

**DISTRITO UNIVERSITARIO DE MÁLAGA
2005
MATEMÁTICAS (Mayores de 25 años).
OPCION A**

Ejercicio 1.-

(a) [1 punto] Factoriza el polinomio $x^3 - 1$.

(b) [1,5 puntos] Resuelve la siguiente inecuación $x^3 - 1 \geq 0$.

a)

Posibles raíces reales $\Rightarrow \pm 1 \Rightarrow$

$$1 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & & 0 \end{array} \right. \quad x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0 \Rightarrow$ No hay solución $\Rightarrow x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$

b)

$x^3 - 1 > 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ x^2 + x + 1 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R} \end{cases}$

	$-\infty$	1	∞
$x > 1$	(-)	(+)	(+)
$x^2 + x + 1 > 0$	(+)	(+)	(+)
Solución	(-)	(+)	(+)

Solución de $x^3 - 1 \geq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R} / x > 1$

Ejercicio 2.-

(a) [1 punto] Si los ángulos A y B son del primer cuadrante, $\text{sen } A = 1/2$ y $\text{sen } B = 1/3$, ¿cuál es el valor de $\text{sen } (A+B)$?

(b) [1,5 puntos] Halla la ecuación de la circunferencia centrada en el origen y que pasa por el punto (1,1).

a)

$$\begin{cases} \cos A = \sqrt{1 - \text{sen}^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos B = \sqrt{1 - \text{sen}^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{sen } (A+B) = \text{sen } A \cdot \cos B + \cos A \cdot \text{sen } B \Rightarrow$$

$$\text{sen } (A+B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{6}$$

Continuación del Ejercicio 2

b) El radio es el módulo del vector \overrightarrow{OP} , siendo O el origen de coordenadas (centro de la circunferencia) y el punto P dado

$$\overrightarrow{OP} = (1, 1) - (0, 0) = (1, 1) \Rightarrow R = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\text{Ecuación de la circunferencia} \Rightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow C \equiv x^2 + y^2 - 2 = 0$$

Ejercicio 3.-

Sea la función f dada por $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$ para $x \neq -1$, y $f(-1) = a$.

(a) [1 punto] Halla el valor de a para que la función sea continua.

(b) [1,5 puntos] Simplifica la expresión de f y halla el valor de $\int_0^2 f(x) dx$.

a)

$$f(1) = \frac{(-1)^2 - (-1) - 2}{(-1) + 1} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Indeterminación} \Rightarrow$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1+3}{2} = 2 \\ x = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

$$f(1) = a \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-2)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-2) = (-1) - 2 = -3 \Rightarrow a = -3$$

b)

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \frac{(x-2)(x+1)}{x+1} = x - 2$$

$$\text{Puntos de corte con } OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\int_0^2 (x-2) dx = \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^2 - 2 \cdot [x]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot (2^2 - 0^2) - 2 \cdot (2 - 0) = \frac{4}{2} - 4 = -2$$

Ejercicio 4.-

Considera la función f dada por $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ para $x \neq 1$.

(a) [1,5 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

(b) [1 punto] Determina los máximos y mínimos relativos de f y los valores que alcanza la función en esos puntos.

a)

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = -2 \cdot \frac{x}{(x-1)^2} \Rightarrow \text{Crecimiento} \Rightarrow -2 \cdot \frac{x}{(x-1)^2} > 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2 < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R} \\ x > 0 \\ (x-1)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R} \end{cases}$$

$-2 < 0$	(-)	(-)
$x > 0$	(-)	(+)
$(x^2 - 1)^2 > 0$	(+)	(+)
Solución	(+)	(-)

Creciente $\forall x \in x < 0$

Decreciente $\forall x \in x > 0$

b)

Máximo relativo $x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{0^2}{0-1} = \frac{0}{-1} = 0$ **De Creciente pasa a Decreciente**

OPCION B

Ejercicio 1.-

Entre Ana, Isabel y Luis tienen 130 €, Ana tiene el doble de euros que Isabel y Luis tiene 10 € más que Isabel.

(a) [1 punto] Plantea un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que exprese cada uno de los tres datos dados.

(b) [1,5 puntos] Resuelve el sistema anterior por el método Gauss.

a) Llamando **A** a la cantidad que aporta Ana, **I** a la cantidad aportada por Isabel y **L** la de Luis

$$\begin{cases} A + I + L = 130 \\ A = 2I \\ L = 10 + I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + I + L = 130 \\ A - 2I = 0 \\ -I + L = 10 \end{cases}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 130 \\ 1 & -2 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 10 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 130 \\ 0 & -3 & -1 & | & -130 \\ 0 & -1 & 1 & | & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 130 \\ 0 & 0 & -4 & | & -160 \\ 0 & -1 & 1 & | & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow 4L = 160 \Rightarrow L = \frac{160}{4} = 40 \Rightarrow -I + 40 = 10$$

$$\Rightarrow I = 30 \Rightarrow A + 40 + 30 = 130 \Rightarrow A = 60 \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (A, I, L) = (60, 30, 40)$$

Ejercicio 2.-

Considera la recta r de ecuación $y = 3x - 2$ y los puntos $A(2, 7)$ y $B(0, 1)$.

(a) [1 punto] Prueba que la recta que pasa por los puntos A y B es paralela a r .

(b) [1,5 puntos] Halla el área de un triángulo ABC , sabiendo que el punto C está situado sobre la recta r .

a)

$$\begin{cases} m = 3 \\ m = \frac{7-1}{2-0} = \frac{6}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Son iguales} \Rightarrow \text{Son paralelas}$$

b) El área del triángulo ABC , es la misma sea cual sea el punto C tomado, ya que es igual a la longitud de la base (el módulo del vector AB) por la altura (la distancia de un punto C cualquiera de la recta a la recta dada)

$$\text{Ecuación de la recta } s \text{ que une } A \text{ con } B \Rightarrow \frac{y-7}{x-2} = 3 \Rightarrow y-7 = 3x-6 \Rightarrow y = 3x+1 \Rightarrow s \equiv 3x - y + 1 = 0$$

$$\begin{cases} s \equiv 3x - y + 1 = 0 \\ r \equiv 3x - y - 2 = 0 \Rightarrow \text{Cuando } y = 4 \Rightarrow 3x - 4 - 2 = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow C(4, 2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{AB} = (2, 7) - (0, 1) = (2, 6) \Rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \\ \text{Altura} = H = d(r, \vec{AB}) = \frac{|3 \cdot 2 - 6 + 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \text{Área} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB}| \cdot H = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} = 1 u^2 \end{cases}$$

Ejercicio 3.-

(a) [1,25 puntos] Calcula el límite de la sucesión cuyo término general es $a_n = \sqrt{2n^2 + n} - n$.

(b) [1,25 puntos] Halla el valor de k sabiendo que $f'(2) = 1$, cuando f es la función dada

por $f(x) = \frac{kx}{x^2 + 2}$, para $x \in \mathbb{V}$.

a)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2n^2 + n} - n = \infty - \infty &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2n^2 + n} - n)(\sqrt{2n^2 + n} + n)}{\sqrt{2n^2 + n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - n^2}{\sqrt{2n^2 + n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{\sqrt{2n^2 + n} + n} = \\ &= \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2}}{\sqrt{2\frac{n^2}{n^4} + \frac{n}{n^4} + \frac{n}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n}}} = \frac{1 + \frac{1}{\infty}}{\sqrt{\frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}}} = \frac{1 + 0}{\sqrt{0 + 0 + 0}} = \frac{1}{0} = \infty \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{k(x^2 + 2) - 2xk}{(x^2 + 2)^2} = \frac{kx^2 - 2kx + 2k}{(x^2 + 2)^2} = k \frac{x^2 - 2x + 2}{(x^2 + 2)^2} \Rightarrow \\ \begin{cases} f'(2) = 1 \\ f'(2) = k \frac{2^2 - 2 \cdot 2 + 2}{(2^2 + 2)^2} = \frac{2k}{6^2} = \frac{k}{18} \Rightarrow \frac{k}{18} = 1 \Rightarrow k = 18 \end{cases} \end{aligned}$$

Ejercicio 4.-

Considera la función $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - mx + 3, & x \leq 1 \\ x + n, & x > 1 \end{cases}$$

(a) [1,25 puntos] Halla los valores de m y n sabiendo que f es continua y toma el valor 5 para $x = -1$.

(b) [1,25 puntos] Calcula $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

a)

$$\begin{cases} f(-1) = 5 \Rightarrow (-1)^2 - m \cdot (-1) + 3 = 5 \Rightarrow 1 + m = 2 \Rightarrow m = 1 \\ \begin{cases} f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1^2 - m \cdot 1 + 3 = 4 - m = 4 - 1 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 + n \end{cases} \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow 1 + n = 3 \Rightarrow n = 2 \end{cases}$$

b)

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2 - x + 3) dx &= \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^1 - \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^1 + 3 \cdot [x]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot (1^3 - 0^3) - \frac{1}{2} \cdot (1^2 - 0^2) + 3 \cdot (1 - 0) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 3 = \frac{2 - 3 + 18}{6} \\ \int_0^1 (x^2 - x + 3) dx &= \frac{17}{6} \end{aligned}$$