = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^3-\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^3=\frac{3}{2}\cdot(3^2-0^2)-\frac{1}{3}\cdot(3^3-0^3)=\frac{27}{2}-\frac{27}{3}=\frac{27}{2}-9=\frac{27-18}{2}=\frac{9}{2}\,u^2$$

Ejercicio 6.-

a) **[5 puntos]** Resuelva la ecuación: $\ln x-\frac{1}{2}\ln(3-x)=\ln(2)$, donde **ln** indica el logaritmo neperiano.

b) **[5 puntos]** Calcule el área de un triángulo rectángulo sabiendo que uno de sus catetos es el doble que el otro y que la hipotenusa mide **10 cm**.

$a)$

$$\ln x-\ln(3-x)^{\frac{1}{2}}=\ln(2) \Rightarrow \ln x-\ln\sqrt{3-x}=\ln(2) \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{\sqrt{3-x}}\right)=\ln(2) \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{3-x}}=2 \Rightarrow$$

$$x=2\cdot\sqrt{3-x} \Rightarrow x^2=4\,(3-x) \Rightarrow x^2=12-4x \Rightarrow x^2+4x-12=0 \Rightarrow \Delta=4^2-4\cdot 1\cdot(-12)=16+48=64\geq 0$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{64}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-4+8}{2}=2 \Rightarrow 2=2\cdot\sqrt{3-2} \Rightarrow 2=2\cdot\sqrt{1} \Rightarrow Es\ solución \Rightarrow x=2 \\ x=\frac{-4-8}{2}=-6 \Rightarrow -6=2\cdot\sqrt{3-(-6)} \Rightarrow -6=2\cdot\sqrt{9} \Rightarrow -6\neq 6 \Rightarrow No\ es\ solución \end{cases}$$

$b)$

$$10=\sqrt{C^2+(2C)^2} \Rightarrow 10=\sqrt{5C^2} \Rightarrow 10=\sqrt{5}C \Rightarrow C=\frac{10}{\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5} \Rightarrow C'=2C=4\sqrt{5} \Rightarrow$$

$$A=\frac{C\cdot C'}{2}=\frac{2\sqrt{5}\cdot 4\sqrt{5}}{2}=\frac{8\cdot 5}{2}=20\ cm^2$$