DISTRITO UNIVERSITARIO DE MÁLAGA
2009
MATEMÁTICAS (Mayores de 25 años).

Ejercicio 1.-

a) [5 puntos] Sabiendo que A y B son ángulos del segundo cuadrante y que $\operatorname{sen} A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos B = -\frac{1}{2}$, calcula $\cos(A+B)$ y $\operatorname{sen}(A-B)$.

b) [5 puntos] Expresa como un único radical $2\sqrt{8a^3} - \sqrt{288a^3} + 3\sqrt{128a^3} - \sqrt{72a^3} - 2\sqrt{32a^3}$, siendo a un número real positivo.

a)

$$\begin{cases} \cos A = \pm\sqrt{1-sen^2 A} = -\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{2}{4}} = -\sqrt{\frac{2}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ sen\ B = \pm\sqrt{1-\cos^2 B} = \sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \cos(A+B) = \cos A \cdot \cos B - sen\ A \cdot sen\ B = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ sen(A-B) = sen\ A \cdot \cos B - \cos A \cdot sen\ B = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

b)

$$2\cdot 2\cdot a\cdot\sqrt{2a} - 12\cdot a\cdot\sqrt{2a} + 3\cdot 8\cdot a\cdot\sqrt{2a} - 6\cdot a\cdot\sqrt{2a} - 2\cdot 4\cdot a\cdot\sqrt{2a} =$$

$$= 4\cdot a\cdot\sqrt{2a} - 12\cdot a\cdot\sqrt{2a} + 24\cdot a\cdot\sqrt{2a} - 6\cdot a\cdot\sqrt{2a} - 8\cdot a\cdot\sqrt{2a} = a\cdot\sqrt{2a}\cdot(4-12+24-6-8) = 2a\cdot\sqrt{2a} =$$

$$= \sqrt{4a^2\cdot 2a} = \sqrt{8a^3}$$

Ejercicio 2.-

a) [5 puntos] Resuelve la ecuación $\ln 2 + \ln(11-x^2) = 2\ln(5-x)$, donde $\ln x$ representa al logaritmo neperiano de x.

b) [5 puntos] Calcula $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^2+1}{2n} - \frac{3n^2-1}{3n+1}\right)$.

a)

$$\ln\left[2\cdot(11-x^2)\right] = \ln(5-x)^2 \Rightarrow 2\cdot(11-x^2) = (5-x)^2 \Rightarrow 22-2x^2 = 25-10x+x^2 \Rightarrow 3x^2-10x+3=0 \Rightarrow$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4\cdot 3\cdot 3 = 100-36 = 64 \Rightarrow x = \frac{10\pm\sqrt{64}}{2\cdot 3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{10+8}{6} = 3 \\ x = \frac{10-8}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Continuación del Ejercicio 2

b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+1}{2n}-\frac{3n^2-1}{3n+1}\right)=\frac{\infty}{\infty}-\frac{\infty}{\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2n^2+1\right)(3n+1)-2n\left(3n^2-1\right)}{2n\,(3n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^3+2n^2+3n+1-6n^3+2n}{6n^2+2n}$$

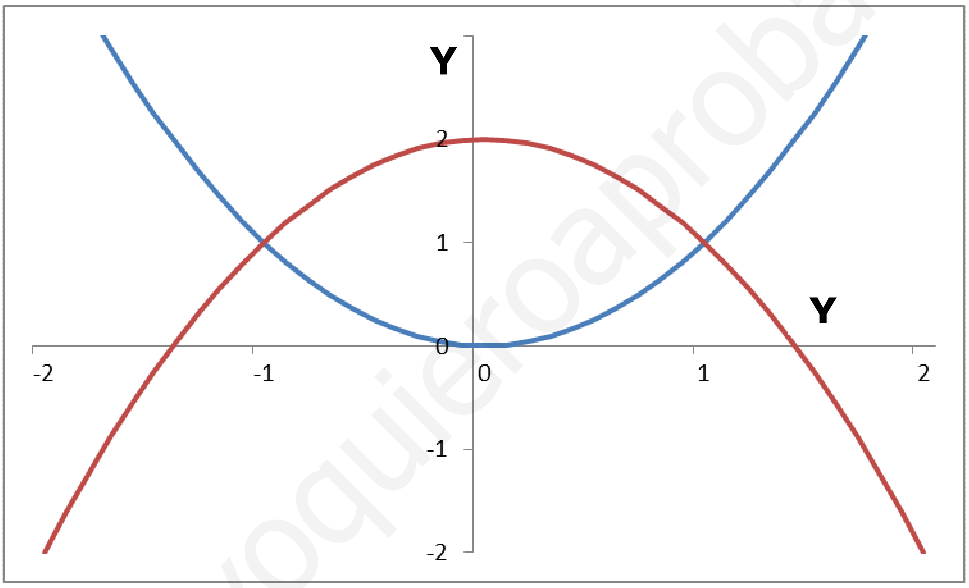
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+5n+1}{6n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\frac{n^2}{n^2}+5\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{6\frac{n^2}{n^2}+2\frac{n}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}{6+\frac{2}{n}}=\frac{2+\frac{5}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{6+\frac{2}{\infty}}=\frac{2+0+0}{6+0}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Ejercicio 3.-

a) [**5 puntos**] En un mismo gráfico, representa las dos parábolas de ecuaciones $y=x^2$, e $y=2-x^2$, respectivamente.

b) [**5 puntos**] Calcula el área de la región del plano limitada por las gráficas de las parábolas del apartado anterior.

a)



b)

$$\text{Corte con el eje } OX \Rightarrow y=0\Rightarrow\begin{cases} x^2=0\Rightarrow x=0\\ x^2-2=0\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}\Rightarrow\begin{cases}x=-\sqrt{2}\\ x=\sqrt{2}\end{cases}\end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x)=x^2\Rightarrow f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)\Rightarrow \text{Simétrico respecto a } OY\\ g(x)=2-x^2\Rightarrow g(-x)=2-(-x)^2=2-x^2=g(x)\Rightarrow \text{Simétrico respecto a } OY\end{cases}$$

Hallaremos la mitad del área

$$A=\int_0^{\sqrt{2}}\left(2-x^2\right)dx-\int_0^{\sqrt{2}}x^2\,dx=\int_0^{\sqrt{2}}\left(2-2x^2\right)dx=2\cdot[x]_0^{\sqrt{2}}-2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^{\sqrt{2}}=2\cdot\left(\sqrt{2}-0\right)-\frac{2}{3}\cdot\left(\sqrt{2^3}-0^3\right)$$

$$A=2\cdot\sqrt{2}-\frac{4}{3}\cdot\sqrt{2}=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{2}\Rightarrow \text{Área total}=2\cdot A=2\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}\,u^2$$

Ejercicio 4.-

a) [5 puntos] Calcula y simplifica: $\dfrac{x^2-2}{x-3}+\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{3-x}{x^2}$.

b) [5 puntos] Calcula las dimensiones de un solar rectangular que tiene 140 metros de perímetro y 50 metros de diagonal.

a)

$$\frac{x^2\left(x^2-2\right)+x\left(x-1\right)\left(x-3\right)+\left(3-x\right)\left(x-3\right)}{x^2\left(x-3\right)}=\frac{x^4-2x^2+x\left(x^2-3x-x+3\right)+3x-9-x^2+3x}{x^2\left(x-3\right)}=$$

$$=\frac{x^4-3x^2+6x-9+x^3-4x^2+3x}{x^2\left(x-3\right)}=\frac{x^4+x^3-7x^2+9x-9}{x^2\left(x-3\right)}$$

$$Factoricemos\ x^4-7x^2+9x-9\Rightarrow Posibles\ raices\Rightarrow \pm 1\,,3\,,9\Rightarrow No\ se\ puede\ descomponer$$

b)

Siendo **L** y **H** los lados del rectángulo

$$\begin{cases}2L+2H=140\Rightarrow 2\left(L+H\right)=140\Rightarrow L+H=70\Rightarrow L=70-H\\ 50=\sqrt{L^2+H^2}\Rightarrow 50^2=L^2+H^2\Rightarrow 2500=L^2+H^2\end{cases}\Rightarrow 2500=\left(70-H\right)^2+H^2\Rightarrow$$

$$2500=70^2-140H+H^2+H^2\Rightarrow 2H^2-140H+4900-2500=0\Rightarrow 2H^2-140H+2400=0\Rightarrow$$

$$2\left(H^2-70H+1200\right)=0\Rightarrow H^2-70H+1200=0\Rightarrow \Delta=\left(-70\right)^2-4\cdot 1\cdot 1200=4900-4800=100\geq 0\Rightarrow$$

$$H=\frac{70\pm 10}{2\cdot 1}\Rightarrow\begin{cases}H=\dfrac{70+10}{2}=40\ m\Rightarrow L=70-40=30\ m\\ H=\dfrac{70-10}{2}=30\ m\Rightarrow L=70-30=40\ m\end{cases}$$

Ejercicio 5.-

Dado el triángulo de vértices los puntos del plano $A(-1,1)$, $B(2,2)$ y $C(0,5)$.

a) [5 puntos] Encuentra la ecuación de la recta paralela al lado AB que pasa por el punto C.

b) [5 puntos] Encuentra la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos A y B.

a)

$$Pendiente\ de\ AB\Rightarrow m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2-1}{2-\left(-1\right)}=\frac{1}{3}\Rightarrow y-5=\frac{1}{3}\cdot\left(x-0\right)\Rightarrow 3y-15=x\Rightarrow x-3y+15=0$$

b) Es una recta perpendicular a la recta **AB** y que pasa por el punto medio de **A** y **B**

a)

$$P\begin{cases}endiente\,de\,la\,mediatriz\Rightarrow m'=-\dfrac{1}{m_{AB}}=-\dfrac{1}{\frac{1}{3}}=-3\\ Punto\,medio\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-1+2}{2}=\dfrac{1}{2}\\ y=\dfrac{1+2}{2}=\dfrac{3}{2}\end{cases}\end{cases}\Rightarrow y-\frac{3}{2}=-3\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow 2y-3=-3\cdot\left(2x-1\right)$$

$$2y-3=-6x+3\Rightarrow 6x+2y-6=0$$

Ejercicio 6.-

Dada la función f definida para los números reales x, $x \neq 1$ por $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}$.

a) [5 puntos] Determina los intervalos donde es creciente la función f y donde es decreciente.

b) [5 puntos] Determina las asíntotas de la gráfica de f.

a)

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = 2 \cdot \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = 2 \cdot \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 2 \cdot \frac{(x-2)x}{(x-1)^2} \Rightarrow Crecimiento \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ x > 0 \\ x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ (x-1)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \end{cases}$$

	$-\infty$	**0**	**2** ∞
2 > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**
x > 0	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x > 2	**(-)**	**(-)**	**(+)**
$(x - 1)^2 > 0$	**(+)**	**(+)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**

Creciente $\forall x \in \Re / (x < 0) \cup (x > 2)$ **Decreciente** $\forall x \in \Re / (0 < x < 1) \cup (1 < x < 2)$

b)

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{2 \cdot 1^2}{1-1} = \frac{2}{0} \Rightarrow Sin\ Solución \Rightarrow Asíntota\ vertical \Rightarrow x = 1$$

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x-1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to \infty} \frac{2\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty}} = \frac{2}{0-0} = \frac{2}{0} \Rightarrow Sin\ Solución$$

No existe asíntota horizontal cuando $x \to \infty$

$$y = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x-1} = \frac{\infty}{-\infty} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{\frac{1}{-\infty} - \frac{1}{\infty}} = \frac{2}{0-0} = \frac{2}{0} \Rightarrow Sin\ Solución$$

No existe asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$

Continuación Ejercicio 6

b)Continuación

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow f(1)=\frac{2\cdot 1^2}{1-1}=\frac{2}{0} \Rightarrow Sin\ Solución \Rightarrow Asíntota\ vertical \Rightarrow x=1$$

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2-x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1-\frac{1}{x}}=\frac{2}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{2}{1-0}=\frac{2}{1}=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{x-1}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-2x^2+2x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1-\frac{1}{x}}=\frac{2}{1-0}=2$$

Existe asíntota oblicua, $y=2x+2$, *cuando* $x\to\infty$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x^2}{x-1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2-x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1-\frac{1}{x}}=\frac{2}{1-\frac{1}{-\infty}}=\frac{2}{1-0}=\frac{2}{1}=2$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2}{x-1}-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x-1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1-\frac{1}{x}}=\frac{2}{1-0}=2$$

Existe asíntota oblicua, $y=2x+2$, *cuando* $x\to-\infty$