# DISTRITO UNIVERSITARIO DE MÁLAGA
# 2010
# MATEMÁTICAS (Mayores de 25 años).

**Ejercicio 1.-**

a) **[5 puntos]** Simplifica la expresión $\sqrt[3]{\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{16} + \frac{1}{2}\sqrt{32} - \sqrt{50} - \sqrt{98}$.

b) **[5 puntos]** Calcula el área de la región del plano limitada por las gráficas de la parábola de ecuación $y = 4 - x^2$ y la recta de ecuación $y = -5$.

*a*)

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{3}} + 2^{-1} \cdot 2^{\frac{5}{2}} - 5 \cdot 2^{\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{\frac{4}{3}} + 2^{\frac{5}{2}-1} - 12 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{6}+\frac{4}{3}} + 2^{\frac{3}{2}} - 12 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{9}{6}} + 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} - 12 \cdot 2^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2^{\frac{3}{2}} - 10 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} - 10 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = -8 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = -8\sqrt{2}$$

*b*)

$$\text{Puntos de corte con } OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases} \\ -5 \neq 0 \Rightarrow \text{No hay solución} \end{cases}$$

$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow 4 - x^2 = -5 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$$

*Las funciones son simétricas*

$$1 \in (0\,,2) \Rightarrow \begin{cases} 4 - 1^2 = 3 > 0 \\ -5 < 0 \end{cases} \qquad \frac{5}{2} \in (2\,,3) \Rightarrow \Rightarrow \begin{cases} 4 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 4 - \frac{25}{4} = -\frac{9}{4} > 0 \Rightarrow -5 < -\frac{9}{4} \\ -5 < 0 \end{cases}$$

*Hallaremos la mitad del área*

$$A = \int_0^2 (4 - x^2)\, dx + \left|\int_0^2 (-5)\, dx\right| + \left|\int_2^3 (-5)\, dx\right| - \left|\int_2^3 (4 - x^2)\, dx\right| = \int_0^2 (4 - x^2)\, dx + 5\int_0^2 dx - 5\int_2^3 dx + \int_2^3 (4 - x^2)\, dx =$$

$$A = \int_0^3 (4 - x^2)\, dx + 5\int_0^2 dx - 5\int_2^3 dx = 4 \cdot [x]_0^3 - \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^3 + 5 \cdot [x]_0^2 - 5 \cdot [x]_2^3 =$$

$$A = 4 \cdot (3 - 0) - \frac{1}{3} \cdot (3^3 - 0^3) + 5 \cdot (2 - 0) - 5 \cdot (3 - 2) = 12 - \frac{27}{3} + 10 - 5 = 12 - 9 + 5 = 8\, u^2$$

$$\text{Área total} = 2A = 2 \cdot 8 = 16\, u^2$$

**Ejercicio 2.-**

**a) [5 puntos]** Resuelve la inecuación $\frac{5x-2}{3} - \frac{x-8}{4} > \frac{x+14}{2} - 2$.

**b) [5 puntos]** Calcula el siguiente límite $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4-1}-3n^2}{2n^2+n}$.

a

*a*)

$$4\cdot(5x-2)-3\cdot(x-8)>6\cdot(x+14)-24 \Rightarrow 20x-8-3x+24>6x+84-24 \Rightarrow 17x+16>6x+60 \Rightarrow$$

$$17x-6x+16-60>0 \Rightarrow 11x-44>0 \Rightarrow 11x>44 \Rightarrow x>\frac{44}{11} \Rightarrow x>4$$

$$Solución \Rightarrow \forall x\in \Re \,/\, x>4$$

*b*)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4-1}-3n^2}{2n^2+n}=\frac{\infty-\infty}{\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^4-1}-3n^2\right)\left(\sqrt{n^4-1}+3n^2\right)}{\left(2n^2+n\right)\left(\sqrt{n^4-1}+3n^2\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4-1-9n^4}{\left(2n^2+n\right)\left(\sqrt{n^4-1}+3n^2\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-8n^4-1}{\left(2n^2+n\right)\left(\sqrt{n^4-1}+3n^2\right)}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{-8\frac{n^4}{n^4}-\frac{1}{n^4}}{\left(2\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}\right)\left(\sqrt{\frac{n^4}{n^4}-\frac{1}{n^4}}+3\frac{n^2}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-8-\frac{1}{n^4}}{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^4}}+3\right)}=$$

$$=\frac{-8-\frac{1}{\infty}}{\left(2+\frac{1}{\infty}\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{\infty}}+3\right)}=\frac{-8-0}{(2+0)\left(\sqrt{1-0}+3\right)}=\frac{-8}{2\,(1+3)}=-\frac{8}{8}=-1$$

**Ejercicio 3.-**

**a) [5 puntos]** Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{x^2-3}{e^x}$.

**b) [5 puntos]** Halla la ecuación de la circunferencia de centro $C(2,1)$ que pasa por el punto $P(4,3)$. Halla los puntos de corte de dicha circunferencia con el eje de abscisas.

*a*)

$$f'(x)=\frac{2x\cdot e^x-e^x\left(x^2-3\right)}{e^{2x}}=\frac{e^x\left(2x-x^2+3\right)}{e^{2x}}=-\frac{x^2-2x-3}{e^x}\Rightarrow x^2-2x-3=0\Rightarrow \Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-3)=16$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{2+4}{2}=3\\ x=\frac{2-4}{2}=-1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=(-1)\frac{(x-3)(x+1)}{e^x}\Rightarrow Crecimiento\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow$$

$$(-1)\frac{(x-3)(x+1)}{e^x}>0\Rightarrow\begin{cases}-1<0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ x-3>0\Rightarrow x>3\\ x+1>0\Rightarrow x>-1\\ e^x>0\Rightarrow\forall x\in\Re\end{cases}$$

**Continuación Ejercicio 3**

a) Continuación

| | $-\infty$ | **-1** | **3** $\infty$ | |
|---|---|---|---|---|
| **-1 < 0** | **( - )** | **( - )** | **( - )** |
| **$e^x$ > 0** | **( + )** | **( + )** | **( + )** |
| **x > -1** | **( - )** | **( + )** | **( + )** |
| **x > 3** | **( - )** | **( - )** | **( + )** |
| **Solución** | **( - )** | **( + )** | **( - )** |

**Creciente** $\forall x \in \Re / -1 < x < 3$ **Decreciente** $\forall x \in \Re / (x < -1) \cup (x > 3)$

**Mínimo relativo** en $x = -1 \Rightarrow f(-1) = \dfrac{(-1)^2 - 3}{e^{-1}} = -2e$ De decrecimiento pasa a crecimiento

**Máximo relativo** en $x = 3 \Rightarrow f(-1) = \dfrac{3^2 - 3}{e^3} = \dfrac{6}{e^3}$ De crecimiento pasa a decrecimiento

b) El módulo del vector **CP** es el radio de la circunferencia.
La ecuación del eje **OX** es **y = 0**

$$\overrightarrow{CP} = (4\,,3) - (2\,,1) = (2\,,2) \Rightarrow R = \left|\overrightarrow{CP}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow$$
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 - 8 = 0 \Rightarrow C \equiv x^2 + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0$$

$$Si\ y = 0 \Rightarrow x^2 + 0^2 - 4x - 2 \cdot 0 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 + 12 = 28 \geq 0 \Rightarrow$$
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4 + 2\sqrt{7}}{2} = 2 + \sqrt{7} \\ x = \dfrac{4 - 2\sqrt{7}}{2} = 2 - \sqrt{7} \end{cases} \Rightarrow Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow \begin{cases} \left(2 + \sqrt{7}\,,0\right) \\ \left(2 - \sqrt{7}\,,0\right) \end{cases}$$

**Ejercicio 4.-**

a) **[5 puntos]** Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y - z &= 1 \\ 3x + 2y + z &= 1 \\ 5x + 3y + 4z &= 2. \end{cases}$$

b) **[5 puntos]** Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-1,-7)$ y $B(3,-4)$.

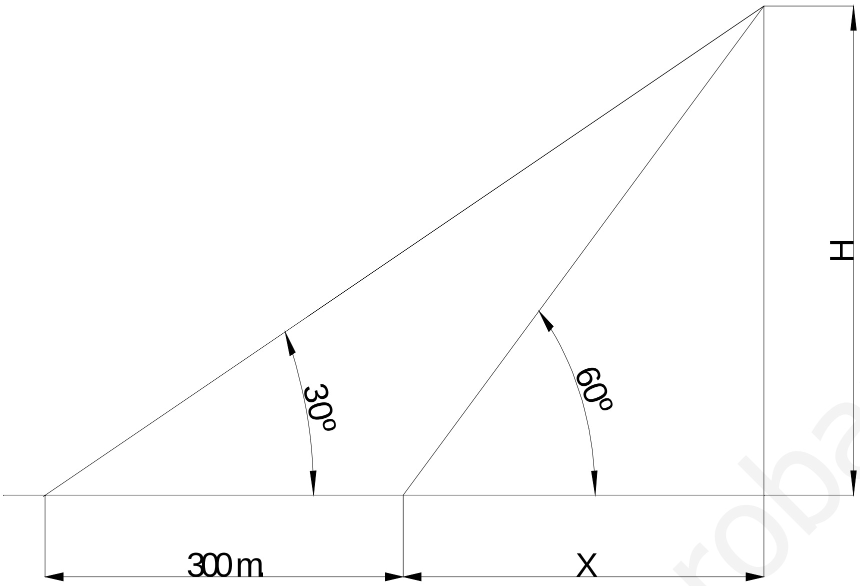
$a)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow z = 1 \Rightarrow -y + 4 \cdot 1 = -2 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow x + 6 - 1 = 1 \Rightarrow$$
$$x = -4 \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\,, y\,, z) = (-4\,,6\,,1)$$

$b)$

$$\frac{y - (-7)}{x - (-1)} = \frac{(-7) - (-4)}{(-1) - 3} \Rightarrow \frac{y + 7}{x + 1} = \frac{-3}{-4} \Rightarrow 4y + 28 = 3x + 3 \Rightarrow 3x - 4y - 25 = 0$$

**EJERCICIO 5** **[10 puntos]** Desde un cierto punto del suelo, situado al oeste de una torre, vemos el punto más alto de la torre bajo un ángulo de $60^\circ$. Si nos alejamos 300 m, en dirección oeste, lo vemos bajo un ángulo de $30^\circ$. ¿Qué altura tiene la torre?




$$\left\{\begin{array}{l} tg\ 60^\circ = \dfrac{H}{X} \Rightarrow X = \dfrac{H}{tg\ 60^\circ} \\ tg\ 30^\circ = \dfrac{H}{X+300} \Rightarrow X+300 = \dfrac{H}{tg\ 30^\circ} \Rightarrow X = \dfrac{H}{tg\ 30^\circ} - 300 \end{array}\right. \Rightarrow \frac{H}{tg\ 60^\circ} = \frac{H}{tg\ 30^\circ} - 300 \Rightarrow \frac{H}{tg\ 30^\circ} - \frac{H}{tg\ 60^\circ} = 300$$

$$H\left(\frac{1}{tg\ 30^\circ} - \frac{1}{tg\ 60^\circ}\right) = 300 \Rightarrow H\,\frac{tg\ 60^\circ - tg\ 30^\circ}{tg\ 30^\circ \cdot tg\ 60^\circ} = 300 \Rightarrow H = 300 \cdot \frac{tg\ 30^\circ \cdot tg\ 60^\circ}{tg\ 60^\circ - tg\ 30^\circ} = 300 \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow$$

$$H = \frac{300}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{150\cdot 3}{\sqrt{3}} = \frac{150\cdot 3\cdot\sqrt{3}}{3} = 150\cdot\sqrt{3} = 259'807\ m$$

**Ejercicio 6.-**

a) **[5 puntos]** Calcula $\text{sen}(\alpha)$ y $\text{sen}(2\alpha)$ sabiendo que $\alpha$ es un ángulo del segundo cuadrante y $\cos(\alpha) = -1/3$.

b) **[5 puntos]** Siendo $p(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, resuelve la ecuación $p(x) = 0$ y factoriza $p(x)$.

*a)*

$$sen^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \Rightarrow sen^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha) \Rightarrow sen(\alpha) = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3} \Rightarrow$$

$$Como\ es\ del\ 2^\circ\ cuadrante \Rightarrow sen(\alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow sen(2\alpha) = 2\cdot sen(\alpha)\cdot\cos(\alpha) = 2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

**Continuación del Ejercicio 6**

*b*)

*Los divisores son* $\pm 1\,,\,3$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -1 & 3 \\ \underline{1} & & 1 & -2 & -3 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \underline{|0} \end{array} \Rightarrow x^3-3x^2-x+3=(x-1)\left(x^2-2x-3\right)$$

$$x^2-2x-3=0 \Rightarrow \Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16\geq 0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2+4}{2}=3 \\ x=\dfrac{2-4}{2}=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\textit{Soluciones de } p(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x=3 \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow p(x)=x^3-3x^2-x+3=(x-1)(x-3)(x+1)$$