

DISTRITO UNIVERSITARIO DE ANDALUCÍA
2004
MATEMÁTICAS (Mayores de 25 años).
OPCION A

Ejercicio 1.-

(a) [1'75 puntos] Resuelve el sistema de ecuaciones lineales que sigue, sabiendo que tiene infinitas soluciones:

$$\left. \begin{array}{l} -3x + 4y + z = 13 \\ x + 3y - z = 0 \\ -5x - 2y + 3z = 13 \end{array} \right\}$$

(b) [0'75 puntos] Calcula, si existe, una solución del sistema del apartado anterior en la que $z = 0$.

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 4 & 1 & 13 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & -2 & 3 & 13 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 13 & -2 & 13 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 13 & -2 & 13 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 13 & -2 & 13 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow 13y - 2z = 13 \Rightarrow 13y = 13 + 2z \Rightarrow y = \frac{13 + 2z}{13}$$

$$y = 1 + \frac{2z}{13} \Rightarrow x + 3 \cdot \left(1 + \frac{2z}{13} \right) - z = 0 \Rightarrow x + 3 + \frac{6z}{13} - z = 0 \Rightarrow x = -3 + \frac{7z}{13}$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = \left(3 + \frac{7z}{13}, 1 + \frac{2z}{13}, z \right) \equiv (3 + 7\lambda, 1 + 2\lambda, 13\lambda)$$

b)

$$\text{Solución} \Rightarrow z = 0 \Rightarrow 13\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow y = 1 + 2 \cdot 0 = 1 \Rightarrow z = 3 + 7 \cdot 0 = 3 \Rightarrow$$

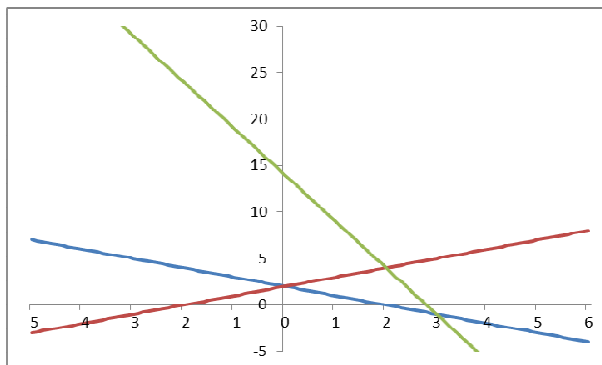
$$\text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (3, 1, 0)$$

Ejercicio 2. Un rectángulo tiene dos de sus lados sobre las rectas r y s , de ecuaciones $x + y - 2 = 0$ y $x - y + 2 = 0$, respectivamente, y una de sus diagonales está sobre la recta de ecuación $5x + y - 14 = 0$.

(a) [1 punto] Representa las tres rectas dadas.

(b) [1'5 puntos] Halla, razonadamente, los vértices del rectángulo. (La mera apreciación sobre una gráfica no es suficiente).

a)



Por la forma gráfica no parecen lados de un rectángulo, debido a que las unidades de el eje **OX** no son iguales a las de el eje **OY**

La línea azul es r , la roja s y la verde es la recta de las diagonales

Continuación del Ejercicio 2

b) Hallaremos los puntos de intersección de r con s , de r con la recta t de las diagonales y la de esta con la recta s

$$\text{Punto A} \begin{cases} r \equiv x + y - 2 = 0 \\ s \equiv x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 0 + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(0, 2)$$

$$\text{Punto B} \begin{cases} r \equiv x + y - 2 = 0 \\ t \equiv -5x - y + 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow -4x + 12 = 0 \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow 3 + y - 2 = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow B(3, -1)$$

$$\text{Punto C} \begin{cases} s \equiv x - y + 2 = 0 \\ t \equiv 5x + y - 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow 6x - 12 = 0 \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow 2 - y + 2 = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow C(2, 4)$$

El punto O medio de BC , es el punto medio de A y D , siendo este el último vértice

$$\begin{cases} x_O = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2} \\ y_O = \frac{(-1)+4}{2} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{2} = \frac{0+x_D}{2} \Rightarrow x_D = 5 \\ \frac{3}{2} = \frac{2+y_D}{2} \Rightarrow 2+y_D = 3 \Rightarrow y_D = 1 \end{cases} \Rightarrow D(5, 1)$$

Ejercicio 3.-

(a) [1'25 puntos] Calcula el límite de la sucesión de término general $a_n = \frac{n^2 - n + 2}{n} - n + 2$.

(b) [1'25 puntos] Dada la función f definida para los números reales x , $x \neq -1$, por:

$$f(x) = \frac{4x^2 + x - 3}{x + 1},$$

prueba que su función derivada es constante, justificando el resultado.

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 2}{n} - n + 2 = \frac{\infty}{\infty} - \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 2 - n^2 + 2n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 2}{n} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n} + \frac{2}{n}}{\frac{n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{1} = \frac{1 + 0}{1} = 1$$

b)

$$4x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) = 1 + 48 = 49 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+7}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \\ x = \frac{-1-7}{8} = -1 \end{cases}$$

$$4x^2 + x - 3 = (x+1)(4x-3)$$

$$f(x) = \frac{4x^2 + x - 3}{x + 1} = \frac{(x+1)(4x-3)}{x+1} = 4x - 3 \Rightarrow f'(x) = 4$$

Ejercicio 4.-**Ejercicio 4.** [2'5 puntos] Estudia la continuidad de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 4} & (x \neq -2, x \neq 2) \\ 0 & (x = -2) \\ 1 & (x = 2) \end{cases} .$$

Estudiaremos la continuidad en $x = -2$ y en $x = 2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{(-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2}{(-2)^2 - 4} = \frac{8 - 8}{4 - 4} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - 4x}{2x} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x - 4}{2} \Rightarrow \\ f(-2) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x - 4}{2} = \frac{3 \cdot (-2) - 4}{2} = \frac{-10}{2} = -5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -5 \neq f(-2) = 0 \\ f(-2) = 0 \end{array} \right.$$

No es continua en $x = -2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{2^3 - 2 \cdot 2^2}{2^2 - 4} = \frac{8 - 8}{4 - 4} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 4x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 4}{2} = \frac{3 \cdot 2 - 4}{2} = 1 \\ f(2) = 1 \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 1 \Rightarrow \text{Es continua en } x = 2$$

OPCION B

Ejercicio 1.-

(a) [1'5 puntos] Factoriza el polinomio $p(x) = 3 + 7x + 5x^2 + x^3$ y halla los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que $p(x) \leq 0$.

(b) [1 punto] Resuelve la ecuación $\frac{2^{x^2}}{8^x} = 16$ y comprueba alguna de las soluciones.

a) Las raíces del polinomio pueden ser $\pm 1, 3$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 5 & 7 & 3 \\ & & 1 & 6 & 13 \\ \hline & 1 & 6 & 13 & \underline{16} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 5 & 7 & 3 \\ & & -1 & -4 & -3 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \underline{0} \end{array} \Rightarrow x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = (x+1)(x^2 + 4x + 3)$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-4+2}{2} = -1 \\ x = \frac{-4-2}{2} = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = (x+1)(x+1)(x+3) = (x+1)^2 (x+3)$$

Se estudia la desigualdad para que sea positiva

$$x^3 + 5x^2 + 7x + 3 > 0 \Rightarrow (x+1)^2 (x+3) > 0 \Rightarrow \begin{cases} (x+1)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ x+3 > 0 \Rightarrow x > -3 \end{cases}$$

$(x+1)^2 > 0$	(+)	(+)
$x > -3$	(-)	(+)
Solución	(-)	(+)

Como nos piden $x^3 + 5x^2 + 7x + 3 \leq 0 \Rightarrow$ Solución $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / x \leq -3$

Ejercicio 2. [2'5 puntos] Dada la recta r de ecuación $3x - 4y - 12 = 0$, halla las ecuaciones de las rectas paralelas a r que están a una distancia de ella de 2 unidades.

Las rectas paralelas tienen el mismo vector director, siendo, sus ecuaciones, de la forma $s: 3x - 4y + D = 0$

$$d(r, s) = \frac{-12 - D}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \pm 2 \Rightarrow \frac{-12 - D}{\sqrt{25}} = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} -12 - D = 10 \Rightarrow D = -22 \Rightarrow 3x + 4y - 22 = 0 \\ -12 - D = -10 \Rightarrow D = -2 \Rightarrow 3x + 4y - 2 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 3. Considera la función f definida, para $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, por $f(x) = x + 1 - \frac{2}{x}$.

- (a) [0'25 puntos] Halla los puntos de corte de su gráfica con los ejes de coordenadas.
 (b) [0'75 puntos] Halla las asíntotas de su gráfica.
 (c) [1 punto] Calcula sus máximos y mínimos relativos (valores y dónde se alcanzan) y justifica en qué intervalos es creciente o decreciente.
 (d) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f .

a)

$$\text{Corte con } OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = x + 1 - \frac{2}{x} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 \geq 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+3}{2} = 1 \Rightarrow (1, 0) \\ x = \frac{-1-3}{2} = -2 \Rightarrow (-2, 0) \end{cases}$$

$$\text{Corte con } OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 + 1 - \frac{2}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow \text{Asíntota vertical en } x = 0$$

b)

Asíntota vertical en $x = 0$

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + 1 - \frac{2}{x} \right) = \infty + 1 - \frac{2}{\infty} = \infty + 1 - 0 = \infty \Rightarrow \text{No existe asíntota horizontal cuando } x \rightarrow \infty$$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 1 - \frac{2}{x} \right) = -\infty + 1 - \frac{2}{-\infty} = -\infty + 1 - 0 = -\infty \Rightarrow \text{No existe asíntota horizontal cuando } x \rightarrow -\infty$$

Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1 - \frac{2}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = 1 + \frac{1}{-\infty} - \frac{2}{\infty} = 1 + 0 - 0 = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 1 - \frac{2}{x} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right) = 1 - \frac{2}{-\infty} = 1 - 0 = 1$$

Existe asíntota oblicua, $y = x + 1$, cuando $x \rightarrow -\infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1 - \frac{2}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = 1 + \frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty} = 1 + 0 - 0 = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + 1 - \frac{2}{x} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right) = 1 - \frac{2}{\infty} = 1 - 0 = 1$$

Existe asíntota oblicua, $y = x + 1$, cuando $x \rightarrow \infty$

Continuación del Ejercicio 3

c)

$$f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 + 2}{x^2} \Rightarrow x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-2} \Rightarrow \text{Sin solución}$$

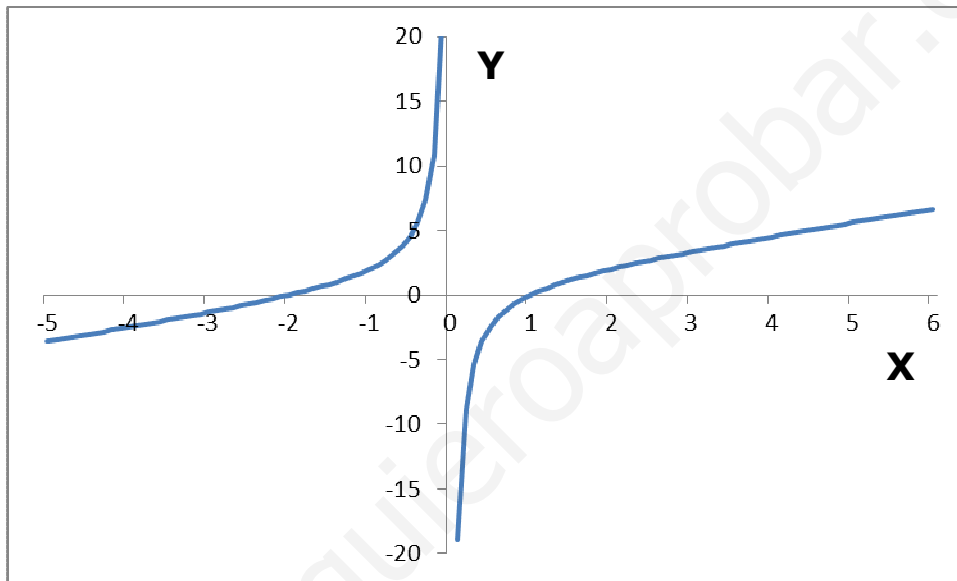
$$\text{Creciente} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 2}{x^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R} \\ x^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R} \end{cases}$$

$x^2 > 0$	(+)
$x^2 + 2 > 0$	(+)
Solución	(+)

Crecimiento $\forall x \in \mathfrak{R} / (x < 0) \cup (x > 0)$

No hay máximos ni mínimos relativos

d)



Ejercicio 4. [2'5 puntos] Calcula el área de la región del plano limitada por la gráfica de la parábola de ecuación $y = x^2 + 4x + 2$, el eje de abscisas y las rectas de ecuaciones $x = 1$ y $x = 3$.

$$\text{Puntos de corte con OX} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 8 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-4 + 2\sqrt{2}}{2} = -2 + \sqrt{2} \\ x = \frac{-4 - 2\sqrt{2}}{2} = -2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 + \sqrt{2} \notin (1, 3) \\ -2 - \sqrt{2} \notin (1, 3) \end{cases} \Rightarrow 2 \in (1, 3) \Rightarrow y(2) = 2^2 + 4 \cdot 2 + 2 = 4 + 8 + 2 = 14 > 0 \Rightarrow \text{Positivo}$$

$$A = \int_1^3 (x^2 + 4x + 2) dx = \frac{1}{3} \cdot [x^3]_1^3 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_1^3 + 2 \cdot [x]_1^3 = \frac{1}{3} \cdot (3^3 - 1^3) + 2 \cdot (3^2 - 1^2) + 2 \cdot (3 - 1) = \frac{26}{3} + 2 \cdot 8 + 4 = 20 + \frac{26}{3} = \frac{86}{3} u^2$$