ENUNCIADOS DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS EN 2013 EN MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES.

EJERCICIO 1

a) (5 puntos) Racionalice las expresiones $\dfrac{5}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}$ y $\dfrac{3}{\sqrt{18}}$.

b) (5 puntos) Halle el conjunto de soluciones de la inecuación $-5\cdot(x+8)\geq\dfrac{(10+5x)}{3}$.

EJERCICIO 2

a) (5 puntos) Calcule la derivada de la función $f(x)=\dfrac{(x^3+5x^2+6x-1)}{x+1}$.

b) (5 puntos) Durante 8 años, un capital ha estado depositado en un banco con un interés compuesto del 3%, siendo el capital final obtenido en estos 8 años de 8000 euros, calcule el capital inicial que se depositó en el banco. Calcule los intereses producidos durante los dos primeros años.

EJERCICIO 3

a) (5 puntos) En una progresión aritmética, sabemos que el primer término es igual a 100 y el octavo es igual a 128, halle la diferencia de la progresión y la suma de los 30 primeros términos.

b) (5 puntos) Calcule la derivada de la función $f(x)=\ln(x^3)+\sqrt{x^4-3x^2+8}$.

EJERCICIO 4

Tomamos un grupo de 4 ordenadores, en los que estudiamos la velocidad y la memoria, obteniendo los resultados

X=Memoria	39	38.5	38	36.5
Y=Velocidad	100	90	80	65

a) (6 puntos) Obtenga la ecuación de la recta de regresión de *Y* sobre *X*. ¿Cuál es la velocidad de un ordenador cuya memoria es 37.5?

b) (4 puntos) Calcule el coeficiente de correlación lineal e interprete su valor.

EJERCICIO 5

a) (5 puntos) Un cajón contiene 10 piezas, de las cuales, 4 son tornillos, 3 son tuercas y 3 son púas. Se extraen dos piezas al azar sin reemplazamiento. Halle la probabilidad de que la primera pieza sea una tuerca. Halle la probabilidad de sacar 2 tuercas.

b) (5 puntos) Estudie la continuidad y derivabilidad, en el punto $x = 4$, de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 8 & \text{si} \quad x < 4 \\ -x^2 + 9x - 20 & \text{si} \quad x \geq 4 \end{cases}$$

EJERCICIO 6

La vida útil de un modelo de pila sigue una ley Normal con una media de 100 horas y desviación típica de 10 horas:

a) (5 puntos) ¿Qué porcentaje de este modelo de pila tendrá una duración inferior a 120 horas?

b) (5 puntos) Halle la probabilidad de que una pila de este modelo elegida al azar, tenga una duración comprendida entre 90 y 110 horas.

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS DE 2013

EJERCICIO 1

a) (5 puntos) **Racionalice las expresiones** $\frac{5}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}$ y $\frac{3}{\sqrt{18}}$.

$$\frac{5}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}=\frac{5\cdot\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{8}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)}=\frac{5\cdot\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{8}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{5\cdot\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)}{8-3}=\frac{5\cdot\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)}{5}=$$

$$=\sqrt{8}+\sqrt{3}=\sqrt{2^3}+\sqrt{3}=2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

$$\frac{3}{\sqrt{18}}=\frac{3\cdot\sqrt{18}}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{18}}=\frac{3\cdot\sqrt{18}}{\sqrt{18^2}}=\frac{3\cdot\sqrt{2\cdot 3^2}}{18}=\frac{3\cdot 3\cdot\sqrt{2}}{18}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) (5 puntos) **Halle el conjunto de soluciones de la inecuación**

$$-5\cdot(x+8)\geq\frac{(10+5x)}{3}.$$

$$-5\cdot(x+8)\geq\frac{(10+5x)}{3}\rightarrow -15\cdot(x+8)\geq(10+5x)\rightarrow -15x-120\geq 10+5x\rightarrow$$

$$\rightarrow -15x-5x\geq 10+120\rightarrow -20x\geq 130\rightarrow\frac{-20x}{-20}\leq\frac{130}{-20}\rightarrow x\leq-\frac{13}{2}$$

El conjunto de soluciones de la inecuación es el constituido por todos los números reales menores o iguales que -6.5 lo que también se puede expresar así

$$(-\infty,\,-6.5].$$

EJERCICIO 2

a) (5 puntos) **Calcule la derivada de la función** $f(x)=\frac{\left(x^3+5x^2+6x-1\right)}{x+1}$.

Aplicando la regla de derivación de un cociente

$$f'(x)=\frac{\left(3x^2+10x\ \ +6\right)\cdot(x+1)-1\cdot\left(x^3+5x^2+6x-1\right)}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{3x^3+10x^2+6x+3x^2+10x+6-x^3-5x^2-6x+1}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{2x^3+8x^2+10x+7}{(x+1)^2}$$

b) (5 puntos) **Durante 8 años, un capital ha estado depositado en un banco con un interés compuesto del 3%, siendo el capital final obtenido en estos 8 años de 8000 euros, calcule el capital inicial que se depositó en el banco. Calcule los intereses producidos durante los dos primeros años.**

Utilizando la fórmula del interés compuesto $C_t=C_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^t$, donde C_t es el capital final al cabo de t años, C_0 es el capital inicial, r es el rédito anual y t es el tiempo transcurrido, en años,

$$8000=C_0\left(1+\frac{3}{100}\right)^8\rightarrow C_0=\frac{8000}{(1.03)^8}\cong\frac{8000}{1.26677}\cong 6315.27\text{ euros.}$$

El interés obtenido al finalizar el primer año se puede obtener considerando interés simple,

$$i=\frac{C_0\cdot r\cdot t}{100}\rightarrow i=\frac{6315.27\cdot 3\cdot 1}{100}\cong 189.46$$

Por tanto al final del 1º año el capital obtenido sería 6315.27+189.46=6504.73.
Procediendo de forma similar para el 2º año se obtendría el siguiente interés

$$i=\frac{6504.73\cdot 3\cdot 1}{100}\cong 195.14$$

En conclusión, interés producido al finalizar el 1º año: 189.46, interés producido durante el 2º año 195.14, interés total producido en los dos primeros años 189.46+195.14=384.60.

El capital obtenido al finalizar los dos primeros años sería 6315.27+384.60=6699.87, cantidad que podría haberse obtenido utilizando interés compuesto a dos años.

EJERCICIO 3

a) (5 puntos) **En una progresión aritmética, sabemos que el primer término es igual a 100 y el octavo es igual a 128, halle la diferencia de la progresión y la suma de los 30 primeros términos.**

En una progresión aritmética $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$.

Entonces,

$$a_8 = a_1 + (8-1)\cdot d \rightarrow 128 = 100 + 7\cdot d \rightarrow 128 - 100 = 7\cdot d \rightarrow d = \frac{28}{7} = 4$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} \rightarrow S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30})\cdot 30}{2}$$

Calculando $a_{30} = 100 + 29\cdot 4 = 216$ y sustituyendo en la expresión anterior de la suma

$$S_{30} = \frac{(100+216)\cdot 30}{2} = 4740.$$

b) (5 puntos) **Calcule la derivada de la función** $f(x) = \ln\left(x^3\right) + \sqrt{x^4 - 3x^2 + 8}.$

Se trata de derivar una suma en la que el 1º sumando es una función logaritmo neperiano y el 2º una raíz cuadrada,

$$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3} + \frac{4x^3 - 6x}{2\sqrt{x^4 - 3x^2 + 8}} = \frac{3}{x} + \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 8}}.$$

EJERCICIO 4

Tomamos un grupo de 4 ordenadores, en los que estudiamos la velocidad y la memoria, obteniendo los resultados

***X*=Memoria**	**39**	**38.5**	**38**	**36.5**
***Y*=Velocidad**	**100**	**90**	**80**	**65**

a) (6 puntos) Obtenga la ecuación de la recta de regresión de *Y* sobre *X*. ¿Cuál es la velocidad de un ordenador cuya memoria es 37.5?

La ecuación de la recta de regresión de Y sobre X tiene por expresión

$$y-\bar{y}=r\frac{s_y}{s_x}\left(x-\bar{x}\right) \text{, ó también } y-\bar{y}=\frac{s_{xy}}{s_x^2}\left(x-\bar{x}\right)$$

donde r es el coeficiente de correlación lineal, que viene definido así $r=\dfrac{s_{xy}}{s_x s_x}$,

$s_{xy}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i-\bar{x}\cdot\bar{y}$ es la covarianza, $s_x^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\bar{x}^2$ es la varianza de la variable X,

s_x, desviación típica de la variable X, es la raíz cuadrada de la varianza s_x^2, y, por último, $\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ es la media aritmética de la variable X.

En la tabla siguiente se disponen los cálculos previos necesarios para la determinación de los parámetros anteriores:

X	Y	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
39	100	1521	10000	3900
38.5	90	1482.25	8100	3465
38	80	1444	6400	3040
36.5	65	1332.25	4225	2372.5
152	**335**	**5779.25**	**28725**	**12777.5**

$$\bar{x}=\frac{152}{4}=38\,; \quad \bar{y}=\frac{335}{4}=83.75\,; \quad s_x^2=\frac{5779.25}{4}-38^2=1444.875-1444=0.875$$

$$s_x=\sqrt{0.875}\cong 0.935\,; \quad s_y^2=\frac{28725}{4}-83.75^2=7181.25-7014.0625\cong 167.19\,;$$

$$s_y=\sqrt{167.19}\cong 12.93\,; \quad s_{xy}=\frac{12777.5}{4}-38\cdot 83.75=3194.375-3182.5=11.875$$

La ecuación de la recta de regresión de Y sobre X es

$$y-83.75=\frac{11.875}{0.875}\left(x-38\right)$$

o en forma explícita $y=13.57x-431.91$.

La recta obtenida nos permite estimar el valor de la variable Y (velocidad) para valores de la variable X (memoria).

En concreto, para una memoria de 37.5 la velocidad estimada según el modelo anterior sería

$$y=508.875-431.91=76.965$$

b) (4 puntos) **Calcule el coeficiente de correlación lineal e interprete su valor.**

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_x} = \frac{11.875}{0.935 \cdot 12.93} = \frac{11.875}{12.08955} \cong 0.9822$$

Del valor del coeficiente de correlación lineal hay que tener en cuenta dos aspectos: su signo y su valor absoluto (el recorrido de valores de *r* va desde -1 a +1).

El signo nos indica si la relación es directa (al aumentar una variable la otra también lo hace) ó inversa (si aumenta una variable la otra disminuye) pero no nos indica si la relación es intensa o débil.

La relación entre las dos variables, directa o inversa, es más fuerte cuanto más próximo a 1 es el valor absoluto de *r* y más débil cuanto más se acerque a 0.

En nuestro caso se trata de una relación lineal directa (a más memoria más velocidad) muy intensa.

EJERCICIO 5

a) (5 puntos) **Un cajón contiene 10 piezas, de las cuales, 4 son tornillos, 3 son tuercas y 3 son púas. Se extraen dos piezas al azar sin reemplazamiento. Halle la probabilidad de que la primera pieza sea una tuerca. Halle la probabilidad de sacar 2 tuercas.**

Teniendo en cuenta que hay 10 piezas y, de ellas 3 son tuercas, la probabilidad de que la primera pieza extraída sea una tuerca es el cociente $\frac{3}{10} = 0.3$.

Se pueden formar $C_{10,2} = 45$ parejas posibles con las 10 piezas, extrayendo una y después otra y observando la composición de la pareja obtenida. De esas 45 parejas, $C_{3,2} = 3$ estarían constituidas por 2 tuercas; en consecuencia, la probabilidad de que las dos piezas extraídas sean tuercas es el cociente $\frac{3}{45} = \frac{1}{15} \cong 0.067$

b) (5 puntos) **Estudie la continuidad y derivabilidad, en el punto *x* = 4, de la función**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 8 & \text{si} \quad x < 4 \\ -x^2 + 9x - 20 & \text{si} \quad x \geq 4 \end{cases}$$

Para que la función sea continua en $x = 4$ debe cumplirse que

$$\underset{x \to 4}{lím}\ f(x) = f(4)$$

$$f(4) = -(4)^2 + 9 \cdot 4 - 20 = -16 + 36 - 20 = 0$$

$$\underset{x \to 4^-}{lím}\ f(x) = (4)^2 - 6 \cdot 4 + 8 = 0$$

$$\underset{x \to 4^+}{lím}\ f(x) = -(4)^2 + 9 \cdot 4 - 20 = 0 \,.$$

Por tanto la función dada es continua en $x = 4$.

La función derivada de la función dada es $f'(x) = \begin{cases} 2x - 6 & \text{si} \quad x < 4 \\ -2x + 9 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$

Para que la función sea derivable en $x = 4$ debe cumplirse que

$f'(4^-) = f'(4^+)$.

En caso de cumplirse la igualdad, éste sería el valor de $f'(4)$.

$$f'(4^-) = \underset{x \to 4^-}{lím}\ f'(x) = 2 \cdot 4 - 6 = 2$$

$$f'(4^+) = \underset{x \to 4^+}{lím}\ f'(x) = -2 \cdot 4 + 9 = 1$$

En conclusión, existen derivadas laterales en $x = 4$ pero como son distintas la función no es derivable en $x = 4$.

EJERCICIO 6

La vida útil de un modelo de pila sigue una ley Normal con una media de 100 horas y desviación típica de 10 horas:
a) (5 puntos) ¿Qué porcentaje de este modelo de pila tendrá una duración inferior a 120 horas?

Sea X la variable aleatoria "duración de una pila".

El enunciado dice que esa variable aleatoria X sigue una distribución Normal, $N(100,10)$.

Si X sigue una ley Normal con esos parámetros, media 100 y desviación típica 10, la variable $Z = \dfrac{X - 100}{10}$ sigue una ley Normal de media 0 y desviación típica 1, cuyas probabilidades están tabuladas.

La probabilidad de que una pila, elegida al azar, de entre las de ese modelo tenga una duración inferior a 120 horas se puede expresar así:

$$P(X < 120) = P(\frac{X - 100}{10} > \frac{120 - 100}{10}) = P(Z < 2) = 0.9772.$$

En consecuencia, según este modelo, el 97.72% de las pilas tendría una duración inferior a 120 horas.

b) (5 puntos) **Halle la probabilidad de que una pila de este modelo elegida al azar, tenga una duración comprendida entre 90 y 110 horas.**

La expresión matemática de la pregunta formulada es:

$$P(90 \le X \le 110) = P\left(\frac{90 - 100}{10} \le \frac{X - 100}{10} \le \frac{110 - 100}{10}\right) = P(-1 \le Z \le 1) =$$

$$= P(Z \le 1) - P(Z \le -1) = P(Z \le 1) - \left[1 - P(Z \le 1)\right] = 0.8413 - (1 - 0.8413) = 0.6826.$$