

DISTRITO UNIVERSITARIO DE MÁLAGA
2008
MATEMÁTICAS (Mayores de 25 años).

Ejercicio 1.-

a) [5 puntos] Halla las raíces del polinomio $2x^3 - 5x^2 - 11x - 4$ y factorízalo.

b) [5 puntos] Calcula $f'(1)$ sabiendo que $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$.

a)

Las posibles raíces son $\pm 1, 2, 4, \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & -5 & -11 & -4 & \\ 1 & & 2 & -3 & -14 \\ \hline & 2 & -3 & -14 & \underline{-18} \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} 2 & -5 & -11 & -4 & \\ -1 & & -2 & 7 & 4 \\ \hline & 2 & -7 & -4 & \underline{0} \end{array} \quad 2x^3 - 5x^2 - 11x - 4 = (x+1)(2x^2 - 7x - 4)$$

$$2x^2 - 7x - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 49 + 32 = 81 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7+9}{4} = 4 \\ x = \frac{7-9}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Soluciones de } 2x^3 - 5x^2 - 11x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{1}{2} \\ x = 4 \end{cases}$$

$$2x^3 - 5x^2 - 11x - 4 = (x+1)(x-4)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x+1)(x-4)(2x+1)$$

b)

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x+3)}{x} = \frac{\sqrt{x} - \frac{(x+3)}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2x - (x+3)}{2\sqrt{x}x} = \frac{2x - x - 3}{2x\sqrt{x}} = \frac{x-3}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow$$

$$f'(1) = \frac{1-3}{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{1}} = \frac{-2}{2} = -1$$

Ejercicio 2.-

a) [5 puntos] Calcula todas las soluciones de la ecuación $2 \log_{10} x - \log_{10}(x - 16) = 2$.

b) [5 puntos] Calcula $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$.

a)

$$\log_{10} x^2 - \log_{10}(x - 16) = \log_{10} 10^2 \Rightarrow \log_{10} \frac{x^2}{x - 16} = \log_{10} 100 \Rightarrow \frac{x^2}{x - 16} = 100 \Rightarrow x^2 = 100x - 1600$$

$$x^2 - 100x + 1600 = 0 \Rightarrow \Delta = (-100)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1600 = 10000 - 6400 = 3600 \Rightarrow x = \frac{100 \pm \sqrt{1600}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{100 + 40}{2} = 70 \\ x = \frac{100 - 40}{2} = 30 \end{cases}$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) = \infty - \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2} + \frac{n}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\infty} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0 + 1}} = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 3.-

a) [5 puntos] Sabiendo que α es un ángulo tal que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ y cuya tangente vale $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, calcula $\cos \alpha$ y $\cos(2\alpha)$.

b) [5 puntos] Resuelve la inecuación $\frac{x - 3}{2} + \frac{2x + 6}{5} \leq \frac{x}{2} - \frac{3x - 6}{4}$.

a)

$$\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \Rightarrow$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \Rightarrow \text{En segundo cuadrante} \Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{1 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = -\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{3}{9}}} = -\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{3}}} =$$

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{\frac{4}{3}}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \cos(2\alpha) \Rightarrow \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = \cos(2\alpha) \Rightarrow 2 \cos^2 \alpha - 1 = \cos(2\alpha) \Rightarrow$$

$$\cos(2\alpha) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1 = \frac{2 \cdot 3}{4} - 1 = \frac{6}{4} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

Continuación del Problema 3

b)

$$10 \cdot (x-3) + 4 \cdot (2x+6) \leq 10x - 5 \cdot (3x-6) \Rightarrow 10x - 30 + 8x + 24 \leq 10x - 15x + 30 \Rightarrow 18x - 6 \leq -5x + 30 \Rightarrow$$

$$23x - 36 \leq 0 \Rightarrow 23x \leq 36 \Rightarrow x \leq \frac{36}{23} \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R} / x \leq \frac{36}{23}$$

$$\frac{36}{23}$$

**Ejercicio 4.-**

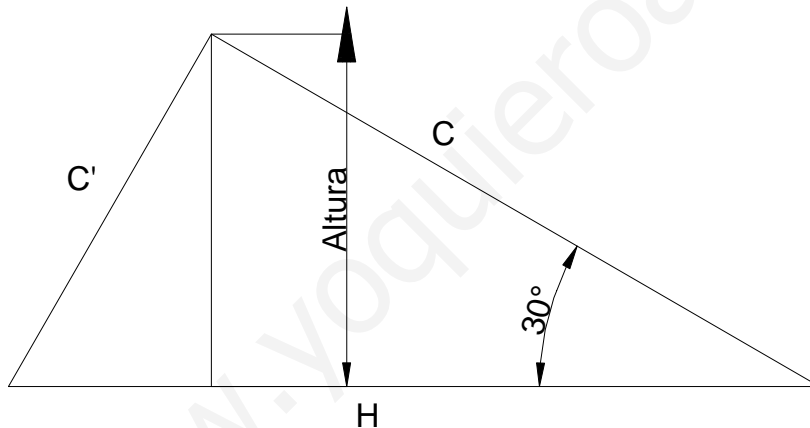
a) [5 puntos] Calcula el sumando que es constante en el desarrollo de la potencia $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^3$.

b) [5 puntos] De un triángulo rectángulo se sabe que tiene un ángulo de 30° y que la altura correspondiente a la hipotenusa mide $\sqrt{3}$ cm. Halla la longitud de la hipotenusa y el área del triángulo.

a)

$$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^3 = (x^2)^3 - 3(x^2)^2 \frac{1}{x} + 3(x^2) \left(\frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^3 = x^6 - 3x^3 + 3 - \frac{1}{x^3} \Rightarrow \text{El sumando pedido es } 3$$

b)



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sen } 30^\circ = \frac{\text{Altura}}{C} \Rightarrow C = \frac{\text{Altura}}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3} \text{ cm} \\ \text{sen } 60^\circ = \frac{\text{Altura}}{C'} \Rightarrow C' = \frac{\text{Altura}}{\text{sen } 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2 \text{ cm} \end{array} \right. \Rightarrow H = \sqrt{C^2 + C'^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12 + 4} = 4 \text{ cm}$$

$$A = \frac{1}{2} C \cdot C' = \frac{1}{2} 2\sqrt{3} \cdot 2 = 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Ejercicio 5.-

Dadas la recta r de ecuación $ax + 2y + 5 = 0$ y la recta s de ecuación $2x - 3y + 1 = 0$

a) [5 puntos] Halla el valor de la constante a sabiendo que r y s son paralelas.

b) [5 puntos] Halla la distancia del origen de coordenadas a la recta s .

a) Los vectores directores, de dos rectas paralelas, son iguales o proporcionales

$$\begin{cases} ax + 2y + 5 = 0 \\ 2x - 3y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{2}{-3} \Rightarrow -3a = 4 \Rightarrow a = -\frac{4}{3}$$

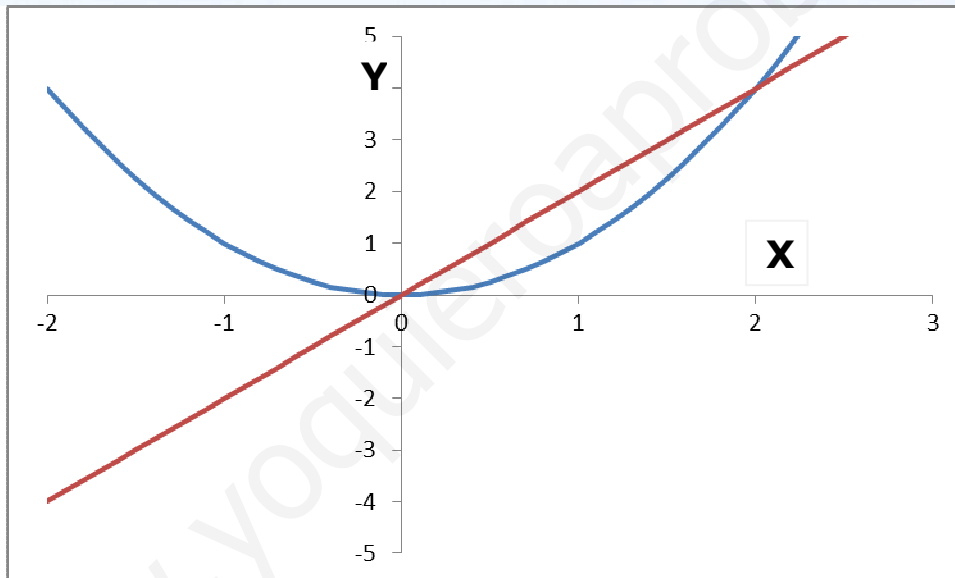
b)

$$O(0, 0) \Rightarrow d(O, s) = \frac{|2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$$

Ejercicio 6.-

a) [5 puntos] En un mismo gráfico, representa la parábola de ecuación $y = x^2$ y la recta de ecuación $y = 2x$.

b) [5 puntos] Halla el área del recinto limitado por las gráficas del apartado anterior.



b)

$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow (x-2)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

$$A = 2 \int_0^2 x \, dx - \int_0^2 x^2 \, dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^2 - \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^2 = (2^2 - 0^2) - \frac{1}{3} \cdot (2^3 - 0^3) = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} u^2$$