TRABAJO Y ENERGIA:
FUERZAS NO CONSERVATIVAS

Determinar (atendiendo a los conceptos de trabajo y energía, es decir, sin utilizar la 2ª ley de Newton) la aceleración que alcanza un bloque de masa m al bajar por un plano inclinado un ángulo φ y con un coeficiente de rozamiento μ.

Solución: I.I. 94

Texto solución

Dos bloques de masas 12 kg y 15 kg cuelgan de un cable que pasa por una polea de masa despreciable. Si los bloques se sueltan desde el reposo cuando el primero está a ras del suelo y el segundo a una altura de 1.5 m y se observa que el segundo bloque golpea el suelo a una velocidad de 1.4 m/s, determínese: a) la energía disipada por causa del rozamiento en el eje de la polea, b) la fuerza ejercida por el cable sobre cada uno de los dos bloques durante el movimiento.

Solución: I.I. 94

Texto solución

Calcular el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F} = (2xy, 3z, 5zy)$ al recorrer su punto de aplicación el arco de la curva $x = t + 1$, $y = t^3 - 1$, $z = t^2$ desde el punto A (0, –2, 1) al B (2, 0, 1). ¿Dependerá este trabajo del camino recorrido para ir desde A hasta B?

Solución: I.T.I. 94

Texto solución

Un cantinero en un salón del oeste desliza una botella de whisky de centeno sobre el mostrador horizontal hacia un vaquero que está del otro lado de la barra a una distancia de 7m. ¿Con qué rapidez deberá soltar la botella si el coeficiente de rozamiento cinético es de 0.1 y la botella llega en reposo justo frente al vaquero?

Solución: I.T.T. 93, 95

Texto solución

Un trineo de 20 kg se desliza por una colina, desde una altura de 20 m. El trineo inicia su movimiento a partir del reposo y tiene una velocidad de 16 m/s cuando llega al pie de la colina. Calcule la energía perdida por fricción. Si la pendiente de la colina es de 30° calcule el coeficiente de rozamiento cinemático entre el trineo y el suelo así como la potencia de rozamiento.

Solución: I.T.I. 95

Texto solución

Colocamos una cuerda flexible de 1 m de longitud sobre una mesa de tal forma que parte de ella cuelgue por un extremo. Se deja caer desde una posición ligeramente separada de la posición de equilibrio en la cual el peso de la parte que cuelga equilibra al rozamiento dinámico. Calcular la velocidad de la cuerda cuando el extremo que está sobre la mesa llegue al borde de la misma. $\mu_d = 0.5$.

Solución: I.T.I. 97, I.T.T. 97, 04

Llamemos λ a la densidad de masa por unidad de longitud de la cuerda y x_0 a la longitud inicial de cuerda que cuelga por el extremo de la mesa en la cual el peso de la parte que cuelga equilibra al rozamiento:

$$m_{\substack{cuerda\\ que\ cuelga}}\, g = \mu_d N_{\substack{cuerda\\ sobre\ la\\ mesa}} = \mu_d m_{\substack{cuerda\\ sobre\ la\\ mesa}}\, g$$

$$\Rightarrow \quad \lambda x_0 g = \mu_d \lambda \left(L - x_0\right) g \quad \Rightarrow \quad x_0 = \left(\frac{\mu_d}{1 + \mu_d}\right) L$$

Si desplazamos ligeramente a la cuerda de esta posición de equilibrio de forma que empiece a deslizar por el borde de la mesa, cuando la parte que cuelga tenga una longitud x la fuerza neta que tira de ella será:

$$F = m_{\substack{cuerda\\ que\ cuelga}}\, g - \mu_d m_{\substack{cuerda\\ sobre\ la\\ mesa}}\, g = \lambda x g - \mu_d \lambda \left(L - x\right) g = \lambda g \left[\left(1 + \mu_d\right) x - \mu_d L\right]$$

El trabajo realizado por dicha fuerza desde el inicio hasta que la cuerda se descuelga por completo se invertirá en la energía cinética final de la cuerda (ya que ésta parte del reposo):

$$W = \int_{x_0}^{L} F dx = \Delta E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \lambda L v^2$$

$$\Rightarrow \quad \lambda g \left[\left(1 + \mu_d\right)\left(\frac{L^2}{2} - \frac{x_0^2}{2}\right) - \mu_d L \left(L - x_0\right)\right] = \frac{1}{2} \lambda L v^2$$

Introduciendo en esta expresión el valor de x_0 calculado inicialmente:

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{\lambda g L^2}{1+\mu_d} = \frac{1}{2}\lambda L v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \left(\frac{gL}{1+\mu_d}\right)^{1/2} = \boxed{2.56 \text{ m/s}}$$

Una partícula de 0.4 kg resbala sobre un carril circular horizontal que tiene 1.5 m de radio. A la partícula se le imprime una velocidad inicial de 8 m/seg. Después de una revolución su velocidad disminuye a 6 m/seg, debido al rozamiento. a) Calcular el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento en una revolución b) Calcular el coeficiente de rozamiento. c) ¿Cuál es el numero de revoluciones que efectúa la partícula antes de pararse?

Solución: I.T.I. 00, I.T.T. 99, 02, 05

a) El trabajo de rozamiento (como cualquier trabajo) se habrá invertido en modificar la energía cinética de la partícula:

$$W_{roz.} = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv_{final}^2 - \frac{1}{2}mv_{inicial}^2 = \boxed{-5.6 \text{ J}}$$

b) Como la fuerza de rozamiento es dinámica y es constante:

$$W_{roz.} = -F_{roz.}\Delta s = -(\mu mg)(2\pi R) \quad \Rightarrow \quad \mu = -\frac{W_{roz.}}{2\pi mgR} = \boxed{0.15}$$

c) El trabajo realizado por el rozamiento durante las N vueltas hasta que se para la partícula tiene que reducir la energía cinética de ésta a cero, luego:

$$\left.\begin{array}{l} W_{roz.} = \Delta E_c = 0 - \frac{1}{2}mv_{inicial}^2 \\ W_{roz.} = -F_{roz.}\Delta s = -(\mu mg)(2\pi N R) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{1}{4\pi}\frac{v_{inicial}^2}{\mu g R} = \boxed{2.29 \text{ vueltas}}$$

Un bloque de 0.6 kg se desliza 6 m por un plano inclinado liso que forma un ángulo de 20º con la horizontal, después sigue por un plano horizontal rugoso siendo el coeficiente de rozamiento 0.5. a) ¿Cuál es la velocidad del cuerpo al final del plano inclinado? b) ¿Cuál es la velocidad del cuerpo después de recorrer 1 m sobre el plano horizontal? c) ¿Qué distancia horizontal recorrerá antes de detenerse?

Solución: I.T.I. 92

Texto solución

Un cuerpo de masa 50 g se desliza partiendo del reposo por un plano inclinado 30° con la horizontal. Al llegar al plano horizontal se detiene tras recorrer 50 cm. hallar el trabajo de las fuerzas de rozamiento en todo el trayecto teniendo en cuenta que el coeficiente de rozamiento vale 0.15

Solución: I.T.I. 96, 98, 99, 02, 05, I.T.T. 96, 99, 00, 04

La variación de la energía total debe ser igual al trabajo realizado por el rozamiento el cual consta de dos partes, una primera a lo largo del plano inclinado y una segunda a lo largo del plano horizontal. Si llamamos h a la altura de la que desciende el objeto y d a la distancia recorrida sobre el plano horizontal:

$$\Delta E = (0 - mgh) = W_{roz.} = -\mu(mg\cos\theta)\left(\frac{h}{\operatorname{sen}\theta}\right) - \mu mgd$$

$$\Rightarrow \quad h = \left(\frac{\mu \operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\theta - \mu}\right)d$$

Sustituyendo este resultado en la expresión de la variación de la energía obtenemos el trabajo de rozamiento:

$$W_{roz.} = \Delta E = -mgh = -\left(\frac{\mu \operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\theta - \mu}\right)mgd = \boxed{-50 \text{ mJ}}$$

Un ciclista, que pesa junto con su bicicleta 90 kg, corre por una carretera. El conjunto de las resistencias pasivas que se oponen a su movimiento viene dado por la fórmula $R = 0.4\ v^2$ en el SI, siendo v la velocidad. a) Calcular la potencia que debe desarrollar el ciclista para mantener la velocidad de 27 km/h sobre una carretera horizontal. Este ciclista desciende, sin pedalear, una pendiente del 5 % (por cada 100 m de carretera hay un desnivel de 5 m). b) Demostrar que alcanza una velocidad límite y calcular su valor. Si el ciclista desciende por una pendiente del 8 % a 27 km/h, c) determinar la energía en calorías que es disipada por los frenos en un recorrido de 100 m.

Solución: I.T.I. 04

a) Teniendo en cuenta que para desplazarse a velocidad constante la fuerza desarrollada por el ciclista debe equilibrar a la fuerza de rozamiento, la potencia desarrollada por el ciclista vendrá dada por:

$$P = \vec{F}_{ciclista} \cdot \vec{v} = \left(-\vec{R}\right) \cdot \vec{v} = 0.4v^3 = \boxed{168.75 \text{ w}}$$

b) A medida que va cogiendo velocidad en el descenso la fuerza de rozamiento va aumentando en magnitud. La velocidad límite se alcanza en el momento en que la fuerza de rozamiento equilibra a la componente del peso a lo largo del plano inclinado. A partir de dicho momento la velocidad del ciclista se mantiene constante (no habría aceleración):

$$mg\,\mathrm{sen}\,\theta = R\left(v_{lím.}\right) = 0.4 v_{lím.}^{2} \quad \Rightarrow \quad v_{lím.} = \sqrt{\frac{mg\,\mathrm{sen}\,\theta}{0.4}} = \boxed{10.5 \text{ m/s}}$$

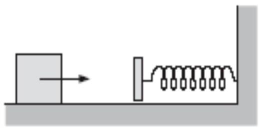
c) La variación de energía del ciclista es igual al trabajo realizado por todas las fuerzas de rozamiento durante el recorrido *d*:

$$\Delta E = W_{roz.\ aire} + W_{roz.\ frenos}$$

$$\Rightarrow \quad W_{roz.\ frenos} = \Delta E - W_{roz.\ aire} = \left(-mgh\right) - \left(-0.4 v^2 d\right) =$$

$$= -mg\left(0.08d\right) + 0.4 v^2 d = \boxed{-4806 \text{ J} = -1148 \text{ cal}}$$

Una masa de 5 kg se mueve en una superficie horizontal sin rozamiento, como se indica en la figura, con la velocidad de 4 m/s, y choca frontalmente con un muelle elástico de masa despreciable y de constante recuperadora 1 kp/cm. Determinar: a) la energía cinética del sistema en el momento en que la masa alcanza el muelle, b) la compresión máxima del muelle, c) la velocidad de la masa cuando el muelle se ha comprimido 10 cm, d) la compresión máxima del muelle en el caso de que entre la masa M y el suelo debajo del muelle hubiese habido rozamiento con un coeficiente $\mu = 0.25$.



Solución: I.T.I. 04

a) La energía cinética del cuerpo será:

$$E_c = \frac{1}{2} M V^2 = \boxed{40 \text{ J}}$$

b) Aplicando la conservación de la energía desde que el muelle está sin comprimir hasta que alcanza su máxima compresión:

$$\frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} k x_{máx.}^2 \quad \Rightarrow \quad x_{máx.} = \sqrt{\frac{M}{k}}\, V = \boxed{28.6 \text{ cm}}$$

c) Aplicando de nuevo la conservación de la energía:

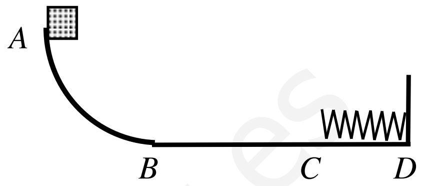
$$\frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} M V'^2 + \frac{1}{2} k x^2 \quad \Rightarrow \quad V' = \sqrt{V^2 - \frac{k}{M} x^2} = \boxed{3.75 \text{ m/s}}$$

d) En este caso no podemos aplicar la conservación de la energía. El trabajo de rozamiento será igual a la variación de energía:

$$W_{roz.} = -\mu M g x_{máx.} = \Delta E = \frac{1}{2} k x_{máx.}^2 - \frac{1}{2} M V^2$$

$$\Rightarrow \quad x_{máx.} = -\left(\mu \frac{Mg}{k}\right) + \sqrt{\left(\mu \frac{Mg}{k}\right)^2 + \frac{MV^2}{k}} = \boxed{27.3 \text{ cm}}$$

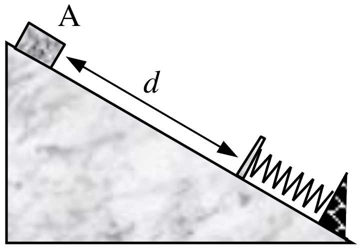
Un bloque de 10 kg se suelta desde el punto *A* sobre un carril *ABCD* como se indica en la figura. El carril no presenta fricción en ninguna parte salvo en el tramo *BC* de longitud 6 m. Si la constante del muelle es de 2250 N/m y lo comprime 0.3 m desde la posición de equilibrio hasta la posición de reposo momentáneo, determinar el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la superficie rugosa. Si repetimos la experiencia colocando en el extremo libre del muelle una plataforma de 1 kg y el choque entre ésta y el bloque es perfectamente inelástico ¿cuánto se comprimirá el muelle? ¿Cuál sería la máxima compresión del muelle con su plataforma si la superficie que se encuentra bajo él fuese rugosa y de la misma naturaleza que el tramo *BC*?



Solución: **I.T.I. 92**

Texto solución

El cuerpo *A* de la figura tiene una masa de 2 kg. Partiendo del reposo resbala d = 4 m sobre un plano inclinado θ = 30º con la horizontal hasta que choca con un muelle cuyo extremo esta fijo al final del plano. Si la cte. del muelle es k = 100 N/m calcular la máxima deformación y la posición a la que volvería el cuerpo *A* al estirarse de nuevo el muelle si no hubiese rozamiento. ¿Cuál hubiese sido el resultado si el coeficiente de rozamiento cinético $\mu_{cin.}$ es 0.25? En este último caso ¿que coeficiente de rozamiento estático impediría el estiramiento posterior del muelle?



Solución: **I.T.I. 93, 95, 96, 98, 01, I.T.T. 95, 96, 00, 01, 04**

En este primer caso como las únicas fuerzas que actúan sobre el bloque o son conservativas, como el peso y la fuerza elástica, o no realizan trabajo, como la normal, podemos aplicar el principio de conservación de la energía. Llamemos *x* a la máxima deformación que sufre el muelle al caer el bloque. Tomando como origen de energías potenciales gravitatorias la posición en la que se encuentra el bloque cuando el muelle es contraído dicha distancia *x,* tendremos:

$$E_{principio} = E_{final} \quad \Rightarrow \quad mg(d+x)\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}k\,x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \boxed{0.989\,\text{m}}$$

Como la energía se conserva cuando el muelle empuje al bloque hacia arriba la energía elástica acumulada en el muelle se transformará de nuevo en energía potencial gravitatoria recuperando el bloque su posición original:

$$\boxed{d = 4\,\text{m}}$$

Si hubiese existido rozamiento la energía del bloque no se conservaría pero su variación sería igual al trabajo (negativo) realizado por el rozamiento:

$$\left.\begin{array}{l} E_{final} - E_{principio} = W_{roz.} \\ F_{roz.} = \mu_{cin.} N = \mu_{cin.}\, mg\cos\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}k\,x^2 - mg(d+x)\operatorname{sen}\theta = -\mu_{cin.}\, mg\cos\theta(d+x)$$

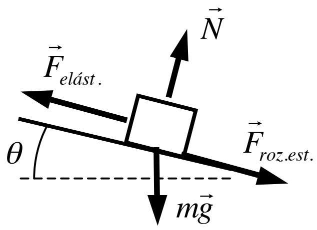
$$\Rightarrow \quad x = \boxed{0.725\,\text{m}}$$

Cuando el muelle empuje el bloque hacia arriba el rozamiento sigue actuando, se sigue perdiendo energía. Si finalmente el bloque se separa una distancia d' del muelle tendremos que:

$$E_{final} - E_{principio} = W_{roz.} \quad \Rightarrow \quad mg(d'+x)\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}k\,x^2 = -\mu_{cin.}\, mg\cos\theta(d'+x)$$

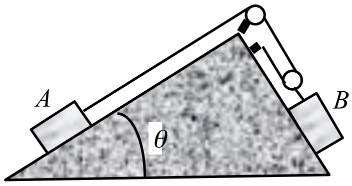
$$\Rightarrow \quad d' = \boxed{1.14\,\text{m}}$$

Si imponemos la condición de que al alcanzarse la máxima deformación del muelle (y pararse por lo tanto el bloque) la fuerza de rozamiento estática que actúa en ese momento debe ser suficiente para anular la fuerza elástica y la componente del peso a lo largo del plano, evitando que el bloque sea lanzado nuevamente hacia arriba:



$$\left.\begin{array}{l} k\,x - F_{roz.est.} - mg\operatorname{sen}\theta = 0 \\ \\ F_{roz.est.} \le F_{roz.est.máx.} = \mu_{est.} mg\cos\theta \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \quad \mu_{est.} mg\cos\theta \ge k\,x - mg\operatorname{sen}\theta \\ \\ \Rightarrow \quad \mu_{est.} \ge \dfrac{k\,x}{mg\cos\theta} - \operatorname{tg}\theta = \boxed{3.69} \end{array}$$

Los dos bloques de la figura están inicialmente en reposo. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento de ambos bloques con el plano inclinado es de 0.10, determinar la velocidad de cada bloque después de que el bloque B haya recorrido 1 m. Calcúlese la tensión de la cuerda. Datos: $\theta = 30°$, $m_A = 50$ kg, $m_B = 75$ kg, (la cuña forma un ángulo recto).



Solución: **I.T.I. 94, 99, 02, 05, I.T.T. 99, 02, 05**

Como la longitud de la cuerda es fija esto implica que por cada metro que A recorra en su movimiento ascendente a lo largo del plano, B descenderá sólo medio metro, es decir, los desplazamientos, velocidades y aceleraciones ascendentes de A serán siempre el doble de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones descendentes de B. Por otro lado como estamos suponiendo que las cuerdas y poleas son ideales y sin masa la tensión que tira de B es el doble de la que tira de A.

Llamando d_A y d_B a las distancias recorridas por A y B, v_A y v_B a las velocidades alcanzadas en ese momento, aplicando la relación $W = \Delta E_c$, y teniendo en cuenta que para la fuerza gravitatoria que es conservativa se verifica que $W = -\Delta E_{pot.grav.} = -(mgh' - mgh) = mg(h - h')$, tenemos para cada uno de los cuerpos:

$$\left.\begin{array}{l} W_{grav.\to A} + W_{tensión\to A} + W_{roz.\to A} = \Delta E_{c,A} \\ W_{grav.\to B} + W_{tensión\to B} + W_{roz.\to B} = \Delta E_{c,B} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m_A g\left(h_A - h_A'\right) + Td_A - F_{roz.,A}\, d_A = \frac{1}{2} m_A v_A^2 \\ m_B g\left(h_B - h_B'\right) - 2Td_B - F_{roz.,B}\, d_B = \frac{1}{2} m_B v_B^2 \end{array}\right.$$

Sumando estas dos ecuaciones y teniendo en cuenta que:

$$d_A = 2d_B \quad , \quad v_A = 2v_B \quad , \quad h_A - h_A' = -d_A \operatorname{sen}\theta \quad , \quad h_B - h_B' = d_B \cos\theta$$

$$F_{roz.,A} = \mu N_A = \mu m_A g \cos\theta \quad , \quad F_{roz.,B} = \mu N_B = \mu m_B g \operatorname{sen}\theta$$

tenemos la siguiente ecuación que nos permite calcular v_B:

$$-2m_A g d_B\left(\operatorname{sen}\theta + \mu\cos\theta\right) + m_B g d_B\left(\cos\theta - \mu\operatorname{sen}\theta\right) = 2m_A v_B^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

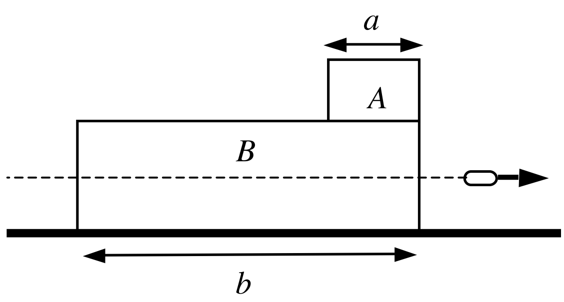
$$\Rightarrow \quad v_B = \left(\frac{2gd_B}{4m_A + m_B}\right)^{1/2}\left[-2m_A\left(\operatorname{sen}\theta + \mu\cos\theta\right) + m_B\left(\cos\theta - \mu\operatorname{sen}\theta\right)\right]^{1/2} = \boxed{0.426 \text{ m/s}}$$

$$\Rightarrow \quad v_A = 2v_B = \boxed{0.851 \text{ m/s}}$$

Y sustituyendo en las ecuaciones iniciales podemos finalmente calcular la tensión en la cuerda:

$$T = \left[\, 2\cos\theta + \operatorname{sen}\theta + \mu_{din.}\left(\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta\right) \right]\left(\frac{m_A m_B}{4m_A + m_B}\right) g = \boxed{296\ \text{N}}$$

Se tienen dos bloques de masas m_A = 2 kg y m_B = 4 kg. El coeficiente de rozamiento entre A y B es de 0.6 y entre B y el suelo es 0.1. Se dispara una bala de masa m = 100 g sobre el bloque B, comprobándose que entra con una velocidad de 22 m/s y sale con 2 m/s. Se supone instantáneo el tiempo que tarda en atravesarlo. a) Estudiar el movimiento respecto del suelo de los cuerpos A y B, indicando con claridad la velocidad y la aceleración en cada una de las fases del movimiento y representándolas gráficamente. b) Calcular el tiempo de duración de cada una de las fases del movimiento. c) Calcular la posición final de A respecto de B. d) Calcular el espacio recorrido por el bloque B sobre el suelo.



Solución: I.T.I. 00, 03, I.T.T. 00, 03

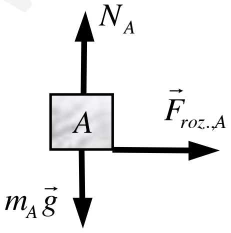
Durante el "choque" entre la bala y el bloque B, si se supone que el tiempo transcurrido es despreciable (como se indica en el enunciado), podemos aplicar la conservación del momento lineal conjunto de los dos cuerpos. La interacción da lugar por lo tanto a un intercambio de momento lineal entre ambos :

$$\Delta\vec{p}_B = -\Delta\vec{p}_{bala} = -m_{bala}\Delta\vec{v}_{bala} \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{v}_B = \frac{\Delta\vec{p}_B}{m_B} = -\left(\frac{m_{bala}}{m_B}\right)\Delta\vec{v}_{bala} = 0.5\hat{\imath} \text{ m/s}$$

A partir de dicho momento, en el que ponemos a cero el cronómetro, se va a iniciar un movimiento unidimensional por parte de los dos bloques con las siguientes condiciones iniciales (las posiciones que tomaremos de los bloques serán las de su lado derecho y tomaremos el origen de posiciones en la situación en que se encuentran los bloques inicialmente):

$$x_{A,0} = x_{B,0} = 0 \quad , \quad v_{A,0} = 0 \text{ m/s} \quad , \quad v_{B,0} = 0.5 \text{ m/s}$$

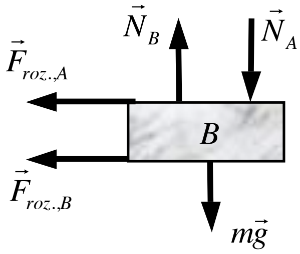
En un primera fase del movimiento tenemos un deslizamiento del bloque A sobre el bloque B. Dibujando el diagrama de fuerzas para cada cuerpo y planteando la segunda ley de Newton:



$$\left.\begin{aligned} N_A &= m_A g \\ F_{roz.,A} &= m_A a_A \\ F_{roz.,A} &= \mu_{AB} N_A \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad a_A = \mu_{AB} g = 6 \text{ m/s}^2$$

El cuerpo A va a realizar un movimiento uniformemente acelerado. En cualquier instante tendremos que:

$$x_A(t) = \frac{1}{2}a_A t^2 = \frac{1}{2}\mu_{AB} g t^2 \quad , \quad v_A(t) = a_A t = \mu_{AB} g t$$



$$\left.\begin{array}{c} N_B = N_A + m_B g = (m_A + m_B) g \\ -F_{roz.,A} - F_{roz.,B} = m_B a_B \\ F_{roz.,B} = \mu_{B,suelo} N_B = \mu_{B,suelo}(m_A + m_B) g \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad a_B = -\left[\mu_{B,suelo}(m_A + m_B) + \mu_{AB} m_A\right]\frac{g}{m_B} = -4.5 \text{ m/s}^2$$

El cuerpo B va a realizar también un movimiento uniformemente acelerado. Su posición y velocidad en cualquier instante serán:

$$x_B(t) = v_{B,0} t + \frac{1}{2} a_B t^2 = v_{B,0} t - \frac{1}{2}\left[\mu_{B,suelo}(m_A + m_B) + \mu_{AB} m_A\right]\left(\frac{g}{m_B}\right) t^2$$

$$v_B(t) = v_{B,0} + a_B t = v_{B,0} - \left[\mu_{B,suelo}(m_A + m_B) + \mu_{AB} m_A\right]\left(\frac{g}{m_B}\right) t$$

Esta fase de movimiento acaba cuando cesa el movimiento relativo entre los dos bloques. Si llamamos t_1 a dicho momento en el que se igualan las velocidades:

$$v_A(t_1) = v_B(t_1) \quad \Rightarrow \quad \ldots \quad t_1 = \frac{m_B v_{B,0}}{(m_A + m_B)(\mu_{AB} + \mu_{B,suelo}) g} = \boxed{\frac{1}{21} \text{ s} = 0.048 \text{ s}}$$

En ese momento la velocidad conjunta de los dos bloques será:

$$v_0 = v_A(t_1) = v_B(t_1) = \mu_{AB} g t_1 = 0.286 \text{ m/s}$$

Y las posiciones de los dos bloques serán:

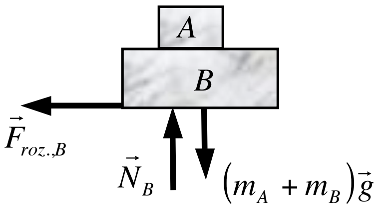
$$x_A(t_1) = \frac{1}{2}\mu_{AB} g t_1^2 = 6.80 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$x_B(t_1) = v_{B,0} t_1 - \frac{1}{2}\left[\mu_{B,suelo}(m_A + m_B) + \mu_{AB} m_A\right]\left(\frac{g}{m_B}\right) t_1^2 = 18.71 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Por lo tanto A se habrá desplazado a la izquierda de B una distancia:

$$\boxed{x_B(t_1) - x_A(t_1) = 11.91 \cdot 10^{-3} \text{ m}}$$

A partir de este momento se inicia la segunda fase del movimiento en la que los dos bloques se mueven conjuntamente. La velocidad conjunta al comienzo de esta fase es la v_0 = 0.286 m/s calculada anteriormente. Si dibujamos el diagrama de las fuerzas que actúan sobre el conjunto de los dos bloques (los consideramos como un único cuerpo) y planteamos la segunda ley de Newton podemos calcular la aceleración del movimiento de los dos bloques:



$$\left.\begin{aligned} N_B &= (m_A + m_B)g \\ -F_{roz.,B} &= (m_A + m_B)a \\ F_{roz.,B} &= \mu_{B,suelo}(m_A + m_B)g \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad a = -\mu_{B,suelo}\, g = -1 \text{ m/s}^2$$

La velocidad del conjunto en función del tiempo será:

$$v(t) = v_0 + a(t - t_1) = v_0 - \mu_{B,suelo}\, g(t - t_1) \qquad (t \geq t_1)$$

Los dos bloques se pararán en el instante t_2:

$$v(t_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 - \mu_{B,suelo}\, g(t_2 - t_1) = 0$$

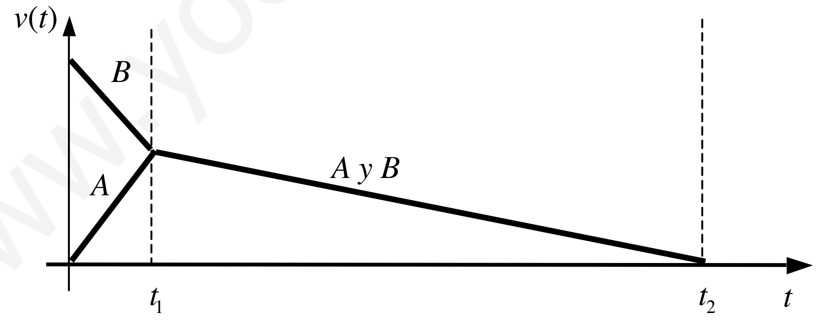
$$\Rightarrow \quad (t_2 - t_1) = \frac{v_0}{\mu_{B,suelo}\, g} = \boxed{\frac{2}{7} \text{ s} = 0.286 \text{ s}} \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{1}{3} \text{ s}$$

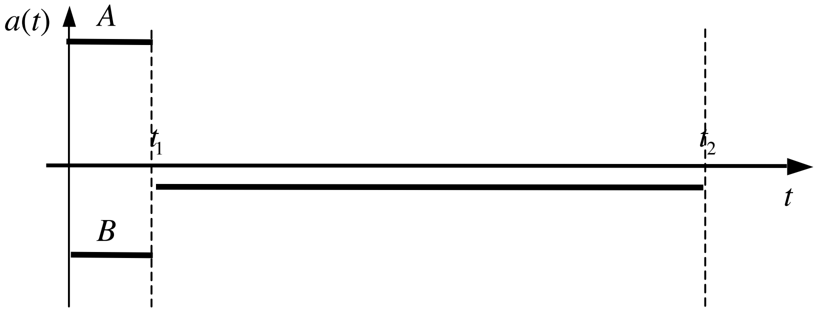
$(t_2 - t_1)$ es el tiempo que dura esta segunda fase del movimiento.

La posición del bloque B cuando se detienen será (hay que tener en cuenta que cuando empieza esta segunda fase del movimiento el bloque B la inicia en la posición inicial $x_B(t_1)$ y con una velocidad v_0 ya calculadas anteriormente):

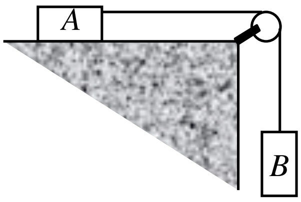
$$x_B(t_2) = x_B(t_1) + v_0(t_2 - t_1) - \frac{1}{2}\mu_{B,suelo}\, g(t_2 - t_1)^2 = \boxed{59.53 \cdot 10^{-3} \text{ m}}$$

Las gráficas de velocidad y aceleración para los dos bloques serán:





El coeficiente de fricción entre A y el plano horizontal es $\mu = 0.4$. ¿Qué velocidad tiene B cuando ha descendido $h = 1.5$ m?
Datos: $m_A = m_B = 1$ kg.



Solución: I.T.I. 92, 99, 03, I.T.T. 03

Si el bloque B ha descendido h el bloque A se ha desplazado horizontalmente también una distancia h (la longitud de la cuerda que une ambos bloques es fija).

La variación de energía cinética del bloque A será: $W_{T,A} + W_{roz.} = \Delta E_{c,A}$, donde el trabajo realizado por la tensión es: $W_{T,A} = T\,h$. Para el bloque B tenemos: $W_{T,B} + W_{grav.,B} = \Delta E_{c,B}$, donde el trabajo realizado por la tensión es: $W_{T,B} = -T\,h$.

Sumando estas dos ecuaciones tenemos que:

$$\Delta E_{c,A} + \Delta E_{c,B} = W_{T,A} + W_{roz.} + W_{T,B} + W_{grav.,B} =$$

$$= W_{roz.} + W_{grav.,B} = W_{roz.} + \left(-\Delta E_{pot.grav.,B}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\left(E_{c,A} + E_{c,B} + E_{pot.grav.,B}\right) = W_{roz.}$$

Y teniendo en cuenta que la variación de energía potencial gravitatoria de A es nula el resultado anterior se podría escribir de la siguiente forma:

$$\Delta\left(E_{c,A} + E_{pot.grav.,A} + E_{c,B} + E_{pot.grav.,B}\right) = W_{roz.}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\left(E_A + E_B\right) = W_{roz.} \quad \Rightarrow \quad \Delta E = W_{roz.}$$

Es decir la variación de la energía total del conjunto (energía total de A más energía total de B) es igual al trabajo realizado por la fuerza no conservativa de rozamiento.

Este mismo resultado se hubiese obtenido si a la hora de hablar de trabajos y energías se tienen en cuenta solamente aquellas fuerzas que el exterior ejerce sobre nuestro sistema, formado en nuestro caso por los bloques A y B (y la cuerda ideal y sin masa que los une). La tensión de la cuerda es una fuerza interna al sistema (una fuerza ejercida entre partes de nuestro sistema) y por lo tanto no aparecerá en el resultado final (sus efectos se compensan como hemos visto en el cálculo inicial). En nuestro caso las únicas fuerzas que se ejercen externamente sobre nuestro sistema son: la normal, que no realiza trabajo y por lo tanto no aparecerá en los cálculos, las fuerzas gravitatorias, cuyo trabajo tendremos en cuenta introduciendo términos de energía potencial gravitatoria, y el rozamiento. La energía de todo nuestro sistema (suma de energías cinéticas y de potenciales gravitatorias en nuestro caso) cambiaría de acuerdo con el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento: $\Delta E = W_{roz.}$.

Para nuestro caso tenemos que si los dos cuerpos parten del reposo y alcanzan una velocidad v:

$$E_{inicial} = m_A g h_A + m_B g h_B$$

$$E_{final} = m_A g h_A + m_B g(h_B - h) + \frac{1}{2} m_A v^2 + \frac{1}{2} m_B v^2$$

$$W_{roz.} = -F_{roz.} h = -\mu N_A h = -\mu m_A g h$$

$$\Delta E = E_{final} - E_{inicial} = W_{roz.} \quad \Rightarrow \quad -m_B g h + \frac{1}{2}(m_A + m_B) v^2 = -\mu m_A g h$$

$$\Rightarrow \quad v = \left[2\left(\frac{m_B - \mu m_A}{m_A + m_B} \right) g h \right]^{\frac{1}{2}} = \boxed{2.97 \text{ m/s}}$$