UNIDAD 1

Actividades de final de unidad

Ejercicios básicos

1. *La ecuación de un M.A.S., en unidades del SI, es:*

$$x = 0{,}10 \sin\left(10\,t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Calcula la velocidad en t = 0.

La velocidad es $v = \dfrac{dx}{dt} = 0{,}10 \cdot 10 \cos\left(10\,t + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(10\,t + \dfrac{\pi}{2}\right)$

Si $t = 0$, $v_0 = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

2. *La ecuación de un movimiento armónico simple es x = 0,030 cos (600 t + π/2), en unidades del SI. Establece el periodo del mismo y, para t = 0, la posición y la velocidad de la partícula.*

La ecuación general del M.A.S. es: $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$. Si la comparamos con la del enunciado:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}\ \text{rad};\quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 600\ \text{rad s}^{-1} \ \Rightarrow\ T = \frac{2\pi}{600} = 0{,}010\ \text{s}$$

La posición inicial es: $x_0 = 0{,}030\cos\left(600 \cdot 0 + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

La velocidad de la partícula es:

$$v = \frac{dx}{dt} = -0{,}030 \cdot 600 \sin\left(600\,t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Si $t = 0$, $v_0 = -0{,}030 \cdot 600 \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -18\ \text{m s}^{-1}$

3. *Establece la ecuación del movimiento de una partícula que describe un M.A.S. cuyo periodo es de 2 s, sabiendo que en el instante inicial tiene velocidad nula y se encuentra a 6 cm a la derecha de la posición de equilibrio.*

Del enunciado se deduce: $T = 2$ s y $A = 0{,}06$ m, puesto que, en el instante en que la velocidad es nula, la partícula se encuentra en uno de los extremos de su oscilación: $x = \pm A$.

A partir de la ecuación general del M.A.S. podemos escribir: $x = A\sin(\omega t + \varphi_0) = 0{,}06\sin(\pi t + \varphi_0)$

Para establecer la *fase inicial* (φ_0), se tiene en cuenta que la posición inicial es 0,06 m:

$$x_0 = 0{,}06\ \text{m} = 0{,}06\sin(\pi \cdot 0 + \varphi_0) = 0{,}06\sin\varphi_0$$

de donde se tiene $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$ rad. Por tanto, la ecuación solicitada es, en unidades del SI,

$$x = 0{,}06\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}06\cos\pi t$$

4. *Una partícula inicia un movimiento armónico simple en el extremo de su trayectoria y tarda 0,10 s en ir al centro de la misma. Si la distancia entre ambas posiciones es 0,20 m, calcula: a) el periodo del movimiento y su frecuencia; b) la pulsación; c) la posición de la partícula 1 s después de iniciar el movimiento.*

a) Los 0,10 s que invierte en ir de un extremo al punto de equilibrio (centro de la trayectoria) es la cuarta parte del tiempo que tarda en describir una oscilación completa; por tanto, el periodo del movimiento es 0,40 s. La frecuencia es:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}40\ \text{s}} = 2{,}5\ \text{Hz}$$

b) La pulsación ω es: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f = 2\pi\ \text{rad} \cdot 2{,}5\ \text{s}^{-1} = 5{,}0\pi\ \text{rad s}^{-1}$

c) Como $f = 2{,}5$ Hz, al cabo de 1 s la partícula ha descrito 2,5 oscilaciones y se encuentra en el otro extremo de su trayectoria. Este resultado también se puede deducir por cálculo, a partir de la ecuación del movimiento; teniendo en cuenta que a $t = 0$, $x = A$, dicha ecuación es:

$$x = A\cos\omega t = A\cos(5{,}0\,\pi \cdot 1) = A\cos 5\pi = -A$$

es decir, a 20 cm de la posición de equilibrio.

5. *La velocidad de una partícula que describe un M.A.S. puede calcularse por la ecuación:* $v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$. *Comprueba que, dimensionalmente, es correcta.*

Las dimensiones de las magnitudes que intervienen en la ecuación son:

$$[v] = L\,T^{-1};\ \ [\omega] = T^{-1};\ \ [A] = L;\ \ [x] = L$$

Si sustituimos en el miembro de la derecha de la ecuación:

$$\omega\sqrt{A^2 - x^2} = T^{-1}\sqrt{L^2 - L^2} = L\,T^{-1}$$

con lo que se comprueba que la ecuación es dimensionalmente correcta.

6. *Un cuerpo describe un movimiento armónico simple entre dos puntos de una recta. Entre estos dos puntos, la distancia es de 10 cm. El tiempo que tarda en ir del uno al otro es de 1,0 s. Calcula la máxima velocidad del cuerpo.*

La *amplitud* del movimiento es $\frac{10}{2}$ cm y su *periodo* (tiempo que tarda en describir una *oscilación completa*) es: 1,0 s + 1,0 s = 2,0 s.

La velocidad del M.A.S. es:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0);\ \ v = \frac{dx}{dt} = A\,\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

cuyo valor máximo es $v_{máx} = \pm A\omega$. En este ejercicio:

$$|v_{máx}| = \frac{10\text{ cm}}{2} \cdot \frac{2\pi\text{ rad}}{2{,}0\text{ s}} = 5{,}0\pi\text{ cm s}^{-1} = 0{,}16\text{ m s}^{-1}$$

7. *Un camión llega al inicio de una pendiente con una determinada velocidad. En este momento se le para el motor, pero sube la rampa hasta llegar a la zona más alta, en la que se detiene. Si se supone que en todo el trayecto no hay rozamientos, indica cuál de las siguientes frases es correcta (y justifica la elección):*

a) Tiene más energía en el punto A.

b) Tiene más energía en el punto B.

c) Tiene igual energía en ambos puntos.

d) Ninguna es correcta.

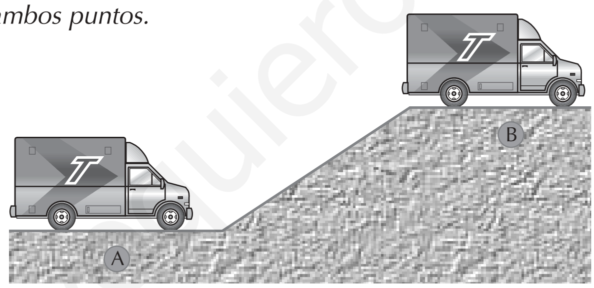


Fig. 1.37

La respuesta correcta es la *c*. Las fuerzas que actúan sobre el camión son su peso y la normal de contacto con el suelo. La primera es conservativa, mientras que la segunda no realiza trabajo, ya que es perpendicular al desplazamiento. Por tanto, según el *teorema de conservación de la energía mecánica,* la energía mecánica del camión es la misma en *A* y en *B*. Es un ejemplo de conversión de *energía cinética* en *energía potencial gravitatoria*.

8. *Un cuerpo de masa 1,4 kg se conecta a un muelle de constante elástica 15 N m⁻¹ y el sistema oscila tal como indica la figura 1.38. La amplitud del movimiento es de 2,0 cm. Calcula:*

a) La energía total del sistema.

b) Las energías cinética y potencial cuando el cuerpo pasa por el punto P, que dista 1,3 cm del punto de equilibrio.

c) La velocidad máxima del cuerpo y la que tiene cuando pasa por P.

d) La fuerza ejercida por el muelle en el instante que el cuerpo pasa por P.

e) El periodo de las oscilaciones.

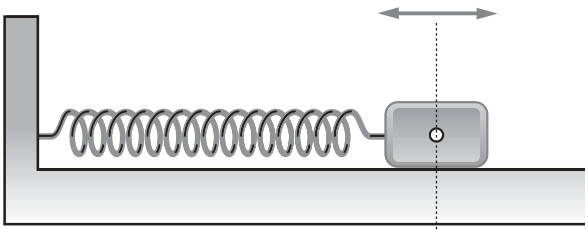


Fig. 1.38

a) En el *oscilador armónico,* la energía mecánica es constante:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}\, m\, v^2 + \frac{1}{2}\, kx^2 = \frac{1}{2}\, m\, v^2_{\text{máx}} = \frac{1}{2}\, kA^2$$

De los datos del enunciado (k y A):

$$E_m = \frac{1}{2}\, kA^2 = \frac{1}{2}\, 15\, \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (2{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m})^2 = 3{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{J} = 3{,}0\ \text{mJ}$$

b) Si $x = 1{,}3$ cm:

$$E_p = \frac{1}{2}\, kx^2 = \frac{1}{2}\, 15\, \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (1{,}3 \cdot 10^{-2}\ \text{m})^2 = 1{,}3 \cdot 10^{-3}\ \text{J} = 1{,}3\ \text{mJ}$$

$$E_m = E_c + E_p \Rightarrow E_c = E_m - E_p = 3{,}0\ \text{mJ} - 1{,}3\ \text{mJ} = 1{,}7\ \text{mJ}$$

c) La velocidad se puede calcular a partir de la energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2}\, m\, v^2;\quad v = \sqrt{\frac{2\, E_c}{m}}$$

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{J}}{1{,}4\ \text{kg}}} = 6{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{m s}^{-1} = 6{,}5\ \text{cm s}^{-1};\quad v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-3}\ \text{J}}{1{,}4\ \text{kg}}} = 4{,}9 \cdot 10^{-2}\ \text{m s}^{-1}$$

d) $|F| = k\,|x| = 15\ \text{N m}^{-1} \cdot 1{,}3 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 0{,}20\ \text{N}$

e) El periodo viene dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{1{,}4\ \text{kg}}{15\ \text{N/m}}} = 1{,}9\ \text{s}$$

9. *Un cuerpo de 2,5 kg se deja caer desde una altura de 90 cm sobre un muelle vertical de $k = 2\,290$ N m^{-1}. Calcula la máxima compresión del resorte.*

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son: su peso y la ejercida por el muelle. Al ser ambas conservativas, la energía mecánica se conserva: $\Delta E_c + \Delta E_p = 0$.

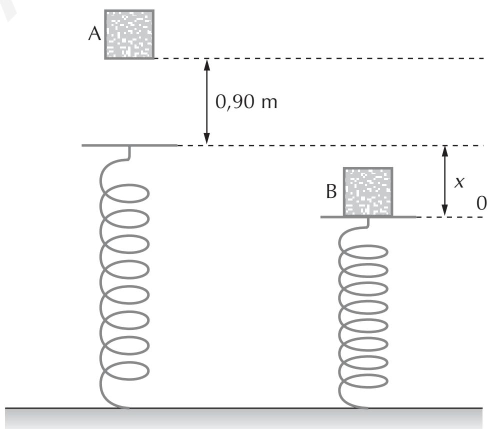
El problema puede abordarse considerando el proceso global en dos etapas:

- La primera se refiere al movimiento del cuerpo desde el punto inicial hasta el contacto con el muelle.
- La segunda es la compresión del muelle.

No obstante, también puede resolverse tomando como punto inicial el punto *A* (ver figura), mientras que *B* es el punto final. En este caso,

$$\Delta E_c = E_{c_B} - E_{c_A} = 0 - 0 = 0$$

$$\Delta E_p = \Delta E_{p_{\text{gravitatoria}}} + \Delta E_{p_{\text{elástica}}} = m\, g\, (h_B - h_A) + \left(\frac{1}{2}\, k\, x_B^2 - \frac{1}{2}\, k\, x_A^2\right)$$



Los términos x_A y x_B se refieren a los valores de la *deformación* del resorte en las posiciones *A* y *B,* respectivamente: $x_A = 0$, $x_B = x$.

Si se toma el nivel 0 de alturas de la figura:

$$h_B = 0;\ h_A = x + 0{,}90\ \text{m}$$

(x, por tanto, es un valor *positivo*).

Sustituyendo estos valores:

$$\Delta E_{p_{\text{gravitatoria}}} = 2{,}5\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m s}^{-2} \cdot [0 - (0{,}90 + x)]\ \text{m} = -24{,}5\ (0{,}90 + x)\ \text{J}$$

$$\Delta E_{p_{\text{elástica}}} = \frac{1}{2}\ 2\,290\ \frac{\text{N}}{\text{m}}\ x^2 = 1\,145\ x^2\ \text{J}$$

Como la energía mecánica se conserva:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \ \Rightarrow\ \Delta E_p = 0 \ \Rightarrow\ 1\,145\ x^2 - 24{,}5\ (0{,}90 + x) = 0$$

Esta ecuación de segundo grado tiene dos soluciones: una negativa (que no tiene sentido físico) y otra positiva: $x = 0{,}15$ m. En definitiva, la máxima compresión del resorte es 15 cm.

10. *El cuerpo de la figura 1.39, de 2,0 kg de masa, comprime 30 cm el muelle ($k = 1\,000$ N m^{-1}). Dicho cuerpo se suelta y sale disparado hacia la derecha. Calcula hasta qué altura subirá en la pendiente, si no se tiene en consideración el rozamiento.*

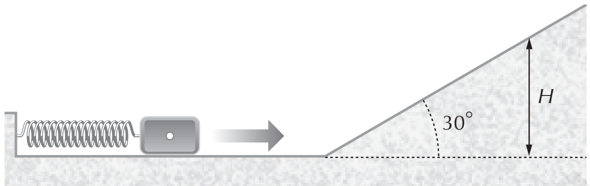


Fig. 1.39

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son: su peso, la elástica del muelle y la fuerza normal ejercida por el suelo. Las dos primeras son conservativas; la normal es perpendicular al desplazamiento y, por tanto, no realiza trabajo. En definitiva, *la energía mecánica del cuerpo se conserva,* es constante en todo su recorrido, desde que se suelta (posición inicial) hasta que se detiene en la altura H (posición final).

Aplicando la conservación de la energía mecánica entre estos dos puntos:

$$\Delta E_m = 0 = \Delta E_c + \Delta E_p$$

$$\Delta E_c = 0; \qquad \Delta E_p = \Delta E_p\ (\text{elástica}) + \Delta E_p\ (\text{gravitatoria})$$

$$\Delta E_p\ (\text{gravitatoria}) = m\ g\ \Delta H = 2{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m s}^{-2}\ H$$

$$\Delta E_p\ (\text{elástica}) = 0 - \frac{1}{2}\ 1\,000\ \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0{,}30\ \text{m})^2 = -45\ \text{J}$$

Por tanto,

$$\Delta E_m = 0 = \Delta E_c + \Delta E_p = 19{,}6\ H - 45$$

de donde se tiene $H = 2{,}3$ m.

Nota: el ángulo de inclinación de la pendiente no influye en la altura máxima que alcanza el cuerpo (si no hay rozamientos).

11. *Si un reloj de péndulo adelanta, ¿se debe aumentar o disminuir la longitud del péndulo para corregirlo? Razona la respuesta.*

Un reloj de péndulo adelanta si su *periodo es menor* que el que le correspondería (pues realiza sus oscilaciones en menos tiempo que el que invierte un reloj que está perfectamente ajustado y, por eso, «se adelanta»). Para corregirlo, de acuerdo con la ecuación del periodo del péndulo simple,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{|\vec{g}|}}$$

se debe aumentar su periodo, lo cual se consigue aumentando su longitud.

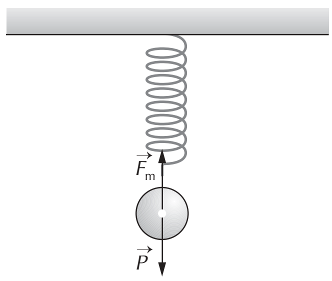
12. *Una masa, cuando cuelga de un muelle vertical, produce en este un alargamiento de 2,0 cm. Si se estira la masa hasta colocarla 5,0 cm por debajo de la posición de equilibrio y se suelta, ¿con qué frecuencia oscilará?*

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son: su peso y la fuerza elástica ejercida por el resorte. En la situación *estática,* estas dos fuerzas son de igual magnitud:

$$k\ |d| = m\ |\vec{g}\,|$$

La frecuencia de las oscilaciones de una masa m que se mueve colgada de un muelle de constante elástica k viene dada por:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$



Según la primera ecuación, $\dfrac{k}{m} = \dfrac{|\vec{g}|}{|d|}$; por tanto,

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{|\vec{g}|}{|d|}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9{,}8 \text{ m s}^{-2}}{0{,}020 \text{ m}}} = 3{,}5 \text{ Hz}$$

Nota: la amplitud de las oscilaciones no se precisa para resolver el ejercicio: la frecuencia es independiente de la amplitud.

Ejercicios de consolidación

1. *¿En un M.A.S. el módulo de la aceleración coincide con el de la elongación, expresadas en el mismo sistema de unidades. ¿Cuánto vale el periodo?*

La aceleración de un M.A.S. es $a = \dfrac{-kx}{m} = -\omega^2 x$. De acuerdo con el enunciado, y utilizando las unidades del Sistema Internacional (SI):

$$\omega^2 x = x \Rightarrow \omega^2 = 1,\ \omega = \frac{2\pi}{T} = 1,\ T = 2\pi \text{ s}$$

2. *Suponiendo que el movimiento de una aguja de una máquina de coser es armónico simple, de amplitud 0,30 cm y frecuencia 10 Hz, calcula su velocidad después de 1/60 s de pasar por el centro de la trayectoria.*

Si para $t = 0$ la aguja pasa por el punto central de su trayectoria ($y = 0$), la ecuación que describe su movimiento es, en unidades del SI:

$$y = A \sin \omega t = 0{,}30 \cdot 10^{-2} \sin (2\pi \cdot 10\ t)$$

y su velocidad, $v = \dfrac{dy}{dt} = 0{,}30 \cdot 10^{-2} \cdot 20\pi \cdot \cos (20\pi\ t)$

Al cabo de $\dfrac{1}{60}$ s:

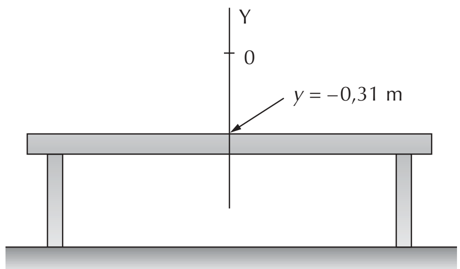
$$v = 0{,}30 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 20\pi \text{ s}^{-1} \cdot \cos\left(20\pi \cdot \frac{1}{60}\right) = 0{,}094 \text{ m s}^{-1} = 9{,}4 \text{ cm s}^{-1}$$

Por tanto, $\dfrac{1}{60}$ s después de que la aguja pase por el centro de su trayectoria, la velocidad será de $\pm 9{,}4$ cm s^{-1}.

3. *Una pelota de masa m está botando sobre una mesa, efectuando choques perfectamente elásticos y alcanzando una altura de 0,31 m sobre ella cada vez. Para este movimiento periódico:*

a) Establece su frecuencia.

b) Discute si es un movimiento armónico simple.



a) El movimiento de descenso y de subida de la pelota es de caída libre; además, el tiempo que tarda en bajar es el mismo que el que invierte en subir. En caer tarda:

$$y = y_0 + v_0\ t + \frac{1}{2}\ at^2$$

$$-0{,}31 \text{ m} = 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2}\ (-9{,}8 \text{ m s}^{-2})\ t^2 \Rightarrow t = 0{,}25 \text{ s}$$

El periodo (tiempo que tarda en describir una oscilación completa) es 0,50 s y su frecuencia:

$$\frac{1}{0{,}50 \text{ s}} = 2{,}0 \text{ Hz}$$

b) No es un M.A.S., ya que la fuerza que actúa sobre la pelota es constante (su peso), mientras que la característica del movimiento vibratorio armónico es que la fuerza resultante depende de la posición del móvil respecto de la posición central de su trayectoria.

4. *Una masa de 20 g oscila con un M.A.S. de 5,0 cm de amplitud. Cuando la elongación es de 3,0 cm, la celeridad es de 10 cm s^{-1}. Calcula el periodo de este movimiento y la velocidad máxima que alcanza la partícula.*

Por consideraciones energéticas se puede establecer el valor de la constante elástica *k:*

$$E_m = \frac{1}{2}\ kA^2 = \frac{1}{2}\ m\ v^2 + \frac{1}{2}\ k\ x^2$$

$$\frac{1}{2}\ k\ (0{,}050 \text{ m})^2 = \frac{1}{2}\ 20 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot (0{,}10 \text{ m s}^{-1})^2 + \frac{1}{2}\ k \cdot (0{,}030 \text{ m})^2$$

de donde se tiene $k = 0{,}125\ \mathrm{Nm}^{-1}$.

El periodo es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{20 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}}{0{,}125\ \mathrm{N/m}}} = 2{,}5\ \mathrm{s}$$

La velocidad máxima se deduce a partir de la expresión general del M.A.S.:

$$x = A \sin \omega t;\ v = A\omega \cos \omega t;\ v_{\text{máx}} \text{ corresponde a } \cos \omega t = \pm 1; \text{ por tanto: } v_{\text{máx}} = \pm A\omega.$$

$$v_{\text{máx}} = \pm A\omega = \pm 0{,}050\ \mathrm{m}\ \frac{2\pi\ \mathrm{rad}}{2{,}5\ \mathrm{s}} = \pm 0{,}13\ \mathrm{m\ s^{-1}} = \pm 13\ \mathrm{cm\ s^{-1}}$$

O bien: como $E_m = \frac{1}{2}\ k\,A^2 = \frac{1}{2}\ m\ v^2_{\text{máx}}$

$$\frac{1}{2} \cdot 0{,}125\ \mathrm{N \cdot m^{-1}} \cdot (0{,}050\ \mathrm{m})^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg} \cdot v^2_{\text{máx}}$$

de donde se obtiene que $v_{\text{máx}} = \pm 0{,}13\ \mathrm{m\ s^{-1}}$.

5. *El asiento de un tractor está colocado sobre un resorte. Cuando se sienta un estudiante de 70 kg, la frecuencia de vibración es de 7 Hz. ¿Cuál es la frecuencia de las vibraciones si se sienta el profesor de física (m = 95 kg)?*

Si con los subíndices *e* y *p* se simbolizan las magnitudes referentes al estudiante y al profesor, respectivamente:

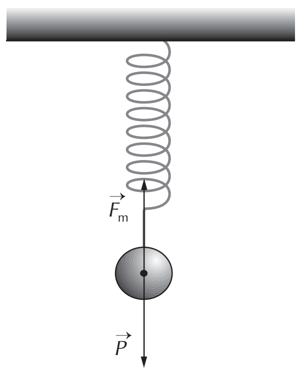
$$\left.\begin{aligned} f_{\mathrm{e}} &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_{\mathrm{e}}}} \\ f_{\mathrm{p}} &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_{\mathrm{p}}}} \end{aligned}\right\}\ \text{dividiendo: } \frac{f_{\mathrm{e}}}{f_{\mathrm{p}}} = \sqrt{\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{e}}}} \Rightarrow f_{\mathrm{p}} = 7\ \mathrm{Hz}\sqrt{\frac{70\ \mathrm{kg}}{95\ \mathrm{kg}}} = 6\ \mathrm{Hz}$$

6. *A un resorte, cuya longitud natural cuando está colgado de un punto fijo es de 40,0 cm, se le pone una masa de 50 g en su extremo libre. Cuando la masa está en la posición de equilibrio, la longitud del resorte es 45,0 cm. La masa se desplaza 6,0 cm hacia abajo y se suelta (posición P). Calcula:*

82

a) El valor de la constante elástica del resorte.

b) La aceleración del cuerpo cuando la partícula pasa a 2,0 cm por encima de P.



a) La constante elástica del muelle se puede calcular a partir de los datos del equilibrio estático:

$$|\vec{P}| = |\vec{F}_{\mathrm{m}}|; \qquad m\,|\vec{g}| = k\,|\Delta y|$$

$$k = \frac{m\,|\vec{g}|}{|\Delta y|} = \frac{50 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}8\ \mathrm{m\ s^{-2}}}{5{,}0 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}} = 9{,}8\ \mathrm{N\ m^{-1}}$$

b) La aceleración de la partícula es $a = -\omega^2\ y$. La frecuencia angular o pulsación ω es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{9{,}8\ \mathrm{N\ m^{-1}}}{50 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}}} = 14\ \mathrm{rad\ s^{-1}}$$

Cuando la partícula está 2 cm por *encima de P,* el valor de la coordenada *y* (tomando $y = 0$ en el punto de equilibrio estático) es $y = -0{,}040$ m. Por tanto,

$$a = -\omega^2\ y = -(14\ \mathrm{rad\ s^{-1}})^2 \cdot (-0{,}040\ \mathrm{m}) = 7{,}8\ \mathrm{m\ s^{-2}}$$

7. *Se sitúa verticalmente un resorte con una longitud natural de 60,0 cm y se sujeta por un extremo. Al unir una bola de 10 kg al otro extremo, quedando suspendida, se observa un alargamiento de 5,0 cm. Se provocan pequeñas oscilaciones de la bola cuyo periodo es T. A continuación se coloca el conjunto formado por la bola y el resorte sobre una mesa horizontal sin rozamiento, se fija el extremo libre y se empuja la bola, la cual describe un movimiento circular uniforme de periodo 3T. Determina, tomando g = 10 m s*$^{-2}$*:*

a) La constante recuperadora del resorte.

b) El valor del periodo T de las oscilaciones.

c) El radio de la circunferencia que describe la bola.

a) A partir de los datos del equilibrio estático se establece la constante elástica del resorte:

$$|\vec{P}| = |\vec{F}_m|; \qquad m\,|\vec{g}| = k\,|\Delta y|$$

$$k = \frac{m\,|\vec{g}|}{|\Delta y|} = \frac{10\text{ kg} \cdot 10\text{ m s}^{-2}}{5{,}0 \cdot 10^{-2}\text{ m}} = 2{,}0 \cdot 10^{3}\text{ N m}^{-1} = 2{,}0\text{ kN m}^{-1}$$

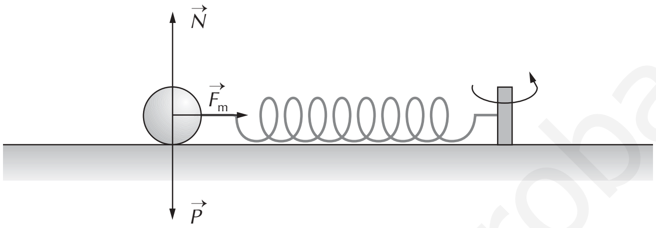
b) El periodo T es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{10\text{ kg}}{2{,}0 \cdot 10^{3}\text{ N/m}}} = 0{,}44\text{ s}$$

c) Sobre la bola actúan tres fuerzas: su peso, la normal ejercida por la mesa y la elástica debida al muelle. El peso y la normal se anulan y, por tanto, la resultante es la fuerza elástica. La resultante de un movimiento circular uniforme es la fuerza centrípeta:

$$|\vec{F}_m| = |\vec{F}_c|; \qquad k\,|\Delta x| = m\,|\vec{a}_c|$$

siendo Δx la deformación del muelle.



La aceleración centrípeta de la bola es $|\vec{a}_c| = \omega^2\,R = \left(\frac{2\pi}{3T}\right)^2 R$

La relación entre el radio R, la deformación del muelle (Δx) y la longitud natural del muelle (L_0) es:

$$R = L_0 + \Delta x$$

Por tanto, sustituyendo en la primera ecuación,

$$k\,(R - L_0) = m\,\omega^2\,R = m\left(\frac{2\pi}{3T}\right)^2 R; \qquad 2{,}0 \cdot 10^3 \cdot (R - 0{,}600) = 10\left(\frac{2\pi}{3 \cdot 0{,}44}\right)^2 R$$

de donde se tiene $R = 0{,}68$ m.

8. *La amplitud de un M.A.S. de un cuerpo de 2,0 kg es 25 cm, y su periodo, 3,0 s. Calcula:*

a) Su velocidad máxima.

b) Su aceleración máxima.

c) El valor máximo de la fuerza restauradora.

d) La energía mecánica máxima de este oscilador armónico.

e) El valor de estas cuatro magnitudes cuando la elongación es $x = 15$ cm.

a) $v_{máx} = \pm A\omega = \pm 0{,}25\text{ m} \cdot \left(\frac{2\pi}{3{,}0}\text{ s}\right) = \pm 0{,}52\text{ m s}^{-1}$

(Deducción: $x = A \sin \omega t$; $v = A\omega \cos \omega t$; $v_{máx}$ corresponde a $\cos \omega t = \pm 1$, por tanto: $v_{máx} = \pm A\omega$.)

b) $a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2\,x$

El valor máximo se tiene cuando $x = \pm A$.

$$|a_{máx}| = \omega^2\,A = \left(\frac{2\pi}{3{,}0\text{ s}}\right)^2 \cdot 0{,}25\text{ m} = 1{,}1\text{ m s}^{-2}$$

c) $F = -k\,x = m\,a$; $\quad |F_{máx}| = m\,a_{máx} = 2{,}0\text{ kg} \cdot 1{,}1\text{ m s}^{-2} = 2{,}2\text{ N}$

(Por otra parte, como $|F_{máx}| = k\,A$, la constante $k = \frac{2{,}2\text{ N}}{0{,}25\text{ m}} = 8{,}8\text{ N m}^{-1}$.)

d) La energía mecánica del oscilador armónico es constante:

$$E_m = \text{constante} = \frac{1}{2}\,m\,v_{máx}^2 = \frac{1}{2}\,2{,}0\text{ kg} \cdot (\pm 0{,}52\text{ m s}^{-1})^2 = 0{,}27\text{ J}$$

e) Teniendo en cuenta que la energía mecánica del oscilador armónico es constante,

$$E_m = \text{constante} = \frac{1}{2}\, m\, v^2 + \frac{1}{2}\, k\, x^2 = \frac{1}{2}\, k A^2$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}\,(A^2 - x^2)} = \sqrt{\frac{8{,}8 \text{ Nm}^{-1}}{2{,}0 \text{ kg}} \cdot (0{,}25^2 - 0{,}15^2)\text{ m}^2} = 0{,}42 \text{ m s}^{-1}$$

Las otras magnitudes son:

$$|a| = \omega^2\, x = \left(\frac{2\pi}{3{,}0 \text{ s}}\right)^2 \cdot 0{,}15 \text{ m} = 0{,}66 \text{ m s}^{-2}$$

$$|F| = m\,|a| = 2{,}0 \text{ kg} \cdot 0{,}66 \text{ m s}^{-2} = 1{,}3 \text{ N}$$

La energía mecánica, como es constante para el oscilador armónico, es 0,27 J.

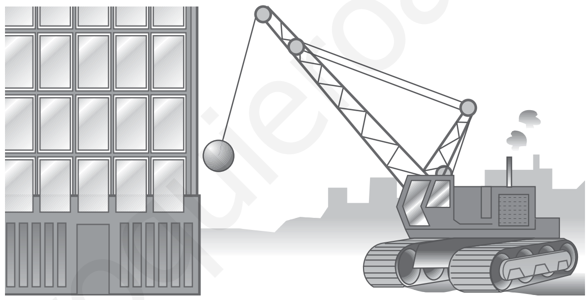
9. *Dos cuerpos de igual masa están colgados de muelles independientes de constantes k_1 y k_2, siendo $k_1 < k_2$. Ambos oscilan con igual amplitud. ¿Para qué sistema la velocidad máxima es mayor?*

La velocidad máxima viene dada por $v_{\text{máx}} = \pm A\omega$. Puesto que $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $v_{\text{máx}} = \pm A\sqrt{\frac{k}{m}}$. En definitiva,

$$\frac{v_{\text{máx}_1}}{v_{\text{máx}_2}} = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}$$

como $k_2 > k_1$, la velocidad máxima del sistema 2 es mayor que la del 1.

10. *Una bola colocada en el extremo de un cable de 9,8 m se utiliza en el derribo de edificios. Si se suelta desde un desplazamiento angular de 40°, calcula la máxima velocidad de la bola.*



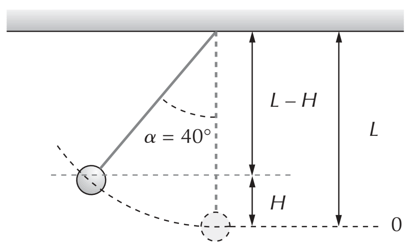
La máxima velocidad de la esfera se tiene cuando pasa por la posición vertical.

La energía mecánica de la bola se conserva, puesto que las fuerzas que actúan sobre ella son:

— Su peso: fuerza conservativa.

— La tensión de la cuerda: no realiza trabajo, pues en todo instante es perpendicular al desplazamiento.

Por tanto, la variación de energía mecánica de la bola, desde que se suelta hasta que pasa por la vertical, es nula:



$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = 0$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}\, m\, v^2_{\text{máx}} - 0 = \frac{1}{2}\, m\, v^2_{\text{máx}}$$

$$\Delta E_p = \Delta E_{p_g} = m\, g\, \Delta H = m\, g\,(0 - H)$$

La altura H se calcula por trigonometría:

$$L \cos\alpha + H = L; \qquad H = L\,(1 - \cos\alpha)$$

Sustituyendo en la ecuación de conservación de la energía mecánica:

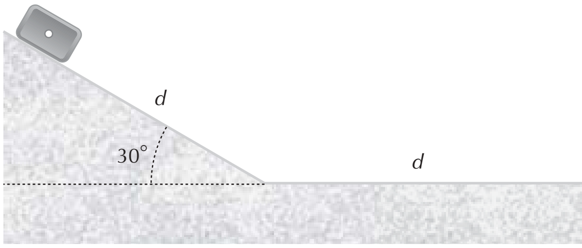
$$0 = \frac{1}{2}\, m\, v^2_{\text{máx}} + m\, g\,[-L\,(1 - \cos\alpha)]$$

Despejando $v_{\text{máx}}$ obtenemos:

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{2\, g\, L\,(1 - \cos\alpha)} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \text{ m s}^{-2} \cdot 9{,}8 \text{ m}\,(1 - 0{,}766)} = 6{,}7 \text{ m s}^{-1}$$

Nota: este problema *no* puede resolverse aplicando las ecuaciones del péndulo simple, ya que fueron deducidas para pequeñas oscilaciones (40° *no* es una oscilación pequeña).

11. *Desde una pendiente de 30° se soltó un cuerpo. Cuando terminó de recorrer toda la pendiente, siguió moviéndose por un suelo horizontal. Si la distancia d recorrida en el suelo horizontal hasta detenerse es igual a la que recorrió en la pendiente, calcula el coeficiente de rozamiento (que es el mismo tanto en el tramo horizontal como en el inclinado).*



La variación de energía mecánica desde el punto inicial (lugar donde se suelta el cuerpo) hasta la posición final (donde se detiene) es:

$$W_{\text{nc}} = \Delta E_c + \Delta E_p$$

De acuerdo con el diagrama de fuerzas, la fuerza de rozamiento es la única fuerza no conservativa que realiza trabajo.

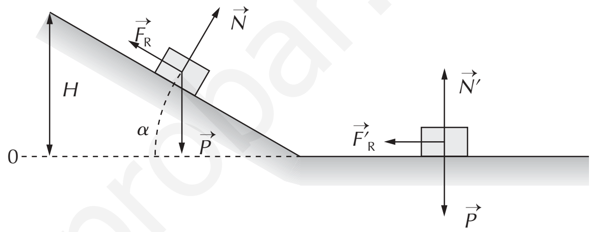


Diagrama de fuerzas: plano inclinado y suelo horizontal.

En el tramo horizontal, la fuerza de rozamiento es:

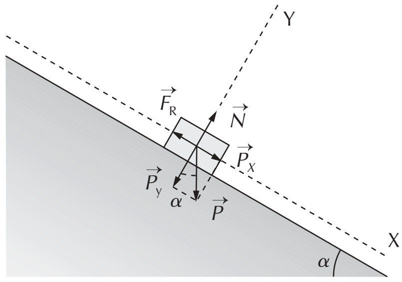
$$|\vec{F}'_R| = \mu\, |\vec{N}'| = \mu\, |\vec{P}| = \mu\, m\, |\vec{g}|$$

y el trabajo que realiza esta *fuerza constante* a lo largo de la distancia d en la que actúa es:

$$W_{F'_R} = \mu\, m\, |\vec{g}|\, d \cos 180° = -\mu\, m\, |\vec{g}|\, d$$

La fuerza de rozamiento en el plano inclinado es:

$$|\vec{F}_R| = \mu\, |\vec{N}| = \mu\, |\vec{P}_y| = \mu\, m\, |\vec{g}| \cos \alpha$$



Descomposición del peso.

y el trabajo que realiza en la distancia *d:*

$$W_{F_R} = (\mu\, m\, |\vec{g}| \cos \alpha)\, d \cos 180° = -\mu\, m\, |\vec{g}|\, d \cos \alpha$$

Desde la posición inicial hasta la final, las variaciones de energía cinética y potencial son:

$$\Delta E_c = 0;\;\; \Delta E_p = m\, |\vec{g}|\, \Delta h = m\, |\vec{g}|\, (0 - H) = -m\, |\vec{g}|\, H$$

Por tanto, $W_{\text{nc}} = \Delta E_c + \Delta E_p$ queda como:

$$-\mu\, m\, |\vec{g}|\, d \cos \alpha - \mu\, m\, |\vec{g}|\, d = -m\, |\vec{g}|\, H; \qquad \mu\, d \cos \alpha + \mu\, d = H$$

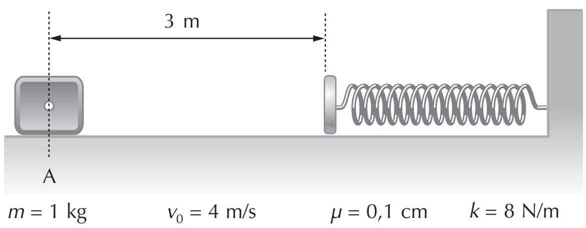
De esta ecuación se desconocen d y H, pero ambas están relacionadas: si se observa la figura del enunciado, en el plano inclinado se tiene $H = d \sin \alpha$; por tanto,

$$\mu\, d\, (1 + \cos \alpha) = d \sin \alpha; \qquad \mu = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{0{,}5}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0{,}27$$

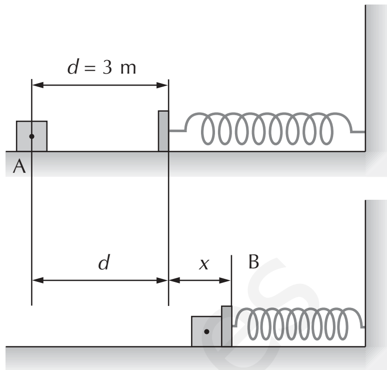
12. *Desde el punto A, a 3 m de un muelle de k = 8 N m^{-1}, se dispara un cuerpo de 1 kg a 4 m s^{-1}, hacia el resorte. El coeficiente de fricción entre el cuerpo y el suelo es 0,1. Calcula, tomando g = 10 m s^{-2}:*

a) La máxima compresión del muelle.

b) La distancia de A a la que se detendrá el cuerpo en su movimiento de retorno.



a) Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son: su peso, la normal y la fricción, ejercidas por el suelo, y la elástica efectuada por el muelle cuando ambos están en contacto. El peso y la fuerza elástica son conservativas, la fuerza normal no realiza trabajo y la fuerza de fricción no es conservativa. Por tanto, la variación de energía mecánica desde la posición *A* hasta la *B* es:



$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = W_{\text{nc}}$$

$$\Delta E_c = 0 - \frac{1}{2}\ 1\ \text{kg}\ (4\ \text{m s}^{-1})^2 = -8\ \text{J}$$

$$\Delta E_p = \Delta E_{p_{\text{elástica}}} = \frac{1}{2} \cdot 8\ \frac{\text{N}}{\text{m}}\ x^2 = 4x^2$$

$$W_{\text{nc}} = W_{F_{\text{R}}}$$

$$|\vec{F}_{\text{R}}| = \mu\ |\vec{N}| = \mu\ |\vec{P}| = 0{,}1 \cdot 1\ \text{kg} \cdot 10\ \text{m s}^{-2} = 1\ \text{N}$$

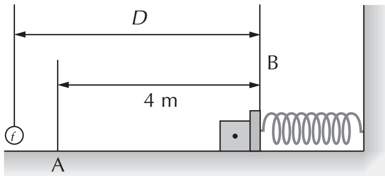
$$W_{\text{nc}} = |\vec{F}_{\text{R}}| \cdot (3 + x) \cdot \cos 180° = -(3 + x)$$

Sustituyendo en la primera ecuación,

$$-(3 + x) = -8 + 4x^2; \qquad 4x^2 + x - 5 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación de segundo grado son: $\frac{-5}{4}$ m y 1 m. De acuerdo con el planteamiento, solo tiene sentido la solución positiva, 1 m (la distancia en la que actúa la fricción es $3 + x$; por tanto, x debe ser *positivo);* por consiguiente, esa es la máxima compresión.

b) Si se toma como instante inicial el lanzamiento y como instante final la detención del cuerpo, la variación de energía mecánica entre las dos posiciones es:



$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = W_{\text{nc}}$$

$$\Delta E_c = 0 - \frac{1}{2}\ 1\ \text{kg}\ (4\ \text{m s}^{-1})^2 = -8\ \text{J}; \qquad \Delta E_p = \Delta E_{p_{\text{elástica}}} = 0$$

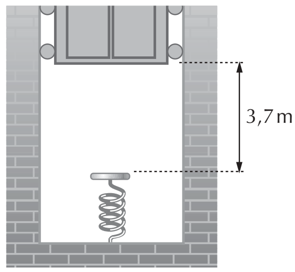
$$W_{\text{nc}} = W_{F_{\text{R}}}; \quad |\vec{F}_{\text{R}}| = \mu\ |\vec{N}| = \mu\ |\vec{P}| = 0{,}1 \cdot 1\ \text{kg} \cdot 10\ \text{m s}^{-2} = 1\ \text{N}$$

$$W_{\text{nc}} = |\vec{F}_{\text{R}}| \cdot (4 + D) \cdot \cos 180° = -(4 + D)$$

$$\Delta E_m = W_{\text{nc}}; \qquad -8 = -(4 + D)$$

Por tanto, $D = 4$ m, es decir, el cuerpo se detiene en A; la distancia solicitada es 0.

13. *El cable de un montacargas (masa total: 1 820 kg) se rompe de forma repentina en un momento en que este está en reposo. El mecanismo de seguridad hace que unas guías laterales le ejerzan una fuerza de frenada constante de 4 450 N. En la parte inferior del hueco del montacargas hay un muelle vertical cuyo valor de k es igual a 1 460 N cm*$^{-1}$*. Calcula la máxima compresión del muelle, teniendo en cuenta que el montacargas cayó desde una altura de 3,7 m sobre el muelle.*

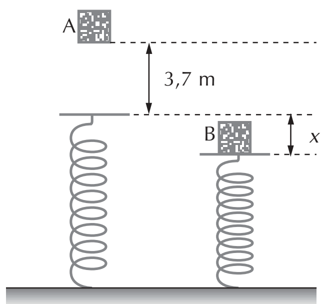


Las fuerzas que actúan sobre el montacargas son:

— Conservativas: su peso y la ejercida por el muelle.

— No conservativas: la fricción (fuerza del freno).

Por tanto, desde el instante inicial hasta que se alcanza la máxima compresión, la variación de energía mecánica es:



$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = W_{\text{nc}}$$

$$\Delta E_c = 0 - 0 = 0; \qquad \Delta E_p = \Delta E_{p_{\text{elástica}}} + \Delta E_{p_{\text{gravitatoria}}}$$

$$\Delta E_{p_{\text{elástica}}} = \frac{1}{2}\ 1\,460 \cdot 10^2\ \frac{\text{N}}{\text{m}}\ x^2 = 7{,}300 \cdot 10^4\ x^2\ \text{J}$$

$$\Delta E_{p_{\text{gravitatoria}}} = m\ g\ \Delta H = 1\,820\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m s}^{-2}\ [0 - (x + 3{,}7)]\ \text{m}$$

$$W_{\text{nc}} = 4\,450\ \text{N}\ (x + 3{,}7)\ \text{m}\ \cos 180°$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$-4\,450\ (x + 3{,}7) = 7{,}300 \cdot 10^4\ x^2 - 1\,820 \cdot 9{,}8 \cdot (x + 3{,}7)$$

Las soluciones de esta ecuación de segundo grado son 0,92 m y −0,74 m. Solo tiene sentido físico la solución positiva: el montacargas cae, a partir de su posición inicial, una distancia de $3{,}7 + x$ metros; por tanto, x debe ser un valor positivo: 0,92 m.

14. *Calcula el trabajo que realiza cada una de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo de 2,0 kg de masa cuando es desplazado 10 m por un plano inclinado 30° con una fuerza constante de 25 N paralela a la dirección del movimiento (Fig. 1.44). El coeficiente de rozamiento vale 0,14.*

Si inicialmente se encontraba en reposo, calcula, aplicando el teorema de la energía cinética, la velocidad que tiene el cuerpo al recorrer estos 10 m.

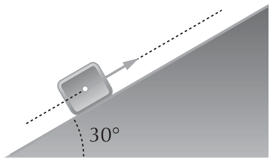


Fig. 1.44

Atendiendo al diagrama de fuerzas y si se descompone el peso en los ejes X e Y:

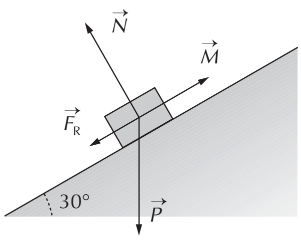
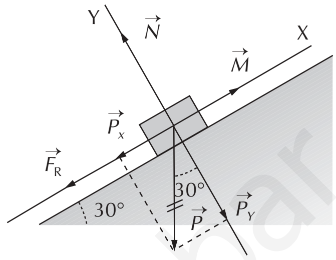


Diagrama de fuerzas.



Descomposición del vector peso.

$$|\vec{P}| = 2{,}00 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m s}^{-2} = 19{,}6 \text{ N}$$

$$|\vec{P}_x| = |\vec{P}| \cdot \sin 30° = 9{,}80 \text{ N}; \qquad |\vec{P}_y| = |\vec{P}| \cdot \cos 30° = 17{,}0 \text{ N}$$

$$|\vec{M}| = 25 \text{ N}; \qquad |\vec{F}_R| = \mu\, |\vec{N}| = \mu\, |\vec{P}_y| = 0{,}14 \cdot 17{,}0 \text{ N} = 2{,}4 \text{ N}$$

Todas estas fuerzas son constantes y su acción se desarrolla sobre una trayectoria rectilínea; por tanto, el trabajo mecánico que realizan se puede calcular por la expresión:

$$W = |\vec{F}| \cdot |d| \cos (\vec{F}, \Delta \vec{r})$$

Fuerza M : $W_M = 25 \text{ N} \cdot 10 \text{ m} \cdot \cos 0° = 2{,}5 \cdot 10^2 \text{ J} = 0{,}25 \text{ kJ}$.

Fuerza N : $W_N = 0$ (la fuerza normal es perpendicular al desplazamiento).

Fuerza P : $W_P = 19{,}6 \text{ N} \cdot 10 \text{ m} \cdot \cos 120° = -98 \text{ J}$.

Fuerza F_R : $W_{F_R} = 2{,}4 \text{ N} \cdot 10 \text{ m} \cdot \cos 180° = -24 \text{ J}$.

La expresión matemática del teorema de la energía cinética es:

$$W_{Total} = \Delta E_c$$

En este ejercicio, aplicado a los 10 m:

$$2{,}5 \cdot 10^2 \text{ J} - 24 \text{ J} - 98 \text{ J} = \frac{1}{2}\, 2{,}00 \text{ kg}\, v^2 - 0$$

de donde se tiene que $v = 11 \text{ m s}^{-1}$.

15. *Un motor eléctrico de 20,0 kg debe ir montado sobre cuatro muelles iguales. Calcula cuál debe ser la constante recuperadora de cada uno de estos resortes (en N cm^{-1}) si se desea que la frecuencia de oscilación del motor sea de 4,00 Hz.*

La fuerza total aplicada a los muelles (el peso del motor) se reparte por igual entre ellos. Por tanto, para las oscilaciones verticales, cada muelle se comporta como si soportase una masa de (20/4) kg. La constante elástica k de uno de los muelles es:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$k = (2\pi f)^2\, m = (2\pi \cdot 4{,}00 \text{ s}^{-1})^2 \cdot \frac{20{,}0 \text{ kg}}{4} = 3{,}16 \cdot 10^3 \text{ kg s}^{-2} = 3{,}16 \cdot 10^3 \text{ N m}^{-1} = 31{,}6 \text{ N cm}^{-1}$$

16. *Calcula el periodo del movimiento de la masa M de la figura 1.45 sin tener en consideración los rozamientos. Datos: M = 250 g; k_1 = 20 N m^{-1}; k_2 = 30 N m^{-1}.*

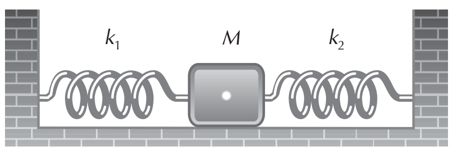
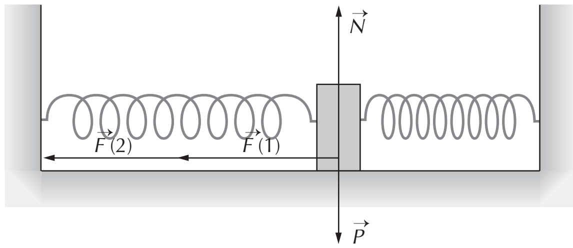


Fig. 1.45

Es importante observar que la *deformación de cada muelle, x, tiene el mismo valor para los dos muelles.* De acuerdo con el diagrama de fuerzas, la resultante de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es:

$$(-k_1\,x) + (-k_2\,x) = ma; \quad -(k_1 + k_2)\,x = ma$$



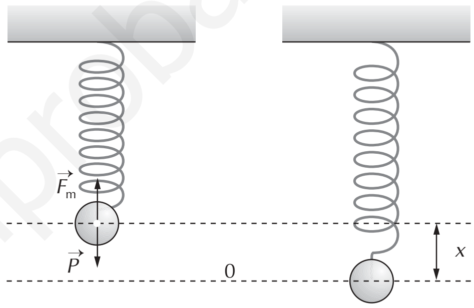
Es decir, el cuerpo se mueve como si estuviese sometido a la acción de *un único resorte* de constante k: $k = k_1 + k_2$. Por tanto,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}250\text{ kg}}{50\text{ N/m}}} = 0{,}44\text{ s}$$

17. *Un cuerpo se fija al extremo libre de un resorte vertical que cuelga de un soporte. Si el cuerpo se baja lentamente, desde la posición del muelle sin deformar hasta la posición de equilibrio, este se estira una distancia d. Calcula la máxima deformación que experimentará el resorte si el mismo cuerpo se fija al mismo resorte pero se deja caer, en lugar de que baje lentamente.*

La constante elástica del muelle se puede calcular a partir de los datos del equilibrio estático:

$$|\vec{P}| = |\vec{F}_m|; \qquad m\,|\vec{g}| = k\,|d|; \qquad k = \frac{m\,|\vec{g}|}{|d|}$$



Si se suelta, la variación de energía mecánica que experimenta el cuerpo es nula, puesto que las fuerzas que actúan sobre él (peso y fuerza elástica) son conservativas. Por tanto,

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = 0$$

$$\Delta E_c = 0$$

$$\Delta E_p = \Delta E_{p_{\text{elástica}}} + \Delta E_{p_{\text{gravitatoria}}} = \left(\frac{1}{2}\,k\,x^2 - 0\right) + m\,|\vec{g}| \cdot (0 - x)$$

Sustituyendo en la ecuación de conservación:

$$0 = \left(\frac{1}{2}\,k\,x^2 - 0\right) - m\,|\vec{g}|\,x. \text{ Soluciones: } x = 0;\ x = \frac{2\,m\,|\vec{g}|}{k}$$

La máxima elongación corresponde a $x = \dfrac{2\,m\,|\vec{g}|}{k}$.

Expresando la constante k por la expresión establecida en el estudio de la situación estática,

$$x = \frac{2\,m\,|\vec{g}|}{\dfrac{m\,|\vec{g}|}{d}} = 2\,d$$

18. *Halla la aceleración de la gravedad en un lugar donde un péndulo simple de 150 cm de longitud realiza 100 oscilaciones en 246 s.*

A partir de la ecuación del periodo del péndulo simple para pequeñas oscilaciones:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{|\vec{g}|}} \Rightarrow |\vec{g}| = \frac{4\pi^2\,L}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 150 \cdot 10^{-2}\text{ m}}{\left(\dfrac{246}{100}\text{ s}\right)^2} = 9{,}79\text{ m s}^{-2}$$

19. *¿En qué punto de la trayectoria de un péndulo simple son máximas o mínimas las magnitudes siguientes: velocidad, aceleración normal, aceleración tangencial?*

	Máximos	**Mínimos**
Velocidad	Punto de equilibrio	Extremos (0)
Aceleración normal	Punto de equilibrio	Extremos (0)
Aceleración tangencial	Extremos	Punto de equilibrio (0)

20. *Un reloj de péndulo ajustado en un lugar en el cual la gravedad es g = 9,6720 m s⁻² se traslada a otro lugar en el cual g = 9,8123 m s⁻². ¿Cuánto se retrasará o avanzará en un día?*

Si T_1 y $|\vec{g}_1|$ son el periodo y la aceleración de la gravedad en el lugar en que el péndulo está ajustado y T_2 y $|\vec{g}_2|$ son estas magnitudes en el segundo lugar,

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= 2\pi\sqrt{\frac{L}{|\vec{g}_1|}} \\ T_2 &= 2\pi\sqrt{\frac{L}{|\vec{g}_2|}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{|\vec{g}_2|}{|\vec{g}_1|}};\ T_2 = T_1 \cdot 0{,}99283$$

Si n es el número de oscilaciones completas que realiza el reloj ajustado en un día (86 400 s),

$$86\,400 = n \cdot T_1$$

El tiempo que invierte en realizar esas mismas oscilaciones en el otro lugar es:

$$n \cdot T_2 = \frac{86\,400}{T_1} \cdot T_2 = 86\,400 \cdot 0{,}99283 = 85\,780 \text{ s}$$

Por tanto, en el segundo lugar adelanta 620 s (= 10′ 20″).

21. *El movimiento de un pistón de un cilindro de un automóvil es, aproximadamente, armónico simple. Si su carrera es 10 cm y el motor gira a 3 600 rpm, calcula su velocidad, expresada en km h⁻¹, cuando pasa por el punto medio de su carrera.*

La *carrera* es la distancia entre los dos extremos de recorrido del pistón; por tanto, la amplitud del M.A.S. es la mitad de la carrera.

Cada «giro» del motor corresponde a una oscilación completa del pistón, es decir, la frecuencia del mismo son 3600 oscilaciones cada minuto.

En el punto medio de un M.A.S. es donde se alcanza la velocidad máxima:

$$v_{máx} = \pm\omega A = \pm 2\pi f\ A = \pm 2\pi \cdot \frac{3600}{60 \text{ s}} \cdot \frac{10 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{2} = \pm 19 \text{ m s}^{-1};$$

$$\pm 19\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} \cdot \frac{1 \text{ km}}{1\,000 \text{ m}} = \pm 68 \text{ km h}^{-1}$$

Test de autoevaluación

Indica si la frase es verdadera o falsa:

1. *Un movimiento periódico es cualquier movimiento que se repita cíclicamente.*

V.

2. *Un movimiento armónico simple es cualquier movimiento periódico de una partícula.*

F. Ver el ejercicio 15.

3. *La frecuencia de un movimiento periódico es el número de ciclos completos en cada unidad de tiempo.*

V.

4. *La velocidad máxima de una partícula que experimenta un movimiento armónico simple es igual a la amplitud multiplicada por la frecuencia.*

F. $v_{máx} = \pm\omega A = \pm 2\pi f\ A$

5. *La frecuencia de un movimiento armónico simple es proporcional al cuadrado de la amplitud.*

F.

6. *La distancia total recorrida por una partícula que realiza un ciclo completo de un movimiento armónico simple es el doble de la amplitud.*

F. La distancia es 4*A*.

7. *En el punto en el que la velocidad de una partícula que realiza un M.A.S. es máxima, su aceleración también es máxima.*

F.

8. *La frecuencia de una masa m que describe un M.A.S. en el extremo de un muelle vertical es independiente de m.*

F. $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

9. *Para una amplitud dada de una oscilación, la energía total de la masa que oscila en el extremo de un muelle es independiente de la masa.*

V. $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + \frac{1}{2}\,k\,x^2 = \frac{1}{2}\,kA^2$. Fijada la amplitud A y el muelle (k), queda determinada la energía mecánica del oscilador armónico.

10. *La frecuencia de un péndulo simple es independiente de su masa.*

V.

Elige la respuesta correcta:

11. *En un M.A.S., la aceleración es:*

a) Constante.

b) Proporcional al desplazamiento respecto de la posición central.

c) Inversamente proporcional al desplazamiento respecto de la posición central.

d) Crece cuando la velocidad crece.

b.

12. *Un resorte elástico de masa despreciable está fijo por uno de sus extremos y por el otro sostiene una masa de 5 kg. Se separa la masa de su posición de equilibrio, se le suelta y se observa que el cuerpo realiza oscilaciones armónicas tales que 10 oscilaciones duran 31,4 s. La constante recuperadora del muelle es, en N m^{-1}:*

a) 20 *b) 1/20* *c) 5* *d) 1/5* *e) 400*

a. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$; $\frac{3{,}14\ \text{s}}{10} = 2\pi\sqrt{\frac{5\ \text{kg}}{k}} \Rightarrow k = 20\ \text{N m}^{-1}$

13. *Un punto efectúa un M.A.S. Los extremos de la oscilación están separados 10 cm entre sí y tarda 2 s en recorrer esta distancia. La frecuencia es:*

a) 4 Hz *b) 2 Hz* *c) 1/2 Hz* *d) 1/4 Hz* *e) 10 Hz*

d. $T = 4\ \text{s} \Rightarrow f = \frac{1}{4}\ \text{Hz}$.

14. *El módulo de la velocidad de la partícula anterior, cuando pasa por el centro de su recorrido, es (en cm s^{-1}):*

a) 7,9 *b) 5* *c) 62,8* *d) 10* *e) 15,8*

a. La velocidad en el punto de equilibrio es la máxima: $|v_{\text{máx}}| = A\,\omega = 5\ \text{cm} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4}\ \text{s}^{-1} = 7{,}9\ \text{cm s}^{-1}$.

15. *La aceleración en el extremo del recorrido es, en valor absoluto y en cm s^{-2}:*

a) 9,9 *b) 215* *c) 12,3* *d) 31,4* *e) 342*

c. $|a| = \omega^2\,|x| = \omega^2\,|A| = (2\pi \cdot \frac{1}{4}\ \text{s}^{-1})^2 \cdot 5\ \text{cm} = 12{,}3\ \text{cm s}^{-2}$

16. *La ecuación x = 2 cos (5 t + 0,5π) describe el movimiento de una partícula. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?:*

a) La velocidad inicial es –10 m s⁻¹.

b) La amplitud es 2 m.

c) La fase inicial es 0,5π rad.

d) La frecuencia angular es 5 rad s⁻¹.

e) El periodo es 2,5 s.

e. $\omega = 5 \text{ rad s}^{-1} = \dfrac{2\pi}{T}$; $\quad T = \dfrac{2\pi}{5} = 1{,}3 \text{ s}$

17. *Tenemos dos péndulos simples (A y B) en la misma habitación. La masa y la longitud de B son cuatro veces las de A. ¿Cuál de las siguientes frases es cierta?:*

a) Sus periodos son iguales, ya que la relación L/m es la misma para ambos.

b) La frecuencia de B es doble que la de A.

c) El periodo de B es doble que el de A.

d) Todas las afirmaciones anteriores son falsas.

c. $$\left.\begin{array}{l} T_A = 2\pi\sqrt{\dfrac{L_A}{|\vec{g}|}} \\ T_B = 2\pi\sqrt{\dfrac{L_B}{|\vec{g}|}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \sqrt{\frac{L_A}{L_B}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow T_B = 2\ T_A$$

18. *Un péndulo simple oscila de modo que:*

a) A mayor longitud, mayor periodo.

b) A menor longitud, mayor periodo.

c) A mayor longitud, menor periodo.

d) Su longitud no influye en el periodo.

a.

19. *A un cuerpo, que se encuentra en reposo sobre un suelo horizontal, se le aplica una fuerza horizontal constante. Si no se tiene en consideración ningún rozamiento, ¿cuál de las siguientes gráficas corresponde a la variación de la energía cinética del cuerpo con el tiempo?:*

Fig. 1.46

d. Si la resultante es una fuerza constante, la aceleración también lo es y, en este caso, la velocidad ($v = at$) es proporcional al tiempo y, en definitiva, la energía cinética $\left(\dfrac{1}{2}\, m\, v^2\right)$ es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad.