

# FÍSICA GENERAL

**SANTIAGO BURBANO DE ERCILLA**

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICAS Y QUÍMICAS

**ENRIQUE BURBANO GARCÍA**

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**CARLOS GRACIA MUÑOZ**

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICAS



**Editorial Tébar, S.L.**

Gaztambide, 61 28015 Madrid Tel.: 91 550 02 60 Fax: 91 550 02 61  
e-mail: pedidos@editorialtebar.com www.editorialtebar.com

# CONTENIDO

Capítulo I. FÍSICA. MAGNITUDES FÍSICAS. SISTEMAS DE UNIDADES. ERRORES EN LAS MEDIDAS .....	11	<b>DINÁMICA DE LOS SISTEMAS DE PARTÍCULAS</b>	
A) El método científico .....	11	Capítulo VIII. DINÁMICA DE LOS SISTEMAS DE PARTÍCULAS DISCRETOS .....	167
B) Magnitudes físicas. Unidades .....	13	A) Sistemas de partículas discretos .....	167
C) Cualidades de los aparatos de medida. Errores en las medidas .....	19	B) Magnitudes dinámicas angulares de los sistemas de partículas .....	172
D) Medida de longitudes, tiempos y masas. Densidad .....	20	C) Energía en los sistemas de partículas .....	175
Problemas .....	26	D) Choques entre parejas de partículas .....	179
Capítulo II. CÁLCULO VECTORIAL. SISTEMAS DE REFERENCIA .....	29	Problemas .....	183
A) Vectores y escalares. Sistemas de referencia cartesianos .....	29	Capítulo IX. CINEMÁTICA Y ESTÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO ..	189
B) Álgebra vectorial .....	32	A) Cinemática del sólido rígido .....	189
C) Teoría de momentos .....	38	B) Momentos .....	192
D) Cálculo infinitesimal vectorial .....	42	C) Estática del sólido rígido .....	196
E) Coordenadas polares .....	44	D) Resistencia a la rodadura .....	197
Problemas .....	45	Problemas .....	198
		Capítulo X. DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO .....	203
		A) Análisis general .....	203
		B) Trabajo y energía de un sólido en rotación .....	211
		C) Oscilaciones, péndulo físico y giróscopo .....	213
		Problemas .....	219
		Capítulo XI. EL CAMPO GRAVITATORIO .....	227
		A) Intensidad de campo gravitatorio .....	228
		B) Leyes de Kepler .....	230
		C) Energía potencia gravitatoria .....	232
		D) Potencial gravitatorio .....	234
		E) Trayectorias en un campo gravitatorio .....	237
		F) Aplicación del teorema de Gauss .....	240
		Problemas .....	242
		Capítulo XII. ESTUDIO BÁSICO DE LA ESTRUCTURA DE LA MATERIA. MECÁNICA DE FLUIDOS .....	245
		A) Estudio básico de la estructura de la materia .....	245
		B) Hidrostática .....	253
		C) Aerostática .....	260
		D) Dinámica de fluidos en régimen de Bernouilli .....	264
		E) Dinámica de los fluidos reales .....	271
		Problemas .....	276
		Capítulo XIII. ELASTICIDAD. FENÓMENOS MOLECULARES EN LOS LÍQUIDOS .....	283
		A) Elasticidad .....	283
		B) Fenómenos moleculares en los líquidos .....	288
		Problemas .....	294
		Capítulo XIV. TEMPERATURA Y DILATACIÓN. TEORÍA CINÉTICO MOLECULAR .....	297
		A) Termometría .....	298
		B) Dilatación de sólidos .....	301
		C) Dilatación de líquidos .....	304
		D) Dilatación de gases ideales .....	306
		E) Teoría cinético molecular .....	309
		Problemas .....	312
		Capítulo XV. EL CALOR Y SUS EFECTOS .....	315
		A) Calorimetría .....	315
		B) Cambios de estado o de fase .....	318
		C) Licuefacción de gases. Ecuación de Van der Waals .....	324
		D) Transmisión de calor .....	328
		E) Disoluciones: propiedades coligativas .....	329
		Problemas .....	334
Capítulo III. CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA. MAGNITUDES FUNDAMENTALES. MOVIMIENTO RECTILÍNEO ....	47		
A) Introducción .....	47		
B) Magnitudes fundamentales de la cinemática de la partícula .....	48		
C) Movimientos rectilíneos. Magnitudes angulares .....	52		
D) Casos particulares del movimiento rectilíneo .....	54		
Problemas .....	64		
Capítulo IV. CINEMÁTICA DE LOS MOVIMIENTOS CURVILÍNEOS DE LA PARTÍCULA. MOVIMIENTOS RELATIVOS .....	69		
A) Movimientos curvilíneos de la partícula .....	69		
B) Estudio de diversos movimientos curvilíneos singulares de la partícula .....	74		
C) Movimientos relativos .....	78		
Problemas .....	83		
		<b>DINÁMICA DE LA PARTÍCULA</b>	
Capítulo V. FUERZA Y MASA. LAS TRES LEYES DE NEWTON. ESTÁTICA DE LA PARTÍCULA .....	89		
A) Primera ley de Newton. Concepto de fuerza. Estática de la partícula .....	89		
B) Momento lineal. Segunda y tercera ley de Newton .....	96		
C) Magnitudes dinámicas angulares de la partícula .....	99		
D) Sistemas no inerciales. Dinámica del movimiento relativo de la partícula .....	103		
Problemas .....	108		
Capítulo VI. PESO. ROZAMIENTO. OSCILACIONES .....	117		
A) Peso. Centro de gravedad .....	117		
B) Rozamiento por deslizamiento .....	121		
C) Dinámica de las oscilaciones mecánicas .....	123		
Problemas .....	129		
Capítulo VII. TRABAJO Y ENERGÍA. TEORÍA DE CAMPOS. PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA .....	137		
A) Trabajo, potencia, energía .....	137		
B) Teoría de campos .....	140		
C) Energías cinética y potencial gravitatoria. Principio de conservación de la energía .....	149		
D) Energía en los osciladores. Resonancia .....	154		
Problemas .....	160		

# 10 CONTENIDO

Capítulo XVI. PRIMER Y SEGUNDO PRINCIPIOS DE LA TERMODINÁMICA .....	337	I) Amperímetros. Voltímetros y vatímetros para corrientes alternas .....	535
A) Primer principio de termodinámica .....	337	J) Máquinas eléctricas: generadores de corriente alterna .....	536
B) Segundo principio de termodinámica .....	344	K) Generadores de corriente continua .....	539
C) Máquinas térmicas .....	351	L) Electromotores .....	541
Problemas .....	353	M) Transformadores .....	542
Capítulo XVII. ONDAS .....	357	Problemas .....	544
A) Ecuación de ondas .....	357	Capítulo XXIII. ECUACIONES DE MAXWELL. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS .....	551
B) Energía e intensidad de las ondas .....	362	A) Ecuaciones de Maxwell .....	551
C) Efecto Doppler-Fizeau .....	365	B) Ondas electromagnéticas .....	552
D) Superposición de ondas. Interferencias .....	367	Problemas .....	566
E) Difracción, reflexión y refracción .....	374	Capítulo XXIV. ÓPTICA GEOMÉTRICA I .....	569
F) Polarización .....	378	A) Propagación de la luz, reflexión y refracción .....	569
G) Acústica. Propagación del sonido .....	379	B) Prisma óptico .....	578
H) Cualidades físicas del sonido .....	382	C) Dioptrio esférico .....	579
I) Instrumentos musicales .....	385	D) Espejos .....	583
J) Percepción del sonido .....	387	Problemas .....	587
Problemas .....	389	Capítulo XXV. ÓPTICA GEOMÉTRICA II .....	591
<b>ELECTROMAGNETISMO</b>		A) Sistemas ópticos centrados .....	591
Capítulo XVIII. ELECTROSTÁTICA .....	395	B) Sistemas compuestos. Lentes .....	594
A) Principios fundamentales de la electrostática .....	395	C) Aberraciones geométricas .....	598
B) El campo eléctrico .....	399	D) El ojo humano .....	599
C) Energía potencial de punto .....	406	E) Instrumentos de óptica .....	601
D) La función potencial del campo electrostático .....	409	Problemas .....	607
E) Energía asociada a un campo eléctrico .....	413	Capítulo XXVI. ÓPTICA FÍSICA .....	611
Problemas .....	415	A) Dispersión de la luz. Espectroscopía .....	613
Capítulo XIX. EL CAMPO ELÉCTRICO EN LA MATERIA .....	419	B) Radiación térmica. Cuerpo negro .....	617
A) Conductores cargados en equilibrio. Capacidad .....	419	C) Fotometría .....	622
B) Fenómenos de influencia .....	422	D) El color .....	625
C) Condensadores .....	426	E) Interferencias luminosas .....	629
D) Dieléctricos. Polarización .....	429	F) Difracción de la luz .....	634
E) El vector desplazamiento .....	435	G) Polarización .....	640
Problemas .....	439	Problemas .....	645
Capítulo XX. CORRIENTE ELÉCTRICA CONTINUA .....	443	<b>RELATIVIDAD</b>	
A) Corriente eléctrica: intensidad y resistencia. Efecto Joule ..	443	Capítulo XXVII. CINEMÁTICA Y DINÁMICA RELATIVISTAS .....	649
B) Fuerza electromotriz. Circuito fundamental de corriente continua .....	450	A) Cinemática relativista .....	649
C) Análisis de circuitos: leyes de Kirchhoff .....	452	B) Dinámica relativista .....	659
D) Corrientes no estacionarias. Corriente de desplazamiento ..	454	Problemas .....	665
E) Generadores termoeléctricos .....	457	<b>EL ÁTOMO</b>	
F) Corriente continua en líquidos. Electrólisis. Pilas y acumuladores .....	458	Capítulo XXVIII. CORTEZA ATÓMICA .....	669
G) Paso de la corriente a través de los gases .....	464	A) Teoría de los cuantos .....	669
Problemas .....	466	B) Modelo atómico de Bohr .....	671
Capítulo XXI. EL CAMPO MAGNÉTICO .....	475	C) Correcciones al modelo de Bohr. Números cuánticos .....	676
A) Introducción .....	475	D) Átomos con más de un electrón .....	681
B) Fuerza de Lorentz: aplicaciones .....	478	E) Láser y máser .....	686
C) Ley de Biot y Savart: aplicaciones .....	484	F) Rayos X .....	688
D) Propiedades generales del campo magnético. Ley de Ampère .....	490	G) Dualidad onda-corpúsculo .....	692
E) Campos magnéticos producidos por corrientes no estacionarias .....	494	H) Mecánica cuántica .....	694
F) Propiedades magnéticas de la materia .....	495	Problemas .....	701
G) Aparatos de medida de la corriente continua .....	506	Capítulo XXIX. ELECTRÓNICA .....	703
Problemas .....	508	A) Teoría de bandas .....	703
Capítulo XXII. CORRIENTES INDUCIDAS .....	513	B) Válvulas electrónicas .....	707
A) Leyes de Faraday y de Lenz .....	513	C) Tubos fotoeléctricos .....	713
B) Autoinducción e inducción entre corrientes .....	517	D) Aplicaciones de los rayos catódicos .....	714
C) Energía magnética. Descarga oscilante de un condensador .....	521	E) Dispositivos con semiconductores .....	717
D) Corrientes alternas: producción. Elementos básicos de una red eléctrica .....	524	F) Conmutación y puertas lógicas .....	723
E) Estudio del circuito básico de corriente .....	527	Problemas .....	724
F) Intensidad y FEM eficaces. Potencia de una corriente alterna .....	529	Capítulo XXX. EL NÚCLEO ATÓMICO .....	727
G) Impedancias en serie y en paralelo. Método fasorial .....	532	A) Características del núcleo .....	727
H) Fenómenos de resonancia .....	533	B) Radiactividad natural .....	732
		C) Reacciones nucleares .....	739
		D) Reacciones de fisión y de fusión .....	745
		E) Partículas elementales .....	753
		Problemas .....	759

# CAPÍTULO I

## FÍSICA. MAGNITUDES FÍSICAS. SISTEMAS DE UNIDADES. ERRORES EN LAS MEDIDAS

### A) EL MÉTODO CIENTÍFICO\*

#### I – 1. Física

De sobra son conocidas infinidad de palabras que el lenguaje diario pone en nuestras bocas: velocidad, fuerza, energía, luz, color, sonido, etc. y tantas y tantas otras que forman parte de nuestra cotidiana conversación. Si nos introducimos en campos más profesionalizados nos encontramos con tecnicismos tales como: luminotecnica, resonancia, reactancia, ondas moduladas, etc., que son utilizados y a veces intuitivamente comprendidos por individuos tan dispares como podamos encontrar dentro de las más diferentes clases profesionales. Desde las más elevadas posiciones intelectuales; médicos, biólogos, geólogos, filósofos, historiadores, geógrafos, ingenieros, etc., hasta el más humilde trabajador, todos, absolutamente todos ellos sin excepción, necesitan en un momento determinado de la Física para comprender algo que en ellos o fuera de ellos está sucediendo; toda persona, aunque no haya seguido nunca un curso de Física, llega a su estudio teniendo más conocimiento sobre el tema de lo que podría suponer, de lo contrario, no hubiera podido vivir en este mundo sin tener cierta conciencia de esta disciplina.

La palabra física procede del vocablo griego *φύσις* que significa naturaleza, pudiéndose decir que *la Física es una rama de la Filosofía Natural y estudia las propiedades básicas del Universo y por tanto está regida por los inalterables principios que la naturaleza impone.*

#### I – 2. El método científico

La Física trata de dar contestación a los fenómenos de la Naturaleza, fenómenos de cada día, de cada instante, comienza por dar al hombre que la trabaja un agudo espíritu de observación, obligándole en todo momento a preguntarse los motivos (¿por qué?) de ciertos cambios que su medio material experimenta. Al no contentarse con un mero «por que sí» se obliga a recorrer todos los conocimientos que de éstas y otras disciplinas tiene, aunque es probable que previo a este análisis memorístico, trate de clasificar el fenómeno. Su imaginación juega, sus sentidos observan y analizan, su inteligencia determina, llegando en un alto porcentaje de los casos a la conclusión de que la Física puede darle una respuesta aclaratoria del fenómeno observado.

Esta inquietud del hombre condicionada a su razón, tratando de explicarse los fenómenos que ocurren a su alrededor, hace que se organice sistemáticamente, estableciéndose un método para encontrar respuesta a sus interrogantes: *observación, razonamiento y experimentación* constituyen lo que llamamos el MÉTODO CIENTÍFICO; no necesariamente este proceso sigue el orden que hemos establecido, piénsese, por ejemplo, en los trabajos de Dimitri I. Mendeléiev (1834-1907) ordenando los elementos en lo que hoy se denomina sistema periódico, atreviéndose a dejar huecos prediciendo la existencia de elementos desconocidos hasta entonces, adelantándose la razón a la observación. Muy frecuentemente, trabajos realizados por los que han sido llamados físicos teóricos y que a primera vista parecen puramente teóricos y abstractos, encuentran con el tiempo las más diversas aplicaciones técnicas.

En el estudio de la Física en general, las Matemáticas constituyen la herramienta fundamental en la descripción del comportamiento físico; sin embargo, la descripción perfectamente pormenorizada no es posible debido al comportamiento anárquico de la naturaleza en muchas de sus facetas. La aplicación de las Matemáticas a un fenómeno físico implica un conocimiento exhaustivo del problema, su formulación matemática representa un modelo o descripción límite ideal, que se aproxima, pero nunca alcanza por completo la situación física real. El estudiante debe tener un proceso dual en su mente, debe pensar en la situación física y también de acuerdo con la descripción matemática correspondiente; al construir el modelo matemático idealizado, para su aplicación a un problema real, debe conocer las limitaciones y aproximaciones que se han realizado y por supuesto tener conocimiento de las consecuencias que pueden tener, en muchos casos decimos que no influyen o que son despreciables. Esta aproximación es totalmente válida en un conocimiento en que es aplicada al problema técnico, siempre que los efectos de esta aproximación no vulneren el funcionamiento del mecanismo, estructura, prototipo... que se ha aplicado.

\* Algunas de las definiciones que vamos a dar en este capítulo son incompletas, ya que definir palabras tan ambiguas como *principio, hipótesis*, etc. es cuestión de la Filosofía pura.

### I – 3. Fenómeno científico. División de la Física

La Física estudia el FENÓMENO CIENTÍFICO dando categoría de tal a *toda manifestación de orden material*. Partiendo del fenómeno y mediante observación de otros similares, ya ocurridos, ya artificialmente provocados, se elabora la CIENCIA. El principio de la ciencia, casi su definición, es el siguiente: *la comprobación de todo conocimiento es el experimento. El EXPERIMENTO es el único método de comprobación de la verdad científica.*

La Física estudia estas manifestaciones de la naturaleza, haciéndolo de una manera puramente CUALITATIVA (descripción del fenómeno), o CUANTITATIVA (medida de las magnitudes y relaciones de variación entre ellas).

Hasta el signo XIX se convenía en distinguir dos tipos de fenómenos científicos: el FENÓMENO QUÍMICO *en el que la materia experimenta cambios en su composición*, en caso contrario el FENÓMENO ES FÍSICO. Son fenómenos físicos las caídas de los cuerpos, su calentamiento, iluminación, color, fusión, vaporización, etc. La combustión de un cuerpo es un fenómeno químico.

Actualmente nos resulta muy difícil poner un límite definido entre la Física y otras Ciencias naturales; la separación hecha entre Física y Química no es real, existen extensas regiones limítrofes entre ambas; igual les ocurre a otras ramas de la Filosofía Natural a las que se les han aplicado los métodos físicos, tales como la Biología, la Medicina, etc.

Pasa exactamente lo mismo al tratar de delimitar en partes a la Física, unas y otras se solapan; digamos de todos modos, que la Física Clásica, atendiendo a la fenomenología que se estudia, se divide en las siguientes partes: MECÁNICA, TERMOLOGÍA, ELECTROMAGNETISMO y ÓPTICA que estudian respectivamente los movimientos, el calor y la temperatura, los fenómenos producidos por los cuerpos cargados y la luz. A principios del presente siglo, en 1905, Einstein demostró la necesidad de hacer un estudio diferente al que realiza la mecánica clásica o Newtoniana, para los objetos que se mueven a velocidades comparables a la luz ( $c = 3 \times 10^8$  m/s), naciendo la parte de la Física que se denomina MECÁNICA RELATIVISTA. No se tardó mucho tiempo para que Planck, de Broglie, Shrödinger y otros, descubrieran que los objetos de tamaño atómico a más pequeños, requería un tratamiento diferente al dado hasta entonces, por lo que surge una nueva parte de la Física a la que llamamos MECÁNICA CUÁNTICA. De todas las maneras, todas las partes de la Física, incluyendo estas dos últimas, siguen solapándose; y muchos de los trabajos de la vanguardia de la Física pertenecen a estas dos últimas mecánicas o a ambas.

### I – 4. Principios

El FENÓMENO CIENTÍFICO es ante todo un fenómeno de la NATURALEZA y por tanto su estudio comenzará mediante la aplicación al mismo de una serie de PRINCIPIOS los cuales pueden ser: *axiomáticos, definatorios e hipotéticos*. A partir de ellos, y mediante una exhaustiva comprobación a distintos niveles cuantitativos y cualitativos, se llega a las LEYES Y TEORÍAS que nos dan cuenta del acontecer fenoménico.

Entendemos por PRINCIPIO la *verdad primera, más evidente que las demás y cuyo conocimiento adquirimos con la razón; no necesita la comprobación matemática alguna*. Son todos ellos universalmente admitidos. Como hemos dicho pueden ser de tres tipos:

- PRINCIPIO AXIOMÁTICO O AXIOMA: *Proposición evidente por sí misma*. Ejemplo: «La distancia mínima entre dos puntos de un plano es una línea recta».
- PRINCIPIO DEFINITORIO O DEFINICIÓN: *Nos expresa la construcción o generación de una magnitud*. Ejemplo: «Trabajo es el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento».
- PRINCIPIO HIPOTÉTICO, POSTULADO O LEY EMPÍRICA: *Toda proposición que sin ser axioma (no es evidente por sí misma) sirve de base explicativa del fenómeno físico*. Como fácilmente puede deducirse, la formulación de un postulado o hipótesis debe proceder de una minuciosa comprobación experimental, cuya probabilidad de certidumbre aumenta en función directa del mayor número de hechos verificables y comprobables con ella. Ejemplo: Principio «Ley» de gravitación universal de Newton.

Del análisis razonado de todas estas «herramientas» primeras de trabajo y estudio, concluimos que todas ellas vienen marcadas por una pauta lineal y continua: *sea cual sea el punto de partida por el que iniciamos el estudio de un fenómeno, éste viene determinado por «imposiciones» de la naturaleza*.

Es de notar, sin embargo, que, conforme el estudio científico avanza y profundiza más, tratando de desentrañar la fenoménica del Universo, conforme el hombre ambicioso y aventurero amplía sus horizontes de observación y análisis, los principios universales se restringen más y más. Y así los que un día fueron considerados como principios, dejan hoy día de serlo, pasando a ser meras consecuencias de principios más generales, es decir, pueden ser demostrados a partir de éstos. A pesar de ellos, por razones de tipo histórico, se sigue empleando para aquellos la denominación genérica con que antaño se les catalogaba. (Principio de Pascal, Principio de Arquímedes, etc.). Dichos «principios» son actualmente simples teoremas y de esta manera debería denominárseles.

### I – 5. Leyes. Constantes físicas

De los principios y de sus aplicaciones a fenómenos determinados y concretos se extrae la LEY FÍSICA. Ésta es pues, en general, *un hecho, una verdad restringida por la aplicación de los principios a circunstancias particulares de instrumentación y medio; concreta la medida de las magnitudes físicas permitiendo, en fin, establecer relaciones de variación entre unas y otras.* Expresada la ley mediante una fórmula matemática significa una idea, debiendo ser por su reducido alcance lo más sencilla posible. Podríamos afirmar de una ley Física formulada que isalta de la pizarra su configuración conceptual y su significación sencilla y clara!

En su forma más general podríamos expresar matemáticamente una ley de la siguiente forma:  $a = f(b, c, d, \dots)$ . Es decir, el valor de la magnitud  $a$  depende de los valores de las magnitudes  $b, c, d$ , etc.

LAS CONSTANTES FÍSICAS que intervienen en las fórmulas que expresan las leyes, pueden ser UNIVERSALES O CIRCUNSTANCIALES, según que su valor sea siempre el mismo, cualesquiera que sean las condiciones del lugar, tiempo, temperatura, etc., o bien dependa de las condiciones en que el fenómeno se realiza. Ejemplos: la constante de gravitación  $G$ , la de los gases perfectos  $R$ , la carga de un electrón  $e$  son constantes universales. La velocidad inicial  $v_0$ , la constante de la ley de Boyle-Mariotte  $K$ , el coeficiente dieléctrico de un medio  $\epsilon \dots$  son constantes circunstanciales.

### I – 6. Teoría y teorema

Un paso más adelante en el desarrollo estructural de la elaboración sistemática nos lleva a considerar el término genérico de TEORÍA, *entendiéndose como tal la deducción y planificación de los fenómenos particulares que, a la luz de principios y leyes, pueden ser estudiados y comprendidos.* Como instrumento inseparable del desarrollo teórico acudimos en general a la lógica y en particular al razonamiento matemático.

Llegamos finalmente a la cúspide de esta gran pirámide científica que constituye la Física mediante la aceptación de las conclusiones lógico-matemáticas que la formulación de una Ley nos determina y que denominamos con la palabra TEOREMA. *Expresión viva y sencilla del símbolo matemático a que reducimos el fenómeno científico, la cual nos da la esencia viva del fenómeno mismo frente a la fría e inerte expresión de una fórmula.*

## B) MAGNITUDES FÍSICAS. UNIDADES

### I – 7. Magnitud y cantidad

MAGNITUD es todo aquello susceptible de medida. Ejemplo: La longitud, la masa, el tiempo, son magnitudes, ya que pueden medirse.

MEDIR es comparar dos magnitudes de la misma especie, una de las cuales se toma como UNIDAD. Ejemplo: Si  $A$  y  $B$  son magnitudes de la misma especie, y se toma  $A$  como unidad, el número de unidades  $A$  que se necesitan para hacer una magnitud igual a  $B$  expresa la medida de  $B$ .

CANTIDAD DE UNA MAGNITUD es el número de unidades a que es equivalente dicha magnitud. Ejemplo: El tiempo es una magnitud; siete años es una cantidad.

### I – 8. Unidad: expresión de una medida

UNIDAD es una cantidad arbitraria que se adopta para comparar con ella cantidades de su misma especie. En la elección de una unidad influye la extensión de la cantidad a medir. Ejemplos: Para la medida de la distancia de la Tierra a una estrella de las llamadas lejanas escogeremos el año luz; para la distancia entre dos ciudades el kilómetro; en la venta de un cable el metro; en la medida del espesor de una lámina el milímetro y para la medida de la longitud de onda de la luz la milimicra o el angström ( $\text{Å}$ ). No es necesario que sean éstas las unidades empleadas; siempre que nos convenga podemos tomar como unidad cualquier cantidad arbitraria: si llamamos  $A$  a una cantidad (superficie en la Fig. I-1), la cantidad  $B$  equivale a  $4A$ ; hemos medido  $B$  adoptando  $A$  como unidad.

La expresión de una medida es un número concreto, es decir, un número (veces que la cantidad contiene a la unidad) seguido del nombre o expresión de la unidad empleada en la medida (500 kilómetros; 26 metros; 2 milímetros).

### I – 9. Condiciones que debe reunir la unidad. Unidad natural

En toda unidad de medida se debe poder determinar la igualdad y la suma. Ejemplo: adoptada una determinada longitud como unidad metro, ha de poder establecerse qué magnitud es igual a un metro y qué magnitud contiene dos, tres, cuatro veces a nuestra unidad. De aquí nace el concepto de múltiplo ( $\text{km} = 1\,000\text{ m}$ ) empleado, a su vez, como unidad en medidas adecuadas. Este criterio de suma, que nos lleva a establecer múltiplos, nos da como consecuencia la posibilidad de conseguir submúltiplos o divisores de la unidad, pues si el km se puede dividir en 1 000 partes

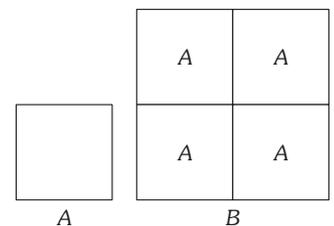


Fig. I-1.- La medida de  $B$  es  $4A$ .

Factor	Prefijo	Símbolo
$10^{24}$	yotta	Y
$10^{21}$	zetta	Z
$10^{18}$	exa	E
$10^{15}$	peta	P
$10^{12}$	tera	T
$10^9$	giga	G
$10^6$	mega	M
$10^3$	kilo	k
$10^2$	hecto	h
$10^1$	deca	da
$10^{-1}$	deci	d
$10^{-2}$	centi	c
$10^{-3}$	mili	m
$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^{-9}$	nano	n
$10^{-12}$	pico	p
$10^{-15}$	femto	f
$10^{-18}$	atto	a
$10^{-21}$	zepto	z
$10^{-24}$	yocto	y

iguales (metro), el metro goza necesariamente de la misma propiedad, obteniéndose fracciones de la unidad que, a su vez, nos sirven como unidad cuando pueda interesarnos.

Con la intención de llegar a establecer en su día unidades únicas adoptadas universalmente para lo que llamaremos magnitudes fundamentales, y siempre con la idea de elegir conveniente el término adecuado para la extensión de la cantidad a medir, los organismos de carácter internacional [La Conferencia General de Pesas y Medidas (CGPM), el Comité Internacional de Pesas y Medidas (CIPM) y la Unión Internacional de Física Pura y Aplicada (UIFPA)] recomiendan para prefijos, símbolos y valores correspondientes a las unidades simples del Sistema Internacional (SI), que posteriormente definiremos, los indicados en la tabla adjunta.

Un proceder unánime en esta línea, nos proporcionaría un mejor entendimiento y una mayor fluidez en el lenguaje científico, además de una mejor comprensión en el orden de la magnitud de la cantidad a medir. Ejemplo: debemos tener en cuenta que para expresar una fuerza determinada, 1 kilogramo-fuerza por ejemplo, también se puede decir 10 newtones ( $\approx$ ) o  $10^6$  dinas; o que 1 caballo de vapor es 75 kilográmetros por segundo o 735 julios por segundo; esta pluralidad de formas para expresar lo mismo, es indudable que desconcierta al interlocutor y le dificulta el «darse cuenta» de la cantidad expresada.

Existen en la naturaleza cantidades de una magnitud sin posibilidad de poderse encontrar divisores de ella, a tal cantidad la llamamos UNIDAD NATURAL de la magnitud; existen múltiplos enteros de ella pero nunca una fracción. Decimos de tal magnitud que está «cuantificada» y a la unidad la llamamos «quantum». Así por ejemplo: la energía luminosa que emite un foco no varía de forma continua, existe para cada frecuencia una cantidad mínima, llamada «fotón» y que es indivisible. La UNIDAD NATURAL de energía electromagnética es la energía de un fotón.

### I – 10. Magnitudes fundamentales y suplementarias

Son MAGNITUDES FUNDAMENTALES aquellas cuyas unidades se eligen arbitrariamente tomándose como base de los sistemas de unidades y no tienen una ecuación que las defina.

Como los fenómenos físicos se realizan en el espacio mientras transcurre el tiempo; la Naturaleza nos impone, así, dos magnitudes fundamentales: LONGITUD ( $L$ ) y TIEMPO ( $T$ ), sin definición precisa, cuya existencia conocemos desde que se inicia nuestra razón.

En la parte de la Física llamada Mecánica, es necesaria una tercera magnitud fundamental definida por nuestra propia intuición que, con las dos anteriores, permita definir de una manera coherente las demás magnitudes que intervienen en los fenómenos mecánicos; tal magnitud se elige arbitrariamente: en Física teórica se usa la MASA ( $M$ ) y en la técnica la FUERZA ( $F$ ).

Muchos fenómenos físicos varían según la homogeneidad del espacio, en particular en electricidad, teniendo que introducir para su estudio, otra magnitud fundamental llamada COEFICIENTE DIELECTRICO o PERMITIVIDAD ( $\epsilon$ ) que nos mide la variabilidad del espacio, desde el vacío hasta el más complicado medio heterogéneo; o bien, ésta quedará definida si se toma a la INTENSIDAD DE CORRIENTE ( $A$ ) como magnitud fundamental, por lo que puede tomarse como tal a la una o a la otra.

Al variar el «equilibrio energético» dentro del «caos molecular» en los sistemas físicos, es necesario para el estudio de la Termología introducir como magnitud fundamental la TEMPERATURA ( $\theta$ ) que esencialmente nos caracteriza esta situación.

No pudiendo ser eludido, que los fenómenos ópticos, deban ser observados por nuestros ojos, y que la retina tenga unas propiedades que provocan gran variedad de sensaciones, cuya medida entra dentro de la Psicología Experimental, se hace necesario introducir en el estudio de la Fotometría la magnitud fundamental INTENSIDAD LUMINOSA ( $J$ ) que de alguna manera nos mide la sensación de luminosidad en el ojo humano.

Como se verá más adelante, es necesario distinguir entre la magnitud fundamental masa y la que vamos a llamar CANTIDAD DE SUSTANCIA, ( $N$ ); completándose, con esta última elección arbitraria, el cuadro de magnitudes fundamentales ( $L, T, M, A, \theta, J$  y  $N$ ) que actualmente se utilizan en Física.

Son MAGNITUDES SUPLEMENTARIAS, EL ÁNGULO PLANO, definido como la porción de plano limitada por dos semirrectas que parten de un mismo punto; a este punto se le llama vértice y a las semirrectas lados del ángulo; y el ÁNGULO SÓLIDO definido como cada una de las porciones del espacio limitadas por una superficie cónica. Ambas magnitudes son puramente geométricas y todavía no se ha decidido si son fundamentales o derivadas.

### I – 11. Unidades patrones

Elegidas convencionalmente las magnitudes fundamentales (como se explicará más adelante), los diferentes Congresos Científicos Internacionales fijaron las unidades llamadas PATRONES, cuyas definiciones han ido variando con las exigencias de superior precisión en las técnicas metroológicas, y que exponemos a continuación.

La unidad de LONGITUD es el METRO (m): distancia a cero grados centígrados, entre dos trazos paralelos hechos en una barra de platino con 10% de iridio, que se conserva en el Museo Nacional de Pesas y medidas de Sevres, aproximadamente igual a la diezmillonésima parte del cuadrante

del meridiano terrestre. El 16 de octubre de 1960 la Conferencia General cambió la definición clásica del metro, tomando como nuevo patrón (nuevo metro) a  $1\,650\,763\,73$  longitudes de onda, en el vacío, de la radiación correspondiente a la transición entre los niveles  $2p^{10}$  y  $5d^5$  del átomo de cripton 86. Debido a las constantes exigencias de superior precisión, en octubre del 86 la Conferencia General de Pesas y Medidas celebrada en esta fecha en París, define nuevamente el metro como la longitud recorrida en el vacío por las ondas electromagnéticas durante un tiempo de  $1/299\,792\,458$  de segundo (lo que nos indica que la velocidad de estas ondas es  $299\,792\,458$  m/s)\*.

La unidad de MASA es el KILOGRAMO (kg), es la masa del prototipo de platino iridiado sancionado por la Conferencia General de Pesas y medidas en 1901 y depositado en el pabellón de Bretenil de Seures. Este prototipo tiene forma cilíndrica, contiene aproximadamente el 90% de platino y el 10% de iridio, y su masa es muy aproximada a la de un litro de agua destilada a cuatro grados centígrados. Actualmente se define en función de la masa de los átomos como se verá más adelante.

La unidad de TIEMPO es el SEGUNDO (s):  $1/86\,400$  del día solar medio. (86 400 es el número de segundos del día solar medio, que se obtiene multiplicando 24 horas del día, por 60 minutos de la hora y por 60 segundos del minuto). DÍA SOLAR MEDIO es la duración media de los días solares del año, determinadas por el tiempo que tarda el Sol, en su movimiento aparente en realizar un giro en torno a la Tierra. La XI conferencia General de Pesas y medidas de 1960 definió el SEGUNDO como la fracción igual a  $1/31\,556\,925,974\,7$  del año trópico para enero de 1900, cero a doce horas del tiempo efemérides.

Si bien, el patrón segundo astronómico es más exacto que el segundo solar medio, se necesitaba de un patrón material comparable a los prototipos metro patrón y kilogramo patrón; por lo que la XIII Conferencia General de 1967-68, adoptó para EL SEGUNDO el patrón atómico de frecuencia definido como la duración de  $9\,192\,631\,770$  periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133.

La unidad de INTENSIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA es el AMPERIO (A) definido como la intensidad de una corriente eléctrica constante que, mantenida entre dos conductores paralelos rectilíneos, de longitud infinita, de sección circular despreciable y colocados en el vacío a una distancia de un metro uno de otro, produce entre estos dos conductores una fuerza igual a  $2 \times 10^{-7}$  newtons por metro de longitud.

La unidad de TEMPERATURA es el KELVIN (K) definido como grado de la escala termodinámica de las temperaturas absolutas, en la cual la temperatura del punto triple del agua es 273,16 K, por tanto «es la fracción  $1/273,16$  de la temperatura termodinámica del punto triple del agua».

La unidad óptica de INTENSIDAD LUMINOSA es la CANDELA (cd) definida como «la intensidad luminosa en una dirección determinada de una abertura perpendicular a esta dirección, que tenga una superficie de  $1/600\,000$  metro cuadrado y radie como una radiador integral o cuerpo negro a la temperatura de fusión del platino ( $2\,043\text{ K} = 1\,770\text{ °C}$ ), bajo la presión de  $101\,325$  pascales».

## I – 12. Sistemas de unidades

Llamamos SISTEMA DE UNIDADES al conjunto de éstas que resulta de escoger determinadas unidades simples.

La elección del sistema de unidades no se hace, en general, atendiendo a las magnitudes fundamentales; puesto que se eligen unidades simples que tienen con las fundamentales una dependencia funcional. Así, por ejemplo, elegimos en el sistema técnico como unidad por su dependencia con la masa, la magnitud fuerza. Esta unidad es el KILOPONDIO o KILOGRAMO-FUERZA; fuerza con que el kilogramo patrón es solicitado hacia la Tierra, al nivel del mar y  $45^\circ$  de latitud. En este sistema la unidad de masa es una unidad derivada y se llama UNIDAD TÉCNICA DE MASA.

Ya hemos indicado la conveniencia de tomar universalmente un único sistema de unidades; hoy por hoy es una cuestión de adaptación y tránsito por lo que el lenguaje científico no está sujeto a las normas dadas por las CGPM, teniendo el lector que adquirir cierta flexibilidad en el empleo de sistemas de unidades y resultar, por decirlo así, «políglota», lo cual le facilitará la comunicación entre gentes cuyos intereses particulares están situadas en diversos campos; por lo que entramos a definir los distintos sistemas que hoy suelen utilizarse, pero siempre, dándole la máxima importancia al que llamaremos sistema internacional.

En mecánica emplearemos los siguientes sistemas: SISTEMA CEGESIMAL (CGS); sus unidades simples son el centímetro de longitud, el gramo de masa y el segundo de tiempo. SISTEMA GIORGI (G), o MKS; sus unidades simples son el metro de longitud, el kilogramo de masa y el segundo de tiempo. SISTEMA TÉCNICO; sus unidades simples son: el metro, el kilopondio o kilogramo fuerza y el segundo.

En electricidad emplearemos: SISTEMA DE UNIDADES ELECTROSTÁTICAS; sus unidades simples son el centímetro de longitud, el gramo de masa, el segundo de tiempo y el coeficiente dieléctrico para

\* Obsérvese que la tendencia en la búsqueda de un patrón internacional es que su definición sea de naturaleza universal, y no basada en ningún artificio artificial susceptible de variaciones temporales.

el vacío  $\epsilon_0 = 1/4\pi$ . SISTEMA GIORGI ELÉCTRICO; sus unidades simples son el metro de longitud, el kilogramo de masa, el segundo de tiempo y el amperio de intensidad.

SISTEMA INTERNACIONAL (SI): sus unidades simples son el metro de longitud, el kilogramo de masa, el segundo de tiempo, el amperio de intensidad, el kelvin de temperatura, la candela de intensidad luminosa y el mol de cantidad de sustancia. Como vemos es el sistema GIORGI AMPLIADO, cuya extensión debe hacerse a todo tipo de aplicación Científica o Técnica, es el que fundamentalmente adoptaremos en este libro. En este sistema se distingue entre MASA, «como coeficiente característico de cada partícula o cuerpo, que determina su comportamiento cuando interactúa con otras partículas», y la magnitud CANTIDAD DE SUSTANCIA que nos define «la cantidad de elementos o composiciones químicas que llevan los cuerpos»; esta magnitud es diferente de la masa y evidencia que la antigua definición de masa como cantidad de materia es errónea.

UNIDADES FUNDAMENTALES EN EL SI

Magnitud física	Unidad	Abreviatura
Longitud	Metro	m
Masa	Kilogramo	kg
Tiempo	Segundo	s
Corriente eléctrica	Amperio	A
Temperatura	Kelvin	K
Intensidad luminosa	Candela	cd
Cantidad de sustancia	Mol	mol

Se define el MOL como: «la cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas entidades elementales (átomos, moléculas, iones...) como átomos de carbono hay en 0.012 kilogramos de Carbono 12». Su símbolo es «mol». Como veremos en el capítulo XII y en consecuencia, el valor de 1 u (UNIDAD UNIFICADA DE MASA ATÓMICA), será, teniendo en cuenta que 1 u es «la doceava parte de la masa de un átomo del isótopo 12 del Carbono» y que «0,012 kg de Carbono 12 contiene  $6,022 \times 10^{23}$  átomos/mol (NÚMERO DE AVOGADRO):  $1 u = 0,012/12 \times 6,022 \times 10^{23} = 1,660 6 \times 10^{-27}$  kg».

Así por ejemplo sabemos que un mol de hidrógeno contiene dos gramos de hidrógeno, uno de oxígeno contiene 32 gramos de oxígeno, uno de agua 18 gramos de agua... Luego iguales cantidades de sustancia (un mol) contienen generalmente diferentes masas; diferencia evidente entre masa y sustancia. En una reacción química pueden variar el número de moles sin cambiar la masa.

También es importante la medición del sistema ABSOLUTO INGLÉS, utilizado en los países de habla inglesa, en los que se eligen como unidades simples: el pie de longitud, la libra de masa, el segundo de tiempo, y el amperio de intensidad de corriente.

Expresamos a continuación, algunas unidades distintas a las ya definidas, que son normalmente utilizadas en los distintos medios de trabajo; dando su equivalencia en el SI:

MASA		LONGITUD	
1 gramo (g)	= $10^{-3}$ kg	1 micra ( $\mu$ )	= $10^{-6}$ m
1 tonelada métrica (t)	= $10^3$ kg	1 milimicra ( $m\mu$ )	= $10^{-9}$ m
1 libra-masa (lbm)	= 0,453 6 kg	1 angström (Å)	= $10^{-10}$ m
1 slug	= 14,59 kg	1 unidad X (uX)	= $10^{-13}$ m
1 ton, long (2 240 lb)	= 1 016 kg	1 fermi (fm)	= $10^{-15}$ m
1 ton, short (2 000 lb)	= 907,2 kg	1 año luz	= $9,65 \times 10^{15}$ m
1 unidad de masa atómica (u)	= $1,661 \times 10^{-27}$ kg	1 parsec (pc)	= $3,07 \times 10^{16}$ m
1 unidad técnica de masa (utm)	= 9,806 kg	1 milla* (mile)	= 1 609 m
		1 pie (ft)	= 0,304 8 m
		1 pulgada (in)	= $2,54 \times 10^{-2}$ m
		1 yarda (yd)**	= 0,914 4 m
TIEMPO		INTENSIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA	
1 año (a)	= $3,156 \times 10^7$ s	1 UEEI	= $3,336 \times 10^{-10}$ A
1 día (d)	= 84 400 s		
1 hora (h)	= 3 600 s		
1 minuto (min)	= 60 s		

\* Esta es la milla terrestre. La milla marina equivale a 1 852 m.  
 \*\* Definida como unidad básica de longitud para todos los países anglosajones en 1854, como la distancia existente entre dos líneas trazadas sobre dos botones de oro fijos sobre una barra de platino que se conserva en Londres (1 yd = 3 ft).

I – 13. Magnitudes derivadas. Medidas indirectas

Una MAGNITUD es DERIVADA cuando queda terminantemente definida empleando magnitudes simples. Ejemplo: al decir que un automóvil lleva una velocidad de 60 kilómetros por hora, nombramos una cantidad que corresponde a una magnitud derivada o compuesta, ya que en su determinación necesitamos la medida de una longitud (por medio de los pilotes que nos señalan distancias en la carretera, por ejemplo) y de un tiempo (por medio de un reloj o un cronómetro), la velocidad es una magnitud derivada.

Las magnitudes fundamentales o simples, son elegidas convencionalmente, las demás tendrán que depender de ellas; por tanto, el que una magnitud sea simple o derivada será arbitrario. Ya hemos indicado que en el CGS y si la masa es fundamental, y derivada en el sistema TÉCNICO.

Realizamos una MEDIDA INDIRECTA cuando medimos una cantidad a costa de otras que se relacionan con aquella por medio de una fórmula matemática.

La determinación de una magnitud derivada requiere: a) Su definición correcta, clara y concisa. b) Establecer una fórmula matemática en la que se compendien todas las ideas expresadas en la definición. c) Fijar unidades de medida.

Una vez comprendida y aprendida la definición de una magnitud física, hay que expresarla por medio de una fórmula. La FÓRMULA es, en Física, la expresión de una idea. Ejemplo: «Un automóvil ha recorrido 180 km en 3 horas. ¿Cuántos kilómetros ha recorrido de una hora? Un niño operaría así:  $180 \text{ km}/3 \text{ horas} = 60 \text{ km}$  recorridos en una hora; y es que, el cociente de dos números concretos indica el reparto de la magnitud numerador, entre cada una de las unidades del denominador.

Así, se comprende, que cuando se define *velocidad media* como «el espacio medio recorrido en la unidad de tiempo», si llamamos  $s$  al espacio o camino recorrido y  $t$  al tiempo empleado en recorrerlo, formularemos sin duda:

$$\text{velocidad media} = \frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}} \Leftrightarrow \bar{v} = \frac{s}{t}$$

En ocasiones se deberá actuar a la inversa: de unas letras y signos matemáticos, se habrá de traducir a palabras sencillas, la esencia viva de todas esas «fórmulas» que parecen frías y muertas. Ejemplo: nos dan la siguiente fórmula: masa específica media = masa/volumen, o con representación literal:  $\bar{\rho} = M/V$ . Nos preguntan: ¿Qué es masa específica media? Contestaremos sin dudar: masa específica media es la masa que corresponde a cada unidad de volumen.

### I - 14. Unidades derivadas y suplementarias

Para fijar unidades derivadas, basta considerar la fórmula de la magnitud, expresando las unidades simples en el sistema que se desee adoptar.

De acuerdo con las XII y XIV Conferencia General de Pesas y Medidas, adoptamos como unidades suplementarias y derivadas las que se definen en el cuadro de la siguiente página.

La unidad de magnitud suplementaria ÁNGULO PLANO es el RADIÁN (rad) definido como: ángulo plano que, teniendo su vértice en el centro de un círculo, intercepta sobre la circunferencia de este círculo, un arco de longitud igual al radio.

La unidad de la magnitud suplementaria ÁNGULO SÓLIDO ( $\omega$ ) es el ESTERERRADIAN (sr) definido como: el ángulo sólido que teniendo su vértice en el centro de una esfera, abarca sobre la superficie de ésta un área equivalente al cuadrado del radio. Según esta definición, dividiendo el área ( $A$ ) de la porción de la esfera que se limita, por el cuadrado del radio de ésta, ( $R^2$ ), tendremos medido el ángulo sólido en estereorradianes, es decir:  $\omega = A/R^2$ . Así por ejemplo, a la superficie total de la esfera ( $A = 4\pi R^2$ ), le corresponderán  $\omega = 4\pi$  sr.

(Ver tabla de unidades suplementarias y derivadas en la página siguiente.)

**PROBLEMAS: 1 al 4.**

### I - 15. Ecuación de dimensiones

Toda magnitud derivada se puede expresar por medio de un producto, ECUACIÓN DE DIMENSIONES, de las unidades simples y expresan la manera de intervenir en su formación.

Para que el análisis que realizamos a continuación sea lo más sencillo posible, empleamos solamente tres magnitudes fundamentales, pudiéndose generalizar a tantas como se quiera. Representaremos por  $L$ ,  $M$  y  $T$  las unidades, cualesquiera que sean, de longitud, masa y tiempo (unidades simples de los sistemas CGS y GIORGI); y por  $L$ ,  $F$  y  $T$  las de longitud, fuerza y tiempo (unidades simples en el SISTEMA TÉCNICO).

La ecuación de dimensiones de una magnitud  $S$  en base  $L$ ,  $M$  y  $T$  se escribirá de la forma:

$$[S] = L^a M^b T^c$$

Ejemplos: una superficie, producto de dos dimensiones lineales, tendrá por ecuación de dimensiones: [superficie] =  $L \times L = L^2$ . De la misma forma [volumen] =  $L \times L \times L = L^3$ , [velocidad] =  $L/T = LT^{-1}$ .

La ecuación de dimensiones sirve para relacionar las unidades de los diversos sistemas. Así, para ver las veces que una unidad de un sistema contiene a la correspondiente de otro, basta sustituir en su ecuación de dimensiones cada unidad simple por su equivalente en el nuevo sistema. Ejemplo: para reducir km/h a cm/s, como  $[v] = LT^{-1}$  pondremos  $1 \text{ km/h} = 10^5 (60 \times 60)^{-1} = 27,78 \text{ cm/s}$ .

Las magnitudes suplementarias son adimensionales. En efecto: consideremos por ejemplo el caso de un ángulo como el de la Fig. I-2, lo podemos medir considerando  $\varphi$  como el cociente entre dos magnitudes,  $s$  y  $R$ , pudiendo expresarlo como magnitud derivada:  $\varphi = s/R$ ; pero tanto el arco  $s$  como el radio  $R$  se miden en unidades de longitud y ambas tienen la dimensión  $L$ , luego:  $[\varphi] = L/L = 1$  y la unidad del ángulo plano  $\varphi = 1 \text{ rad}$  es la unidad de una magnitud adimensional. Radián, grado y estereorradián no son unidades reales, sino descripciones del modo en que se

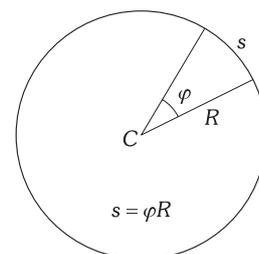


Fig. I-2.- El ángulo  $\varphi$  es una magnitud adimensional, por ser el cociente de dos longitudes.

UNIDADES SUPLEMENTARIAS Y DERIVADAS			
Magnitud	Unidad	Símbolo	Expresión en otras unidades SI
UNIDADES SUPLEMENTARIAS			
Ángulo plano	radián	rad	
Ángulo sólido	estereorradián	sr	
UNIDADES DERIVADAS			
Superficie	metro cuadrado	m <sup>2</sup>	
Volumen	metro cúbico	m <sup>3</sup>	
Frecuencia	hertz	Hz	1/s
Densidad	kilogramo por metro cúbico	kg/m <sup>3</sup>	
Velocidad	metro por segundo	m/s	
Velocidad angular	radián por segundo	rad/s	
Aceleración	metro por segundo cuadrado	m/s <sup>2</sup>	
Aceleración angular	radián por segundo cuadrado	rad/s <sup>2</sup>	
Fuerza	newton	N	kg · m/s <sup>2</sup>
Presión (tensión mecánica)	pascal	Pa	N/m <sup>2</sup>
Viscosidad cinemática	metro cuadrado por segundo	m <sup>2</sup> /s	
Viscosidad dinámica	pascal por segundo	Pa · s	N · s/m <sup>2</sup>
Trabajo, energía, cantidad de calor	julio	J	N · m
Potencia	vatio	W	J/s
Cantidad de electricidad	culombio	C	A · s
Tensión eléctrica, diferencia de potencial, fuerza electromotriz	voltio	V	W/A
Intensidad de campo eléctrico	voltio por metro	V/m	
Resistencia eléctrica	ohmio	Ω	V/A
Conductancia eléctrica	siemens	S	A/V
Capacidad eléctrica	faradio	F	C/V
Flujo de inducción magnética	weber	Wb	V · s
Inducción electromagnética	henrio	H	Wb/A
Inducción magnética	tesla	T	Wb/m <sup>2</sup>
Intensidad de campo magnético	amperio por metro	A/m	
Fuerza magnetomotriz	amperio	A	
Flujo luminoso	lumen	lm	cd · sr
Luminancia	candela por metro cuadrado	cd/m <sup>2</sup>	
Illuminación	lux	lx	lm/m <sup>2</sup>
Número de ondas	una onda por metro	1/m	
Entropía	julio por kelvin	J/K	
Calor específico	julio por kilogramo kelvin	J/(kg · K)	
Conductividad térmica	vatio por metro kelvin	W/(m · K)	
Intensidad energética	vatio por estereorradián	W/sr	
Actividad (de una fuente radiactiva)	una desintegración por segundo	Bq	1/s

miden el ángulo plano y el ángulo sólido. Muchas magnitudes utilizadas en Física son adimensionales; un ejemplo más de éstas es el coeficiente de las adiabáticas, definido por el cociente entre dos calores específicos de idénticas dimensiones.

**I – 16. Homogeneidad de las fórmulas físicas**

Para que la fórmula representativa de una ley que nos relaciona diversas magnitudes físicas sea correcta, debe ser homogénea; es decir: las ecuaciones dimensionales de sus dos miembros deben ser idénticas.

Así, si una magnitud S tiene por ecuación de dimensiones:

$$[S] = L^a M^b T^c$$

cuando viene expresada en función de otras tres P, Q y R por la fórmula:

$$S = P^{x_1} Q^{x_2} R^{x_3}$$

siendo:  $[P] = L^{a_1} M^{b_1} T^{c_1}$        $[Q] = L^{a_2} M^{b_2} T^{c_2}$        $[R] = L^{a_3} M^{b_3} T^{c_3}$

tendrá que verificarse:

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= a \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= b \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 &= c \end{aligned}$$

que serán las CONDICIONES DE EQUIDIMENSIONALIDAD (HOMOGENEIDAD) de la magnitud S.

**PROBLEMAS: 5 al 16.**

### C) CUALIDADES DE LOS APARATOS DE MEDIDA. ERRORES EN LAS MEDIDAS

#### I – 17. Cualidades de los aparatos de medida

**FIDELIDAD.**– Decimos que un instrumento de medida es «fiel» cuando realizando diversas medidas de una misma magnitud en las mismas condiciones los resultados obtenidos son idénticos.

**EXACTITUD.**– Un aparato de medida es exacto cuando la medida realizada con él nos da justamente el valor de la magnitud física.

**PRECISIÓN.**– Es la mínima variación de una magnitud que un instrumento de medida puede determinar. Ejemplo: una precisión de 0,1 mg en una balanza, indica que podemos dar sin error la cuarta cifra decimal de una masa expresada en gramos.

**SENSIBILIDAD.**– Un aparato de medida es tanto más sensible cuanto menor es el valor de su «precisión» es decir, cuando aprecia menores variaciones en el valor de la magnitud a medir. Ejemplo: una balanza capaz de apreciar 0,1 mg es 10 veces más precisa que la que aprecia solamente 1 mg.

#### I – 18. Errores o incertidumbres de las medidas

La precisión necesaria de una medida física depende, tanto de la naturaleza de la magnitud a medir, como de su tamaño. Ejemplo: tan absurdo sería pretender fijar la distancia entre dos ciudades con errores menores que un milímetro, como despreciar esta unidad en el espesor de una chapa de oro.

La Física emplea procedimientos adecuados en cada caso, estudiando los posibles errores, siendo tan inconveniente el obtener resultados pobres en fracciones que los aparatos pueden medir, como el ampliar el número de cifras decimales por un simple cálculo, rebasando los límites de precisión del aparato.

**ERROR ABSOLUTO ( $\varepsilon$ )** es la diferencia entre la medida exacta de una magnitud y la medida obtenida experimentalmente, la cual se considera con signo positivo.

**ERROR RELATIVO ( $E$ )** es el cociente del error absoluto ( $\varepsilon$ ) entre el valor exacto de la magnitud ( $M$ ).

$$E = \frac{\varepsilon}{M}$$

Su significado es «el tanto por uno de error» o error cometido por cada unidad de  $M$ . Multiplicando por 100 el error relativo obtenemos el «tanto por ciento de error». Ejemplo: un error relativo de 0,003 en la medida de una longitud, quiere decir que en cada metro hay una equivocación correspondiente a 3 milímetros, y se obtendrá un 0,3% de error en la medida efectuada.

Los errores pueden ser *sistemáticos* y *accidentales*. Los **SISTEMÁTICOS** son derivados, casi siempre, de una defectuosa construcción de los aparatos de medida y se evitan, en cierto modo, realizando las medidas con aparatos diversos y hallando la media aritmética de los resultados obtenidos.

Los errores **ACCIDENTALES** dependen de las condiciones fisiológicas, y aun psíquicas, del observador, así como de la iluminación de los aparatos y demás circunstancias de ambiente que rodeen al experimentador. Se disminuye el valor de este error realizando numerosas medidas y obteniendo la media aritmética de ellas.

#### I – 19. Cálculo del error de una medida

Aunque hayamos definido *error* como la diferencia entre la medida exacta de una magnitud y el valor obtenido experimentalmente, se comprende que no podemos conocer tal *medida exacta* ya que éste es el objetivo ideal de nuestras experiencias. Por ello, como la probabilidad de compensación de errores accidentales crece con el número de medidas, *tomamos como valor experimental la media aritmética de los valores encontrados*, repitiendo, cuantas más veces mejor, la medida de la magnitud.

El error de la media aritmética queda determinado por la fórmula de Gauss:

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

$x_i$  = valor de una medida;  $\bar{x}$  = valor de la media aritmética;  $n$  = número de medidas. Con lo que la forma de expresar el resultado de la medida será:  $\bar{x} \pm \varepsilon$ , y el error relativo:  $E = 100 \varepsilon / \bar{x}$  en tanto por ciento.

### I – 20. Cálculo del error relativo en medidas indirectas

Supongamos que la magnitud  $a$  queda determinada al conocer las medidas de  $b$  y  $c$  por la fórmula:

$$a = k \frac{b^n}{c^m}$$

en la que  $k$ ,  $n$  y  $m$  son constantes conocidas. Se trata de calcular el error relativo de  $a$  una vez calculados los de  $b$  y  $c$ , como se ha hecho en el párrafo anterior. Tomando logaritmos neperianos en la expresión anterior:

$$\ln a = \ln k + n \ln b - m \ln c$$

diferenciando:

$$\frac{da}{a} = n \frac{db}{b} - m \frac{dc}{c}$$

sustituyendo las diferenciales por incrementos finitos, haciendo positivos todos los términos del segundo miembro:

$$E = \frac{\Delta a}{a} = n \frac{\Delta b}{b} + m \frac{\Delta c}{c}$$

quedando así determinado el error máximo de  $a$  en función de los de  $b$  y  $c$ .

Se ha dado signo + a todos los términos del segundo miembro puesto que la probabilidad de errores accidentales por exceso y defecto es la misma y de esta manera nos colocamos en las condiciones *más desfavorables* (sin compensación de errores) obteniendo el *máximo error relativo*.

### I – 21. Acotación de errores

En una medida directa, el valor de la magnitud problema está comprendido entre los valores máximo y mínimo obtenidos al realizar varias determinaciones experimentales. Las cifras comunes de tales medidas extremas, pueden considerarse ciertas.

En el caso de las medidas indirectas nos pondremos en las *condiciones más desfavorables*, para obtener los valores extremos, es decir si:

$$a = k \frac{b^2}{c^3}$$

calcularemos el valor máximo de la medida de  $a$ , empleando el valor máximo experimental de  $b$ , y el mínimo de  $c$ ; para obtener el mínimo valor de la medida de  $a$ , emplearemos el mínimo de  $b$ , y el máximo de  $c$ ;  $a$  estará comprendida entre los dos valores obtenidos y las cifras comunes de ellos pueden considerarse como ciertas.

**PROBLEMAS: 17 al 26.**

## D) MEDIDA DE LONGITUDES, TIEMPOS Y MASAS. DENSIDAD

La MEDIDA de una magnitud, como ya se ha dicho, está condicionada a la *cantidad* y al grado de *precisión* requerido. Los órdenes de las magnitudes físicas cubren un dominio muy grande; así por ejemplo las masas están comprendidas entre la del Universo y la masa casi infinitesimal que las teorías actuales le atribuyen al neutrino; existen rangos enormes de tiempos, presiones, velocidades, densidades u otras magnitudes. En las tablas adjuntas a este apartado expresamos los rangos de las magnitudes fundamentales: *longitud, masa y tiempo*.

Empleamos dos métodos para obtener medidas, el que llamaremos DIRECTO que consiste en efectuar una lectura de un aparato que nos da la cantidad de la magnitud a medir y el INDIRECTO en el que se procede a aplicar la teoría de un fenómeno físico y mediante cálculos matemáticos llegamos al valor de la magnitud a medir.

### I – 22. Medida de pequeñas distancias. Método de Fermi para la medida del radio del núcleo de los átomos

Enrico Fermi (1901-1958) realizó la medida del radio de los núcleos de los átomos obteniendo que eran del orden de 1 a 6 veces  $10^{-15}$  m; para obtener el valor de la *sección eficaz* ( $\sigma$ ) del núcleo hizo pasar un haz de partículas de alta energía a través de una delgada lámina de material y midió el número de partículas que no lo atraviesan por detenerse o deflectarse al encontrarse con la masa concentrada del núcleo; las partículas que atraviesan la lámina pasan sin dificultad a través de la nube de electrones. Realizando el experimento con una lámina de espesor de un centímetro,

en la que existen cerca de  $10^8$  capas atómicas, la probabilidad de que algún núcleo quede detrás de otro es prácticamente nula.

Si el número de partículas de alta energía que llegan a la lámina es  $n_1$  y  $n_2$  el número de las que salen por el otro lado, la diferencia  $n_1 - n_2$  serán las partículas que no han atravesado la lámina. Medimos la fracción de partículas que no la han atravesado y será  $(n_1 - n_2)/n_1$ . Esta fracción será igual a la fracción de área cubierta por los núcleos, que la obtenemos por el cociente entre la sección eficaz del núcleo ( $\sigma$ ) multiplicada por el número de átomos ( $N$ ) que existen en la lámina, y el área total de la lámina ( $A$ ); igualando estas dos fracciones nos quedará:

$$\frac{N\sigma}{A} = \frac{n_1 - n_2}{n_1}$$

y puesto que el núcleo es aproximadamente esférico podemos poner:

$$\sigma = \pi r^2 = \frac{A}{N} \cdot \frac{n_1 - n_2}{n_1} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{A(n_1 - n_2)}{\pi N n_1}}$$

con lo que tenemos hecha la medida del radio del núcleo del átomo de forma indirecta.

La medida inmediata superior que se ha podido detectar en la materia es el radio del átomo, con un valor de  $10^{-10}$  m aproximadamente (su cálculo lo veremos en el estudio del átomo) existiendo una «laguna» en los tamaños a nivel atómico del orden de  $10^{-5}$ . Comparando el radio nuclear con el radio atómico y teniendo en cuenta que la materia está concentrada prácticamente en el núcleo, obtenemos como conclusión de esta teoría que la materia presenta enormes espacios vacíos. Esto no impide que existan longitudes de onda de radiaciones electromagnéticas tales como las de los rayos X y los  $\gamma$  con tamaños comprendidos entre  $10^{-10}$  y  $10^{-15}$  m; no queremos decir que en este intervalo exista una total ausencia en los tamaños físicos.

El ojo humano es incapaz de detectar longitudes de onda menores que la más pequeña de la luz visible, es decir,  $5 \times 10^{-7}$  m. A partir de esta medida empleamos microscopios electrónicos que funcionan con longitudes de onda menores que  $5 \times 10^{-7}$  m (rayos X) que impresionan las placas fotográficas. Por este método podemos obtener por ejemplo la medida de la separación entre los núcleos de los átomos en los cristales (constantes reticulares de Bragg), estas medidas están comprendidas entre  $5 \times 10^{-7}$  y  $10^{-10}$  m. A partir de  $5 \times 10^{-7}$  en adelante existen infinidad de instrumentos (Microscopio con tornillo micrométrico, calibre, palmer, etc.) con los que medimos directamente.

VALORES APROXIMADOS DE ALGUNAS LONGITUDES

LONGITUD	METROS
Límite experimental en la determinación de la estructura nuclear	$10^{-17}$
Diámetro del protón	$10^{-15}$
Diámetro del átomo	$10^{-10}$
Longitud de un ribosoma	$10^{-8}$
Longitud de onda de la luz visible	$10^{-6}$
Tamaño de las células de la mayor parte de los organismos vivos	$10^{-5}$
Tamaño de las partículas de polvo más pequeñas	$10^{-4}$
Altura de los seres humanos	$1,7 \times 10^0$
Radio de la Tierra	$6,4 \times 10^6$
Distancia media Tierra-Luna	$3,8 \times 10^8$
Radio del Sol	$6,9 \times 10^8$
Radio promedio de la órbita de la Tierra	$1,5 \times 10^{11}$
Distancia promedio Sol-Plutón	$5,9 \times 10^{12}$
Un año luz	$9,46 \times 10^{15}$
Distancia de la Tierra a la estrella más cercana ( $\alpha$ -Centauro)	$4,3 \times 10^{16}$
Radio de la Vía Láctea	$6 \times 10^{19}$
Distancia de la galaxia más cercana (M31 la nebulosa de Andrómeda)	$2 \times 10^{22}$
Radio del Universo visible	$1,4 \times 10^{26}$
RANGO = $10^{26}/10^{-17} = 10^{43}$	

**I - 23. Medida de longitudes y ángulos: nonius**

El NONIUS o vernier es un aparato destinado a la medida precisa de longitudes o de ángulos.

El empleado para medida de longitudes consta de una regla dividida en partes iguales, sobre la que se desliza una reglilla graduada (nonius) de tal forma que  $n - 1$  divisiones de la regla se dividen en  $n$  partes iguales en el nonius.

Si  $D$  es la longitud de una de las divisiones de la regla, la longitud de una división del nonius es:  $d = D(n - 1)/n$ .

Se llama «PRECISIÓN» a la diferencia entre las longitudes de una división de la regla y otra del nonius. Su valor es:

$$p = D - d = D - \frac{D(n - 1)}{n} = \frac{Dn - D(n - 1)}{n} = \frac{D}{n}$$

Así, si cada división de la regla tiene por longitud un milímetro, y se han dividido nueve divisiones de ella en diez del nonius, la precisión es de  $1/10$  de mm (nonius decimal; Fig. I-3). Para efectuar una medida se hace coincidir el extremo A del cuerpo a medir con el extremo de la regla. El otro extremo quedará, en general, comprendido entre dos divisiones, en el caso de la Fig. I-4 entre las divisiones 3 y 4. Si la regla está dividida en mm, la longitud AB es 3 mm y algo más. Para determinar esta fracción se observa qué división del nonius coincide con una división de la regla;

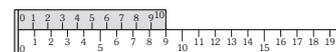


Fig. I-3.- Nonius decimal.

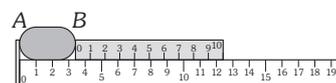


Fig. I-4.- Medida de la distancia AB con un nonius decimal.

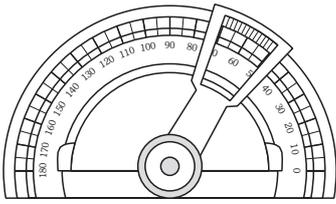


Fig. 1-5. Nonius circular.

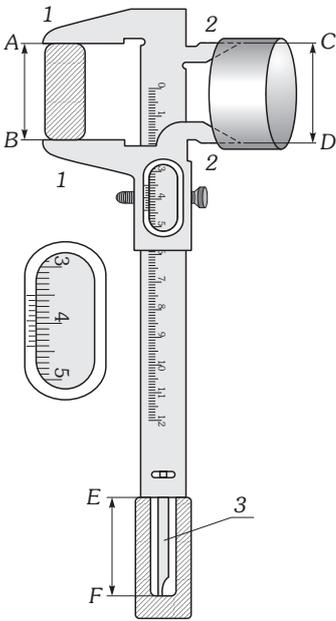


Fig. 1-6. Calibre o pie de rey.

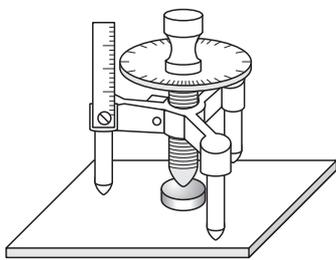


Fig. 1-7. Esferómetro.

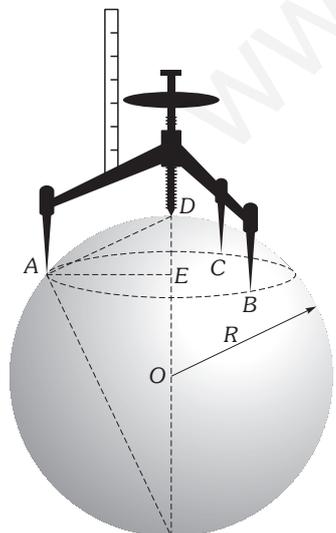


Fig. 1-8. Medida del radio de una esfera con un esferómetro.

en nuestro ejemplo es la división 4. La medida realizada es  $3D + 4p$ . En el caso de un nonius decimal, con la regla dividida en milímetros, la medida sería: 3,4 mm.

En efecto: desde la división 4 del nonius a B hay una distancia igual a  $4d$ . Desde la división 3 de la regla a la 4 del nonius hay una distancia igual a  $4D$ . Su diferencia es la fracción que se trata de determinar (de la división 3 de la regla al cero del nonius) y su valor es:

$$4D - 4d = 4(D - d) = 4p$$

Para la medida de ángulos se emplean nonius circulares, cuyo fundamento es el mismo que el del rectilíneo, sustituyendo la regla por un limbo graduado y la reglilla por un arco con dimensiones adecuadas, que se puede deslizar sobre aquél (Fig. 1-5).

El nonius que hemos descrito es el empleado comúnmente. Generalizando, realizaríamos un nonius tomando  $n$  divisiones de la regla y dividiéndolas en  $m$  partes ( $m > n$ ) en el nonius. Entonces, cada división del nonius tendría por longitud:  $d = nD/m$ , y la precisión sería:

$$p = D - d = D - \frac{nD}{m} = \frac{(m - 1)D}{m}$$

**I - 24. Calibre o pie de rey**

Es un aparato empleado para la medida de espesores y de diámetros interiores o exteriores de cilindros.

Consta de una regla provista de un nonius, cuyo funcionamiento se comprende claramente a la vista de la Fig. 1-6. Las piezas 1 y 1' sirven para la medida de espesores (AB). Las piezas 2 y 2', solidarias a las anteriores, se emplean para la medida de diámetros interiores (CD). La pieza 3 solidaria a las 1' y 2' y que sale del extremo E de la regla, sirve para la medida de profundidades (EF).

**I - 25. Esferómetro. Palmer**

El ESFERÓMETRO es un aparato destinado a la medida de espesores y radios de esferas.

Es un trípode sobre el que descansa la tuerca fija de un tornillo, del que se conoce el paso de rosca o avance del tornillo al darle una vuelta completa. El tornillo está provisto de una cabeza circular que señala en una regla el número de vueltas completas, ya que la longitud de cada una de las divisiones de la regla es igual al paso de rosca. La cabeza del tornillo está dividida en un cierto número de partes iguales.

Se llama PRECISIÓN del esferómetro al avance del tornillo cuando se le gira un ángulo equivalente a una división de su cabeza.

Si  $D$  es el paso de rosca y  $n$  es el número de divisiones de la cabeza, la precisión es:  $p = D/n$ . Para realizar una medida de espesores se hace que el extremo del tornillo toque justamente a la superficie superior del cuerpo a medir, que se encuentra apoyado sobre una superficie plana de vidrio (Fig. 1-7). Si la cabeza señala entre las divisiones 6 y 7 de la regla, la lectura es  $6d$  y algo más. Si la regla señala la división 32 de la cabeza, la fracción es  $32D/n$  y la lectura es:  $6D + 32D/n$ . A continuación se hace otra lectura apoyando las tres patas y el extremo del tornillo en la superficie plana del vidrio. La diferencia entre las dos, es el espesor que se trata de determinar.

Para la medida de radios de esferas se procede de la siguiente forma: apoyadas las patas del esferómetro sobre una superficie esférica, se hace que el extremo del tornillo toque justamente su cúspide. Las patas del esferómetro se habrán apoyado en los puntos A, B y C de la esfera (Fig. 1-8). El tornillo estará apoyado en el punto D. La medida efectuada corresponde a la distancia  $ED = f$  (flecha).

Si se apoyan las tres patas del esferómetro sobre un papel, quedará determinado el triángulo equilátero ABC, cuyo lado  $l$  medimos (media aritmética de los tres lados). El radio de la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C es:  $EA = r = l/\sqrt{3}$ . Aplicando la propiedad de que «la perpendicular desde un punto de la circunferencia al diámetro es media proporcional entre los dos segmentos en que éste queda dividido», y llamando  $R$  al radio de la esfera (DO), se obtiene:

$$r^2 = f(2R - f) = 2Rf - f^2 \Rightarrow R = \frac{f^2 + r^2}{2f}$$

quedando, de esta forma, medido el radio de la esfera.

El PALMER (Fig. 1-9) es un aparato destinado a la medida de espesores. Su fundamento es análogo al del esferómetro. El número de vueltas de tornillo lo señala el extremo de una caperuza solidaria al tornillo, sobre una escala fija. Las fracciones de vuelta las señala la línea de la escala, sobre las divisiones de la caperuza.

**PROBLEMAS: 27 al 32.**

**I – 26. Medida de grandes distancias. Triangulación**

Las dimensiones de una habitación o de un campo de fútbol las podemos obtener con una unidad de longitud y contar. Con este método sería más difícil medir la distancia entre dos cumbreros, e imposible si lo empleamos en la distancia a una estrella. Para efectuar estas últimas medidas emplearemos un método indirecto llamado TRIANGULACIÓN. El examen de la Fig. I-10 nos explica este método. La distancia  $O_1O_2$  es siempre conocida, al igual que los ángulos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , medidos con un aparato que tenga un círculo graduado. Mediante cálculos trigonométricos determinaremos la distancia que queremos medir.  $O_1$  y  $O_2$  pueden ser dos puntos de la Tierra en que se encuentran dos observadores y A el pico de la montaña, un satélite, o la Luna.

Todo cambio de posición de un astro debido a un cambio de posición del observador (ya porque éste se mueve con la Tierra, ya porque el observador se traslada sobre la Tierra), se denomina «*corrimiento paraláctico*». Por ejemplo la rotación terrestre determina un «*corrimiento diurno*», la rotación de la Tierra alrededor del Sol determina un «*corrimiento paraláctico anual*». Las observaciones hechas basándonos en estos movimientos las llamaremos métodos «*paralácticos trigonométricos*».

Si quisiéramos medir la distancia a un astro A (Fig. I-10)  $O_1$  y  $O_2$  serán dos posiciones opuestas en la órbita terrestre alrededor del Sol y la medida de ángulos se realizará con 6 meses de intervalo.

Este método no es aplicable para la medida de la distancia Tierra-Sol, y la exactitud con que se puede enfocar puntos del Sol y medir ángulos, no es lo suficientemente buena. La forma de hacerlo es medir las distancias relativas a todos los planetas por observaciones astronómicas o mediante ondas de radar (conociendo su velocidad y contando el tiempo que tardan en llegar al planeta, reflejarse en él y volver a la Tierra) y una vez conocidas estas distancias a escala de nuestro sistema solar, por triangulación obtendremos la distancia al Sol.

Si la estrella está demasiado lejos y nuestros aparatos no pueden realizar medidas de tal precisión, entonces se emplean otros métodos. Por ejemplo uno de ellos es el llamado «*método fotométrico*» que consiste en la comparación de la luminosidad aparente y los valores de la intensidad de radiación y de la energía deducidos del espectro de la estrella. Una confirmación de lo correcto de este método para medir distancias estelares está dado por los resultados obtenidos para grupos de estrellas, conocidos como «*cúmulos globulares*», que son acumulaciones de estrellas que observamos que están todas muy juntas, y al aplicar el «*método fotométrico*» obtenemos que es como deben de estar.

En el estudio de los «*cúmulos globulares*» se encuentra que existe una concentración de ellos en cierta parte del cielo, y que la mayoría de ellos están aproximadamente a la misma distancia de nosotros e intuimos que esta concentración de cúmulos marca el centro de nuestra galaxia. Conocemos entonces la distancia al centro de la galaxia que se obtiene del orden de  $10^{20}$  m.

Con esta distancia tenemos la clave para medir distancias aún mayores (distancias a otras galaxias) por métodos fotográficos y midiendo el ángulo que se subtende en el cielo y tomando como hipótesis que todas las galaxias son más o menos del mismo tamaño que la nuestra, operaremos por el método de triangulación.

Recientemente se han obtenido fotografías de objetos celestes sumamente distantes; se cree que estas galaxias están, alrededor de medio camino del «*límite del Universo*» –alejadas del orden de  $10^{26}$  m– distancia máxima que se ha podido observar.

**I – 27. Medida del tiempo. Reloj atómico**

Para medir el tiempo necesitamos que un fenómeno ocurra una y otra vez de modo regular, es decir que sea *periódico*. El día es el fenómeno natural, periódico, usado desde muy antiguo para la medida del tiempo, los días son casi del mismo largo en promedio, para verificar que esto es verdad tenemos que compararlo con otro fenómeno periódico.

La medida del tiempo la basamos en algún fenómeno que se repita periódicamente.

Galileo demostró que un péndulo oscila con intervalos de tiempo regulares, utilizando un dispositivo mecánico que cuenta estas oscilaciones tendremos el reloj de péndulo. En esencia, este es el método que se emplea para la medida del tiempo, un reloj está siempre constituido por un OSCILADOR y un CONTADOR.

La periodicidad de un oscilador de péndulo no es muy exacta, a medida que ha avanzado la ciencia se han empleado osciladores de periodicidad más perfec-



Fig. I-9.– Palmer.

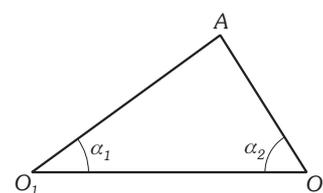


Fig. I-10.– Triangulación.

VALORES APROXIMADOS DE ALGUNOS INTERVALOS DE TIEMPO

INTERVALO	SEGUNDOS
Intervalo de tiempo entre el big y bang y formación de quarks	$10^{-43}$
Tiempo que tarda la luz en cruzar un núcleo de hidrógeno	$10^{-24}$
Duración de una colisión nuclear	$10^{-22}$
Período de oscilación de un rayo gamma de 1 MeV	$4 \times 10^{-21}$
Vida media de la partícula de mesón $\pi^0$	$10^{-16}$
Período de una onda luminosa	$2 \times 10^{-15}$
Período detectado por laser, límite inferior de medida directa	$3 \times 10^{-14}$
Período de rotación típico de una molécula	$10^{-12}$
Período de las ondas típicas de radio	$10^{-6}$
Período de las ondas sonoras audibles	$10^{-3}$
Tiempo entre latidos normales del corazón	$8 \times 10^{-1}$
Un día	$8,6 \times 10^4$
Un año	$3,16 \times 10^7$
Edad del Homo erectus	$1,3 \times 10^{14}$
Edad del Sistema Solar	$1,6 \times 10^{17}$
Vida del Sol	$3,8 \times 10^{17}$
Edad del Universo	$4,3 \times 10^{17}$
Vida media del Molibdeno-130	$2 \times 10^{25}$
Vida media que se le atribuye al protón	$3 \times 10^{38}$
$RANGO = 10^{38}/10^{-43} = 10^{81}$	

ta, la máxima precisión con que se ha llegado a medir el tiempo ha sido con el llamado *reloj atómico*, que se basa en el hecho de que con haces de rayos láser se pueden frenar átomos hasta una velocidad correspondiente a una millonésima de grado kelvin por encima del cero absoluto. Estos átomos fríos constituyen excelentes «péndulos» para los relojes atómicos porque a bajas temperaturas se puede medir su frecuencia natural con gran precisión.

En la actualidad se consigue una precisión de una parte en  $10^{14}$  (atraso o adelanto de un segundo en 3 millones de años). En el 2005 se colocará en la Estación Espacial Internacional un reloj de cesio, llamado PARCS (Primary Atomic Reference Clock in Space), capaz de funcionar con un margen de error de un segundo en  $10^{16}$ , que probará algunas predicciones de la Teoría de la Relatividad General de Einstein al funcionar más lentamente que uno en la superficie terrestre debido a la diferencia de la intensidad del campo gravitatorio en ambas posiciones.

La tecnología probada en el PARCS permitirá en el 2006 una nueva generación de relojes, llamada RACE (Rubidium Atomic Clock Experiment) que conseguirá una precisión de una parte en  $10^{17}$ .

### I – 28. Medidas indirectas de tiempos elementales y máximos

Las medidas más pequeñas de las que podemos hablar, se realizan por la técnica de la medida de distancias y velocidades. Un experimento realizado en estos últimos años por esta técnica ha sido el cálculo del tiempo de vida de la partícula mesón  $\pi^0$ , observando la señal microscópica, del orden de  $10^{-9}$  m, dejada en una emulsión fotográfica, en la cual habían sido creados mesones  $\pi^0$ , y sabiendo que éstos viajan a una velocidad muy aproximada a la de la luz, deducimos que «vivió» durante unos  $10^{-16}$  segundos.

Con esta técnica, podremos hablar de la longitud del núcleo de hidrógeno, recorrida a la mayor velocidad conocida (la luz) y obtendríamos un tiempo de  $10^{-24}$  segundos.

Actualmente se admiten en el lenguaje científico, cantidades tan pequeñas como  $10^{-43}$  s, tiempo transcurrido después del gran estallido, conocido habitualmente con la expresión inglesa *big bang* con el que se cree se comenzó a formar el Universo, hasta que aparecen los quarks. Más cerca del *big bang*, ni siquiera las teorías más recientes permiten ir más allá, por lo que hemos de detenernos en el umbral del tiempo en tal cantidad.

Para la medida de tiempos largos que tengan un posible significado físico, vamos a emplear como unidad el  $\text{EON} = 10^9$  años (mil millones de años), que simbolizaremos por e.

El procedimiento para la medida de tiempos largos, está basado en las leyes de la radiactividad y concretamente en la vida media de distintos elementos de la tabla periódica. Esta técnica aplicada al análisis de los vestigios dejados por el *Homo erectus* en el África central y al que se llamó *Toumai* («Monos del sur», aunque se hallasen más próximos a los seres humanos que a los monos), nos confirman que su primera evolución se produjo hace  $7 \times 10^6$  años. Aplicadas estas técnicas a determinadas rocas nos llevan a la conclusión de que la edad de la Tierra es de 4,6 e. Al Universo se le atribuye una edad de unos 15 e, tiempo en que tuvo lugar el *big bang*. Este no es el máximo de tiempo del que se puede hablar, puesto que hay posibilidad de más tiempo en el futuro; así por ejemplo el Sol puede permanecer por los menos durante 12 eones en la secuencia principal en que estaba desde poco después de su formación; dado que el Sol se formó hace 4,6 e, sólo han transcurrido tres octavas partes de la vida de su secuencia principal. Existen estrellas como la Barnard y la Próxima Centauro que tienen unas vidas de secuencia principal, goteando sus débiles fragmentos de radiación, durante un total de 200 e. Más allá de este tiempo sólo cabe prolongar su duración, en conexión con las vidas medias de miles de millones de eones de algunos átomos radiactivos; naturalmente, cuanto más larga sea la vida media, más difícil será detectar las pocas descomposiciones que se producen y medir el valor actual de la vida media. Se supone para el elemento llamado Molebdeno-130 una vida media de 600 millones de eones; como consecuencia de ello, ¿es posible que cada átomo se pueda descomponer si se espera un tiempo suficiente? Aparentemente, todos los átomos se han formado a partir de Hidrógeno-1 cuando se produjo el *big bang* y posteriormente en el núcleo de las estrellas; como el núcleo del Hidrógeno-1 es un protón ¿se descompondrán en protones individuales todos los átomos si esperamos lo suficiente? ¿es posible que ni los protones sean estables, descomponiéndose en partículas de menor masa y el Universo esté compuesto sólo de electrones, neutrinos, fotones, quarks y, quizás, gravitones? Según las teorías actuales se le supone al protón una vida media de  $10^{22}$  e. La cosmología actual no puede predecir si el Universo finalmente se contraerá en un proceso inverso al que sigue actualmente para terminar en el «*big crunch*», o si seguirá expandiéndose indefinidamente, en cuyo caso la magnitud del tiempo se haría infinita.

### I – 29. Masa

A medida que vayamos estudiando los fenómenos físicos en los que interviene la materia, tendremos que distinguir entre *masa pesante* o *gravitatoria* y *masa inerte*; sus definiciones serán comprendidas por el lector cuando haya llegado en sus estudios al capítulo V, sin embargo vamos a adelantar éstas, que serán comprendidas por aquellos que hayan estudiado un curso de Física elemental.

MASA PESANTE O GRAVITATORIA es una propiedad inherente de la materia en virtud de la cual los cuerpos se atraen entre sí independientemente del medio en que se encuentren.

De acuerdo con la ley de la gravitación universal de Newton, el valor de la fuerza con que se atraen los cuerpos de masa  $M$  y  $M'$  situados a una distancia  $d$  uno del otro y con la condición de que  $d$  sea mucho mayor que las dimensiones de ambos cuerpos es  $F = GMM'/d^2$ . La masa gravitatoria caracteriza la capacidad de la materia para crear «campos gravitatorios» y de estar sometida a la acción de estos campos.

Si en la ecuación anterior  $M'$  es la masa de la Tierra ( $M_0$ ), entonces  $g_0 = F/M = GM_0/R_0^2 = 9,8$  N/kg, fuerza de atracción de  $M_0$  (supuesta concentrada en el centro de la esfera terrestre) sobre la unidad de masa colocada en su superficie.

A la fuerza con que la Tierra atrae a un cuerpo cualquiera lo llamamos PESO de éste, y su valor será:  $P = Mg$ , que dependerá de la posición en que se encuentre, referida al centro de la Tierra, puesto que  $g$  varía en función de esa distancia. Sin embargo no depende de esa posición el valor de  $M$ , a la que llamaremos masa pesante.

La masa pesante se mide con la balanza, pudiéndose con ella definir la igualdad de masas, lo que nos permite, tomando la masa de un cuerpo como unidad (*patrón*), medir otras.

MASA INERTE es la medida cuantitativa de la inercia de un cuerpo; resistencia que opone un cuerpo a modificar su estado de reposo o movimiento.

De la segunda ley de Newton:  $F = Ma \Leftrightarrow F/a = F'/a' = \dots = M$ , se define la masa inerte como la constante de proporcionalidad entre la fuerza aplicada y la aceleración producida. Esta última ecuación nos permite la medida dinámica de las masas inertes.

Es un hecho experimental el que las dos masas, la pesante y la inerte son proporcionales. Si se toma como unidad de masa pesante la misma que la de inercia, ambas vendrán medidas, para un mismo cuerpo, por el mismo número, razón por la que no se hace distinción alguna entre ellas, llamándoles simplemente masa.

Para la medida de masas pesantes (en reposo) en los comercios y en los laboratorios se utilizan normalmente las *balanzas electrónicas digitales*, y en ocasiones las *balanzas de brazos* de cuyos extremos penden unos *platinillos*, midiéndose estas masas por comparación con otras que llamamos pesas.

**I – 30. Masa específica o Densidad**

MASA ESPECÍFICA O DENSIDAD ABSOLUTA es la masa que corresponde a la unidad de volumen.

$$\rho = \frac{M}{V}$$

La masa específica se mide en  $g/cm^3$  en el sistema CGS; en  $kg/m^3$  en el SI y en  $utm/m^3$  en el TÉCNICO. (La masa específica del agua a  $4^\circ C$  es:  $1 g/cm^3$  (CGS);  $1\ 000 kg/m^3$  (SI)  $1\ 000/9,8 utm/m^3$  (TÉCNICO). La masa específica del mercurio a  $0^\circ C$  es:  $13,6 g/cm^3$  (CGS);  $13\ 600 kg/m^3$  (SI);  $13\ 600/9,8 utm/m^3$  (TÉCNICO).)

De la fórmula de la masa específica, obtenemos:

$$M = V\rho$$

La ecuación de dimensiones de la masa específica es en los sistemas CGS y SI:  $[\rho] = [M]/[V] = M/L^3 = ML^{-3}$ , y en el sistema TÉCNICO:  $[\rho] = [M]/[V] = FL^{-1}T^2/L^3 = FL^{-4}T^2$ .

Si el cuerpo no es homogéneo la masa específica en cada uno de sus puntos es:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} = \frac{dM}{dV}$$

En consecuencia:

$$dM = \rho dV \Leftrightarrow M = \int_V \rho dV$$

Para una distribución laminar de masa, llamaremos DENSIDAD SUPERFICIAL:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta A} = \frac{dM}{dA} \Leftrightarrow M = \int_A \sigma dA$$

VALORES APROXIMADOS DE ALGUNAS MASAS

OBJETO	KILOGRAMOS
Masa en reposo que se le atribuye al neutrino	$10^{-34}$
Electrón	$9,1 \times 10^{-31}$
Protón	$1,7 \times 10^{-27}$
Átomo de Uranio	$4,0 \times 10^{-26}$
Bacteria	$10^{-15}$
Partícula de polvo	$6,7 \times 10^{-10}$
Gota de lluvia	$10^{-6}$
Ser humano	$5,9 \times 10^1$
Cohete espacial Saturno	$5 \times 10^6$
El agua en los oceanos	$1,4 \times 10^{21}$
La Tierra	$6,0 \times 10^{24}$
El Sol	$2,0 \times 10^{30}$
Nuestra galaxia	$2,2 \times 10^{41}$
Universo	$10^{52}$
RANGO = $10^{52}/10^{-34} = 10^{86}$	

DENSIDADES DE ALGUNOS CUERPOS (en  $g/cm^3$ )

Platino	21,4
Oro	19,3
Mercurio	13,6
Plomo	11,3
Plata	10,5
Cobre	8,9
Bronce	8,8
Hierro	7,9
Acero	7,8
Aluminio	2,7
Glicerina	1,26
Agua	1,00
Hielo	0,92

Para una distribución filiforme de masa, llamaremos DENSIDAD LINEAL:

$$\lambda = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta L} = \frac{dM}{dL} \quad \Leftrightarrow \quad M = \int_L \lambda dL$$

**I – 31. Densidad relativa**

«Es la relación entre la masa de una sustancia a la masa del mismo volumen de otra, que se toma como tipo de comparación». Para los líquidos se toma, como sustancia de referencia, el agua a 4 °C.

De la definición anterior obtenemos:

$$d_r = \frac{\text{masa cuerpo}}{\text{masa agua}} = \frac{V\rho}{V\rho_{H_2O}} = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}} \quad \Leftrightarrow \quad \rho = d_r \rho_{H_2O}$$

En el sistema CGS la masa específica de agua a 4 °C es 1 g/cm<sup>3</sup>, y por tanto «el número que expresa la masa específica de una sustancia y su densidad con relación al agua es el mismo en el sistema CGS». En el SI y en el TÉCNICO la densidad relativa también es el mismo número que expresa su densidad absoluta en el sistema CGS.

**PROBLEMAS: 33 al 40.**

**PROBLEMAS**

**A) UNIDADES Y SISTEMAS**

1. Teniendo en cuenta la equivalencia entre las unidades fundamentales, determinar los factores de conversión de: 1) km/h a mile/h. 2) lb/ft<sup>3</sup> a g/cm<sup>3</sup>. 3) t · m/s<sup>2</sup> a slug · yd/s<sup>2</sup>.
2. Pasar al SI las siguientes unidades: 1) 1 yarda/s. 2) 1 milla/h. 3) 1 poundal (pdl) = 1 lb · ft/s<sup>2</sup>. 4) 1 slug/ft<sup>3</sup>.
3. Pasar al sistema absoluto inglés las siguientes unidades: 1) kg · m<sup>2</sup>. 2) utm/cm<sup>3</sup>. 3) kg · m<sup>2</sup>/h.
4. Definir el ESTENO, unidad de fuerza en el sistema MTS (metro, tonelada masa, segundo). Calcular su equivalencia con la dina, el newton y el kilopondio.

**B) ANÁLISIS DIMENSIONAL**

5. 1) Conocida la ecuación de dimensiones de la velocidad  $[v] = LT^{-1}$  determinar las de la aceleración  $a$  y la fuerza  $F$ , sabiendo que  $[a] = [v]/[t]$  y que  $[F] = [M][a]$ , siendo  $t$  el tiempo y  $M$  la masa. 2) Determinar la ecuación de dimensiones de la constante de gravitación universal que interviene en la conocida ley de Newton:  $F = GMM'/r^2$  ( $M$  y  $M'$  = masas;  $F$  = fuerza;  $r$  = distancia entre los cuerpos). 3) Determinar la ecuación de dimensiones del número  $\pi$ . 4) Determinar la ecuación de dimensiones de un seno, un coseno y una tangente. 5) Determinar la ecuación de dimensiones de la energía ( $W$ ) sabiendo que  $[W] = [F][r]$ . 6) Determinar la ecuación de dimensiones de la constante de tensión superficial ( $\sigma$ ) sabiendo que:  $[\sigma] = [W]/[A]$ , ( $A$ : superficie). 7) Determinar la ecuación de dimensiones del coeficiente de viscosidad ( $\eta$ ) sabiendo que  $[\eta] = [F][r]/[A][v]$ . 8) Determinar la ecuación de dimensiones del número de Reynolds ( $R$ ), sabiendo que  $[v] = [R][\eta]/[\rho][r]$  ( $\rho$ : densidad).
6. Determinar en el SI la ecuación de dimensiones de las siguientes magnitudes eléctricas (Base:  $L, M, T, A$ ). 1) De la constante de Coulomb ( $K$ ) que interviene en la ley del mismo nombre:  $F = Kqq'/r^2$ , sabiendo que  $[q] = [I][t] = AT$ . 2) De  $\epsilon$  sabiendo que  $K = 1/4\pi\epsilon$ . 3) Del potencial eléctrico ( $V$ ):  $[V] = [W]/[q]$ . 4) De la resistencia eléctrica ( $R$ ):  $[R] = [V]/[I]$ . 5) Del campo eléctrico ( $E$ ):  $[E] = [F]/[q]$ . 6) De la capacidad ( $C$ ):  $[C] = [q]/[V]$ . 7) Del desplazamiento eléctrico ( $D$ ):  $[D] = [\epsilon][E]$ . 8) De la inducción magnética ( $B$ ):  $[B] = [F]/[q][v]$ . 9) De la permeabilidad magnética ( $\mu$ ):  $[B] = [\mu][I]/[r]$ . 10) De la autoinducción ( $L$ ):  $[L] = [B][A]/[I]$ .
7. Teniendo en cuenta los factores de conversión entre las unidades de las magnitudes fundamentales en los sistemas GIORGI, CGS y ABSOLUTO INGLÉS, determinar las equivalencias entre las unidades en estos sistemas de las magnitudes: 1) Fuerza ( $[F] = [M][a]$ ). 2) Potencial eléctrico ( $[V] = [W]/[q]$ ).

8. Sabemos que el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre ( $g_0$ ) es 9,8 m/s<sup>2</sup>. ¿Cuál es la aceleración de la gravedad expresada en el sistema absoluto inglés?
9. En las gasolineras inglesas los aparatos de medida de presión de neumáticos de coche se miden en pdl/in<sup>2</sup> (poundal/pulgada<sup>2</sup>). Si queremos hinchar la rueda de nuestro coche a la presión de 1,8 kp/cm<sup>2</sup>, ¿qué presión debe solicitarse en Inglaterra para obtener este resultado?
10. Determinar la ecuación de dimensiones del momento de inercia y comprobar la homogeneidad de las siguientes fórmulas físicas  $N = I\alpha$ ,  $Nt = \Delta(I\omega)$ ,  $N\varphi = \Delta(I\omega^2/2)$ , ( $N$  = momento del par;  $I$  = momento inercia;  $t$  = tiempo;  $\varphi, \omega$  y  $\alpha$  son respectivamente el ángulo de giro, la velocidad angular y la aceleración angular).
11. 1) Demostrar la homogeneidad de las siguientes fórmulas físicas: Impulso = variación momento lineal:  $Ft = \Delta(Mv)$  ( $F$  = fuerza;  $t$  = tiempo;  $M$  = masa;  $v$  = velocidad) Trabajo = variación energía cinética:  $Fs \cos \varphi = \Delta(Mv^2/2)$  ( $s$  = espacio;  $\varphi$  = ángulo formado por  $F$  y  $s$ ). 2) Demostrar que el «trinomio de Bernoulli» es homogéneo, es decir, que sus tres sumando tienen la misma ecuación dimensional; el trinomio es:  $p + \rho v^2/2 + h\rho g = cte$ , ( $p$  = presión = fuerza/superficie;  $\rho$  = densidad = masa/volumen;  $v$  = velocidad;  $h$  = altura;  $g$  = aceleración de la gravedad).
12. Teniendo en cuenta el problema 6, demostrar la homogeneidad de las siguientes fórmulas físicas: 1)  $W = VIt = V^2t/R = I^2Rt$ . 2)  $B = \mu I/2\pi r$ . 3)  $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ .
13. Demostrar que la ecuación de ondas:  $\partial^2\psi/\partial t^2 = v^2 \partial^2\psi/\partial x^2$ , es homogénea para cualquiera que sea  $\psi$  (longitud, presión, campo eléctrico, etc.) siendo  $v$  la velocidad de la onda.
14. Suponiendo que el período de oscilación de un péndulo simple ( $T$  = tiempo que tarda en dar una oscilación) depende exclusivamente de la longitud del hilo ( $l$ ), de la masa ( $m$ ) de la partícula que oscila y de la aceleración de la gravedad ( $g$ ), y que en la fórmula del período no intervienen más que las magnitudes indicadas, en producto entre sí (elevadas a exponentes diversos) y ligadas por un coeficiente numérico, deducir las leyes a que obedece el período de oscilación de dicho péndulo.
15. Sabiendo que la velocidad de salida de un líquido por un pequeño orificio practicado en la pared de una vasija es proporcional a la distancia vertical ( $h$ ) del centro del orificio a la superficie libre del líquido y a la aceleración de la gravedad ( $g$ ); dudamos si tal velocidad es proporcional también a la densidad del líquido. Deseamos resolver nuestra duda y hallar la forma de la función:  $v = f(h, g, \rho)$ .
16. Sabemos que la energía disipada en forma de calor ( $Q$ ) por el efecto Joule en una resistencia eléctrica depende de la intensidad de corriente que la atraviesa ( $I$ ), de la resistencia ( $R$ ) y del tiempo ( $t$ ) que circula la corriente por ella. Calcular la forma de la función:  $Q = f(I, R, t)$ .

C) CÁLCULO DE ERRORES

17. 1) En la medida de 1 m se ha cometido un error de 1 mm, y en 300 km, 300 m. ¿Qué error relativo es mayor? 2) ¿Qué preferirías ganar, dos euros por cada veinticinco euros o el 8%?

18. Como medida de un radio de 7 dm hemos obtenido 70,7 cm. Calcular: 1) El error absoluto. 2) El error relativo. 3) El error absoluto y relativo en la medida de la longitud de la circunferencia de tal radio. 4) El error absoluto y relativo en la medida del área del círculo. 5) El error absoluto y relativo en la medida del volumen de una esfera de 7 dm de radio.

19. Hemos realizado diez veces la pesada de un cuerpo obteniendo los siguientes resultados expresados en gramos:

12,372 12,373 12,372 12,371 12,370  
12,374 12,372 12,372 12,371 12,373

calcular el error de la medida aritmética.

20. En la medida de una longitud hemos determinado los siguientes valores:

1,32 cm 1,30 cm 1,32 cm 1,33 cm 1,32 cm  
1,31 cm 1,32 cm 1,31 cm 1,31 cm 1,31 cm

Hallar el error de la medida aritmética y los errores relativos de las medidas del área y volumen de un cuadrado y un cubo que tenga por arista tal longitud.

21. Se han determinado el radio (2 cm) y la generatriz (5 cm) de un cilindro con un error absoluto de  $\pm 0,1$  mm. Calcular cómo influyen tales errores en la medida del volumen.

22. Midiendo una longitud con una cinta de agrimensor cometemos errores del 0,5%. ¿Cuál es el error absoluto y el relativo en la medida del área de un terreno rectangular de  $100 \times 50$  m?

23. 1) Demostrar que los errores relativos de  $a = b/c$  y de  $a' = bc$ , son iguales. 2) Demostrar que el error relativo en la medida del volumen de un cubo es tres veces mayor que en el de su arista.

24. Determinar el error relativo en la medida de la aceleración de la gravedad, conocidos los errores relativos en las medidas de la longitud de un péndulo simple y de su período. Se suponen oscilaciones suficientemente pequeñas para que cumpla la ley:  $T = 2\pi \sqrt{l/g}$ .

25. La ecuación de estado de los gases perfectos es:  $pV = nRT$ ; al aplicarla para calcular la temperatura de un gas una vez medidos la presión, 1,22 atm con un error de  $\pm 1$  mm de Hg, y el volumen 1,92 l, con un error de  $\pm 1$  cm<sup>3</sup>, nos dio 125 °C. ¿Cuál es el error absoluto máximo que se puede esperar en esta última cantidad si se considera como exacto  $n$  (número de moles), siendo  $R$  la constante universal de los gases perfectos?

26. Al determinar el valor de la expresión:  $x = 7a^2/b$  se han hallado para  $a$  y  $b$  los siguientes valores:

valores de a:	2,200 0	valores de b:	4,100 0
	2,199 0		4,099 0
	2,201 0		4,100 1
	2,198 5		4,100 2

Acotar el valor de x.

D) MEDIDAS DE LONGITUD, ÁNGULOS Y MASAS. DENSIDAD

27. Calcular la precisión de un nonius que tiene 20 divisiones si la regla está dividida en mm.

28. Se tiene una regla dividida en medios milímetros y se desea colocarle un nonius para que se aprecien centésimas de milímetro. ¿Cómo hay que construirlo?

29. Un limbo circular está dividido en medios grados y se le aplica un nonius construido de forma que 29 divisiones del limbo se han dividido en 30 partes iguales en el nonius. ¿Cuál es su precisión?

30. El paso de rosca de un palmer es de medio milímetro y su cabeza tiene 50 divisiones. ¿Cuál es el espesor de un objeto si se han dado 6 vueltas y 23 divisiones?

31. Las patas de un esferómetro forman un triángulo equilátero de lado 8,65 cm. Aplicando el aparato a una superficie esférica, la medida de su flecha es de 0,1 cm. Calcular en litros la capacidad de la esfera.

32. Supongamos que al aplicar un esferómetro a un casquete esférico, la medida de la flecha ( $f$ ) es la tercera parte de la longitud del lado ( $l$ ) del triángulo equilátero que forman los puntos de apoyo del esferómetro. Demostrar que el radio de la esfera es de doble longitud que la flecha.

33. Un recipiente tiene una masa de 38,52 g cuando está vacío y de 137,26 g cuando se llena de agua de  $1,00$  g/cm<sup>3</sup> de densidad. Se llena el recipiente con otro líquido y entonces la masa total es 106,21 g. ¿Cuál es la densidad del líquido?

34. Se desea obtener un litro de jarabe de densidad con relación al agua 1,3, mezclando otros dos de densidades 1,2 y 1,5. ¿Qué volumen de cada uno de ellos se debe emplear?

35. ¿Qué volumen de agua se debe añadir a un litro de lejía de sosa de densidad con relación al agua 1,3 para que su densidad sea 1,2?

36. Un comerciante ladrón vende leche en su establecimiento con una densidad de  $1,030$  g/cm<sup>3</sup> cuando la densidad de la leche pura es de  $1,042$  g/cm<sup>3</sup>. Determinar la proporción de agua que le ha añadido.

37. 100 g de latón están formados por 30 g de Zn y 70 de Cu, cuyas densidades respectivas son 7 y 9 g/cm<sup>3</sup>. Calcular la densidad del latón.

38. Una estrella de neutrones característica tiene una masa de  $2 \times 10^{30}$  kg con un radio de 10 km. Calcular el peso que tendría 1 cm<sup>3</sup> de esa estrella en la superficie de la Tierra.

39. Mediante la dispersión de partículas  $\alpha$  dotadas de alta energía, se ha determinado que la sección eficaz del núcleo del átomo de plomo es aproximadamente  $\sigma = 1,54 \times 10^{-28}$  m<sup>2</sup>. 1) Calcular la densidad del núcleo del plomo. 2) Relación existente con la densidad macroscópica del plomo cuyo valor es  $11,34$  g/cm<sup>3</sup>. Masa atómica del plomo 207,19 u.  $N_A = 6,022 \times 10^{23}$ .

40. Experimentalmente se comprueba que el radio nuclear resulta ser:  $R = R_0 A^{1/3}$  donde  $A$  es la masa atómica y  $R_0$  es una constante que tiene el mismo valor para todos los núcleos y que es igual al radio del núcleo de <sup>1</sup>H por tener éste  $A = 1$  y cuyo valor, medido por el espacio ocupado por la carga nuclear, se obtiene:  $R_0 = 1,2 \times 10^{-15}$  m. Tomando como válida la ecuación dada determínese la densidad de la materia en estado nucleónico, admitiendo que la masa del protón y del neutrón son iguales e igual a 1 u.  $N_A = 6,022 \times 10^{23}$ .

# CAPÍTULO II

## CÁLCULO VECTORIAL.

### SISTEMAS DE REFERENCIA

#### A) VECTORES Y ESCALARES. SISTEMAS DE REFERENCIA CARTESIANOS

En este capítulo se estudian unos entes matemáticos que llamamos vectores, para cuyo manejo establecemos toda una *álgebra vectorial*. Para entender esta álgebra, conviene abstraerse de todo paralelismo con respecto a las operaciones que desde pequeños realizamos con números (escalares) y considerar al vector como una entidad matemática diferente.

La razón fundamental del empleo en el lenguaje físico del cálculo vectorial, es que los fenómenos físicos generalmente ocurren en el espacio tridimensional y, de no existir este cálculo, tendríamos que escribir tres ecuaciones (una por cada dimensión) cada vez que manejáramos una magnitud vectorial; el empleo del cálculo vectorial nos reduce estas tres ecuaciones a una sola, dando a nuestro lenguaje más fluidez y simplicidad. Es decir: cada vez que escribamos una ecuación vectorial, tendremos siempre presente que nos representa tres ecuaciones.

#### II - 1. Magnitudes escalares y vectoriales

«Una magnitud física es ESCALAR cuando queda determinada por un número real que expresa su medida».

Su álgebra operacional es la de los números. Son ejemplo de estas magnitudes: el tiempo, la masa, la temperatura, la presión, la energía, ...

«Una magnitud es VECTORIAL cuando en su determinación necesitamos, además de su medida (módulo), una dirección y un sentido».

Aclaremos el significado de estos dos últimos conceptos: convenimos en que un haz de rectas paralelas definen una misma dirección, aún podemos sobre una de ellas movernos en dos sentidos distintos; asociando a ellos un signo, positivo o negativo; decimos entonces que la recta está orientada, indicando con una flecha el sentido que acordemos sea positivo (los ejes de coordenadas cartesianas son rectas orientadas). En resumen: una recta orientada nos define una dirección y dos sentidos.

Como ejemplo de una magnitud vectorial, supongamos que un punto se mueve desde la posición  $O$  a la  $O'$  siguiendo uno cualquiera de los caminos que indicamos en la Fig. II-1. Prescindiendo de la distancia escalar  $s$  que nos mide la distancia de  $O$  a  $O'$  por cada trayectoria particular, la variación de la posición del punto desde  $O$  a  $O'$  es una magnitud vectorial, llamada DESPLAZAMIENTO, que se representa mediante el vector  $\mathbf{d}$ , que no es más que el segmento  $OO'$  orientado de  $O$  hacia  $O'$ . Obsérvese que la distancia recorrida por el punto varía según el camino recorrido, sin embargo, en todos los casos su desplazamiento es el mismo.

Existe otro tipo de magnitudes para las que el carácter escalar o vectorial es insuficiente, y hay que definir las con un mayor número de condiciones (nueve en un espacio tridimensional). A éstas se les llama «MAGNITUDES TENSORIALES». Su nombre proviene de su primera aplicación que apareció en el estudio de las «tensiones» producidas por fuerzas en medios continuos.

Por ejemplo: en un medio elástico e isótropo (sus características no dependen de la dirección), la relación entre la fuerza aplicada,  $\mathbf{F}$ , y la deformación producida,  $\mathbf{x}$ , es lineal,  $\mathbf{F} = K\mathbf{x}$  donde  $K$  es un escalar; lo que significa que  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{x}$  son dos vectores paralelos, como veremos en este capítulo. Sin embargo si el medio es anisótropo  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{x}$  serán de distinta dirección, y para relacionarlos ya no basta con una  $K$  escalar, sino que ahora debe ser un tensor que cambie el módulo y la dirección de  $\mathbf{x}$ . El álgebra de los tensores no será tratada en este libro.

#### II - 2. Representación de un vector

Los vectores se representan gráficamente por segmentos acabados en una punta de flecha. Queda determinado su módulo por la longitud del segmento, su dirección por la de la recta a que pertenece y su sentido por la punta de la flecha. Al origen del vector se le llama PUNTO DE APLICACIÓN.

Emplearemos como notación para un vector, la adoptada por la Unión Internacional de Física Pura y Aplicada (U.I.F.P.A.), representando estas magnitudes vectoriales por letras negras:  $\mathbf{d}$ , y la representación de su módulo por la correspondiente letra cursiva  $d$  o bien por  $|\mathbf{d}|$ . Cuando definamos el vector por su origen ( $O$ ) y extremo ( $O'$ ) convendremos en representarlo así:  $OO'$  o tam-

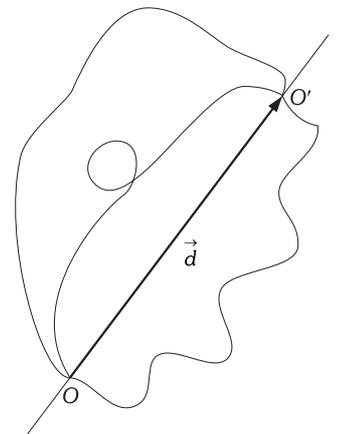


Fig. II-1.- Representación de un vector.

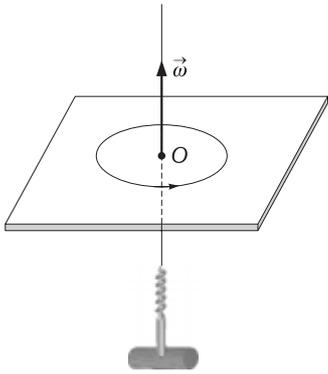


Fig. II-2.- Representación de un vector axial.

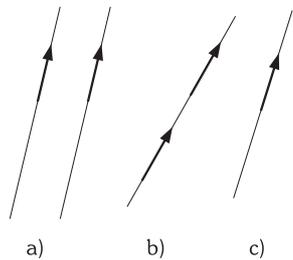


Fig. II-3.- Criterios de igualdad de vectores.

bién mediante la diferencia simbólica  $\mathbf{O}' - \mathbf{O}$ . Sin embargo, en las figuras optamos por representarlos como normalmente se hace en un manuscrito o en la pizarra del aula, es decir, con la flecha indicativa de vector sobre la letra que representa a la magnitud vectorial correspondiente.

**II - 3. Clasificación de los vectores. Criterios de igualdad**

Los vectores pueden ser: **LIBRES** cuando se pueden trasladar paralelamente a sí mismos a un punto origen arbitrario. (Ejemplo: el momento de un par de fuerzas). **DESGLIZANTES** cuando se pueden trasladar a lo largo de su dirección, es decir, que además de su módulo, dirección y sentido, se fija su recta de posición, y se puede tomar cualquier punto de ella como origen del vector. (Ejemplo: una fuerza); se llaman también **CURSORES**. **LIGADOS** cuando su punto de aplicación, su dirección, y su sentido son fijos e invariables. (Ejemplo: la intensidad del campo gravitatorio, eléctrico o magnético en un punto del espacio).

Dos vectores son **EQUIPOLENTES** cuando sus direcciones son paralelas y son iguales en módulo y sentido.

También los vectores pueden clasificarse en **AXIALES** y **POLARES**. Los vectores **POLARES** tienen sentido propio inherente a su definición. Por ejemplo, la velocidad de un móvil, la fuerza aplicada a un cuerpo, su aceleración, etc. Los vectores **AXIALES** (o **PSEUDOVECTORES**), no tienen sentido propio sino que necesitan de un convenio para precisarlo. Es el caso de la velocidad angular, del momento de una fuerza respecto de un punto, de la inducción magnética, etc. En el caso de la velocidad angular de rotación el convenio que se establece para la representación de tal vector es que su longitud represente el módulo o medida de la magnitud (en nuestro caso, número de radianes por segundo, por ejemplo) que su dirección sea perpendicular al plano en que se verifica el giro (Fig. II-2) y cuyo sentido sea el de avance de un sacacorchos que gire en el mismo sentido de la rotación considerada.

Teniendo en cuenta la primera clasificación que hemos hecho, establecemos el siguiente **CRITERIO DE IGUALDAD** de vectores: dos vectores libres son iguales si tienen los mismos módulos, dirección y sentido (es decir cuando son equipolentes, Fig. II-3a); para que sean iguales dos vectores deslizantes han de pertenecer además a la misma recta soporte (Fig. II-3b); y en el caso de vectores ligados deben estar también aplicados en el mismo punto (Fig. II-3c), es decir, un vector ligado sólo puede ser igual a sí mismo.

**II - 4. Coordenadas cartesianas. Triedro trirectángulo positivo**

Para el estudio de cualquier fenómeno físico necesitamos un sistema de referencia, la forma más simple empleada es el de coordenadas cartesianas ortogonales. Para establecer éste, la idea esencial inventada por René Descartes (1596-1650), es la identificación del conjunto de los puntos que componen una línea recta, que llamaremos  $X$ , con la totalidad de los números reales; definiendo sobre ella un «origen»  $O$  que divide a la recta en dos semirrectas a las que daremos el signo positivo y negativo (Fig. II-4).

Si convenimos en llamar «unidad» a la longitud del segmento  $OA$  y consideramos al segmento  $OP$ , también sobre la semirrecta positiva, entonces al punto  $P$  le asociamos el número real:  $x = OP/OA$ ; decimos entonces que « $x$  es la coordenada del punto  $P$ ». La coordenada de un punto  $Q$  situado en la semirrecta negativa, le corresponde el número real:  $x = -OQ/OA$ .

Esta asociación del conjunto de los puntos  $X$  con el conjunto de los números reales constituye un **SISTEMA COORDENADO DEL ESPACIO UNIDIMENSIONAL** formado por los puntos de  $X$ .

Obsérvese que a cada punto de la recta  $X$  le corresponde uno y sólo uno de los números reales, y recíprocamente.

Un paso más adelante es establecer una relación entre los puntos del plano y el conjunto de los números reales, para lo cual se toman dos rectas  $X$  e  $Y$  que se cortan ortogonalmente en un punto  $O$ , y cuyos sentidos positivos indicamos en la Fig. II-5. Un par de tales rectas con unidades de longitud  $OA$  y  $OB$  forman los que llamamos **EJES CARTESIANOS ORTOGONALES\***. A cada punto  $P$  del plano le asociamos una **pareja ordenada** de números reales  $(x, y)$ ;  $x$  corresponde al número real asociado al punto  $M$  tal y como dijimos anteriormente; el punto  $M$  se obtiene trazando la recta paralela al eje  $Y$  por  $P$ , y es el punto de corte entre ésta y el eje  $X$ . La recta paralela al eje  $X$  trazada por  $P$  corta en  $N$  al eje  $Y$ , a  $N$  le corresponde el número real  $y$ .

El par ordenado de números  $(x, y)$  son las coordenadas de  $P$  en el plano y la correspondencia biunívoca de parejas ordenadas de números con el conjunto de puntos del plano  $XY$  es el **SISTEMA COORDENADO ORTOGONAL DEL ESPACIO BIDIMENSIONAL** constituido por los puntos del plano.

Si consideramos a una partícula moviéndose en el plano  $XY$  en trayectoria circular, como se indica en la Fig. II-5, observamos que son dos los posibles sentidos de rotación, convenimos en

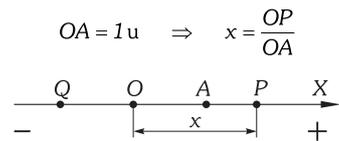


Fig. II-4.- Correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales.

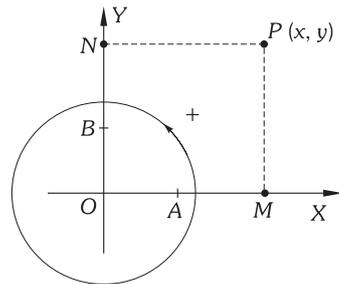


Fig. II-5.- Localización de un punto en un sistema cartesiano bidimensional. Convenio de sentido positivo en la rotación.

\* Si no se cortan ortogonalmente, al sistema se le llama **CARTESIANO OBLICUO**.

admitir como positivo el correspondiente al movimiento en sentido contrario a las agujas del reloj, de acuerdo con lo que normalmente se hace en los textos de Física; pero no es necesario que éste sea siempre el convenio elegido y por ello las definiciones de operaciones vectoriales y las fórmulas para su cálculo se establecerán independientemente del sentido de rotación elegido.

La extensión a la representación de puntos en el espacio tridimensional es inmediata: escogemos primero un origen  $O$ , por él pasamos tres planos perpendiculares entre sí, las rectas de intersección de estos planos son también ortogonales entre sí y se les llama EJES DE COORDENADAS  $X, Y, Z$ . Para asociar al punto  $P$  tres números hacemos pasar por  $P$  tres planos ortogonales entre sí que sean a su vez normales a los planos de referencia, interceptarán a los ejes  $X, Y, Z$  en los puntos  $M, N$  y  $R$  a los que corresponden tres números reales  $x, y, z$ .

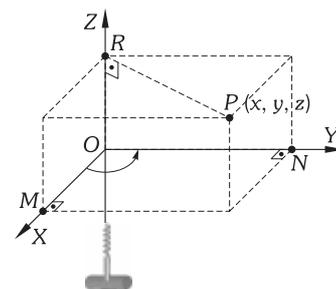


Fig. II-6.- Localización de un punto en un sistema cartesiano tridimensional. Triedro positivo.

La terna ordenada de números  $(x, y, z)$  son las coordenadas de  $P$  en el espacio, y la correspondencia biunívoca de ternas ordenadas de números con el conjunto de puntos del espacio  $XYZ$  es el SISTEMA DE COORDENADAS DEL ESPACIO TRIDIMENSIONAL constituido por los puntos del espacio.

Al triedro que aparece en la Fig. II-6 se le llama TRIEDRO TRIRRECTÁNGULO POSITIVO o DEXTRÓGIRO; convenimos en que un triedro cualquiera será positivo cuando podamos llevarlo a coincidir con el de la figura mediante movimientos rígidos. Otro convenio más general para caracterizar los triedros positivos es: si hacemos girar a la parte positiva del eje  $X$  en el plano  $XY$ , alrededor del eje  $Z$ , hasta hacerlo coincidir con la parte positiva del eje  $Y$  a través del menor ángulo entre  $X$  e  $Y$ , ese movimiento produce al eje  $Z$  una rotación tal que un sacacorchos colocado en él, avance en la dirección positiva del eje  $Z$ ; tales sistemas positivos son los que por convenio consideraremos en este libro; pero ya sabemos que no es necesario que sea siempre ésta la forma de proceder.

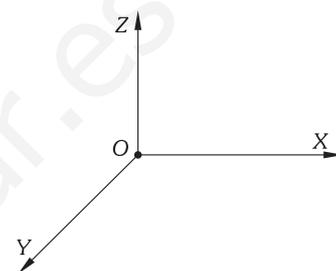


Fig. II-7.- Triedro negativo.

La razón por la que tenemos que abandonar el convenio de las agujas del reloj establecido en el plano es que al observar un giro en un plano desde el espacio, el observador puede encontrarse en dos semiespacios diferentes, determinados por el plano en que gire la partícula, y observadores en los semiespacios  $A$  y  $B$  no podrán ponerse de acuerdo sobre cual es el sentido positivo o negativo con el criterio del reloj y si se pondrán de acuerdo con los sentidos de giro establecidos en el párrafo anterior (Fig. II-8).

## II - 5. Componentes coordenadas de un vector

En el espacio tridimensional hemos definido un punto por tres coordenadas  $(x, y, z)$ . Definimos lo mismo mediante un vector  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$  llamado VECTOR DE POSICIÓN, a la terna ordenada de números  $(x, y, z)$  los llamamos COMPONENTES COORDENADAS del vector y le asociamos un único símbolo matemático  $\mathbf{r}$  (Fig. II-9).

Si utilizamos un sistema de coordenadas diferente, los tres números cambian a  $(x', y', z')$ , sin embargo, el vector  $\mathbf{r}$  es el mismo en ambos sistemas. Lo que queremos decir es que la definición de vector permanece invariante o independiente del sistema de coordenadas elegido.

Tomando el sistema  $X, Y, Z$ , y dándole carácter vectorial a  $x, y, z$  (proyecciones ortogonales de  $\mathbf{r}$  sobre los ejes), indicaremos  $\mathbf{r}$  de la forma:

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}$$

El sentido físico de esta igualdad es: suponiendo que  $\mathbf{r}$  fuera un efecto (una fuerza por ejemplo), no se afirma que  $\mathbf{r}$  es la suma numérica de sus componentes, sino que el efecto físico que produce  $\mathbf{r}$  es el mismo que el efecto de  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ , y  $\mathbf{z}$  actuando simultáneamente. Las componentes tienen por valor:

$$\begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \cos \beta \\ z = r \cos \gamma \end{cases} \quad (1)$$

$\alpha, \beta$  y  $\gamma$  son los ángulos que forma  $\mathbf{r}$  con cada uno de los ejes. A sus cosenos se les llama COSENOS DIRECTORES. El módulo de  $\mathbf{r}$  (diagonal del paralelepípedo construido con  $x, y, z$  como lados) es:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Si elevamos al cuadrado las igualdades (1) y sumamos, obtendremos:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \Rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Si el vector viene dado por las coordenadas de su origen  $A(x, y, z)$  y de su extremo  $B(x', y', z')$ , entonces las componentes coordenadas del vector  $\mathbf{AB}$  (Fig. II-10) serán:  $(x' - x, y' - y, z' - z)$ .

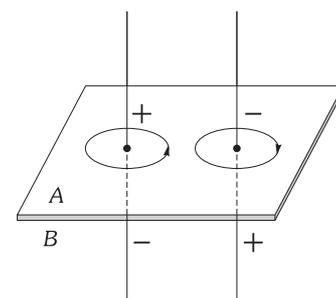


Fig. II-8.- Semiespacios determinados por un plano.

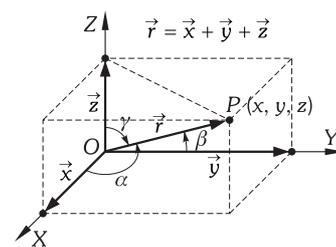


Fig. II-9.- Componentes coordenadas de un vector.

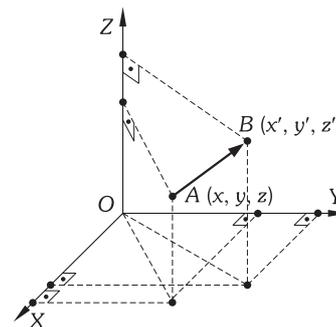


Fig. II-10.- Componentes coordenadas de un vector.

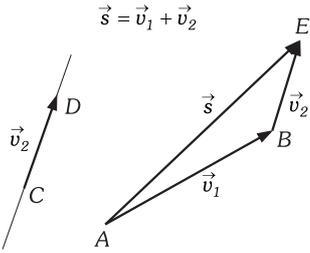


Fig. II-11.- Definición de suma de vectores libres.

«Si  $\begin{cases} X = x' - x \\ Y = y' - y \\ Z = z' - z \end{cases}$  escribiremos:  $\mathbf{AB} = \mathbf{X} + \mathbf{Y} + \mathbf{Z}$ »

**PROBLEMA: 1.**

**B) ÁLGEBRA VECTORIAL**

Una vez establecido el criterio de igualdad de vectores, vamos a estudiar operaciones vectoriales referidas a vectores libres. Las conclusiones que se obtendrán son también aplicables a vectores deslizantes cuyas rectas soporte se cortan y a vectores ligados con el mismo punto de aplicación. En los restantes casos, antes de generalizar las conclusiones, deberemos analizar detenidamente la situación física correspondiente.

**II - 6. Suma de vectores libres**

*Físicamente, sumar vectores, representantes de una misma magnitud, es hallar un tercer vector de la misma naturaleza que produzca los mismos efectos que producirían los vectores sumandos actuando simultáneamente.*

La suma de dos vectores libres se define mediante la siguiente construcción gráfica: Sean los vectores  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{AB}$  y  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{CD}$  (Fig. II-11), si desde el extremo del primero, B, trazamos el vector  $\mathbf{BE}$  equipolente al segundo, definimos el vector suma como el que tiene por origen el primero, A, y por extremo el del segundo, E.

Analíticamente la suma de vectores se realiza en función de sus componentes. Estudiamos el caso sencillo de dos vectores en dos dimensiones. Si  $\mathbf{s} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ , siendo  $\mathbf{v}_1 = x_1 + y_1$  y  $\mathbf{v}_2 = x_2 + y_2$ , entonces  $\mathbf{s} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , donde:

$$\begin{cases} x = x_1 + x_2 \\ y = y_1 + y_2 \end{cases}$$

lo cual es evidente según se desprende de la Fig. II-12.

El resultado es generalizable a tres dimensiones: si  $\mathbf{s} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ , siendo  $\mathbf{v}_1 = x_1 + y_1 + z_1$  y  $\mathbf{v}_2 = x_2 + y_2 + z_2$ , entonces  $\mathbf{s} = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}$ , donde (Fig. II-13):

$$\begin{cases} x = x_1 + x_2 \\ y = y_1 + y_2 \\ z = z_1 + z_2 \end{cases}$$

«Las componentes cartesianas del vector suma se obtienen sumando algebraicamente las correspondientes componentes de los sumandos».

El módulo del vector suma será:

$$s = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 + (z_1 + z_2)^2}$$

y sus cosenos directores:

$$\cos \alpha = x/s, \quad \cos \beta = y/s \quad \text{y} \quad \cos \gamma = z/s.$$

Es importante resaltar la diferencia existente entre las expresiones  $\mathbf{s} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$  y  $s = v_1 + v_2$ . La primera expresa que el efecto físico que produce  $\mathbf{s}$  es el mismo que el de  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  actuando a la vez. La segunda, referida a los módulos, sólo es cierta si ambos vectores sumandos son paralelos y del mismo sentido.

Para expresar, en general, la relación existente entre el módulo del vector suma y los módulos de los vectores sumandos, consideremos los vectores  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  de la Fig. II-14, que forman entre sí el ángulo  $\varphi$ ; de ella se obtiene las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} s^2 &= OB^2 = OC^2 + CB^2 \\ OC &= OA + AC = v_1 + AC \\ AC &= AB \cos \varphi = v_2 \cos \varphi \\ CB &= AB \sin \varphi = v_2 \sin \varphi \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} s^2 &= v_1^2 + v_2^2 \cos^2 \varphi + 2v_1v_2 \cos \varphi + v_2^2 \sin^2 \varphi \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad \boxed{s = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \varphi}} \end{aligned} \right. \quad (2)$$

CASOS PARTICULARES:

1.- En el caso de que los vectores tengan la misma dirección y sentido (Fig. II-15a) el ángulo es cero y su coseno la unidad; por tanto:

$$s = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2} = \sqrt{(v_1 + v_2)^2} = v_1 + v_2$$

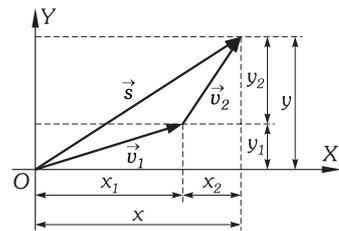


Fig. II-12.- Suma de dos vectores coplanarios en función de sus componentes.

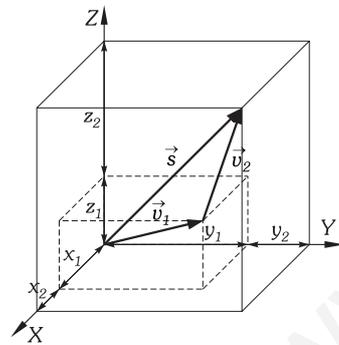


Fig. II-13.- Suma de dos vectores en función de sus componentes en tres dimensiones.

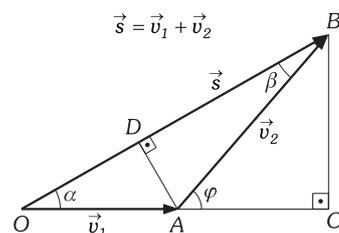


Fig. II-14.- Para calcular el módulo del vector suma en función de los módulos de los sumandos.

y el módulo de  $\mathbf{s}$  es la suma de los módulos. Único caso en que la suma vectorial coincide con la suma de los módulos.

2.- En el caso de que los vectores tengan la misma dirección y sentido contrario (Fig. II-15b) el ángulo  $\varphi$  es  $180^\circ$  y su coseno es  $-1$ :

$$s = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2} = \sqrt{(v_1 - v_2)^2} = v_1 - v_2$$

y el módulo de  $\mathbf{s}$  es la diferencia de los módulos.

3.- Si los vectores son perpendiculares,  $\varphi = 90^\circ$ , entonces:  $s^2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ , o bien;  $s^2 = v_1^2 + v_2^2$  y el cuadrado del módulo del vector suma es la suma de los cuadrados de los módulos de los sumandos.

Para obtener la dirección de  $\mathbf{s}$ , bastará con determinar el valor de  $\alpha$  en la Fig. II-14, en la que se tiene:

$$\left. \begin{aligned} CB = s \operatorname{sen} \alpha = v_2 \operatorname{sen} \varphi \\ AD = v_1 \operatorname{sen} \alpha = v_2 \operatorname{sen} \beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{s}{\operatorname{sen} \varphi} = \frac{v_2}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{v_1}{\operatorname{sen} \beta} \quad (3)$$

Las fórmulas (2) y (3) son dos ecuaciones fundamentales de la trigonometría: *los teoremas del coseno y del seno*.

### II - 7. Propiedades de la suma de vectores

A partir de consideraciones geométricas sencillas se deducen las siguientes propiedades:

a) *Es conmutativa:*  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$ . En efecto: en la Fig. II-16,  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{AB} + \mathbf{BD} = \mathbf{AD}$ , y  $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 = \mathbf{AC} + \mathbf{CD} = \mathbf{AD}$ , luego es conmutativa; y  $\mathbf{s}$  coincide con la diagonal del paralelogramo construido con  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  como lados.

b) *Es asociativa:*  $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$ . En efecto (Fig. II-17):

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3 &= (\mathbf{AB} + \mathbf{BC}) + \mathbf{CD} = \mathbf{AC} + \mathbf{CD} = \mathbf{AD} \\ \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) &= \mathbf{AB} + (\mathbf{BC} + \mathbf{CD}) = \mathbf{AB} + \mathbf{BD} = \mathbf{AD} \end{aligned} \quad \text{c.q.d.}$$

Esta propiedad permite definir la regla del polígono para la suma gráfica de vectores: *Dados  $n$  vectores libres,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ , si tomamos como origen de cada uno el extremo del anterior, el vector suma es el que une el origen del primero con el extremo del último.* (Fig. II-18).

Análiticamente esta propiedad se expresa de la forma:

$$\mathbf{s} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \dots + \mathbf{v}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i$$

de forma que si:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 + \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2 + \mathbf{z}_2 \\ &\dots \dots \dots \\ \mathbf{v}_n &= \mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n + \mathbf{z}_n \end{aligned}$$

entonces:

$\mathbf{s} = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}$ donde	$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i \\ y &= y_1 + y_2 + \dots + y_n = \sum_{i=1}^n y_i \\ z &= z_1 + z_2 + \dots + z_n = \sum_{i=1}^n z_i \end{aligned}$
---	---

y las componentes del vector suma son de nuevo la suma de las correspondientes componentes de los sumandos.

c) *Existe el vector nulo  $\mathbf{0}$ , tal que  $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ .* Sus componentes son todas nulas.

d) *Para todo vector  $\mathbf{v}$  existe el opuesto  $-\mathbf{v}$ , que sumado con  $\mathbf{v}$  da el vector nulo:  $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ .* Sus componentes son las de  $\mathbf{v}$  con el signo cambiado, y tiene la misma dirección que  $\mathbf{v}$  y sentido contrario.

Al resultado de sumar el vector  $\mathbf{v}_1$  el opuesto a  $\mathbf{v}_2$  se le llama DIFERENCIA DE AMBOS VECTORES:  $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + (-\mathbf{v}_2)$  (Fig. II-19).

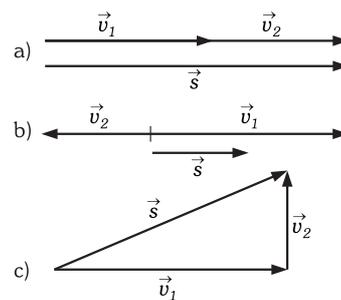


Fig. II-15.- Casos particulares de suma de vectores.

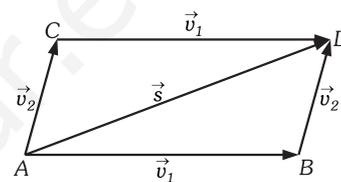


Fig. II-16.- La suma de vectores goza de la propiedad conmutativa.

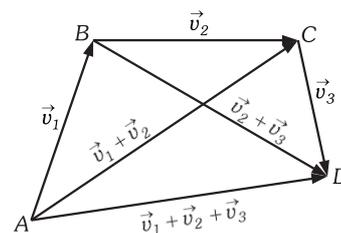


Fig. II-17.- Propiedad asociativa de la suma de vectores.

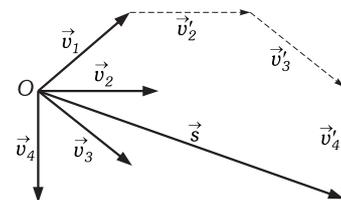


Fig. II-18.- Construcción geométrica del vector suma de cuatro.

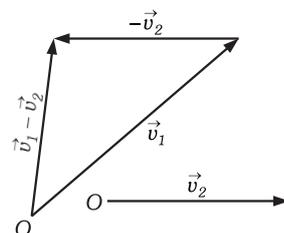


Fig. II-19.- Diferencia de vectores libres.

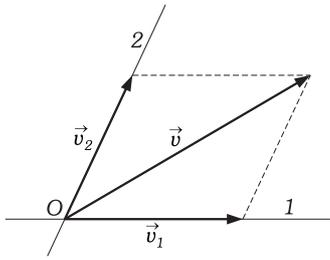


Fig. II-20.- Descomposición de un vector en dos direcciones.

**II - 8. Descomposición de un vector en dos o más direcciones**

a) DESCOMPOSICIÓN DE UN VECTOR EN DOS DIRECCIONES. Basta trazar por el extremo del vector  $v$  paralelas a las direcciones 1 y 2, hasta obtener el paralelogramo del cual  $v$  es diagonal. Los lados de aquél concurrentes con  $v$  son los vectores componentes (Fig. II-20).  $v = v_1 + v_2$ . La solución es única.

b) DESCOMPOSICIÓN DE UN VECTOR EN TRES DIRECCIONES CONCURRENTES COPLANARIAS CON EL VECTOR. Se traza por el punto de concurrencia una dirección auxiliar cualquiera (Fig. II-21) y se descompone  $v$  en una de las direcciones dadas  $-1-$  y la auxiliar, la componente según ésta, se descompone a su vez en  $-1-$  y  $-2-$ ;  $v_1, v_2$  y  $v_3$  serán las componentes pedidas:  $v = v_1 + v_2 + v_3$ . La descomposición se puede hacer de infinitas formas según la dirección auxiliar elegida.

c) DESCOMPOSICIÓN DE UN VECTOR EN TRES DIRECCIONES NO COPLANARIAS CON ÉL: Por el extremo del vector que queremos descomponer ( $v$ ) se traza una paralela a una de las direcciones (en la Fig. II-22 a la dirección 3) hasta que encuentre en un punto (A) al plano determinado por las otras dos (1, 2), quedando así determinado el vector  $OA$  que descompuesto en las direcciones  $-1-$  y  $-2-$  nos resuelve el problema:  $v = v_1 + v_2 + v_3$ . La solución es única.

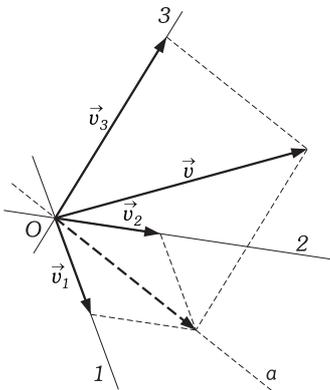


Fig. II-21.- Descomposición de un vector en tres direcciones coplanarias.

**II - 9. Producto de un vector por un escalar**

«El producto de un vector,  $v$ , por un escalar,  $n$ , es otro vector de las siguientes características: dirección la misma de  $v$ , sentido, el de  $v$  si  $n$  es positivo y el contrario si es negativo, y el módulo igual al producto del de  $v$  por el valor absoluto de  $n$ ».

Esta definición es evidente una vez definida la suma, puesto que si  $n$  es un escalar (un número), si multiplicamos por  $v$ , con el producto  $nv$  queremos decir que hay que sumar  $n$  vectores iguales a  $v$  y esta suma resulta ser un vector de módulo  $nv$  con la misma dirección y sentido que  $v$  (Fig. II-23).

Consecuencia de esta operación así definida, son las tres propiedades siguientes:

a) «Si dos vectores  $a$  y  $b$  tienen la misma dirección, existe un número  $\alpha$  que cumple»:

$$a = \alpha b$$

En efecto: el valor de este número será  $\alpha = a/b$  y el signo será + o - según que el sentido sea el mismo o el contrario.

b) «Un vector  $v$  puede expresarse siempre como combinación lineal de otros dos  $a$  y  $b$  coplanarios con él»:

$$v = \alpha v + \beta b \tag{4}$$

En efecto: si descomponemos  $v$  en las dos direcciones de  $a$  y  $b$  y las componentes resultantes son  $v_1$  y  $v_2$ , tendremos:

$$v = v_1 + v_2 \tag{5}$$

por la primera propiedad existirán dos números  $\alpha$  y  $\beta$  tales que:  $\alpha = v_1/a, \beta = v_2/b$  y que  $v_1 = \alpha a, v_2 = \beta b$ , que sustituidos en (5) da (4).

c) «Un vector  $v$  en el espacio, puede expresarse mediante una combinación de tres  $a, b$  y  $c$  no coplanarios con él».

$$v = \alpha v + \beta b + \gamma c \tag{6}$$

En efecto: el vector  $v$  lo podemos descomponer en las tres direcciones de  $a, b$  y  $c$ , si las componentes son  $v_1, v_2$  y  $v_3$  tendremos:

$$v = v_1 + v_2 + v_3 \tag{7}$$

y por la primera propiedad existen  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  tales que:  $\alpha = v_1/a, \beta = v_2/b, \gamma = v_3/c$  tales que  $v_1 = \alpha a, v_2 = \beta b, v_3 = \gamma c$  que sustituidos en (7) da (6).

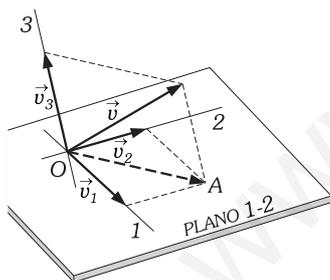


Fig. II-22.- Descomposición de un vector en tres direcciones no coplanarias.

**II - 10. Vectores unitarios**

Llamamos VECTOR UNITARIO (o VERSOR) a todo vector de módulo unidad.

Según las propiedades de la cuestión anterior si  $u$  es un vector unitario y  $v$  un vector que tiene la misma dirección y sentido podremos escribir:

$$v = v u \Leftrightarrow u = \frac{v}{v}$$

Para que la medida de una magnitud adquiera carácter vectorial, basta multiplicarla por el vector unidad en la dirección y sentido adecuados; es decir por un vector cualquiera en tal dirección y sentido, elevado a un exponente igual a cero.

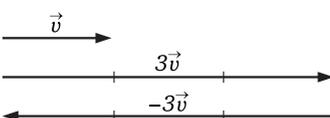


Fig. II-23.- Multiplicación del vector  $v$  por los escalares 3 y -3.

Si queremos definir una dirección de un eje cualquiera dado en el espacio, definiremos el vector  $\mathbf{e}^\circ$  en la dirección de dicho eje; es inmediato que sus componentes coordenadas (proyecciones sobre los ejes) son precisamente los cosenos directores de este eje.

**II - 11. Expresión de un vector en función de sus componentes y los vectores unitarios correspondientes a los ejes de coordenadas**

Si las componentes de un vector son  $x, y, z$ , es decir:

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} \tag{8}$$

y llamando  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  a los vectores unitarios en la dirección y sentido de los ejes, se verificará:  $\mathbf{x} = x\mathbf{i}, \mathbf{y} = y\mathbf{j}, \mathbf{z} = z\mathbf{k}$ ; siendo  $x, y, z$  los módulos de  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ . Sustituyendo estos últimos valores en la ecuación vectorial (8), obtenemos:

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

expresión de un vector en función de los módulos de sus componentes y de los vectores unitarios en la dirección y sentido de los ejes. Otra forma que emplearemos en este libro para expresar un vector en función de sus componentes coordenadas será:  $\mathbf{v}(x, y, z)$  y en particular para los vectores unitarios en las direcciones de los ejes de coordenadas,  $\mathbf{i}(1, 0, 0), \mathbf{j}(0, 1, 0)$  y  $\mathbf{k}(0, 0, 1)$ .

**PROBLEMAS: 2 al 11.**

**II - 12. Producto escalar de dos vectores\*. Propiedades**

Es un escalar obtenido multiplicando el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman.

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = v_1 v_2 \cos \varphi \tag{9}$$

También se puede definir el PRODUCTO ESCALAR como producto del módulo de uno de los vectores por la proyección del otro sobre él.

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = v_1 \text{proy}_{v_1} v_2$$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR

- a) El producto escalar goza de la *propiedad conmutativa*, ya que los tres factores (tres números)  $v_1, v_2$  y  $\cos \varphi$  pueden colocarse en cualquier orden sin que varíe el valor de su producto.
- b) Goza de la *propiedad distributiva*. En efecto:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \dots \Rightarrow \text{proy}_{v_1} v_2 = \text{proy}_{v_1} \mathbf{a} + \text{proy}_{v_1} \mathbf{b} + \dots$$

y el producto escalar tendrá por valor:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = v_1 \text{proy}_{v_1} v_2 = v_1 (\text{proy}_{v_1} \mathbf{a} + \text{proy}_{v_1} \mathbf{b} + \dots) = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{a} + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{b} + \dots$$

como queríamos demostrar.

- c) «Si dos vectores son perpendiculares su producto escalar es cero». En efecto:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= v_1 v_2 \cos \varphi \\ \varphi &= \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \varphi = 0 \end{aligned} \right| \Rightarrow \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0 \quad \text{c.q.d.}$$

La condición  $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$  es necesaria para que ambos vectores sean perpendiculares, pero no es suficiente, para que esto ocurra hay que exigir además, que tanto  $\mathbf{v}_1$  como  $\mathbf{v}_2$  sean no nulos.

- d) «Si dos vectores tienen la misma dirección y sentido, su producto escalar es igual al producto de sus módulos».

En efecto: si en (9),  $\varphi = 0$  el  $\cos \varphi = 1 \Rightarrow \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = v_1 v_2$ .

En particular si  $\mathbf{v}$  lo relacionamos consigo mismo mediante el producto escalar podremos escribir:  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2$ .

- e) Basándonos en la propiedad distributiva vamos a obtener la expresión del *producto escalar* de dos vectores en función de sus componentes.

Dados  $\mathbf{v}_1(x_1, y_1, z_1)$  y  $\mathbf{v}_2(x_2, y_2, z_2)$  su producto escalar será:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) \cdot (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) \tag{10}$$

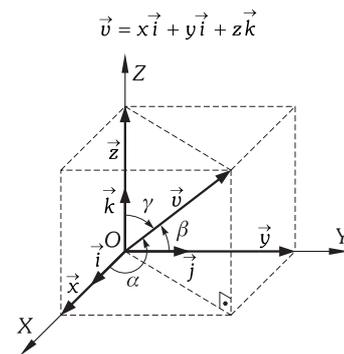


Fig. II-24.- Componentes coordenadas de un vector. Vectores unitarios en los ejes coordenados.

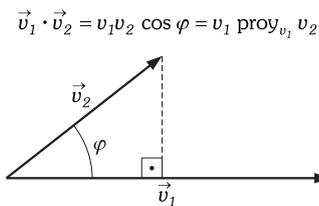


Fig. II-25.- Producto escalar.

\* Representamos el producto escalar de dos vectores por  $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ ; el vectorial por  $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$  (el signo  $\cdot$  para el producto escalar y el  $\times$  para el vectorial, son notaciones adoptadas por la UIFPA).

y como:  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$ ,  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$ , desarrollando la (10) nos queda:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

f) Ángulo de dos vectores. La propiedad e) nos proporciona un método sencillo para obtener el ángulo que forman dos vectores, conocidas sus componentes. En efecto:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \quad \left| \Rightarrow \quad \cos \varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \right. \Leftrightarrow \left. \cos \varphi = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{v_1v_2} \right.$$

**PROBLEMAS: 12 al 18.**

**II - 13. Producto vectorial de dos vectores**

Es un vector, cuyo módulo es igual al producto de los módulos de los factores, por el seno del ángulo que forman los vectores:

$$A = |\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2| = v_1v_2 \text{ sen } \varphi \tag{11}$$

la dirección del producto vectorial, es perpendicular al plano determinado por los factores, y su sentido el de avance de un sacacorchos que gira del primero al segundo factor por el camino más corto. (Fig. II-26).

El módulo (11) es el área del paralelogramo que tiene  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  como lados. Como la dirección de  $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$  es normal al plano del paralelogramo podemos considerarlo como el «vector área» del paralelogramo. Puesto que:  $v_2 \text{ sen } \varphi = h$  (altura del paralelogramo formado por  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  como lados), se verifica: Área del paralelogramo =  $A = v_1h$ .

La Física es conveniente «asociarle a una superficie un vector» como veremos más adelante.

Las propiedades de esta operación las pondremos después del desarrollo del producto mixto o triple producto escalar.

**II - 14. Producto mixto o triple producto escalar**

El PRODUCTO MIXTO es un escalar, cuyo valor es el producto escalar de un vector, por un producto vectorial.

$$V = \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)$$

El escalar que resulta en el producto mixto es el volumen del paralelepípedo de aristas  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ ,  $\mathbf{v}_3$  ya que  $\mathbf{A} = \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3$  es el área de la base y:  $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{A} = v_1A \cos \varphi = Ah = V$ ; demostrado esto, es inmediato que se verifican las igualdades:

$$\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_3 \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 \cdot (\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1) = -\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_2) = -\mathbf{v}_3 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1) = -\mathbf{v}_2 \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3)$$

También se representa este producto mixto de la forma:

$$\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_3\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2\mathbf{v}_3\mathbf{v}_1^*$$

**II - 15. Propiedades del producto vectorial**

a) El producto vectorial goza de la propiedad anticonmutativa (no goza de la propiedad conmutativa) ya que:  $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1$

b) Es distributivo, es decir:  $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3$ . En efecto: formemos el vector diferencia de ambos miembros de la igualdad anterior:

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) - \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3$$

multiplicando escalarmente los dos miembros de esta igualdad por un vector cualquiera  $\mathbf{b}$  no nulo, nos queda:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot [\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)] - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3)$$

haciendo uso de la propiedad del producto mixto obtenido en el párrafo anterior y de la propiedad distributiva del producto escalar, obtenemos:

$$\mathbf{b} \cdot [\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)] = (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2 \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_3 \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{v}_1) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3)$$

que sustituida en la anterior igualdad, nos hace ver que  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ . resultando por tanto que:

$$\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3 \quad \text{c.q.d.}$$

\* La propiedad es sencilla de recordar: pondremos siempre como segundo factor del producto mixto al producto vectorial. De los tres factores pasaremos el último a primer lugar y tendremos así las tres formas posibles del producto mixto.

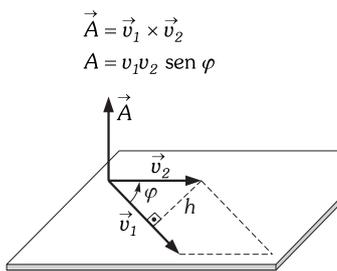


Fig. II-26.- Producto vectorial.

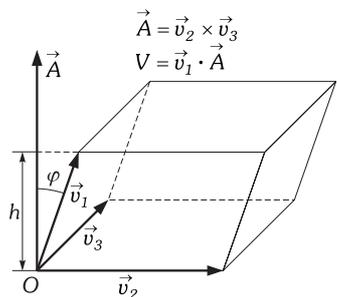


Fig. II-27.- Producto mixto.

c) Cuando dos vectores son paralelos su producto vectorial es el vector nulo y sus componentes coordenadas son proporcionales entre sí. En efecto:  $\varphi = 0 \Rightarrow \text{sen } \varphi = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ , la propiedad recíproca se cumple si y solo si  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  son no nulos.

Además: si  $\mathbf{v}_1(x_1, y_1, z_1)$  y  $\mathbf{v}_2(x_2, y_2, z_2)$  son paralelos podemos escribir (párrafo II-9 apartado a):

$$\mathbf{v}_1 = \alpha \mathbf{v}_2 \Rightarrow x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k} = \alpha x_2 \mathbf{i} + \alpha y_2 \mathbf{j} + \alpha z_2 \mathbf{k}$$

luego:  $x_1 = \alpha x_2$ ,  $y_1 = \alpha y_2$  y  $z_1 = \alpha z_2$ , de donde:

$$\alpha = \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \quad \text{c.q.d.}$$

### II – 16. Expresión del producto vectorial y mixto en función de las componentes coordenadas de los factores

PRODUCTO VECTORIAL: Sean  $\mathbf{v}_1(x_1, y_1, z_1)$  y  $\mathbf{v}_2(x_2, y_2, z_2)$ , entonces:

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k}) \times (x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + z_2 \mathbf{k})$$

teniendo en cuenta que:

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} & \mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = -\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j} \end{array}$$

y aplicando la propiedad distributiva obtenemos:

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = x_1 y_2 \mathbf{k} - x_1 z_2 \mathbf{j} - y_1 x_2 \mathbf{k} + y_1 z_2 \mathbf{i} + z_1 x_2 \mathbf{j} - z_1 y_2 \mathbf{i} \Rightarrow \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (y_1 z_2 - z_1 y_2) \mathbf{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2) \mathbf{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \mathbf{k}$$

esta igualdad podemos escribirla de la forma:

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \quad (12)$$

PRODUCTO MIXTO: Sean  $\mathbf{v}_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $\mathbf{v}_2(x_2, y_2, z_2)$  y  $\mathbf{v}_3(x_3, y_3, z_3)$ , llamando  $\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}(x, y, z)$ , podemos poner el producto mixto:  $\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}$ , por lo que:

$$\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v} = x_1 x + y_1 y + z_1 z$$

teniendo en cuenta la (12):

$$x = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad y = \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_3 & x_3 \end{vmatrix} \quad z = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

que sustituidas en la anterior:

$$\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + y_1 \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_3 & x_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

que es lo mismo que:

$$\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

### II – 17. Doble producto vectorial

Si tenemos tres vectores  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  y  $\mathbf{v}_3$  y relacionamos  $\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3$  nos dará un vector, que multiplicado vectorialmente por  $\mathbf{v}_1$  origina un nuevo vector,  $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)$ , al que llamamos DOBLE PRODUCTO VECTORIAL.

Esta operación goza de la propiedad:

$$\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) \mathbf{v}_3 \quad (13)$$

bien entendido que cada uno de los sumandos del segundo miembro son vectores. El valor (por ejemplo) del vector del primer sumando es el producto del escalar  $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3$  por el vector  $\mathbf{v}_2$  (producto de un escalar por un vector).

Para la demostración de (13) vamos a basarnos en la propiedad del apartado II-5 en que decíamos que un vector permanece invariable frente al sistema de coordenadas que elegimos, con lo que la demostración no perderá generalidad. Si se toman tres vectores no coplanarios  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  y  $\mathbf{v}_3$  y colocamos los ejes de forma que el plano XY coincida con el plano en que están  $\mathbf{v}_2$  y  $\mathbf{v}_3$  y el eje X coincida en dirección y sentido con el vector  $\mathbf{v}_3$  (Fig. II-28) entonces tendremos:

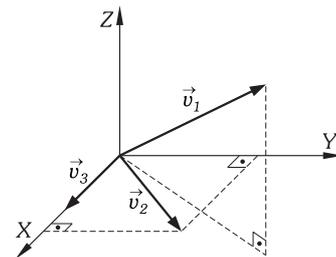


Fig. II-28.– Se eligen los ejes de coordenadas de la forma indicada en el esquema.

$$\begin{matrix} \mathbf{v}_1(x_1, y_1, z_1) \\ \mathbf{v}_2(x_2, y_2, 0) \\ \mathbf{v}_3(x_3, 0, 0) \end{matrix} \Bigg| \Rightarrow \begin{matrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = x_1 x_3 \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 \\ \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = -y_2 x_3 \mathbf{k} \end{matrix} \quad (14)$$

que junto con que:

$$\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 \times \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & 0 & -y_2 x_3 \end{vmatrix} = -y_1 y_2 x_3 \mathbf{i} + x_1 y_2 x_3 \mathbf{j}$$

Sumando y restando  $x_1 x_2 x_3 \mathbf{i}$  y agrupando términos obtenemos:

$$\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = (x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j}) x_1 x_2 - x_3 \mathbf{i} (x_1 x_2 + y_1 y_2)$$

y teniendo en cuenta (14), nos quedará:  $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) \mathbf{v}_3$  c.q.d.

**PROBLEMAS: 19 al 32.**

### C) TEORÍA DE MOMENTOS

Hasta ahora nos hemos referido a operaciones con vectores libres, en teoría de momentos operaremos también con VECTORES DESLIZANTES O CURSORES.

#### II - 18. Momento de un vector con respecto a un punto

Sea un vector  $\mathbf{v}$  de origen  $P$  (Fig. II-29).

«Se llama MOMENTO DE UN VECTOR  $\mathbf{v}$  CON RESPECTO A UN PUNTO  $O$ , a un producto vector, cuyo primer factor es la distancia  $\mathbf{r}$  entre el punto  $O$  y el origen  $P$  del vector y el segundo el propio vector».

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{OP} \times \mathbf{v}$$

Según esta definición,  $\mathbf{N}$  es un vector perpendicular al plano determinado por el vector y el punto, cuyo sentido (hacia arriba en el caso del dibujo) coincide con el avance de un sacacorchos que apoya su punta en  $O$  y, colocado perpendicularmente al plano formado por el vector y el punto, gira en el sentido que indica el vector  $\mathbf{v}$  alrededor del punto. El módulo del momento es:

$$N = vr \sin \varphi = vd$$

ya que  $r \sin \varphi = d$ , siendo  $d$  la menor distancia del punto a la dirección del vector.

Si el vector  $\mathbf{v}$  es deslizante y en vez de suponerlo aplicado en  $P$ , lo suponemos aplicado en  $P'$ , el momento de  $\mathbf{v}$  con respecto a  $O$  será:

$$\mathbf{N}' = \mathbf{r}' \times \mathbf{v} = \mathbf{OP}' \times \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N} = (\mathbf{r}' + \mathbf{P}'\mathbf{P}) \times \mathbf{v} = \mathbf{r}' \times \mathbf{v} + \mathbf{P}'\mathbf{P} \times \mathbf{v} = \mathbf{N}'$$

ya que el producto vector  $\mathbf{P}'\mathbf{P} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$  por tener ambos vectores la misma dirección, lo que demuestra que:

«El momento de un vector con respecto a un punto no varía aunque el origen del vector se desplace a lo largo de su dirección».

#### II - 19. Momento de un sistema de vectores concurrentes (Teorema de Varignon)

Si un vector es suma de otros varios concurrentes, su momento con respecto a un punto es la suma de los momentos de los sumandos, con respecto al mismo punto.

En efecto; si:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i$$

y es  $P$  el punto de concurrencia y llamamos  $\mathbf{r}$  al vector de posición de éste respecto del punto que vamos a tomar como origen de momentos ( $O$  en la Fig. II-31) tendremos:

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_n) = \mathbf{r} \times \mathbf{v}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{r} \times \mathbf{v}_n$$

entonces:

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 + \dots + \mathbf{N}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i$$

CONSECUENCIA:

«Si el centro de momentos se toma sobre el "vector suma" o en un punto cualquiera de su recta soporte, al ser nula la distancia del punto a dicha recta, la suma de los momentos de los vectores componentes es igual a cero».

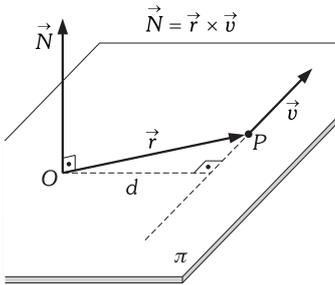


Fig. II-29.- Momento de un vector respecto de un punto.  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $d$  están en el plano  $\pi$ .  $\mathbf{N}$  es perpendicular a  $\pi$ .

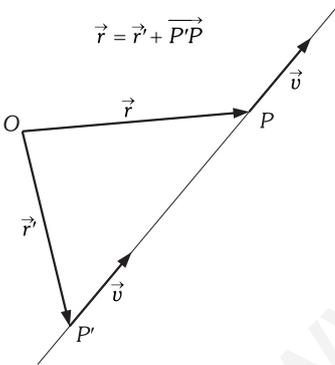


Fig. II-30.- El momento de un vector con respecto a un punto no varía aunque el origen del vector se desplace a lo largo de su dirección.

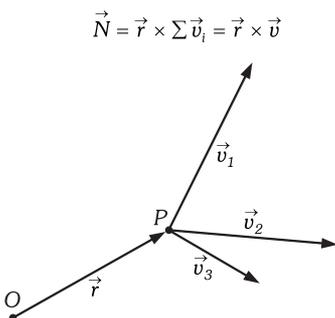


Fig. II-31.- Teorema de Pierre Varignon (1654-1722).

**II – 20. Momento de un vector con respecto a un eje**

Consideremos un eje  $e$  y un vector  $\mathbf{v}$  de origen  $P$ . Si obtenemos el momento del vector con respecto a un punto del eje y tal vector-momento lo proyectamos sobre el eje, el valor de tal proyección es un escalar, al que se llama MOMENTO DEL VECTOR CON RESPECTO AL EJE.

Considerando el eje  $e$  y el vector  $\mathbf{v}$  (Fig. II-32), el momento de  $\mathbf{v}$  con respecto a un punto  $O$  del eje es:  $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ , y el momento con respecto al eje será:

$$N_e = \text{proy}_e (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \tag{15}$$

Si tomamos el momento de  $\mathbf{v}$  con respecto a otro punto cualquiera del eje,  $O'$ , obtenemos:  $\mathbf{N}' = \mathbf{r}' \times \mathbf{v}$ , pero como  $\mathbf{r}' = \mathbf{O'O} + \mathbf{r}$  nos quedará:

$$\mathbf{N}' = (\mathbf{O'O} + \mathbf{r}) \times \mathbf{v} = \mathbf{O'O} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

su proyección sobre el eje  $e$  será:

$$N'_e = \text{proy}_e (\mathbf{O'O} \times \mathbf{v}) + \text{proy}_e (\mathbf{r} \times \mathbf{v})$$

el producto  $\mathbf{O'O} \times \mathbf{v}$  es perpendicular a  $\mathbf{O'O}$  (y a  $\mathbf{v}$ ) y por tanto perpendicular al eje  $e$ ; su proyección sobre tal eje es nula, quedando la anterior igualdad de la forma:  $N'_e = \text{proy}_e (\mathbf{r} \times \mathbf{v})$ , idéntica a la (15) lo que nos demuestra:

«El valor del momento de un vector con respecto a un eje es el mismo, cualquiera que sea el punto del eje que tomemos como centro de momentos».

CONSECUENCIAS:

«Si el vector y el eje están en el mismo plano el momento es nulo» ya que el momento del vector con respecto a cualquier punto del eje es perpendicular a éste y por tanto su proyección es cero.

«Si el vector y el eje están cruzados perpendicularmente el momento con respecto al eje es igual al momento con respecto a cualquier punto del eje» ya que este último momento coincide en dirección con el eje.

**II – 21. Expresión del momento de un vector con respecto a un punto y a un eje en función de las componentes coordenadas del vector**

Sea  $\mathbf{N}$  el momento del vector  $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$ , de origen  $P(x, y, z)$ , con respecto a un punto  $O(x_0, y_0, z_0)$ , entonces:

$$\mathbf{N} = \mathbf{OP} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

luego:

$$N_x = \begin{vmatrix} y - y_0 & z - z_0 \\ v_y & v_z \end{vmatrix} \quad N_y = \begin{vmatrix} z - z_0 & x - x_0 \\ v_z & v_x \end{vmatrix} \quad N_z = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \tag{16}$$

Sea  $N_e$  el momento del vector  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  con respecto al eje  $e$ , cuya dirección viene definida por sus cosenos directores  $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  que son las componentes coordenadas del vector unitario  $\mathbf{e}^o$  que define la dirección del eje. El momento  $N_e$  se obtiene por la definición del producto escalar:

$$N_e = \text{proy}_e N = \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}^o = N_x \cos \alpha + N_y \cos \beta + N_z \cos \gamma$$

si tenemos en cuenta (16) y que  $O(x_0, y_0, z_0)$  pertenece al eje podremos poner:

$$N_e = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \mathbf{e}^o \cdot (\mathbf{OP} \times \mathbf{v})$$

que es la expresión que queríamos hallar.

**II – 22. Resultante de un sistema de vectores deslizantes. Momento resultante del sistema. Centro de reducción**

«Se llama RESULTANTE de un sistema de vectores deslizantes o cursores al vector libre que se obtiene por la suma de los vectores equipolentes a los del sistema, tomando como origen de ellos un punto cualquiera del espacio».

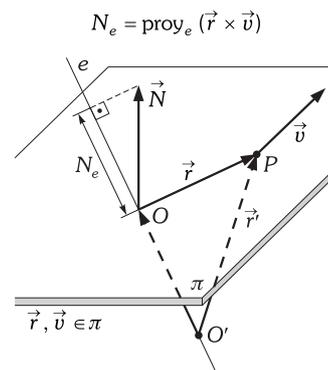


Fig. II-32.- Momento de un vector respecto de un eje.

Si suponemos un sistema constituido por  $n$  vectores deslizantes colocados en el espacio de la forma que se quiera, escribiremos:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i$$

«Se llama MOMENTO RESULTANTE con respecto a un punto  $O$ , a la suma de los momentos con respecto a  $O$  de cada uno de los vectores».

$$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$$

el punto  $O$  respecto del que se toman los momentos es arbitrario y se denomina CENTRO DE REDUCCIÓN.

Al tomar como centro de momentos diferentes puntos, el momento resultante varía su valor, en consecuencia éste será un vector ligado.

**PROBLEMAS: 33 al 39.**

### II - 23. Cambio de centro de reducción

Así como el vector resultante  $\mathbf{R}$  es invariante con respecto al punto en el que se toma el sistema equipolente al dado, el momento resultante varía su valor al variar el centro de reducción.

Se trata de estudiar la relación que existe entre el momento ( $\mathbf{N}$ ) resultante con respecto a un punto ( $O$ ) y el momento ( $\mathbf{N}'$ ) resultante con respecto a otro ( $O'$ ).

Si  $\mathbf{r}_i$  y  $\mathbf{r}'_i$  son los vectores de posición del origen del vector  $\mathbf{v}_i$  referidos respectivamente a  $O$  y  $O'$ , tenemos que  $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{O}'\mathbf{O}$ , generalizando a  $n$  vectores y aplicando la definición de  $\mathbf{N}'$  podemos escribir:

$$\mathbf{N}' = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i + \mathbf{O}'\mathbf{O}) \times \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i + \mathbf{O}'\mathbf{O} \times \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \Rightarrow \mathbf{N}' = \mathbf{N} + \mathbf{O}'\mathbf{O} \times \mathbf{R} \quad (17)$$

«El momento de un sistema con respecto a un punto  $O'$  es igual al momento con respecto a  $O$  más el momento del vector resultante respecto de  $O'$  supuesto aplicado en  $O$ ».

**PROBLEMAS: 40 y 41.**

### II - 24. Invariante vectorial y escalar de un sistema. Torsor

El vector  $\mathbf{R}$  que no depende del centro de reducción elegido, es por tanto un invariante del sistema que se le llama INVARIANTE VECTORIAL DEL SISTEMA DE VECTORES DESLIZANTES.

Otro invariante del sistema se obtiene multiplicando escalarmente los dos miembros de la ecuación (17) por  $\mathbf{R}$  y obtenemos:

$$\mathbf{N}' \cdot \mathbf{R} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{R}$$

ya que  $(\mathbf{O}'\mathbf{O} \times \mathbf{R}) \cdot \mathbf{R} = 0$  puesto que son perpendiculares. A este invariante se llama el INVARIANTE ESCALAR DEL SISTEMA.

Podríamos enunciar esta propiedad del sistema de la siguiente forma:

«El momento resultante  $\mathbf{N}$  tiene constante su proyección sobre la recta de posición del vector resultante  $\mathbf{R}$ ».

En efecto: por la definición de producto escalar:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \cdot \mathbf{R} &= NR \cos \alpha = R \text{ proy}_R N \\ \mathbf{N}' \cdot \mathbf{R} &= N'R \cos \beta = R \text{ proy}_R N' \end{aligned} \quad (18)$$

teniendo en cuenta que  $\mathbf{R}$  es invariante e igualando:

$$\text{proy}_R N = \text{proy}_R N'$$

«Aunque  $\mathbf{N}$  no es un invariante del sistema, sí lo es su proyección sobre una recta que lleva la dirección de  $\mathbf{R}$ ».

Por otra parte, si despejamos  $N$  en la fórmula (18) podemos poner:

$$N = \frac{\text{proy}_R N}{\cos \alpha} \quad (19)$$

y tomará  $\mathbf{N}$  el valor mínimo (Fig. II-34) cuando  $\cos \alpha = 1$  o sea  $\alpha = 0$  lo que nos dice:

«El momento del sistema será mínimo cuando tenga la misma dirección que  $\mathbf{R}$ ».

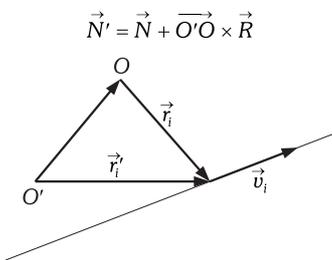


Fig. II-33.- Cambio de centro de reducción.

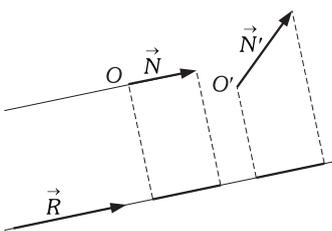


Fig. II-34.- El momento  $\vec{N}$ , paralelo a  $\vec{R}$ , es mínimo por carecer de componente perpendicular a la dirección de la resultante.

Al conjunto de vectores  $\{\mathbf{R}, \mathbf{N}_R\}$  se le denomina TORSOR;  $\mathbf{R}$  es la resultante del sistema de vectores y  $\mathbf{N}_R$  el momento mínimo (que como ya hemos dicho tiene la dirección del  $\mathbf{R}$ ), de la (19) es fácil deducir que su valor es:

$$\mathbf{N}_R = \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{R}}{R^2} \mathbf{R}$$

### II - 25. Eje central

«EJE CENTRAL es el lugar geométrico de los puntos del espacio para los cuales el momento del sistema es mínimo, o lo que es lo mismo, el momento del sistema tiene la misma dirección que  $\mathbf{R}$ ».

Para encontrar el eje central de un sistema, bastará con encontrar un punto de éste, ya que trazando una paralela a  $\mathbf{R}$  por este punto obtendremos la solución a nuestro problema.

Supongamos que la resultante de un sistema es  $\mathbf{R}$  y el momento resultante es  $\mathbf{N}'$  (Fig. II-35).

Descomponemos  $\mathbf{N}'$  en dos direcciones, una paralela a  $\mathbf{R}$  ( $\mathbf{N}'_p$ ) y otra perpendicular ( $\mathbf{N}'_n$ ). Tomemos una distancia  $PO$  perpendicular al plano de  $\mathbf{N}'$  y  $\mathbf{R}$ , tal que el momento de  $\mathbf{R}$  con respecto a  $O$  anule la componente  $\mathbf{N}'_n$  del vector  $\mathbf{N}'$  (es decir: igual en módulo a  $\mathbf{N}'_n$  y de sentido contrario a él). Podemos escribir:

$$\mathbf{N}'_n = -\mathbf{OP} \times \mathbf{R} \tag{20}$$

Si llamamos  $\mathbf{N}$  al momento resultante del sistema con respecto a  $O$  y aplicando el cambio de centro de reducción de  $P$  a  $O$  (fórmula 17) obtenemos:

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}' + \mathbf{OP} \times \mathbf{R} = \mathbf{N}'_p + \mathbf{N}'_n + \mathbf{OP} \times \mathbf{R}$$

y teniendo en cuenta (20) nos queda:

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}'_p$$

luego  $O$  es el punto que buscábamos.

### II - 26. Ecuación del eje central

Sean  $\mathbf{R}(R_x, R_y, R_z)$  y  $\mathbf{N}(N_x, N_y, N_z)$  la resultante y el momento resultante, con respecto al origen, de un sistema de vectores deslizantes. Si llamamos  $\mathbf{N}'$  al momento con respecto a otro punto  $P(x, y, z)$ , aplicando (17) pondremos:  $\mathbf{N}' = \mathbf{N} + \mathbf{PO} \times \mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{R} \times \mathbf{OP}$ , como:

$$\mathbf{R} \times \mathbf{OP} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ R_x & R_y & R_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (R_y z - R_z y) \mathbf{i} + (R_z x - R_x z) \mathbf{j} + (R_x y - R_y x) \mathbf{k}$$

entonces:

$$\mathbf{N}' = (N_x + R_y z - R_z y) \mathbf{i} + (N_y + R_z x - R_x z) \mathbf{j} + (N_z + R_x y - R_y x) \mathbf{k}$$

Para que  $P$  pertenezca al eje central, se tiene que verificar que  $\mathbf{N}'$  y  $\mathbf{R}$  sean paralelos por lo que tendrán que tener las componentes coordenadas proporcionales:

$$\frac{N_x + R_y z - R_z y}{R_x} = \frac{N_y + R_z x - R_x z}{R_y} = \frac{N_z + R_x y - R_y x}{R_z}$$

expresión analítica del eje central.

**PROBLEMAS: 42 al 46.**

### II - 27. Casos particulares

De todo lo anteriormente dicho se deducen las siguientes CONSECUENCIAS:

1.<sup>a</sup> Si la resultante del sistema es nula ( $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ ), el momento resultante es el mismo cualquiera que sea el centro de reducción elegido, y en consecuencia, este será un vector libre; esta afirmación nos la demuestra la fórmula (17).

2.<sup>a</sup> Tomando como centro de momentos cualquier punto del eje central el sistema se reduce al Torsor.

3.<sup>a</sup> Si el momento mínimo del sistema es nulo entonces tiene que verificarse que el vector resultante y el momento resultante son perpendiculares entre sí; entonces si  $O$  es un punto del eje central, el momento  $\mathbf{N}$  del sistema respecto de  $O$  es nulo y de (17) deducimos que el momento respecto de otro punto  $O'$  es:

$$\mathbf{N}' = \mathbf{O'O} \times \mathbf{R}$$

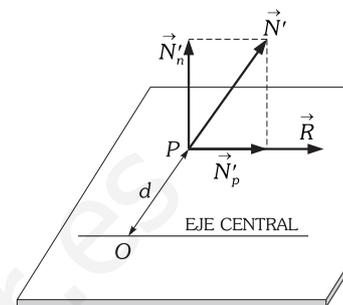


Fig. II-35.- Eje central.

«El momento de un sistema de vectores de momento mínimo cero, es igual al momento de la resultante  $\mathbf{R}$  respecto de un punto cualquiera que no pertenezca al eje central» (puesto que si pertenece éste es nulo).

4.<sup>a</sup> Si el sistema de cursores es concurrente (todas las rectas que contienen a los vectores deslizantes pasan por un punto) el momento del sistema respecto del punto de concurrencia es nulo, con lo que este punto pertenece al eje central; luego «El momento respecto de otro punto cualquiera será el del vector resultante  $\mathbf{R}$ , cuando se supone situado en la recta de su dirección que pasa por el punto de concurrencia».

5.<sup>a</sup> Si en el sistema de vectores deslizantes, éstos son coplanarios  $\mathbf{N} \cdot \mathbf{R} = 0$ , puesto que  $\mathbf{R}$  se encuentra en el plano que contiene a los vectores y  $\mathbf{N}$  será siempre perpendicular a este plano; si éste es de ecuación  $z = 0$  (plano XY) el eje central es una recta contenida en el plano del sistema de vectores y su ecuación será:

$$N_z + R_x y - R_y x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_y x - R_x y = N}$$

en este caso: «El Torsor se reduce a la resultante  $\mathbf{R}$ ».

## II – 28. Sistema de vectores ligados y paralelos

Supongamos  $n$  vectores ligados  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ , todos ellos paralelos y cuyos puntos de aplicación vienen definidos por  $\mathbf{r}_1(x_1, y_1, z_1), \mathbf{r}_2(x_2, y_2, z_2), \dots, \mathbf{r}_n(x_n, y_n, z_n)$ . Si  $\mathbf{R}$  es la resultante de todos ellos y  $\mathbf{N}$  el momento resultante, éstos serán siempre perpendiculares, y su Torsor se reducirá a  $\mathbf{R}$ .

Su llamamos  $\mathbf{u}$  al vector unitario que tiene la dirección de los vectores, tendremos:  $\mathbf{v}_i = v_i \mathbf{u}$ , siendo  $v_i$  un número real cuyo valor absoluto es igual al módulo del vector  $\mathbf{v}_i$ , con signo positivo o negativo, según que el sentido del vector  $\mathbf{v}_i$  sea el mismo o el contrario al del vector unitario  $\mathbf{u}$ . Obsérvese que en estas condiciones el módulo del vector resultante será:  $R = \sum v_i$ .

Si consideramos al sistema de vectores paralelos al eje OZ entonces:

$$\left. \begin{array}{l} R_x = R_y = 0 \\ R_z = R \end{array} \right| \quad N_z = 0$$

y las ecuaciones del eje central serán:

$$x = -\frac{N_y}{R_z} = \frac{\sum v_i y_i}{R} \quad y = \frac{N_x}{R_z} = \frac{\sum v_i x_i}{R}$$

en estas expresiones  $v_i$  representa el módulo del vector  $\mathbf{v}_i$  con su signo.

En general tendremos: «Cualquiera que sea la dirección del sistema de vectores ligados y paralelos el eje central pasará siempre por el punto de coordenadas:

$$\boxed{\xi = \frac{\sum v_i x_i}{R}} \quad \boxed{\eta = \frac{\sum v_i y_i}{R}} \quad \boxed{\zeta = \frac{\sum v_i z_i}{R}}$$

que se llama CENTRO DEL SISTEMA de vectores paralelos y ligados».

**PROBLEMA: 47.**

## D) CÁLCULO INFINITESIMAL VECTORIAL\*

### II – 29. Concepto de límite de un vector

Supongamos que un vector  $\mathbf{v}$  es función de un parámetro  $t$  y escribiremos:  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ , y como todo vector, viene dado por sus componentes coordenadas:  $v_x = v_x(t), v_y = v_y(t), v_z = v_z(t)$ .

Diremos que la función  $\mathbf{v}(t)$  tiene por límite  $\mathbf{l}$ , cuando  $t$  tiende a  $t_0$ , si cualquiera que sea  $\varepsilon$ , existe otro número  $\nu$  tal que para todo valor  $t$  contenido en el intervalo  $(t + \nu, t - \nu)$  se verifica:  $|\mathbf{v}(t) - \mathbf{l}| < \varepsilon$ ; y escribiremos:

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{v}(t) = \mathbf{l}}$$

DEFINICIONES:

- 1) Diremos que  $\mathbf{v}(t)$  es una función continua para  $t = t_0$  si:  $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0)$
- 2) «Un vector es infinitesimal si lo es su módulo».

\* Los conceptos de circulación, gradiente, divergencia, laplaciana y rotacional se verán en el capítulo VII.

**II – 30. Derivada de un vector con respecto a un escalar**

Si  $\mathbf{v}(t)$  es una función vectorial del parámetro  $t$ , e incrementamos  $t$ , pasando su valor a  $t + \Delta t$ , hallaremos el valor de  $\Delta \mathbf{v}(t)$  de la forma:  $\Delta \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)$ .

Si dividimos el vector  $\Delta \mathbf{v}$  por  $\Delta t$  y pasamos al límite con  $\Delta t$  tendiendo a cero, obtenemos la definición de DERIVADA DE UN VECTOR CON RESPECTO A UN ESCALAR:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Es evidente que las componentes coordenadas de  $d\mathbf{v}/dt$  serán:  $dv_x/dt, dv_y/dt, dv_z/dt$ .

Las propiedades que siguen a continuación, que no deducimos, se pueden demostrar igual que se hace, en la teoría de funciones, en cualquier tratado de cálculo infinitesimal.

- a) Si  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(s)$  y  $s = s(t)$  obtenemos que:  $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{ds} \frac{ds}{dt}$
- b) Si  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t)$  tendremos:  $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{b}}{dt}$
- c) Si  $\mathbf{a}(t) = f(t) \mathbf{b}(t)$  tendremos:  $\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{df}{dt} \mathbf{b} + f \frac{d\mathbf{b}}{dt}$

CONSECUENCIAS

- 1) Si  $\mathbf{v}(t) = v(t) \mathbf{u}$ , siendo  $\mathbf{u} = \mathbf{v}(t)/v(t)$  (vector unitario en la dirección  $\mathbf{v}$ ), podemos escribir

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(v\mathbf{u})}{dt} = v \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{dv}{dt} \mathbf{u} \tag{21}$$

- 2) Si  $\mathbf{v}$  es tal que  $\mathbf{v} = v\mathbf{u}$  y  $v$  es constante en dirección ( $\mathbf{u}$  no varía) tendremos:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}$$

la derivada de  $\mathbf{v}$  es pues un vector en la dirección de  $\mathbf{v}$ .

- 3) Si  $\mathbf{v}$  es constante en módulo:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} v$$

este vector es perpendicular al vector  $\mathbf{v}$ . En efecto: como  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2$  derivando:

$$\frac{d(v^2)}{dt} = \frac{d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = 2\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0$$

luego si  $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}/dt = 0$  tendremos que  $\mathbf{v}$  y  $d\mathbf{v}/dt$  son perpendiculares.

4) Como consecuencia de las propiedades 2 y 3 si  $\mathbf{v}$  no conserva constante ni módulo ni dirección, la igualdad (21) demuestra que la derivada de  $\mathbf{v}$  es la suma vectorial de dos vectores, uno en la misma dirección que  $\mathbf{v}$  y otro perpendicular a ella.

- 5) Al ser  $\mathbf{u}$  un vector unitario, conserva constante el módulo, tendremos por la propiedad 3:

$$\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0$$

luego  $\mathbf{v}$  y  $d\mathbf{u}/dt$  son siempre perpendiculares.

- d) Derivada del producto escalar:

$$\frac{d(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{dt} = \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b}$$

- e) Derivada del producto vector:

$$\frac{d(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{dt} = \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b}$$

CONSECUENCIA:

La condición que cumple un vector de dirección constante es también que:

$$\mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{0}$$

En efecto: si  $\mathbf{v} = v\mathbf{u}$  tendremos que:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = v\mathbf{u} \times \frac{dv}{dt} \mathbf{u} = v \frac{dv}{dt} (\mathbf{u} \times \mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad \text{c.q.d.}$$

PROBLEMAS: 48 al 51.

**II – 31. Integración de funciones vectoriales**

Se tiene un vector que es función de un parámetro  $t$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ ; se define la integral de la función vectorial en un intervalo  $(a, b)$  de valores de  $t$  de la forma siguiente: dividimos este intervalo en  $n$  partes; sea  $\Delta t$  una de ellas y  $\mathbf{v}(t)$  el valor del vector correspondiente a un valor  $t$  de este intervalo parcial  $\Delta t$ . Si tomamos el producto  $\mathbf{v}(t) \Delta t$  y sumamos los productos análogos de cada una de las  $n$  partes del intervalo  $(a, b)$ , el límite (si existe) de la suma de estos productos cuando  $\Delta t$  tiende a cero es la INTEGRAL DEFINIDA del vector  $\mathbf{v}(t)$  en el intervalo  $(a, b)$  y se escribe:

$$\mathbf{I} = \int_a^b \mathbf{v}(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i \mathbf{v}(t) \Delta t$$

podremos escribir este vector integral en función de sus componentes coordenadas de la forma:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_x + \mathbf{I}_y + \mathbf{I}_z = \int_a^b v_x(t) dt + \int_a^b v_y(t) dt + \int_a^b v_z(t) dt$$

PROBLEMAS: 52 al 55.

**E) COORDENADAS POLARES**

Las coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  no son las únicas en las que se puede expresar un vector. aunque son las más utilizadas, existen otros sistemas de coordenadas cuyo uso simplifica el tratamiento de algunos problemas. Definiremos a continuación las coordenadas polares planas en dos dimensiones. En tres dimensiones se emplean las cilíndricas y esféricas, que no analizaremos aquí.

**II – 32. Coordenadas polares planas**

La posición de un punto del plano  $OXY$  queda fijada por dos parámetros que son el módulo de su vector de posición,  $r$ , y el ángulo,  $\varphi$ , que éste forma con el sentido positivo del eje  $OX$ . Los correspondientes vectores unitarios perpendiculares son  $\mathbf{u}_r$ , y  $\mathbf{u}_\varphi$ , señalados en la Fig. II-36. La relación entre éstos y los  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  cartesianos se obtiene fácilmente de la Fig. II-37.

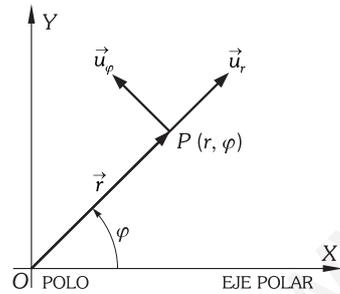


Fig. II-36.– Coordenadas polares planas. Vectores unitarios perpendiculares.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_r &= |\mathbf{u}_r| \cos \varphi \mathbf{i} + |\mathbf{u}_r| \sin \varphi \mathbf{j} \\ \mathbf{u}_\varphi &= -|\mathbf{u}_\varphi| \sin \varphi \mathbf{i} + |\mathbf{u}_\varphi| \cos \varphi \mathbf{j} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{u}_r = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j} \\ \mathbf{u}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j} \end{cases}$$

Las componentes de  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  en la base  $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\varphi)$  serán tales que:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= (\text{proy}_{\mathbf{u}_r} \mathbf{i}) \mathbf{u}_r + (\text{proy}_{\mathbf{u}_\varphi} \mathbf{i}) \mathbf{u}_\varphi \\ \mathbf{j} &= (\text{proy}_{\mathbf{u}_r} \mathbf{j}) \mathbf{u}_r + (\text{proy}_{\mathbf{u}_\varphi} \mathbf{j}) \mathbf{u}_\varphi \end{aligned}$$

es decir:

$$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{i} \cdot \mathbf{u}_r}{|\mathbf{u}_r|} \mathbf{u}_r + \frac{\mathbf{i} \cdot \mathbf{u}_\varphi}{|\mathbf{u}_\varphi|} \mathbf{u}_\varphi = [\mathbf{i} \cdot (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j})] \mathbf{u}_r + [\mathbf{i} \cdot (-\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j})] \mathbf{u}_\varphi$$

desarrollando los productos escalares y realizando un cálculo análogo para  $\mathbf{j}$ , obtenemos:

$$\begin{cases} \mathbf{i} = \cos \varphi \mathbf{u}_r - \sin \varphi \mathbf{u}_\varphi \\ \mathbf{j} = \sin \varphi \mathbf{u}_r + \cos \varphi \mathbf{u}_\varphi \end{cases}$$

componentes que, como se ve, coinciden con las de la transformación inversa si cambiamos filas por columnas.

En este sistema, el vector de posición del punto  $P$  se expresa:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$$

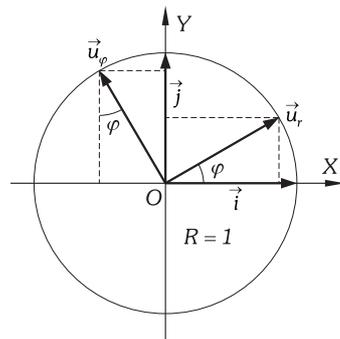


Fig. II-37.– Relación entre  $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\varphi)$  y los cartesianos  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ .

Desarrollando  $\mathbf{u}$ , en la base  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$  tenemos:

$$\mathbf{r} = r (\cos \varphi \mathbf{i} + \text{sen } \varphi \mathbf{j}) = r \cos \varphi \mathbf{i} + r \text{sen } \varphi \mathbf{j}$$

con lo que la relación entre las componentes de ambos sistemas es:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \text{sen } \varphi$$

y de la Fig. II-36, la inversa:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

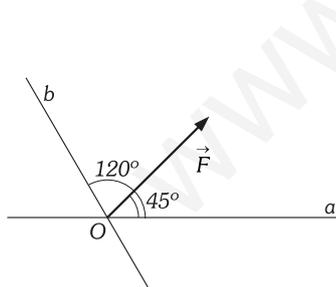
$$\varphi = \text{arctg } \frac{y}{x}$$

**PROBLEMAS: 56 al 60.**

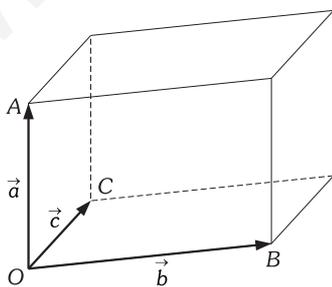
**PROBLEMAS**

**A) ÁLGEBRA VECTORIAL**

- Si un vector forma con los ejes  $X$  e  $Y$  ángulos de  $60^\circ$  y tiene de módulo 4 unidades. Calcular: 1) Sus componentes coordenadas. 2) Ángulo que forma con el eje  $Z$ .
- Se tienen dos fuerzas coplanarias y concurrentes cuyos módulos son:  $F_1 = 5 \text{ kp}$  y  $F_2 = 7 \text{ kp}$ , que forman respectivamente los siguientes ángulos con el eje  $OX$ :  $60^\circ$  y  $-30^\circ$ . Calcular: 1) La fuerza resultante. 2) Su módulo. 3) Ángulo que forma con el eje  $OX$ .
- Se tienen tres fuerzas concurrentes cuyos módulos son:  $F_1 = 6 \text{ kp}$ ,  $F_2 = 3 \text{ kp}$ ,  $F_3 = 4 \text{ kp}$ , que forman, respectivamente, los siguientes ángulos con el eje  $OX$ :  $45^\circ$ ,  $30^\circ$  y  $-60^\circ$ . Las tres fuerzas están en el mismo plano. Calcular el módulo de la resultante y el coseno del ángulo que forma con el eje  $OX$ .
- Teniendo en cuenta que la fuerza de interacción Newtoniana entre dos partículas de masa  $m$  y  $m'$  que distan entre sí  $r$ , es:  $\mathbf{F} = -Gmm'\mathbf{r}/r^3$ , [ $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ ], resolver el siguiente problema: supongamos que en el espacio intergaláctico (fuera de toda influencia de cuerpos celestes) definimos un sistema de ejes rectangulares. Tres partículas de masa 4 kg las colocamos en  $(0, 0)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(2, -2)$  medidas estas coordenadas en metros. Calcular la fuerza que ejercerán sobre una partícula de masa 1 kg colocada en  $(4, 0) \text{ m}$ .
- Si la expresión de la ley de Coulomb es:  $\mathbf{F} = K_0qq'\mathbf{r}/r^3$ , [ $K_0 = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ ]. Calcular la fuerza que actúa sobre una carga de  $1 \mu\text{C}$  colocada en el punto  $(6, 0) \text{ m}$  debida a la siguiente distribución: En el origen de coordenadas una carga  $q_1 = 2 \mu\text{C}$ , en el punto  $(0, 3) \text{ m}$  una carga  $q_2 = 3 \mu\text{C}$  y en el punto  $(0, -3) \text{ m}$  una carga  $q_3 = -3 \mu\text{C}$  (suponemos las cargas en el vacío).
- Descomponer la fuerza de módulo  $F = 20,0 \text{ N}$  en las direcciones  $a$  y  $b$  indicadas en la figura.



Problema II-6.



Problema II-27.

- Si tienen tres vectores no coplanarios  $\mathbf{OA} = \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{OB} = \mathbf{b}$  y  $\mathbf{OC} = \mathbf{c}$ . Designamos por  $M$  el punto medio del segmento rectilíneo  $AB$  y por  $G$  el baricentro del triángulo  $ABC$ ; se pide obtener razonada y sucesivamente: 1) Expresión de  $\mathbf{OM}$  en función de  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ . 2) Expresión de  $\mathbf{MC}$  en función de  $\mathbf{OM}$  y  $\mathbf{c}$ , así como la de  $\mathbf{GC}$  en función de  $\mathbf{MC}$ . 3) Expresión de  $\mathbf{OG}$  en función de  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$ .
- Dados los vectores:  $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{b} = -4\mathbf{i} + \mathbf{j}$ , calcular: 1) El vector suma y su módulo. 2) El vector diferencia y el ángulo que forma con el eje  $OX$ . 3) El vector  $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$  y el vector unitario que define la dirección y sentido de  $\mathbf{c}$ .
- Dados los vectores:  $\mathbf{a}$  de módulo 3 y cosenos directores proporcionales a 2, 1 y -2,  $\mathbf{b}$  que tiene de origen respecto de cierto sistema el

punto  $O(-1, -2, 1)$  y de extremo el punto  $P(3, 0, 2)$  y el vector  $\mathbf{c}(2, 0, -3)$ . Calcular: 1)  $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$ . 2)  $|3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 2\mathbf{c}|$ .

10. Un vector tiene por origen respecto de cierto sistema de referencia el punto  $O(-1, 2, 0)$  y de extremo  $P(3, -1, 2)$ . Calcular: 1) Componentes del vector  $\mathbf{OP}$ . 2) Módulo y cosenos directores. 3) Un vector unitario en la dirección de él pero de sentido contrario.

11. Dados los vectores  $\mathbf{a}(2, 4, 6)$  y  $\mathbf{b}(1, -2, 3)$ . Calcular: 1) El vector suma  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ , su módulo y cosenos directores. 2) El vector diferencia  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  y el vector unitario que define su dirección y sentido.

12. Dados los vectores:  $\mathbf{a}(1, -1, 2)$  y  $\mathbf{b}(-1, 3, 4)$ . Calcular: 1) El producto escalar de ambos vectores. 2) El ángulo que forman. 3) La proyección de  $\mathbf{b}$  sobre  $\mathbf{a}$ .

13. Demostrar que el vector unitario  $\mathbf{a}$ , cuyos cosenos directores son:  $\cos \alpha = 1/3$ ,  $\cos \beta = 2/3$  y  $\cos \gamma > 0$ , es perpendicular al vector  $\mathbf{b}(6, -9, 6)$ .

14. Demuéstrase que si la suma y diferencia de dos vectores tienen el mismo módulo, entonces son perpendiculares.

15. Hallar el vector unitario paralelo al plano  $OYZ$ , y perpendicular al vector  $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ .

16. Dado el vector  $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ , calcular su proyección sobre la recta que pasa por los puntos  $A(0, 1, 2)$  y  $B(2, 2, 1)$ .

17. Se tienen los vectores  $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$  y  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ . Calcular las componentes del vector unitario  $\mathbf{u}$ , perteneciente al plano determinado por  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  y perpendicular al vector  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2$ .

18. Demostrar que las alturas de un triángulo se cortan en un punto.

19. Dados dos vectores  $\mathbf{a}(2, 1, -3)$  y  $\mathbf{b}(1, 0, -2)$  hállese un vector unitario que sea perpendicular a ambos.

20. Dados los siguientes vectores:  $\mathbf{a} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k})/7$ ,  $\mathbf{b} = (3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k})/7$ ,  $\mathbf{c} = (6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k})/7$ , demuéstrase: 1) Que sus respectivos módulos valen la unidad. 2) Que son perpendiculares entre sí. 3) Que  $\mathbf{c}$  es el producto vectorial de  $\mathbf{a}$  por  $\mathbf{b}$ .

21. Dados los vectores  $\mathbf{a}(1, 3, -2)$  y  $\mathbf{b}(1, -1, 0)$ . Calcular: 1) Su producto vectorial. 2) El área del paralelogramo que tiene a los dos vectores como lados. 3) Un vector  $\mathbf{c}$ , de módulo 6, perpendicular al plano en que se encuentran  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ .

22. Los tres vértices de un triángulo son:  $A(2, 1, 3)$ ,  $B(2, -1, 1)$  y  $C(0, -2, 1)$ . Calcular: 1) Área del triángulo. 2) Ángulo  $A$ .

23. Tres vértices de un paralelogramo  $ABCD$  tienen por coordenadas:  $A(2, 0, 2)$ ,  $B(3, 2, 0)$  y  $D(1, 2, -1)$ . Calcular: 1) Las coordenadas del vértice  $C$ . 2) Área del paralelogramo. 3) Ángulo en  $B$ .

24. Si el producto vectorial de dos vectores es  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$  y sus módulos son 4 y  $\sqrt{7}$ , respectivamente, calcular su producto escalar.

25. 1) Deducir el teorema del coseno para un triángulo utilizando el producto escalar. 2) Deducir el teorema de los senos para un triángulo utilizando el producto vectorial.

26. Definido un sistema de referencia cartesiano en el plano:  $OXY$ ; y en él dos vectores unitarios cualesquiera  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  que forman los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente con la dirección positiva del eje  $OX$ . 1) Demostrar que:  $\mathbf{u}_1 = \cos \alpha \mathbf{i} + \text{sen } \alpha \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{u}_2 = \cos \beta \mathbf{i} + \text{sen } \beta \mathbf{j}$ . 2) Calcular, por aplicación del producto escalar de  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$ , la expresión de  $\cos(\alpha - \beta)$ . 3) Calcular, por aplicación del producto vectorial de  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$ , la expresión de  $\text{sen}(\alpha - \beta)$ .

27. Calcular el volumen del paralelepípedo de la figura sabiendo que  $O(1, 0, 2)$ ,  $A(3, 2, 4)$ ,  $B(2, 6, 8)$  y  $C(2, -3, 1)$ , expresadas en metros.

28. Dados dos vectores  $\mathbf{a}(2, -1, 0)$ ,  $\mathbf{b}(3, -2, 1)$  y  $\mathbf{c}(0, -2, 1)$ . Calcular: 1)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ . 2)  $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ . 3)  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$  (producto mixto) =  $\mathbf{abc}$ . 4)  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$ . 5)  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$  (doble producto vectorial).

29. Dados dos vectores  $\mathbf{a}(1, 0, -1)$ ,  $\mathbf{b}(1, 3, 0)$ ,  $\mathbf{c}(2, -1, 1)$  y  $\mathbf{d}(0, -2, -1)$ . Calcular: 1)  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$ . 2)  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$ . 3)  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d})$ . 4)  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$ .

30. Demuéstrase que si  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ , se verifica que  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ .

31. Demostrar la identidad de Lagrange:  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = a^2 b^2$ , siendo:  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$  y  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ .

32. Demostrar que el producto vectorial de cuatro vectores verifica:  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{abd}) \mathbf{c} - (\mathbf{abc}) \mathbf{d}$ .

**B) TEORÍA DE MOMENTOS**

33. El origen de un vector es el punto  $A(3, -1, 2)$  y su extremo  $B(1, 2, 1)$ ; calcular su momento respecto a  $C(1, 1, 2)$ .

34. Dados los vectores  $\mathbf{v}_1(-2, 3, 1)$  y  $\mathbf{v}_2(-1, 3, 2)$  ambos aplicados en el punto  $P(2, 3, 2)$ , calcular el momento del sistema respecto del punto  $A(-1, 0, 2)$  y compruébese que la suma de los dos momentos es igual al momento de la resultante respecto de  $A$  aplicada en  $P$ .

35. Hallar el valor de la expresión:  $\mathbf{a} \times \mathbf{N}_C$  siendo:  $\mathbf{a}(2, -1, 2)$ ,  $\mathbf{b}(1, -2, 1)$  y  $\mathbf{N}_C$  el momento del vector  $\mathbf{b}$  aplicado en el punto  $B(2, 3, 1)$  con respecto al punto  $C(1, 1, 1)$ .

36. Las coordenadas del origen de cierto vector son proporcionales a  $1, 5$  y  $\alpha$ , y sus componentes lo son a  $1, \alpha$  y  $\beta$ . Además, sus momentos respecto de los ejes de coordenadas, son proporcionales a  $1, 2$  y  $3$ . Calcular los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ .

37. Dado el vector  $\mathbf{v}(3, -6, 8)$  cuyo origen es el punto  $P(2, 1, -2)$ ; calcular su momento respecto al eje:  $(x-2)/2 = (y-5)/3 = (z-3)/6$ .

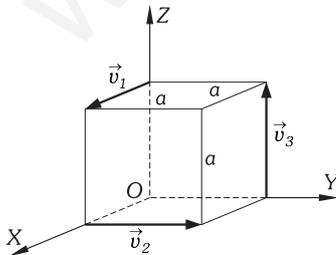
38. Calcular el momento del vector  $\mathbf{v}(1, -3, 2)$  de origen  $P(1, 1, 0)$  respecto al eje que pasa por los puntos  $A(1, 0, -1)$ , y  $B(2, 1, 1)$ .

39. De un sistema de vectores sabemos que su resultante es  $\mathbf{R}_1 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$  y que el momento respecto del origen tiene por módulo  $2\sqrt{6}$  y es paralelo al vector  $\mathbf{d} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ . Al añadir un nuevo vector  $\mathbf{v}$ , el sistema se reduce a su resultante que tiene como recta soporte el eje  $OZ$ . Obtener las componentes de  $\mathbf{v}$  y su recta soporte.

40. El punto de aplicación del vector  $\mathbf{v}(6, -3, 4)$  es  $P(3, -6, 2)$  referidos a un sistema  $OXYZ$ . Calcúlese: 1) Momento del vector respecto al origen  $O$ . 2) Momento del vector respecto al punto  $O'(2, 3, 1)$ .

41. Dados los vectores deslizantes:  $\mathbf{v}_1(3, 2, -3)$  y  $\mathbf{v}_2(6, -3, 2)$  que pasan por los puntos  $P_1(2, -6, 4)$  y  $P_2(4, -1, -1)$ , respectivamente, calcúlese: 1) La resultante del sistema de los dos vectores. 2) El momento resultante con respecto al origen. 3) El momento resultante referido al punto  $O'(2, -1, 5)$ .

42. Dado el sistema de vectores:  $\mathbf{v}_1(3, -6, 2)$  de origen  $P_1(1, 3, -2)$ ,  $\mathbf{v}_2(2, 4, -6)$  de origen  $P_2(3, -2, 1)$ ,  $\mathbf{v}_3(1, -1, 1)$  de origen  $P_3(1, 3, 0)$ , encontrar la ecuación del eje central y el momento mínimo.



Problema II-44.

43. Dado el sistema de vectores deslizantes:  $\mathbf{v}_1(1, 2, 0)$  que pasa por el punto  $P_1(1, 1, 1)$ ,  $\mathbf{v}_2(-1, -1, 1)$  que pasa por el punto  $P_2(2, 2, 2)$ ,  $\mathbf{v}_3(0, 1, 1)$  que pasa por el punto  $P_3(0, 1, 2)$ ,  $\mathbf{v}_4(2, 2, 2)$  que pasa por el punto  $P_4(1, 0, 1)$ , calcular el torsor del sistema.

44. Sobre tres aristas de un cubo de lado  $a$  se consideran los tres vectores de la figura. Calcular: 1) La resultante general. 2) El momento del sistema respecto al origen. 3) La ecuación del eje central.

45. Dos sistemas de vectores tienen resultantes generales  $\mathbf{R}_1 = 10\mathbf{i}$  y  $\mathbf{R}_2 = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ ; los respectivos momentos mínimos tienen por módulos  $15$  y  $25$ . Calcular: 1) El eje central del sistema total. 2) El momento mínimo resultante.

46. Dados los vectores deslizantes  $\mathbf{v}_1(a, 1, 0)$ ,  $\mathbf{v}_2(1, 1, 1)$  y  $\mathbf{v}_3(0, -1, 2)$ , cuyas rectas soporte pasan, respectivamente, por los puntos  $P_1(1, 2, 1)$ ,  $P_2(1, 1, 2)$  y  $P_3(1, 1, 1)$ ; calcular el valor de  $a$  tal que el sistema se reduzca solamente a su resultante, y encontrar la ecuación del eje central.

47. Se tiene un sistema de tres vectores paralelos,  $\mathbf{v}_1(2, 1, -1)$ ,  $\mathbf{v}_2(8, 4, -4)$  y  $\mathbf{v}_3(-4, -2, 2)$ , aplicados en los puntos  $P_1(0, 1, 2)$ ,  $P_2(1, -1, 0)$  y  $P_3(2, 2, 0)$ , respectivamente. 1) Hallar su centro. 2) Obtener la ecuación del eje central del sistema.

**C) CÁLCULO INFINITESIMAL VECTORIAL**

48. Demostrar aplicando el concepto de límite de un vector las fórmulas:  $d(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})/dt = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{b}/dt + d\mathbf{b}/dt \cdot \mathbf{a}$ ,  $d(\mathbf{a} \times \mathbf{b})/dt = \mathbf{a} \times d\mathbf{b}/dt + d\mathbf{a}/dt \times \mathbf{b}$ .

49. Dado el vector:  $\mathbf{a} = A(\cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j})$  donde  $A$  y  $\omega$  son constantes y  $t$  es la variable escalar independiente, se pide: 1) Hallar su módulo y la derivada de éste. 2)  $d\mathbf{a}/dt$  y  $|d\mathbf{a}/dt|$ . 3) Demostrar que  $\mathbf{a}$  y  $d\mathbf{a}/dt$  son perpendiculares.

50. Si  $\mathbf{v}$  es un vector función de un parámetro  $t$  demostrar que: 1) Si  $\mathbf{v}$  es constante en dirección, entonces  $\mathbf{v} \times d\mathbf{v}/dt = \mathbf{0}$ . 2) Si  $\mathbf{v}$  es constante en módulo, entonces  $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}/dt = 0$ .

51. Dados los vectores:  $\mathbf{a}(t^2, t, 0)$ ,  $\mathbf{b}(0, 2 \cos t, t^2)$ . Calcular: 1)  $d(\mathbf{a} + \mathbf{b})/dt$ . 2)  $d(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})/dt$ . 3)  $d(\mathbf{a} \times \mathbf{b})/dt$ . 4)  $d|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|/dt$ . 5)  $d(d\mathbf{a}/dt \cdot \mathbf{b})/dt$ . 6)  $d[(\mathbf{a} \times \mathbf{b})/(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})]/dt$ .

52. Dados los vectores:  $\mathbf{a}(t^2, t, 1)$ , y  $\mathbf{b}(1, t, t+1)$ . Calcular: 1)  $\int (\mathbf{a} + \mathbf{b}) dt$ . 2)  $\int (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) dt$ . 3)  $\int (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) dt$ .

53. Dado el escalar (función de punto):  $a = x^2 yz + 3x^2 z - y$ ; calcular la integral de línea:  $\int_C a d\mathbf{r}$ , ( $d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$ ), a lo largo de la curva  $y = x^2$ ,  $z = 2$ , cuando se pasa desde el punto  $A(1, 1, 2)$  al  $B(2, 4, 2)$ .

54. Dado el vector (Vector campo):  $\mathbf{v} = (x+y)^2 \mathbf{i} + xy \mathbf{j}$ ; calcular la integral (circulación):  $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ , ( $d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j}$ ), a lo largo de la recta  $y = x + 1$  desde el punto  $A(0, 1)$  al  $B(1, 2)$ .

55. Dado el vector:  $\mathbf{v} = (x-z)^2 \mathbf{i} + x \mathbf{j} + (y-z)^2 \mathbf{k}$ ; calcular la integral de línea:  $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ , ( $d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$ ), a lo largo de la curva  $x = y^2$ ,  $z = 0$ , cuando se pasa desde el punto  $A(1, 1, 0)$  al  $B(4, 2, 0)$ .

**D) COORDENADAS POLARES**

56. Una recta dista del origen de coordenadas una longitud  $\rho$ , y forma con el semieje  $OX$  positivo un ángulo  $\alpha$ . Tomando el origen como polo y el eje  $OX$  como eje polar, obtener la ecuación de la recta en coordenadas polares.

57. Dos puntos están definidos por sus coordenadas polares  $(r_1, \varphi_1)$  y  $(r_2, \varphi_2)$ . Obtener la expresión de la distancia entre ambos.

58. Obtener la ecuación en polares de una elipse, considerando un foco como polo y el eje mayor como eje polar.

59. Obtener la ecuación de una parábola en coordenadas polares, considerando el foco como polo y el eje polar perpendicular a la directriz.

60. Cambiar a cartesianas o polares, según corresponda, las expresiones de las curvas siguientes: 1)  $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$ . 2)  $r = \sin \varphi / (1 + \text{tg } \varphi)$ .

# CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA. MAGNITUDES FUNDAMENTALES. MOVIMIENTO RECTILÍNEO

## A) INTRODUCCIÓN

### III – 1. Mecánica

«La MECÁNICA estudia el estado de reposo y movimiento de los cuerpos».

La MECÁNICA CLÁSICA y por extensión la FÍSICA CLÁSICA cuya formulación fue terminada a principios del siglo XX\*, está limitada al análisis de objetos muy grandes comparados con los del átomo; también a los que se mueven con velocidades muy pequeñas comparadas con la de la luz. Estas limitaciones *no descalifican «para nada» a la Física clásica*, ya que actualmente son innumerables las aplicaciones de todo tipo que de ella hacemos.

### III – 2. Cinemática

«La CINEMÁTICA es la parte de la mecánica que estudia los movimientos independientemente de las causas que los producen».

Para el entendimiento del problema que se plantea la cinemática pensemos, por ejemplo, en las cuestiones que se tratan en la colocación en órbita de un satélite artificial; antes de su lanzamiento necesitamos *predecir su futuro*, es decir: «el satélite a tal hora (en tal instante) tendrá que estar colocado en ... y con una velocidad de ... para retornarlo a la Tierra desde la posición que ocupa en tal instante habrá que darle una aceleración de ... causada por el cohete de retorno...». No tratamos, en este capítulo, de dar solución a un problema tan complicado como éste en el que se han empleado años y años de investigación tecnológica para hacerlo efectivo, pero manejaremos los conceptos básicos que han servido para hacer que se resuelva.

*El problema fundamental de la cinemática consiste en describir y predecir el movimiento futuro, determinar posición, velocidad y aceleración de un móvil en función del tiempo, condicionados a las características del problema, lo que analíticamente equivale a obtener relaciones del tipo  $f(x, y, z, t) = 0$ .*

### III – 3. Partícula. Movimientos absolutos y relativos

«PARTÍCULA es un punto material, un ente ideal cuyo volumen consideramos nulo».

Localizamos a los objetos en un punto, cuando sus dimensiones no intervienen en el análisis de sus movimientos, y en consecuencia no consideramos la rotación alrededor de un eje que pase por él. Así por ejemplo: un transatlántico es pequeño en comparación con la longitud de su ruta, por lo que al describir su movimiento por el océano, se considera que la nave es un punto; para un astrónomo una estrella, e incluso una galaxia, pueden ser consideradas como partículas; sin embargo para un físico atómico los átomos no lo son.

Si se analiza la palabra movimiento podremos decir que:

*Un punto se mueve cuando su posición varía con relación a un sistema de ejes que consideramos fijo. Si los ejes de referencia están realmente fijos, el movimiento es ABSOLUTO; si no lo están, al movimiento se le llama RELATIVO.*

Cuando vamos en un tren en marcha, quietos en nuestro asiento, no nos movemos con respecto al tren; sin embargo nos movemos con respecto a un poste de telégrafos clavado en la Tierra. Asimismo, podremos estar quietos sobre la Tierra, pero estaremos en movimiento con respecto al centro de la Tierra, que a su vez se desplaza respecto del centro del Sol... *No existiendo puntos fijos en el Universo, todo movimiento real es relativo.*

Por lo tanto, en la descripción que hagamos de un movimiento tendremos que especificar el sistema de referencia desde el que lo describimos.

Es evidente que dos observadores que se encontrasen en diferentes sistemas de referencia, describirían el movimiento de un cuerpo de forma distinta, a menos que se encontraran en reposo el uno respecto del otro (en este caso únicamente tendrán que realizar un cambio de ejes del siste-

\* Es muy interesante hacer un estudio cronológico de la historia de la Mecánica desde Arquímedes (287-212 a.C.) hasta James Clerk Maxwell (1831-1879).

ma de referencia del uno al otro, o referirse ambos a uno en reposo con ellos, para dar la misma posición y trayectoria de la partícula en estudio).

No obstante, en el análisis que vamos a realizar a continuación de la cinemática de la partícula, consideraremos al sistema de referencia fijo en cuyo origen situamos al observador. La elección adecuada del origen y sistema de referencia a utilizar en cada problema, es esencial para su resolución más cómoda y rápida posible.

La mayoría de los problemas que se plantean en el análisis de los movimientos de la partícula para su aplicación técnica, son rectilíneos (monodimensionales) o curvilíneos planos (bidimensionales), no por eso es menos importante el desarrollo del movimiento tridimensional, que nos proporciona una forma general de definir las magnitudes fundamentales de la cinemática y que hemos abordado en determinados problemas.

### B) MAGNITUDES FUNDAMENTALES DE LA CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA

#### III - 4. Trayectoria

Para determinar cinemáticamente el movimiento deberemos establecer una correspondencia entre la posición de la partícula respecto de un determinado sistema de referencia y el tiempo.

Tenemos varias formas de describir esta correspondencia, que evidentemente serán equivalentes por responder a una realidad única. Inicialmente describimos dos, la primera consiste en fijar la posición de un punto  $P_0$  respecto a un sistema cartesiano OXYZ (Fig. III-1), lugar de posición del punto móvil en el que comenzamos a contar el tiempo ( $t = 0$ ), al que corresponde un vector de posición  $\mathbf{r}_0$ . A la situación cinemática de la partícula (posición, velocidad y aceleración) en tal instante, las llamaremos CONDICIONES INICIALES, así  $\mathbf{r}_0$  será el VECTOR DE POSICIÓN INICIAL [siempre que sea posible, tomaremos como origen O del sistema de referencia, la posición de la partícula para  $t = 0$ , de modo que las componentes de  $\mathbf{r}_0$  sean  $(0, 0, 0)$ ; esta elección es arbitraria pudiendo simplificar el problema]. Hecho esto y transcurrido un tiempo  $t$ , la partícula se encontrará en un punto P al que corresponde su VECTOR DE POSICIÓN:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \tag{1}$$

expresión que constituye la ECUACIÓN HORARIA DEL MOVIMIENTO EN FORMA VECTORIAL. Las distintas posiciones del extremo de  $\mathbf{r}$  determinan una línea:

«La línea descrita por la partícula en su movimiento es su TRAYECTORIA».

La ecuación (1) podemos ponerla:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z) \Leftrightarrow \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \wedge \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \tag{2}$$

a estas tres últimas las llamaremos ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA TRAYECTORIA en las que tomamos como parámetro el tiempo.

Una segunda forma de definir el movimiento es, dando la ECUACIÓN ANALÍTICA de la trayectoria en el espacio, que viene determinada por la ecuación de dos superficies, cuya intersección es la curva trayectoria:

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

y fijando dos puntos sobre ella, uno  $P_1$  que será el origen de distancias ( $s = 0$ ), y otro  $P_0$  a distancia  $s_0$  de  $P_1$  sobre la trayectoria, llamado POSICIÓN INICIAL, en el que tomamos el origen de tiempo ( $t = 0$ ), entonces la posición de cualquier punto P vendrá fijada por la longitud del arco  $P_0P$ , que expresaremos en función del tiempo por la ecuación:

$$s = s(t) \quad \text{LEY HORARIA} \tag{4}$$

que nos expresa la distancia medida a lo largo de la trayectoria recorrida en un determinado sentido. Así por ejemplo, para situar un coche en la carretera, bastará con decir el punto kilométrico en que se encuentra, el mojón correspondiente al kilómetro cero ( $P_1$ ) será el origen de distancias ( $s = 0$ ), la posición para  $t = 0$ , en la que  $s = s_0$ , es la POSICIÓN INICIAL. En la Fig. III-2, hemos hecho coincidir  $P_1$  con  $P_0$ , es decir para  $t = 0$  es  $s_0 = 0$ , coincidiendo el origen de distancias con la posición inicial del móvil.

Las ecuaciones (3) se obtienen de las (2) sin más que eliminar  $t$  entre las tres.

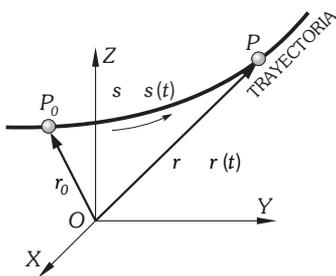


Fig. III-1.- Trayectoria.

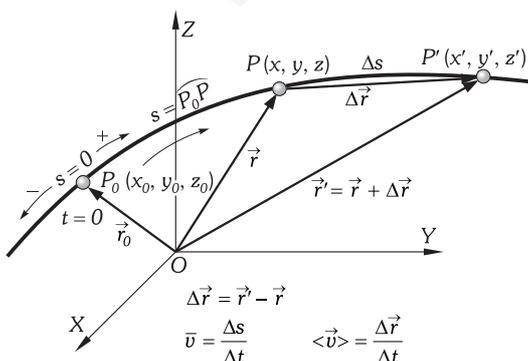


Fig. III-2.- Vector desplazamiento. Vector velocidad media. En esta figura hemos hecho coincidir  $P_1$  con  $P_0$ , es decir: para  $t = 0$  es  $s_0 = 0$ .

Para pasar del grupo de fórmulas (3) y (4) al (2) o viceversa, se tendrá en cuenta la ecuación de cálculo de longitudes de curvas:

$$s = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + \varphi_1'(x)^2 + \varphi_2'(x)^2} dx = \varphi(x) \quad (5)$$

en la que  $\varphi_1'(x)$  y  $\varphi_2'(x)$  son las primeras derivadas respecto de la variable  $x$  de las funciones  $y = \varphi_1(x)$ ,  $z = \varphi_2(x)$ , obtenidas despejando de las ecuaciones (3) las variables  $y$ ,  $z$ .

Si tenemos las (3) y  $s = s(t)$  obtenemos de  $s(t) = \varphi(x) \Rightarrow x = x(t)$  que sustituida en  $y = \varphi_1(x)$  y  $z = \varphi_2(x)$  obtenemos (2).

Si tenemos (2) obtenemos (3) y de ellas  $\varphi_1(x)$  y  $\varphi_2(x)$  e inmediatamente  $s = \varphi(x)$  y con  $x = x(t) \Rightarrow s = s(t)$ .

El problema también puede resolverse teniendo en cuenta que:

$$v = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \dot{s} = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v(t) dt$$

en la que  $v$ , como veremos a continuación, es el módulo de la velocidad instantánea. Integrando obtenemos la ley horaria.

Si la partícula se mueve en un plano y tomamos en él el sistema de referencia (OXY), el problema se reduce a las ecuaciones:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad \left| \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} y = f(x) \\ s = s(t) \end{array} \right. \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx}$$

y la (5) se reduce a:

$$s = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + y'^2} dx = \varphi(x)$$

Por último, para una dimensión (movimiento rectilíneo), haremos coincidir el eje OX con la dirección del movimiento y  $x = x(t) \Leftrightarrow s = s(t)$ .

**PROBLEMAS: 1 al 3.**

### III - 5. Vector desplazamiento

Durante el movimiento de la partícula, las coordenadas de los puntos en que se encuentra varían; supongamos que en el instante  $t$  se encuentra en el punto  $P(x, y, z)$ , transcurrido un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , la partícula se encontrará en un punto  $P'(x', y', z')$  (Fig. III-2); tendremos que:  $\mathbf{OP} = \mathbf{r}(x, y, z)$  y que  $\mathbf{OP}' = \mathbf{r}'(x', y', z')$ ; llamando  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  a la variación que experimentan  $x$ ,  $y$ ,  $z$  en el tiempo  $\Delta t$  el vector  $\Delta \mathbf{r}$  será:  $\Delta \mathbf{r} = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}$ , teniendo en cuenta que  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$ , obtenemos:

$$x' = x + \Delta x \quad y' = y + \Delta y \quad z' = z + \Delta z$$

Al vector  $\Delta \mathbf{r}$  se le llama VECTOR DESPLAZAMIENTO y nos indica el cambio de posición de la partícula al trasladarse de  $P$  a  $P'$ :  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ .

Hay que distinguir entre el módulo del vector desplazamiento  $|\Delta \mathbf{r}|$ , y la distancia entre dos posiciones medida sobre la trayectoria,  $\Delta s$  en la Fig III-2; sólo coincidirán en movimientos rectilíneos.

### III - 6. Velocidad media. Vector velocidad media

Desde que se inicia nuestra razón tenemos una idea de lo que significa la palabra «velocidad»; en principio es una relación entre el espacio recorrido por el móvil y el tiempo empleado en recorrerlo, o bien un concepto de «rapidez» del móvil en un instante determinado. Pasar a cuantificar estas dos ideas es el objetivo de éste y el siguiente párrafo.

\* CONVENIO: La notación que empleamos para expresar la primera derivada de una función respecto de la variable  $x$ , es colocando una «prima» a la función correspondiente, así:

$$y = y(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = y'(x), \quad \varphi = \varphi(x) \Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = \varphi' = \varphi'(x), \quad f = f(x) \Rightarrow \frac{df}{dx} = f' = f'(x), \quad \dots$$

para expresar la derivada segunda de la función respecto de la variable  $x$  le colocaremos otra «prima», así:

$$y = y(x) \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = y'' = y''(x) \quad \dots$$

Para designar la derivada respecto del tiempo  $t$  (derivada temporal) de una función, le colocamos un «punto» encima, de tal forma:

$$x = x(t) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \dot{x} = \dot{x}(t), \quad \varphi = \varphi(t) \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}(t) \quad \dots$$

análogamente, las segundas derivadas se escribirán:

$$\ddot{x}, \quad \ddot{\varphi}, \quad \ddot{\mathbf{r}}, \quad \dots$$

Describiendo el movimiento de una partícula mediante la ecuación analítica de su trayectoria y su ley horaria, razonamos del siguiente modo: si en el instante  $t = 0$  (origen de tiempos) se encuentra en un punto  $P_0$  de su trayectoria, transcurrido un tiempo, en un instante posterior  $t$ , su posición es  $P$  y en el instante  $t + \Delta t$  es  $P'$  (Fig. III-2); las posiciones de  $P$  y  $P'$  referidas a  $P_0$  como origen quedan definidas por los arcos:  $P_0P = s$  y  $P_0P' = s + \Delta s$ . Definimos velocidad media en el intervalo  $\Delta t$ :

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}^*$$

«VELOCIDAD MEDIA (magnitud escalar) de una partícula en su desplazamiento entre dos posiciones, es el cociente de la distancia entre ambas medida sobre la trayectoria y el tiempo empleado en el desplazamiento».

Si describimos el movimiento mediante la expresión del vector de posición en función del tiempo, definimos el VECTOR VELOCIDAD MEDIA como:

«El cociente del vector desplazamiento de la partícula entre el tiempo empleado en tal desplazamiento».

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

Como se aprecia en la Fig. III-2,  $\Delta s/\Delta t$  es distinto que  $|\Delta \mathbf{r}/\Delta t|$  y sólo coinciden si la trayectoria es una línea recta.

Por ser la ecuación de dimensiones de la velocidad:  $[v] = [s]/[t] = LT^{-1}$ , se medirá en el SI en m/s.

**PROBLEMAS: 4 al 6.**

**III - 7. Vector velocidad instantánea**

El valor de la velocidad media de una partícula entre dos posiciones de su trayectoria nos da una información global del movimiento en el recorrido  $\Delta s$ , sin embargo no nos permite saber con qué velocidad han sido recorridos los distintos tramos en que podemos subdividir  $\Delta s$ ; ni, en particular, con qué velocidad ha pasado la partícula por uno de sus puntos.

Midamos ahora las velocidades medias correspondientes a intervalos de tiempo cada vez más pequeños  $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3$ , etc. Los respectivos desplazamientos a partir de  $P$  (Fig III-3) nos permiten definir la velocidad media en tramos cada vez más cortos. Si hacemos el paso al límite haciendo tender  $\Delta t$  a cero obtendremos la velocidad media en un tramo infinitesimal a partir de  $P$ , a la que llamaremos VELOCIDAD INSTANTÁNEA en el punto  $P$ :

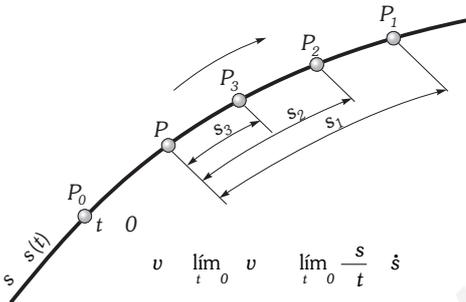


Fig. III-3.- Velocidad instantánea.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

«La VELOCIDAD INSTANTÁNEA o VERDADERA (magnitud escalar) es el límite de la velocidad media cuando  $\Delta t$  tiende a cero», o bien: «la derivada de la posición (espacio) respecto del tiempo».

Razonando de forma análoga que con el vector velocidad media, definimos VECTOR VELOCIDAD INSTANTÁNEA como:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$$

«VECTOR VELOCIDAD en un punto de la trayectoria del móvil referido a  $O$  como origen (velocidad definida por un observador colocado en  $O$ ) es: la derivada del vector de posición de la partícula en el instante considerado, con respecto al tiempo».

La expresión anterior puede ponerse de la forma siguiente:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

En este producto, el primer factor es el límite del cociente entre el vector desplazamiento y el arco de trayectoria que le corresponde, que cuando  $\Delta t$  tiende a cero se confunden (Fig. III-4); y,

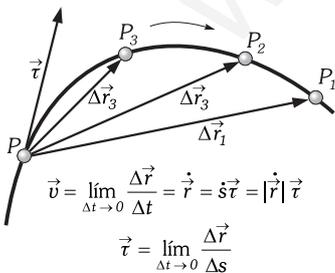


Fig. III-4.- Al considerar en un movimiento tiempos cada vez menores, la medida del espacio a partir de un punto  $P$  (arcos  $PP_1, PP_2, PP_3$ ) se aproximan más a la longitud de los vectores desplazamiento ( $\Delta r_1, \Delta r_2, \Delta r_3$ ) y haciendo tender el tiempo a cero el cociente  $\Delta s/\Delta r$  tiende a uno.

\* En esta fórmula hemos empleado la notación  $\bar{v}$ , para designar la media o magnitud promedio de la velocidad; la notación  $\langle v \rangle$  es equivalente queriendo expresar lo mismo. En este libro se emplean ambas notaciones.

puesto que la dirección de la cuerda en el límite coincide con la tangente en  $P$ , dicho límite será un vector unitario tangente a la trayectoria y sentido el del movimiento, vector que llamaremos  $\tau$ .

$$\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s}$$

El segundo factor lo hemos llamado velocidad verdadera; con lo que:

$$\mathbf{v} = v \tau = \dot{s} \tau = \dot{\mathbf{r}} \tag{6}$$

De todo ello deducimos:

«El vector velocidad instantánea de una partícula en movimiento tiene por módulo la derivada del espacio con relación al tiempo, dirección la de la tangente a la trayectoria y sentido el del movimiento».

El valor  $|\dot{\mathbf{r}}|$  es un escalar que representa el aumento en la unidad de tiempo de la distancia al origen de referencia  $O$  del sistema  $OXYZ$ , y en el límite esta variación coincide con la variación de la distancia medida sobre la trayectoria, entonces:  $\dot{s} = |\dot{\mathbf{r}}| = |\mathbf{v}|$ .

Los vectores unitarios  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$ , no tienen derivadas temporales, puesto que tanto sus módulos como sus direcciones y sentidos son constantes con el tiempo, por lo que si es  $\mathbf{r}(x, y, z)$  el vector de posición de la partícula en un instante determinado, las componentes coordenadas del vector velocidad en ese instante serán:

$$v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}(t) = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

PROBLEMAS: 7 al 9.

### III - 8. Vector aceleración media

En el movimiento general de una partícula varía el vector velocidad en módulo y dirección. Supongamos que la partícula en el origen de tiempos se encuentra en el punto  $P_0$  de su trayectoria definida por la función:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  (Fig. III-5), transcurrido un tiempo  $t$  su posición es  $P$ , definida por  $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$  y en ese instante posee una velocidad  $\mathbf{v}$ ; en el instante  $t + \Delta t$  su posición es  $P'$ , definida por  $\mathbf{r}' = \mathbf{OP}'$  y tiene una velocidad  $\mathbf{v}'$ .

Si llamamos  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$ , definimos el VECTOR ACELERACIÓN MEDIA como el cociente entre el incremento del vector velocidad y el intervalo de tiempo transcurrido en tal variación de velocidad.

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

este vector, que tiene la dirección y sentido de  $\Delta \mathbf{v}$  no tiene una dirección concreta como la tiene el vector velocidad que es siempre tangente a la curva trayectoria (Fig. III-6).

Por ser la ecuación de dimensiones de la aceleración:  $[a] = [v]/[t] = LT^{-2}$ , se medirá en el SI en  $m/s^2$ .

### III - 9. Vector aceleración

Si a partir del punto  $P$  (Fig. III-7), medimos variaciones del vector velocidad en intervalos de tiempo cada vez más pequeños,  $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots$ , obtendremos valores del vector aceleración media en tramos cada vez más cortos. Al hacer tender  $\Delta t$  a cero obtendremos el vector aceleración media en un tramo infinitesimal a partir de  $P$ ; a ese valor del vector aceleración media lo llamaremos VECTOR ACELERACIÓN INSTANTÁNEA, o simplemente VECTOR ACELERACIÓN, es decir:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\mathbf{a}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}}$$

y si en el punto en que medimos  $\mathbf{a}$  el vector velocidad es:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}} \tag{7}$$

«El VECTOR ACELERACIÓN es la derivada del vector velocidad respecto del tiempo o bien la derivada segunda del vector de posición respecto al tiempo dos veces».

En componentes cartesianas, la anterior relación se puede desglosar de la forma:

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad a(t) = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

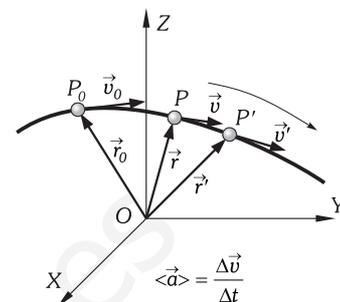


Fig. III-5.- Vector aceleración media.

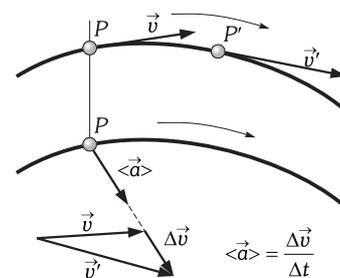


Fig. III-6.- El vector  $\Delta \mathbf{v}$  y por tanto  $\bar{\mathbf{a}}$ , en general, no tiene una dirección concreta, como la tiene el vector velocidad que es siempre tangente a la curva trayectoria.

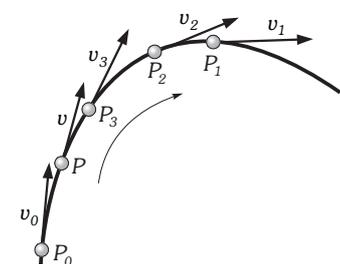


Fig. III-7.- Al considerar variaciones del vector velocidad en tiempos cada vez menores, obtenemos valores del vector aceleración media en tramos cada vez más cortos.

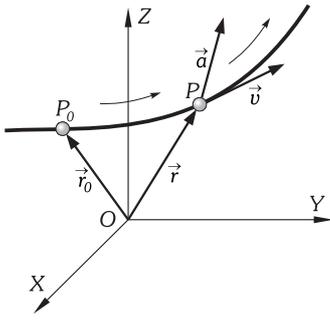


Fig. III-8.-  $\vec{v}$  y  $\vec{a}$  pertenecen al mismo plano (plano osculador).

**III – 10. El problema fundamental del movimiento de la partícula**

Matizando sobre todo lo dicho anteriormente, *el problema fundamental de la cinemática es determinar posición, velocidad y aceleración de la partícula, referidas a un sistema de referencia OXYZ que consideramos fijo* (Fig. III-8), interrelacionadas entre sí por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ \mathbf{v}(t) &= \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ \mathbf{a}(t) &= \dot{\mathbf{v}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} d\mathbf{r} &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(t) dt \\ \int_{v_1}^{v_2} d\mathbf{v} &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{a}(t) dt \end{aligned} \right. \quad (8)$$

**PROBLEMAS: 10 al 14.**

**C) MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS. MAGNITUDES ANGULARES**

**III – 11. Movimiento rectilíneo**

«MOVIMIENTO RECTILÍNEO de una partícula es aquel cuya trayectoria es una línea recta»; es por lo tanto un movimiento unidimensional.

Elegimos como sistema de referencia en el estudio del movimiento unidimensional a la línea recta sobre la que se encuentra la partícula, sobre la que tomaremos un punto (O) como origen de espacios en el que consideraremos  $x = 0$ ; los desplazamientos de la partícula (posición) hacia la derecha de O serán positivos y hacia la izquierda negativos. El signo de la magnitud velocidad, dependerá del sentido del movimiento, para desplazamientos de la partícula hacia la derecha en la Fig. III-9 la velocidad será positiva, en caso contrario será negativa. No dependerá del sentido del movimiento el signo de la magnitud aceleración, pues ésta será positiva cuando desplazándose la partícula de izquierda a derecha aumente su velocidad, y cuando desplazándose de derecha a izquierda su velocidad disminuya; será negativa cuando la partícula se desplace de izquierda a derecha disminuyendo su velocidad y cuando desplazándose de derecha a izquierda su velocidad aumente.

Si en el instante  $t = 0$ , la posición de la partícula no coincide con el origen de espacios  $x = 0$ , diremos que existe un ESPACIO INICIAL ( $x_0$ ) que se obtendrá haciendo  $t = 0$  en la ecuación  $x = x(t)$ . A la velocidad que posee el móvil en  $t = 0$  la llamaremos VELOCIDAD INICIAL ( $v_0$ ) y se obtendrá haciendo  $t = 0$  en  $v = v(t)$ .

Para un punto P que se mueve en el eje OX, las ecuaciones de su movimiento las obtendremos de las generales (8), considerando únicamente las componentes en el eje OX y prescindiendo del cálculo vectorial, es decir:

$$\boxed{x = x(t)} \quad \boxed{v = v(t) = \dot{x}} \quad \boxed{a = a(t) = \dot{v} = \ddot{x}} \quad (9)$$

o sus expresiones integrales

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt} \quad \boxed{\int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt} \quad (10)$$

Eliminando  $dt$  entre las dos últimas de las (9), se obtiene una relación diferencial, muy útil en la resolución de problemas, entre la posición, la velocidad y la aceleración:

$$\boxed{v dv = a dx} \quad (11)$$

las (9) y (11) son las ecuaciones diferenciales del movimiento rectilíneo de la partícula; para el cálculo de variaciones finitas de las magnitudes cinemáticas así relacionadas, se integrarán (10), para lo cual será necesario tener las condiciones de contorno (iniciales, intermedias o finales) necesarias para su resolución. Los casos posibles son:

A. Conocida la ecuación de la posición en función del tiempo:  $x = x(t)$ ; las sucesivas derivaciones matemáticas nos proporcionan la velocidad y la aceleración.

**PROBLEMAS: 15 al 17.**

B. Se conoce:  $v = v(t)$ ; en la segunda de las ecuaciones (9) puede integrarse directamente respecto del tiempo obteniéndose  $x = x(t)$ . Nos hace falta una condiciones de contorno para establecer los límites de integración o para determinar la constante de integración si se utiliza la integral indefinida. Para obtener la aceleración utilizamos:  $a = \dot{v}$ .

**PROBLEMAS: 18 y 19.**

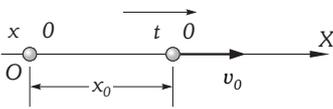


Fig. III-9.- Movimiento rectilíneo.

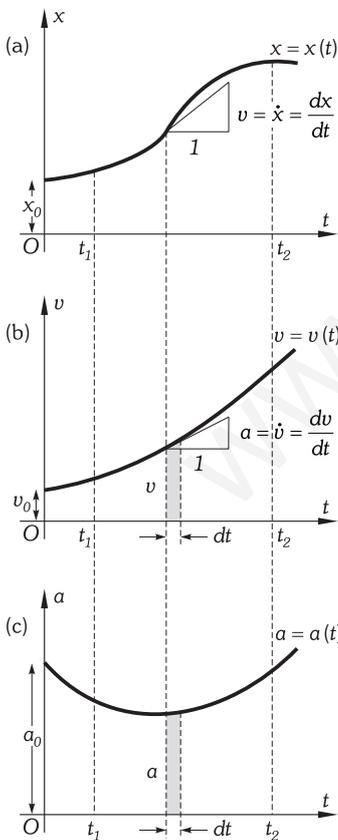


Fig. III-10.- Representación gráfica de  $x = x(t)$ ,  $v = v(t)$  y  $a = a(t)$  para el movimiento rectilíneo de una partícula.

C. Dada  $a = a(t)$ , en la tercera de las ecuaciones (9) puede integrarse directamente respecto del tiempo obteniéndose  $v = v(t)$ ;  $x = x(t)$  se obtiene igual que en el caso B. Por realizarse dos integrales, se necesitan dos condiciones de contorno.

**PROBLEMA: 20.**

D. Velocidad dada en función de la posición:  $v = f(x)$ ; utilizaremos la segunda de las ecuaciones (9):  $v = f(x) = \dot{x}$ , separando variables:  $dx/f(x) = dt$ , integrando obtenemos  $x = x(t)$ , que sustituida en la dada nos proporciona  $v = v(t)$  y la aceleración la obtenemos de  $a = a(t) = \dot{v}$ . Se necesita una condición de contorno.

**PROBLEMAS: 21 al 23.**

E. Aceleración dada en función de la velocidad:  $a = f(v)$ ; utilizando la tercera de las ecuaciones (9) se tiene:  $\dot{v} = f(v)$ , separando variables:  $dv/f(v) = dt$ , que integrada nos da:  $v = v(t)$ ; la integración de  $\dot{x} = v(t)$  nos proporciona  $x = x(t)$ . También puede utilizarse  $v dv = a dx \Rightarrow v dv = f(v) dx$  e integrando obtenemos  $x = \varphi(v)$ , en la que sustituyendo  $v = \dot{x}$ , separando variables e integrando, se obtiene  $x = x(t)$ .

**PROBLEMAS: 24 y 25.**

F. Aceleración dada en función de la posición:  $a = f(x)$ ; de  $v dv = a dx$  obtenemos:  $v dv = f(x) dx$ , que integrada nos proporciona;  $v = f(x)$ , entonces como se ha hecho en D, se obtiene  $x = x(t)$ .

**PROBLEMAS: 26 y 27.**

Las REPRESENTACIONES GRÁFICAS de las relaciones entre las variables  $x, v, a$  y  $t$  en el movimiento rectilíneo nos proporcionan en muchos problemas la suficiente información para su resolución.

Se observa en las Figs. III-10 a y b, que las fórmulas fundamentales  $v = \dot{x}$  y  $a = \dot{v}$ , nos expresan que la velocidad es igual a la pendiente de la curva  $x = x(t)$  en un instante determinado y que la aceleración en tal instante es igual a la pendiente de la curva  $v = v(t)$ .

Las integrales definidas de  $v = \dot{x}$  y de  $a = \dot{v}$  son:

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v dt \quad v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a dt$$

la primera de estas fórmulas nos expresa que el área medida bajo la curva  $v = v(t)$  (Fig. III-10 b) desde  $t_1$  a  $t_2$  nos proporciona el valor del desplazamiento de la partícula en el intervalo de tiempo  $t_1$  a  $t_2$ ; la segunda expresa que el área bajo la curva  $a = a(t)$  (Fig. III-10 c) desde  $t_1$  a  $t_2$  nos mide la variación de velocidad durante el mismo intervalo. Estas propiedades pueden emplearse para determinar gráficamente la curva  $x = x(t)$  conocidas  $v = v(t)$  o  $a = a(t)$ .

Si existen valores negativos de la velocidad en algún intervalo, la integral entre  $t_1$  y  $t_2$  de  $v(t)$  es la diferencia  $A - B$  (Fig. III-11) y nos da la posición de la partícula en el instante  $t_2$  respecto de la posición que ocupaba en  $t_1$ .

$$x(t_2) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = x(t_1) + A - B$$

El área total  $A + B$  es el espacio total recorrido por la partícula, es decir:

$$s = A + B = \left| \int_{t_1}^{t'} v(t) dt \right| + \left| \int_{t'}^{t_2} v(t) dt \right|$$

siendo  $t'$  tal que  $v(t') = 0$ . La interpretación física de este caso es la siguiente (Fig. III-12): La partícula recorre el intervalo  $[x(t_1), x(t')]$  con velocidad negativa (retrocede) y el intervalo  $[x(t'), x(t_2)]$  con velocidad positiva. El espacio total recorrido es:  $s = |x(t') - x(t_1)| + |x(t_2) - x(t')|$ .

En la gráfica  $a = a(x)$  (Fig. III-13 a), el área representada bajo la curva en el intervalo entre  $x_1$  y  $x_2$ , está dada por la integral de  $v dv = a dx$ . Es decir:

$$\int_{v_1}^{v_2} v dv = \int_{x_1}^{x_2} a dx \Rightarrow \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) = \text{Área limitada por la curva}$$

En la gráfica  $v = v(x)$  (Fig. III-13 b) podemos calcular la aceleración  $a$  de la partícula en el punto  $P$  de su trayectoria.  $PB$  es la normal a la curva en  $P$ , y como los triángulos marcados son semejantes, deducimos que  $AB$  es la aceleración  $a = v (dv/dx)$ .

Las representaciones gráficas no solo son útiles para analizar las relaciones entre las magnitudes del movimiento en un problema, sino también para aproximar los resultados por derivación o integración gráfica cuando desconocemos su función matemática explícita.

**PROBLEMAS: 28 al 31.**

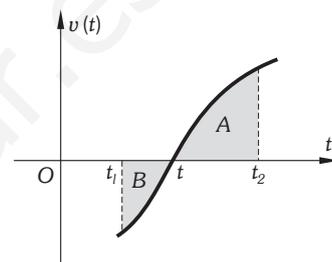


Fig. III-11.- Representación gráfica de  $v$  para el caso en que la gráfica en el intervalo de tiempo entre  $t_1$  y  $t_2$ , tiene velocidad negativa.

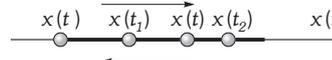


Fig. III-12.- Para calcular el espacio total recorrido por la partícula.

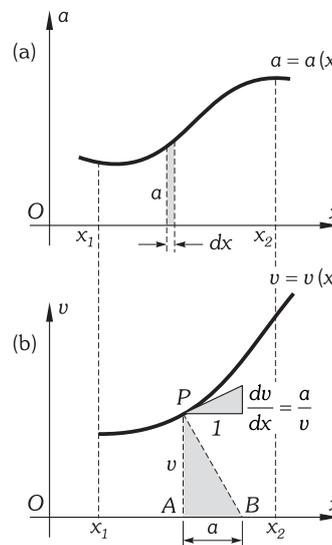


Fig. III-13.- Representaciones gráficas de  $a = a(x)$  y  $v = v(x)$  para el movimiento rectilíneo de una partícula.

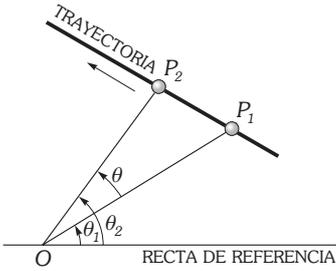


Fig. III-14.- Para definir la magnitud angular  $\theta$ , que en este caso es positiva por ser su sentido el contrario a las agujas del reloj.

**III – 12. Descripción del movimiento rectilíneo mediante magnitudes angulares**

Una coordenada generalizada  $\theta$  (que junto con el módulo del vector de posición  $r$ , a las que llamaremos coordenadas polares y que constituirán otra forma de la descripción del movimiento plano como se verá en el capítulo IV) se utiliza para describir el movimiento del siguiente modo: consideremos el plano determinado por la trayectoria recta de una partícula y una recta fija de origen  $O$  (Fig. III-14), el DESPLAZAMIENTO ANGULAR de la partícula al pasar de  $P_1$  a  $P_2$  estará definido por el ángulo  $\theta = \theta_2 - \theta_1$ , el signo para este desplazamiento angular convenimos que es positivo en la figura por ser recorrido el ángulo en sentido antihorario y será negativo en el caso contrario.

Llamaremos VELOCIDAD ANGULAR ( $\omega$ ) a la variación del desplazamiento angular con el tiempo, y ACELERACIÓN ANGULAR ( $\alpha$ ) a la variación de la velocidad angular con el tiempo. Un estudio análogo al hecho para las magnitudes lineales nos conduce a la descripción angular del movimiento, obteniéndose sus ecuaciones sustituyendo en las (9) y (11)  $x$  por  $\theta$ ,  $v$  por  $\omega$  y  $a$  por  $\alpha$ , es decir:

$$\theta = \theta(t) \quad \omega = \omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \quad \alpha = \alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\theta} \quad \omega d\omega = \alpha d\theta$$

Las magnitudes  $\theta$ ,  $\omega$  y  $\alpha$  se medirán en el SI en rad, rad/s y rad/s<sup>2</sup> respectivamente. Los análisis y representaciones gráficas hechos en el párrafo anterior, serán los mismos, sin más que hacer las sustituciones indicadas.

**PROBLEMAS: 32 al 34.**

**D) CASOS PARTICULARES DEL MOVIMIENTO RECTILÍNEO**

**III – 13. Movimiento rectilíneo y uniforme**

«Es un movimiento cuya trayectoria es una línea recta y su velocidad constante».

En este movimiento es evidente que coinciden la velocidad instantánea y la velocidad media. Cuando la posición de la partícula en  $t = 0$  coincide con el origen, se verifica:

$$x_0 = 0 \Rightarrow x = vt \Leftrightarrow v = \frac{x}{t}$$

En general, sus ecuaciones horarias serán:

$$x = x_0 + vt \quad v = cte \quad a = 0$$

En efecto, siendo por definición:  $v = \frac{dx}{dt} = cte$   $a = \frac{dv}{dt} = 0$

por lo tanto:  $dx = v dt \Rightarrow \int dx = \int v dt \Rightarrow \int dx = v \int dt \Rightarrow x = vt + C$

Siendo  $C$  la constante de integración que se obtiene en toda integral indefinida (sin límites de integración). Para averiguar el valor de la constante hacemos  $t = 0$ , y obtenemos  $C = x_0$ , desplazamiento a partir del origen cuando el tiempo es cero, al que hemos llamado posición inicial. La ecuación del espacio queda así, de la forma:  $x = x_0 + vt$ .

La Fig. III-15 representa las gráficas de las dos primeras ecuaciones horarias de este movimiento.

Tienen movimiento uniforme el sonido que a temperatura ambiente tiene una velocidad constante en el aire de 340 m/s; las ondas electromagnéticas (entre las que incluimos la luz) con 300 000 km/s =  $3 \times 10^8$  m/s (los dos valores son aproximados).

**PROBLEMAS: 35 al 42.**

**III – 14. Movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado**

«Es un movimiento cuya trayectoria es recta y su aceleración constante».

En este movimiento es evidente la coincidencia del valor de la aceleración instantánea y la media. Sus ecuaciones horarias serán:

$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2} at^2 \quad v = v_0 + at \quad a = cte \quad (12)$$

En efecto:

$$a = \frac{dv}{dt} = cte \Rightarrow dv = a dt \Rightarrow \int dv = \int a dt \Rightarrow v = a \int dt \Rightarrow v = at + C$$

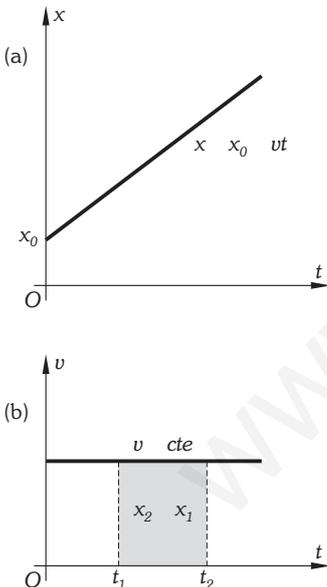


Fig. III-15.- a) Representación gráfica de la distancia al origen en función del tiempo. b) Representación gráfica de  $v = cte$ . La medida del área sombreada coincide con el valor de la distancia recorrida entre los instantes  $t = t_1$  y  $t = t_2$ .

haciendo  $t = 0$ ,  $C = v_0$  velocidad cuando el tiempo es cero o velocidad inicial; el valor de  $v$  es por tanto:  $v = v_0 + at$ . Como  $v = dx/dt \Rightarrow dx = vdt$ , obtenemos:

$$\int dx = \int (v_0 + at) dt = v_0 \int dt + a \int t dt \Rightarrow x = v_0 t + a \frac{t^2}{2} + C'$$

haciendo  $t = 0 \Rightarrow C' = x_0$  o posición inicial; el valor de  $x$  es, por tanto:  $x = x_0 + v_0 t + at^2/2$ .

Una expresión especialmente útil en la resolución de problemas de este tipo de movimiento es la que nos relaciona directamente posiciones, velocidades y aceleración. Si en las expresiones (12) eliminamos el tiempo, tenemos:  $t = (v - v_0)/a$  con lo que:

$$x - x_0 = \frac{v_0(v - v_0)}{a} + \frac{a(v - v_0)^2}{2a^2} \Rightarrow \boxed{v = \pm \sqrt{v_0^2 + 2a(x - x_0)}}$$

Todas las expresiones anteriores, con sus casos particulares de  $v_0 = 0$ ,  $x_0 = 0$  ó ambos, son válidas tanto si la aceleración es positiva como negativa. En cada caso particular bastará con sustituir  $a$  por su valor numérico con el signo correspondiente. Cuando  $a < 0$ , el movimiento se suele llamar *decelerado*.

La Fig. III-16 representa los diagramas (posición-tiempo, velocidad-tiempo y aceleración-tiempo) de las ecuaciones horarias (12) del movimiento uniformemente acelerado.

**PROBLEMAS: 43 al 53.**

### III - 15. Movimientos de caída de los cuerpos sobre la Tierra

«Todos los cuerpos caen sobre la Tierra, en el vacío, para puntos próximos a su superficie y para pequeñas variaciones de altura comparadas con el radio de ésta ( $R_0 \approx 6\,370$  km), con la misma aceleración  $a$  la que llamamos ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD ( $g$ ), con un valor aproximado\* de  $9,81 \text{ m/s}^2$ ».

Este hecho fue comprobado por Sir Isaac Newton (1643-1727), en el tubo que lleva su nombre, tubo de gran longitud en el que, haciendo el vacío, se observa que caen al mismo tiempo todos los cuerpos en él introducidos. En el aire no se cumple esta ley por dos causas: el rozamiento y el empuje del aire. Haciendo iguales, para diversos cuerpos, la influencia de estas causas, caen en el aire todos ellos con la misma velocidad. Galileo Galilei (1564-1642), antecesor de Newton, comprobó experimentalmente esta afirmación, tirando desde la torre de Pisa varios cuerpos de la misma forma, de la misma sustancia exterior y del mismo volumen, rellenos interiormente de distintas materias muy pesadas y observando, que los tiempos que tardaban en llegar al suelo eran idénticos.

Las ecuaciones de caída libre y sin velocidad inicial ( $v_0 = 0$ ) de los graves sobre la Tierra en el vacío, serán las (12), en los que representamos por  $h$  la altura de caída y por  $g$  la aceleración de la gravedad:

$$\boxed{h = \frac{1}{2}gt^2} \quad \boxed{v = gt} \quad (13)$$

de las que se deducen:

$$\boxed{h = \frac{1}{2}vt} \quad \boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

**TIRO VERTICAL:** Si lanzamos un cuerpo hacia abajo con velocidad inicial  $v_0$ , como representamos en la Fig. III-17, en la que tomamos la dirección del eje  $OY$  positiva, vertical y también hacia abajo, y en la que para  $t = 0$  hacemos  $y = 0$  (punto  $O$ ), las ecuaciones teóricas del movimiento serán:

$$\boxed{y = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2} \quad \boxed{v = v_0 + gt} \quad \boxed{v = \sqrt{v_0^2 + 2gy}}$$

Si en éstas hacemos  $v_0 = 0$  e  $y = h$ , obtenemos las ecuaciones (13).

Si el lanzamiento es vertical y hacia arriba (Fig. III-18), tomando  $OY$  también vertical y positivo hacia arriba ( $g$  será negativa), las ecuaciones serán:

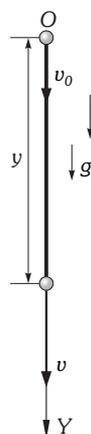


Fig. III-17.- Tiro vertical hacia abajo con velocidad inicial  $\vec{v}_0$ .

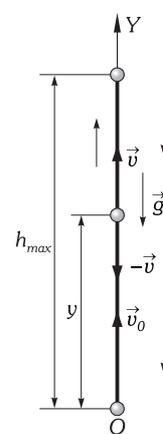


Fig. III-18.- Tiro vertical hacia arriba con velocidad inicial  $\vec{v}_0$ .

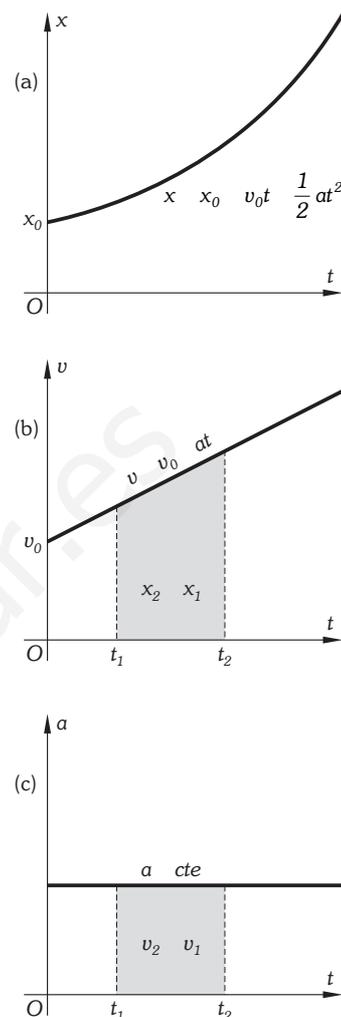


Fig. III-16.- a) Representación gráfica de  $x = x(t)$ . b) Representación gráfica de  $v = v(t)$ . La medida del área sombreada coincide con el valor de la distancia recorrida entre los instantes  $t_1$  y  $t_2$ . c) Representación gráfica de  $a = a(t)$ . La medida del área sombreada coincide con el valor del incremento de velocidad entre los instantes  $t_1$  y  $t_2$ .

\* Las variaciones para alturas apreciables sobre la superficie de la tierra, para el giro en torno a su eje, etc., se verán en el tema de Gravitación (párrafo XI-4).

$$\boxed{y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2} \quad \boxed{v = v_0 - g t} \quad \boxed{v = \pm \sqrt{v_0^2 - 2gy}} \quad (14)$$

El tiempo que tarda un cuerpo, lanzado hacia arriba, en conseguir su altura máxima, se obtiene haciendo  $v = 0 \Rightarrow 0 = v_0 - g t \Rightarrow v_0 = g t \Rightarrow t = v_0/g$ . El valor de la altura máxima se obtiene substituyendo este último valor en la primera expresión de las (14), obteniéndose:

$$h_{\max} = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}$$

Observemos que la velocidad de lanzamiento es:  $v_0 = \sqrt{2gh_{\max}}$ , o sea el mismo valor, pero sentido contrario que la que tendría el cuerpo al caer desde  $h_{\max}$  hasta el lugar del lanzamiento.

El signo doble de la tercera ecuación de las (14) significa que «el valor de la velocidad, al subir ( $v > 0$ ) y al bajar ( $v < 0$ ), es el mismo en el mismo punto del trayecto». Se puede demostrar además, que «el tiempo que emplea un cuerpo para subir desde un punto a la cúspide, es igual al que emplea para bajar de ésta al mismo punto».

**PROBLEMAS: 54 al 64.**

### III – 16. Movimiento vibratorio armónico simple en trayectoria recta (MAS)

Cuando una partícula o cualquier sistema se mueve periódicamente con relación a su posición de equilibrio estable, se dice que «oscila» o «vibra» alrededor de esa posición. Las vibraciones de una partícula en el extremo de un resorte, las oscilaciones de los péndulos, las vibraciones de las cuerdas bucales, las de los instrumentos musicales, las de los diapasones, o las vibraciones de un edificio que oscila debido a los fuertes vientos... todos ellos son ejemplos de movimientos vibratorios, como ocurre también con otros muchos fenómenos de vibración, en los que están basados el electromagnetismo, la acústica y la óptica.

Con el tiempo, las oscilaciones que hemos descrito se debilitan (se amortiguan) y al final lo que oscilaba deja de vibrar, el motivo de este amortiguamiento es que sobre el oscilador actúa un agente externo (fuerza de rozamiento con el aire...); si no existiera éste, el oscilador nunca se pararía y el movimiento de oscilación se repetiría indefinidamente. En estas condiciones se dice que las oscilaciones son *libres* y las *condiciones ideales*. A un movimiento así lo vamos a llamar MOVIMIENTO VIBRATORIO ARMÓNICO SIMPLE (MAS), siendo el más sencillo de los movimientos oscilatorios (o vibratorios), es el más importante por sí mismo y porque cualquier otro movimiento oscilatorio puede ser reducido a una suma algebraica de MAS como veremos más adelante.

Consideremos que a una partícula, capaz de oscilar en las condiciones ideales descritas anteriormente, le producimos una perturbación, y oscila sobre el eje de las equis; tomando el origen de coordenadas (O) en la posición de equilibrio estable en que se encontraba la partícula, entonces se observa que los rasgos más característicos de un MAS son:

- 1) El movimiento es periódico, es decir: en intervalos de tiempo iguales el móvil adquiere la misma posición, velocidad y aceleración, es decir, las mismas características del movimiento.
- 2) El movimiento es oscilatorio o de vaivén a ambos lados de una posición central de equilibrio.
- 3) La máxima separación del cuerpo en su movimiento (amplitud), contada a partir de su posición de equilibrio, es siempre la misma.

Por definición, diremos que una partícula se mueve con MAS, cuando su posición, respecto a la de equilibrio (O), está dada por la ecuación:

$$\boxed{x(t) = A \text{ sen } (\omega t + \varphi)} \quad (15)$$

- $x(t)$ : ELONGACIÓN: distancia en cada instante a la posición central O. En el SI se medirá en m.
- A: AMPLITUD: constante del movimiento que nos mide el valor de la máxima elongación. En el SI se medirá en m.
- $\omega$ : FRECUENCIA ANGULAR O PULSACIÓN: constante del movimiento que en el SI se medirá en rad/s.
- $\omega t + \varphi$ : FASE; se mide en rad en el SI.
- $\varphi$ : FASE INICIAL O CORRECCIÓN DE FASE: es el valor de la fase en  $t = 0$ . Se mide en rad en el SI.

La anterior ecuación puede escribirse también de la forma:  $x = A \cos(\omega t + \varphi')$  con  $\varphi' = \varphi - \pi/2$ . Puesto que un cambio en la fase inicial equivale a empezar a contar el tiempo de dos situaciones iniciales distintas, (como veremos en esta cuestión), las dos expresiones de  $x(t)$

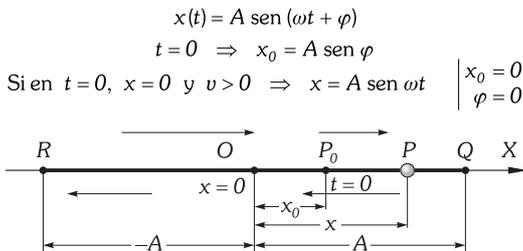


Fig. III-19.- La partícula en su MAS pasa de  $P_0 \rightarrow Q \rightarrow O \rightarrow R \rightarrow O \rightarrow P_0 \dots$  realizando un movimiento de «vaivén»; en este caso  $v < \varphi < \pi/2$ .

son equivalentes. Las funciones seno y coseno se llaman armónicas, de ahí el nombre de este tipo de movimiento.

Características propias del oscilador, son, además de la pulsación  $\omega$ , el PERÍODO  $T$  o «tiempo que tarda la partícula en completar una vibración» y la FRECUENCIA  $\nu$  o «número de oscilaciones verificadas cada segundo». La relación entre ambas es  $T = 1/\nu$ , y su relación con  $\omega$  se puede deducir de la forma siguiente: puesto que la función seno repite su valor cuando su argumento (fase) aumenta en  $2\pi$  radianes, tendremos:

$$x_1 = x(t_1) = A \text{ sen } (\omega t_1 + \varphi) = A \text{ sen } [\omega (t_1 + T) + \varphi] \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{ sen } (\omega t_1 + \varphi) = \text{ sen } (\omega t_1 + \omega T + \varphi)$$

en la que se verifica:

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \Rightarrow \boxed{\nu = \frac{\omega}{2\pi}}$$

La ecuación del movimiento en función del período y la frecuencia la podemos escribir:

$$x(t) = A \text{ sen } (\omega t + \varphi) = A \text{ sen } \left( \frac{2\pi}{T} t + \varphi \right) = A \text{ sen } (2\pi \nu t + \varphi)$$

Características que pueden variar de un movimiento a otro para el mismo oscilador son la amplitud y la fase inicial.

La AMPLITUD es la elongación máxima puesto que el valor máximo del seno es 1, es decir:  $\text{sen } (\omega t + \varphi) = 1 \Rightarrow x_{\text{máx}} = A$ , y podemos controlarla separando la partícula más o menos de su posición de equilibrio antes de dejarla oscilar libremente.

La FASE INICIAL  $\varphi$  aparece cuando se empieza a contar el tiempo sin estar la partícula en  $x = 0$  y moviéndose hacia valores positivos de  $x$ ; puesto que si hacemos el tiempo cero en la ecuación (15) quedaría:  $x_0 = A \text{ sen } \varphi$ , lo que indica que al comenzar a contar el tiempo el móvil no parte del origen  $O$  (Fig. III-19), sino de un punto  $P_0$  tal que:  $OP_0 = x_0 = A \text{ sen } \varphi$ .

La figura (Fig. III-20) nos indica las diversas correcciones de fase si se comienza a contar el tiempo cuando el punto móvil se encuentra en las posiciones indicadas.

Representando en abscisas los tiempos y en ordenadas las elongaciones, damos valores a  $t$  en la ecuación:

$$x(t) = A \text{ sen } \omega t = A \text{ sen } \frac{2\pi}{T} t \Rightarrow$$

$t$	0	$T/4$	$T/2$	$3T/4$	$T$
$x$	0	$A$	0	$-A$	0

Unidos los puntos representativos, obtenemos una senoide que parte del origen de coordenadas (Fig. III-21 a).

Si existe fase inicial (Fig. III-21 b) la representación gráfica es análoga a la anterior pero la ordenada en el origen vale:  $x_0 = A \text{ sen } \varphi$ .

Como ya se ha indicado anteriormente, si comenzamos a contar el tiempo un cuarto de período más tarde, habremos trasladado el eje vertical hasta un punto en que la elongación es máxima (Fig. III-21 c) obteniendo así la representación gráfica del coseno.

En definitiva, podremos expresar la elongación de un MAS en función del seno de la fase o de su coseno, eligiendo convenientemente el origen de tiempo, es decir, introduciendo una corrección de fase  $\pi/2$ .

La ley horaria de la velocidad de la partícula que tiene un MAS, será:

$$v(t) = \dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \varphi) = \pm A\omega \sqrt{1 - \text{sen}^2(\omega t + \varphi)} = \\ = \pm \omega \sqrt{A^2 - A^2 \text{sen}^2(\omega t + \varphi)} = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

En cada punto determinado  $P$  de su trayectoria (Fig. III-19) la velocidad de la partícula es siempre la misma, pero con signo positivo o negativo según que el paso por el punto sea en un sentido u otro.

Por nueva derivación, obtenemos para valor de la aceleración:

$$a(t) = \dot{v} = \ddot{x} = -A\omega^2 \text{ sen } (\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$$

Fórmula que nos indica que «la aceleración es directamente proporcional al desplazamiento y de sentido contrario a él»; lo que caracteriza a todo movimiento vibratorio armónico simple.

Los valores extremos de la velocidad y aceleración se obtienen:

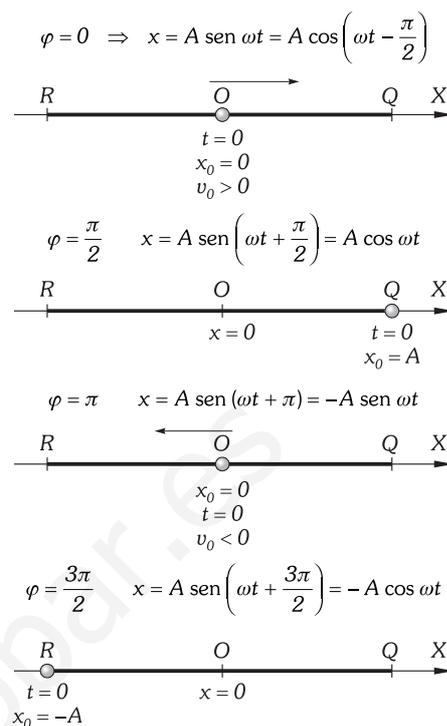


Fig. III-20.- Diversos valores de la fase para distintas posiciones iniciales de la partícula en su MAS.

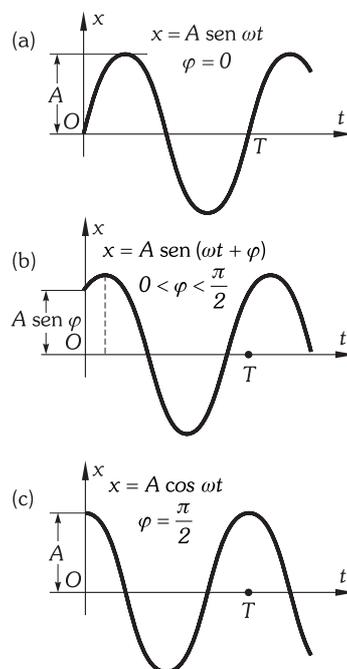


Fig. III-21.- Representación gráfica de la función  $x = x(t)$  del MAS. a) Si la fase inicial es cero, la gráfica parte del origen. b) La fase inicial es distinta de cero. c) Si la fase inicial es  $\pi/2$  la representación gráfica del MAS es la de la función coseno.

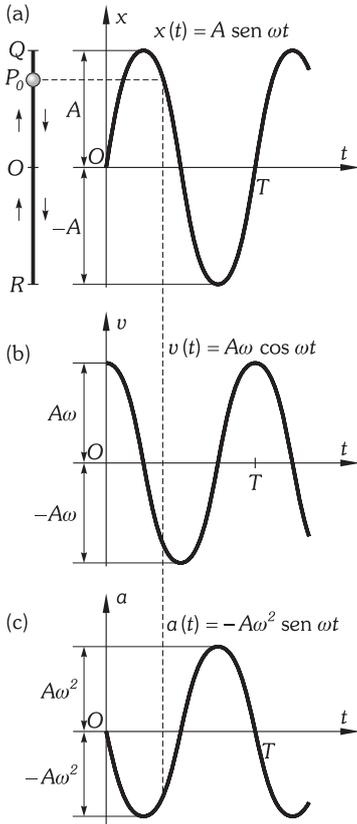


Fig. III-22.- Representación gráfica de las leyes horarias de un MAS de la partícula frente a t. La línea de puntos correspondería al eje OX para el caso en que la partícula en  $t=0$  se encontrara en  $P_0$  (Fig. a) y moviéndose hacia O ( $\pi/2 < \varphi < \pi$ ); para este caso obsérvese que  $x_0 > 0$ ,  $v_0 < 0$  y  $a_0 < 0$ .

$$x = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{sen}(\omega t + \varphi) = 0 \\ \text{cos}(\omega t + \varphi) = \pm 1 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a = 0 \\ v = \pm A\omega \end{array} \right.$$

$$x = \pm A \quad \left| \begin{array}{l} \text{sen}(\omega t + \varphi) = \pm 1 \\ \text{cos}(\omega t + \varphi) = 0 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a = \mp A\omega^2 \\ v = 0 \end{array} \right.$$

Las Figs. III-22 y 23 son las representaciones gráficas de las ecuaciones horarias del MAS y las de la velocidad y aceleración en función de la posición.

No solamente una partícula puede oscilar alrededor de un punto y su posición ser una función armónica del tiempo; un campo eléctrico, un campo magnético, la presión de un gas, etc., pueden experimentar variaciones que obedecen a la fórmula:

$$\psi(t) = \psi_0 \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

$\psi$ : el valor de la magnitud en el instante considerado y en el punto donde existe la variación de ella.

$\psi_0$ : el valor máximo de  $\psi$ .

$\omega t + \varphi$  y  $\varphi$ : tienen el mismo significado que el dado anteriormente.

Si la magnitud al variar armónicamente sólo puede tomar valores positivos; la ecuación que las determina es:

$$\psi = \xi_0 + \psi_0 \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

en nuestro caso  $\xi_0 > \psi_0$ . La representación gráfica de tales funciones es la de la Fig. III-24. Los valores máximo y mínimo de  $\psi$  son:  $\psi_M = \xi_0 + \psi_0$  y  $\psi_m = \xi_0 - \psi_0$ .

**PROBLEMAS: 65 al 78.**

### III - 17. Composición de movimientos vibratorios armónicos de la misma dirección y frecuencia. Construcción de Fresnel

Queremos demostrar que producen un MAS de la misma frecuencia.

En efecto, sean las ecuaciones de los movimientos:

$$x_1 = A_1 \text{sen}(\omega t + \varphi_1) \quad x_2 = A_2 \text{sen}(\omega t + \varphi_2)$$

hemos puesto la misma  $\omega$ , puesto que al tener los dos movimientos la misma frecuencia tienen la misma frecuencia angular ya que su valor es:  $\omega = 2\pi\nu$ ; desarrollando las ecuaciones y sumando miembro a miembro obtenemos el desplazamiento resultante:

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \text{sen} \omega t \cos \varphi_1 + A_1 \cos \omega t \text{sen} \varphi_1 + A_2 \text{sen} \omega t \cos \varphi_2 + A_2 \cos \omega t \text{sen} \varphi_2$$

$$\Rightarrow x = \text{sen} \omega t (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) + \cos \omega t (A_1 \text{sen} \varphi_1 + A_2 \text{sen} \varphi_2) \quad (16)$$

Existen dos números A y  $\varphi$  que cumplen las condiciones:

$$A \text{sen} \varphi = A_1 \text{sen} \varphi_1 + A_2 \text{sen} \varphi_2 \quad (17)$$

$$A \cos \varphi = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2$$

números que podemos calcular, ya que por cociente de las anteriores, obtenemos:

$$\text{tg} \varphi = \frac{A_1 \text{sen} \varphi_1 + A_2 \text{sen} \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \quad (18)$$

y elevando al cuadrado las ecuaciones (17) y sumándolas:

$$A^2 (\text{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = A_1^2 (\text{sen}^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1) + A_2^2 (\text{sen}^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_2) + 2A_1A_2 (\text{sen} \varphi_1 \text{sen} \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2)$$

luego:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (19)$$

Sustituyendo los valores (17) en (16) se tiene:

$$x = A \text{sen} \omega t \cos \varphi + A \cos \omega t \text{sen} \varphi \Rightarrow x = A \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

ecuación de un movimiento vibratorio armónico de la misma frecuencia angular  $\omega$  que los componentes y, por lo tanto, la misma frecuencia  $\nu$ .

Por tanto la composición de  $n$  movimientos vibratorios armónicos de la misma dirección y frecuencia, siendo la ecuación de uno cualquiera:

$$x_i = A_i \text{sen}(\omega t + \varphi_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

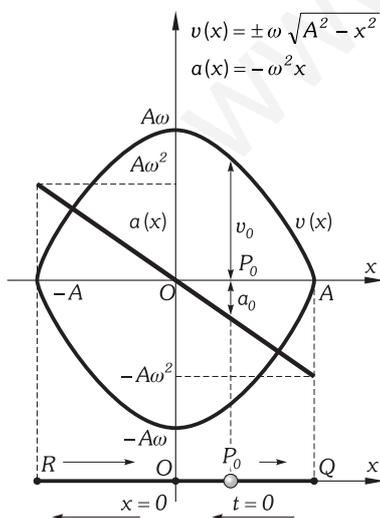


Fig. III-23.- Gráficas de la velocidad y de la aceleración de un MAS de la partícula frente a x ( $0 < \varphi < \pi/2$ )

dará como resultante:

$$x = \sum x_i = \text{sen } \omega t \sum A_i \cos \varphi_i + \cos \omega t \sum A_i \text{sen } \varphi_i = A \text{sen } (\omega t + \varphi)$$

en la que:

$$\text{tg } \varphi = \frac{\sum A_i \text{sen } \varphi_i}{\sum A_i \cos \varphi_i}$$

$$A^2 = \sum A_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_i A_j \cos (\varphi_i - \varphi_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_i A_j \cos (\varphi_i - \varphi_j)$$

CASOS PARTICULARES:

1.º La diferencia de fase ( $\varphi_1 - \varphi_2$ ) es cero ó  $2K\pi$  ( $K \in \mathbb{Z}$ ): ello quiere decir que si por la primera causa el punto pasa en el instante inicial por origen y hacia arriba, también por la segunda causa hará lo mismo en tal instante.

Al ser  $\cos 2K\pi = 1$  el valor de  $A$  dado por (19) es:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 = (A_1 + A_2)^2 \Rightarrow A = A_1 + A_2$$

Resulta así la amplitud máxima o sea la suma de las amplitudes. La representación gráfica del movimiento sería la de la Fig. III-25. La ecuación de la vibración armónica resultante es:

$$x = (A_1 + A_2) \text{sen } (\omega t + \varphi)$$

2.º La diferencia de fase es  $\pi$  ó  $(2K + 1)\pi$  ( $K \in \mathbb{Z}$ ): ello quiere decir que si por la primera causa el punto pasa en el instante inicial por el origen y hacia arriba, por la segunda causa lo hará por el origen y hacia abajo. Al ser  $\cos (2K + 1)\pi = -1$ , el valor de  $A$  dado por (19) es:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 = (A_1 - A_2)^2 \Rightarrow A = A_1 - A_2$$

con  $A_1 > A_2$ . Resulta así la amplitud mínima o sea la diferencia de las amplitudes (Fig. III-26). La ecuación de la vibración armónica resultante es:

$$x = (A_1 - A_2) \text{sen } (\omega t + \varphi)$$

En el caso  $A_1 = A_2$ , el punto queda en reposo.

3.º La diferencia de fase es  $\pi/2$  ó  $(2K + 1)\pi/2$ , ( $K \in \mathbb{Z}$ ): en este caso se dice que los dos movimientos vibratorios armónicos componentes se encuentran en «CUADRATURA». Al ser  $\cos (2K + 1)\pi/2 = 0$ , el valor de  $A$  dado por (19) es:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2$$

y la (18) la podemos escribir:

$$\text{tg } \varphi = \frac{\text{tg } \varphi_1 + \frac{A_2}{A_1}}{1 - \frac{A_2}{A_1} \text{tg } \varphi_1} = \text{tg } (\varphi_1 + \Phi)$$

en la que hemos sustituido  $A_2/A_1 = \text{tg } \Phi$ , resultando:

$$\varphi = \varphi_1 + \Phi = \varphi_1 + \text{arctg } \frac{A_2}{A_1}$$

y la vibración armónica resultante:

$$x = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \text{sen } (\omega t + \varphi_1 + \Phi)$$

la representación gráfica de esta composición es la de la Fig. III-27. Cuando las dos amplitudes sean iguales ( $A_1 = A_2 = a$ ), entonces la amplitud resultante toma el valor:  $A = a\sqrt{2}$  y su fase inicial:  $\varphi = \varphi_1 + \pi/4$ , con lo que la vibración resultante se escribirá:

$$x = a\sqrt{2} \text{sen } \left( \omega t + \varphi_1 + \frac{\pi}{4} \right)$$

Agustín Jean Fresnel (1788-1827) ideó una forma para la composición vectorial de dos MAS (CONSTRUCCIÓN DE FRESNEL) dados por las ecuaciones:

$$x_1 = A_1 \text{sen } (\omega t + \varphi_1) \quad x_2 = A_2 \text{sen } (\omega t + \varphi_2)$$

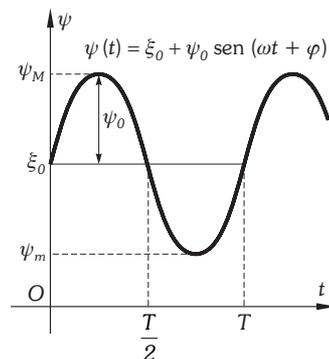


Fig. III-24.- La magnitud variable con el tiempo armónicamente puede tomar siempre valores positivos.

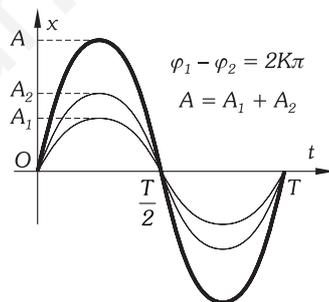


Fig. III-25.- Composición de MAS de la misma frecuencia y dirección cuando  $\Delta\varphi = 2K\pi$ .

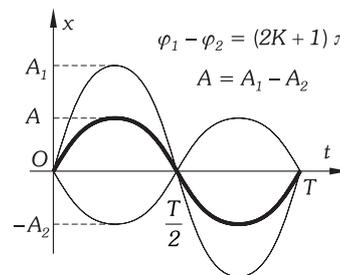


Fig. III-26.- Composición de MAS de la misma frecuencia y dirección cuando  $\Delta\varphi = (2K + 1)\pi$ .

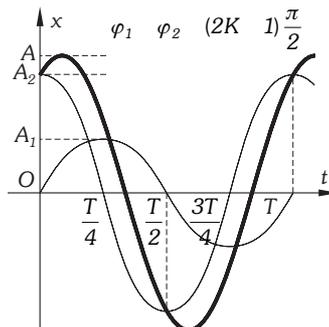


Fig. III-27.- Composición de dos MAS que se encuentra «en cuadratura».

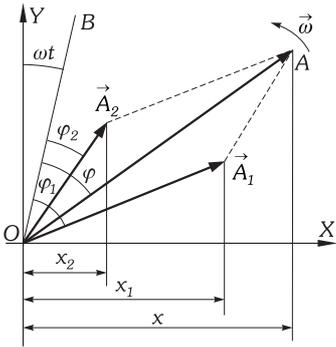


Fig. III-28.- Construcción de Fresnel para la composición de dos MAS de la misma dirección y frecuencia.

se realiza de la siguiente manera: consideremos dos ejes coordenados X e Y, y un ángulo arbitrario  $\omega t$  formado por una recta (OB) con el eje Y (Fig. III-28). Formando ángulos  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  con tal recta, tracemos vectores iguales a  $A_1$  y  $A_2$  que, por tanto, formarán entre sí un ángulo  $(\varphi_1 - \varphi_2)$ . La amplitud resultante de tales movimientos es  $A$ , vector resultante de  $A_1$  y  $A_2$ , que como diagonal de un paralelogramo cumple con la ecuación  $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ . El ángulo formado por  $A$  con OB, nos da  $\varphi$ , fase inicial del MAS resultante.

Girando el paralelogramo en torno al origen con una velocidad angular constante\*  $\omega$ , las sucesivas proyecciones  $A_1$  y  $A_2$  sobre el eje X determinan las elongaciones de los movimientos componentes, ya que sus valores son:

$$\text{proy}_x A_1 = A_1 \text{ sen } (\omega t + \varphi_1) = x_1 \quad \text{proy}_x A_2 = A_2 \text{ sen } (\omega t + \varphi_2) = x_2$$

Las sucesivas proyecciones de  $A$  sobre X, determinan el MAS resultante.

$$\text{proy}_x A = A \text{ sen } (\omega t + \varphi) = x$$

Si en vez de proyectar sobre el eje X, proyectamos sobre el eje Y, las ecuaciones de los MAS y del resultante son:

$$y_1 = A_1 \text{ cos } (\omega t + \varphi_1) \quad y_2 = A_2 \text{ cos } (\omega t + \varphi_2) \quad y = A \text{ cos } (\omega t + \varphi)$$

teniendo A y  $\varphi$  los valores ya calculados.

**PROBLEMAS: 79 al 83.**

### III - 18. Composición de movimientos vibratorios armónicos de la misma dirección y diferente frecuencia. Serie de Fourier

Sean las ecuaciones de los movimientos:

$$x_1 = A_1 \text{ sen } (\omega_1 t + \varphi_1) \quad x_2 = A_2 \text{ sen } (\omega_2 t + \varphi_2)$$

con  $\omega_1 = 2\pi\nu_1 = 2\pi/T_1$  y  $\omega_2 = 2\pi\nu_2 = 2\pi/T_2$ . El movimiento resultante obedecerá a:

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \text{ sen } (\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \text{ sen } (\omega_2 t + \varphi_2)$$

El movimiento resultante deja de ser armónico, y si el cociente  $\omega_1/\omega_2$  no es un número racional el movimiento tampoco es periódico.

Si  $\omega_1/\omega_2 = \nu_1/\nu_2 = T_2/T_1 = n_1/n_2$  ( $n_1$  y  $n_2$  números primos entre sí), el movimiento es periódico y su período tiene por valor:  $T = n_1 T_1 = n_2 T_2$  (mínimo común múltiplo de  $T_1$  y  $T_2$ ).

En efecto: si en la ecuación que nos da el valor de x añadimos un período al tiempo t, obtendremos:

$$\begin{aligned} x' &= A_1 \text{ sen } \left[ \frac{2\pi}{T_1} (t + n_1 T_1) + \varphi_1 \right] = A_2 \text{ sen } \left[ \frac{2\pi}{T_2} (t + n_2 T_2) + \varphi_2 \right] = \\ &= A_1 \text{ sen } \left[ \frac{2\pi}{T_1} t + 2n_1\pi + \varphi_1 \right] + A_2 \text{ sen } \left[ \frac{2\pi}{T_2} t + 2n_2\pi + \varphi_2 \right] = \\ &= A_1 \text{ sen } (\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \text{ sen } (\omega_2 t + \varphi_2) = x \end{aligned}$$

obteniendo la misma elongación de la que partimos, también las derivadas primera y segunda de x y x' con respecto a t, son iguales y, por tanto, lo son la velocidad y aceleración del movimiento, como queríamos demostrar.

Ahora bien, todo número irracional se puede aproximar todo lo que queramos al cociente de dos números enteros primos entre sí, con lo que podremos decir con suficiente aproximación que: «el movimiento resultante de dos vibratorios armónicos de la misma dirección y diferente frecuencia es periódico».

La expresión de  $x_2$  la podemos poner:

$$x_2 = A_2 \text{ sen } [\omega_1 t - (\omega_1 t - \omega_2 t) + \varphi_2] = A_2 \text{ sen } [\omega_1 t + \delta(t)]$$

siendo  $\delta(t) = (\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2$ ; con lo que las expresiones de  $x_1$  y  $x_2$  son semejantes a las estudiadas en el párrafo anterior, luego la amplitud y la fase del movimiento resultante serán:

$$\varphi = \text{arctg} \frac{A_1 \text{ sen } \varphi_1 + A_2 \text{ sen } \delta}{A_1 \text{ cos } \varphi_1 + A_2 \text{ cos } \delta} \quad A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \text{ cos } (\varphi_1 - \delta) \quad (20)$$

por tanto el movimiento resultante no es armónico puesto que tanto la amplitud como la fase resultante son funciones del tiempo. Resumiendo y generalizando:

«La superposición de varias oscilaciones de frecuencia y amplitud arbitraria produce un proceso periódico, pero la mayoría de las veces es inarmónico. Recíprocamente, cualquier

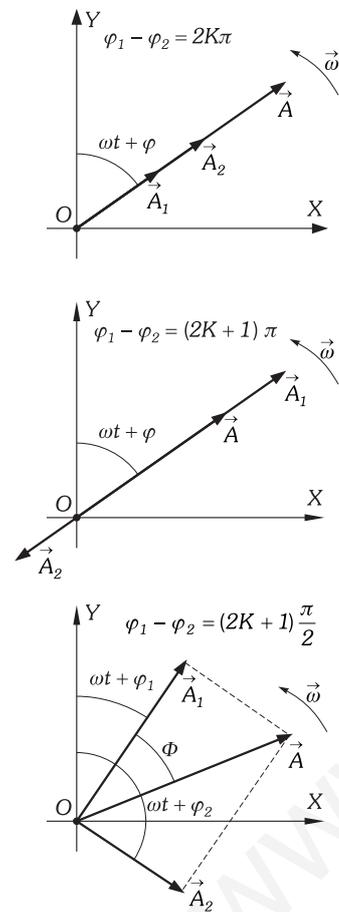


Fig. III-29.- Construcción de Fresnel para los tres casos particulares del párrafo III-17.

\* Ver movimiento circular y uniforme (párrafo IV-8).

movimiento periódico se puede descomponer, independientemente de su forma, en un determinado número de funciones armónicas».

El recíproco nos indica que: «si:  $x = x(t)$  es una función periódica pero no armónica podemos considerarla como la superposición de movimientos vibratorios armónicos simples de frecuencias  $\nu, 2\nu, 3\nu, \dots$ , etc.» (Este análisis de las funciones periódicas fue realizado por el matemático francés Joseph Fourier (1780-1830), por lo que la serie trigonométrica que ponemos a continuación lleva su nombre). Analíticamente la serie la podemos expresar:

$$x(t) = A_0 + A_1 \text{ sen } 2\pi\nu t + A_2 \text{ sen } 2\pi 2\nu t + A_3 \text{ sen } 2\pi 3\nu t + \dots$$

Supongamos, por ejemplo, dos movimientos vibratorios armónicos representados por las sinusoides 1 y 2 (Fig. III-30). El período del primero  $T_1$ , es doble que el segundo,  $T_2$ ; es decir la frecuencia del primero es la mitad de la del segundo. Sumemos sus elongaciones;  $x = x_1 + x_2$  y la curva resultante nos representa un movimiento periódico, pero no armónico. La Fig. III-31 inferior nos representa una función periódica «cuadrada», compuesta por las funciones armónicas de frecuencias  $\nu, 3\nu$  y  $5\nu$ , es decir a los términos  $1^\circ, 3^\circ$  y  $5^\circ$  de la serie de Fourier.

**PROBLEMAS: 84 al 87.**

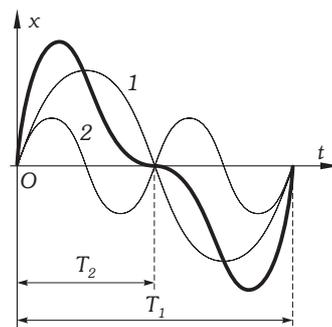


Fig. III-30.- La línea más gruesa es la representación gráfica del movimiento de una partícula sometida a dos MAS, siendo la frecuencia del primero la mitad que la del segundo resultando un movimiento periódico pero no armónico.

**III - 19. Composición de dos movimientos vibratorios armónicos de la misma dirección y pequeña diferencia de frecuencias. Modulación de amplitud. Pulsaciones**

Es un caso particular del visto en el apartado anterior. Supongamos que las condiciones iniciales en los movimientos vibratorios armónicos de diferente frecuencia (aunque muy parecidas) que vamos a componer son tales que:  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ; entonces  $\delta(t) = (\omega_2 - \omega_1)t$ , sustituyendo en (20) obtenemos para el valor de la amplitud resultante:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t \quad (21)$$

(FUNCIÓN DE MODULACIÓN O ENVOLVENTE)

variando periódicamente con el tiempo y oscilando entre los valores

$$\begin{aligned} A &= \pm(A_1 + A_2) \quad \text{cuando} \quad \cos(\omega_1 - \omega_2)t = 2k\pi \\ A &= \pm(A_1 - A_2) \quad \text{cuando} \quad \cos(\omega_1 - \omega_2)t = (2k - 1)\pi \end{aligned} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Al ser la frecuencia de la oscilación de la amplitud:

$$\nu = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = \nu_1 - \nu_2$$

muy pequeña (por ser muy próximas  $\nu_1$  y  $\nu_2$ ) entonces el período  $T = 1/(\nu_1 - \nu_2)$  será muy grande y la amplitud resultante varía muy poco, se dice que la amplitud está MODULADA (Fig. III-32). La frecuencia y por tanto el período de la oscilación resultante ( $x = x_1 + x_2$ ) coinciden con las calculadas para la función de modulación.

La Fig. III-33 representa la elongación resultante frente al tiempo: curvas envolventes corresponden a la variación de la amplitud con el tiempo (función de modulación).

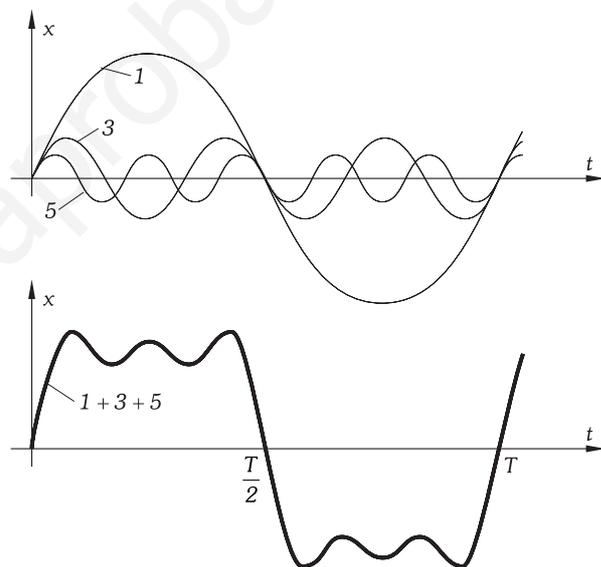
Si además se verifica que  $A_1 = A_2$  se produce el fenómeno llamado PULSACIONES O BATIDOS; entonces las ecuaciones de los movimientos componentes serán:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \text{ sen } \omega_1 t & x_2 &= A_1 \text{ sen } \omega_2 t \\ \text{sen } A + \text{sen } B &= 2 \text{ sen } \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} & \Rightarrow \\ \Rightarrow x = x_1 + x_2 &= 2A_1 \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \text{ sen } \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \end{aligned}$$

esta suma, que como resultado puramente matemático puede realizarse para cualquier  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , sólo tiene significado físico en su análisis como pulsación cuando  $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 + \omega_2$ . De esta última ecuación deducimos que la perturbación resultante tiene una frecuencia:

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \Rightarrow \nu = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$$

La inversa de ésta frecuencia del oscilador  $\Gamma = 1/\nu$ , no hay que confundirla con la frecuencia de movimiento resultante (frecuencia de la pulsación) que es periódico en que la partícula, trans-



$$x(t) = A_1 \text{ sen } 2\pi\nu t + A_3 \text{ sen } 2\pi 3\nu t + A_5 \text{ sen } 2\pi 5\nu t$$

Fig. III-31.- La oscilación periódica de la parte inferior de la figura es una función «cuadrada» y es la suma de las tres funciones armónicas que representamos en la parte superior, que corresponde a las funciones de frecuencia  $\nu, 3\nu$  y  $5\nu$ ; es decir, a los términos  $1^\circ, 3^\circ$  y  $5^\circ$  de la serie de Fourier.

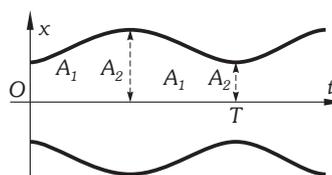


Fig. III-32.- Función de modulación o envolvente. El período del movimiento resultante coincide con el de la función de modulación.

curridos  $T$  segundos, se encuentra en las mismas condiciones de movimiento (igual posición, velocidad y aceleración);  $\Gamma$ , que es constante, no cumple esta condición, nos determina el intervalo de tiempo (siempre el mismo) que la partícula tarda en dar una cualquiera de sus oscilaciones completas (Figs. III-33 y 34).

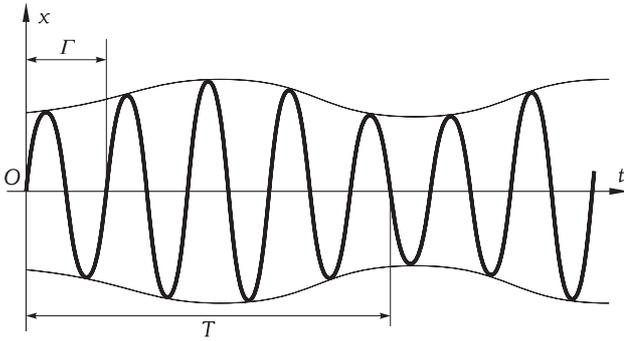


Fig. III-33.– Superposición de dos MAS de frecuencias parecidas. Las líneas envolventes corresponden a la función de modulación.

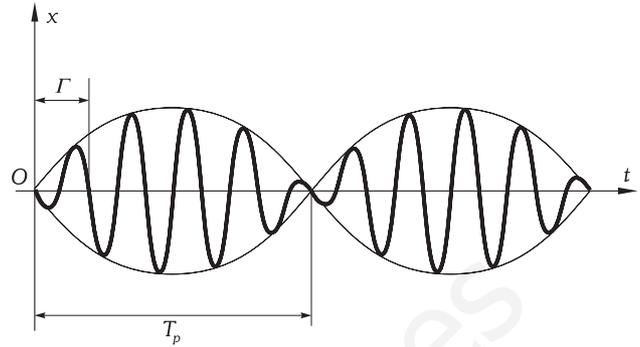


Fig. III-34.– Pulsaciones o batidos.

La amplitud de las vibraciones resultantes varía con el tiempo según la ecuación:

$$A = 2A_1 \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$$

y toma los valores extremos  $\pm 2A$ , (coseno igual a  $\pm 1$ ); este resultado puede obtenerse a partir de (21).

Para que la amplitud vuelva a tener en el instante  $t'$  el mismo valor absoluto que en  $t$  se ha de verificar:

$$\cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t = \pm \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t'$$

y si buscamos la reproducción primera del valor absoluto de  $A$ , la diferencia de ángulos ha de ser  $\pi$ :

$$\pi (\nu_1 - \nu_2) t' - \pi (\nu_1 - \nu_2) t = \pi \Rightarrow t' - t = \frac{1}{\nu_1 - \nu_2} = T_p$$

$t' - t$  es el «PERÍODO DE LA PULSACIÓN o de BATIDO» tiempo en que la amplitud vuelve a adquirir, por primera vez, al mismo valor (Fig. III-34); la inversa de tal período es la «FRECUENCIA DE LA PULSACIÓN» (número de veces que la unidad de tiempo la amplitud se hace máxima), cuyo valor es:

$$\nu_p = \frac{1}{T_p} = \nu_1 - \nu_2$$

Resumiendo: El movimiento resultante de dos MAS de la misma dirección y pequeña diferencia de frecuencia, es un movimiento vibratorio cuya amplitud varía con el tiempo de la suma a la diferencia de las amplitudes componentes (en el caso de amplitudes iguales, del doble de la amplitud de los movimientos componentes, a cero; es el caso dibujado en el Fig. III-34); cuya frecuencia de vibración es la semisuma de las frecuencias, y la frecuencia de la pulsación es la diferencia de las frecuencias componentes\*.

**PROBLEMAS: 88 al 92.**

### III - 20. Movimiento vibratorio amortiguado en trayectoria recta

El movimiento VIBRATORIO AMORTIGUADO de la partícula es un movimiento cuya amplitud decrece exponencialmente con el tiempo según la ecuación:

$$A = A(t) = A_0 e^{-k\omega t} \tag{22}$$

y su ecuación horaria es:

$$x = x(t) = A_0 e^{-k\omega t} \cos (\omega t + \varphi) \tag{23}$$

$x(t)$ : distancia de la partícula a su posición de equilibrio ( $x = 0$ ), en cualquier instante.

\* Este fenómeno es fácilmente observable utilizando dos diapasones iguales en uno de los cuales se coloca una pequeña masa en sus ramas para modificarle un poco su frecuencia, al golpearlos y ponerlos cerca se escucharán fluctuaciones en la intensidad del sonido por producirse pulsaciones sonoras.

- $A_0$ : distancia máxima a la posición de equilibrio; para la ecuación del oscilador que hemos propuesto la adquiere cuando  $t = 0$ , si  $\varphi = 0$  (Fig. III-35) y, para  $t = t_1$  ( $\varphi \neq 0$ ) en el caso de la Fig. III-36.
- $\omega$ : Frecuencia angular constante del oscilador amortiguado, característica propia del oscilador. Haciendo  $\omega = 2\pi\nu$ , la frecuencia del oscilador será constante y su inversa  $\Gamma$ , también lo será.
- $k$ : la llamamos «ÍNDICE DE AMORTIGUAMIENTO» y es también una característica propia del oscilador.
- $\varphi$ : FASE INICIAL que para  $t = 0 \Rightarrow x_0 = A \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = x_0/A$ .

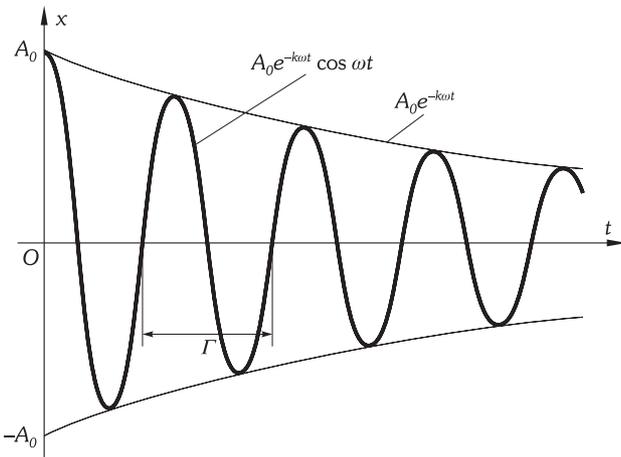


Fig. III-35.- El movimiento vibratorio amortiguado como función del tiempo cuando  $\varphi = 0$ . Las curvas envolventes son  $A = A(t)$ .

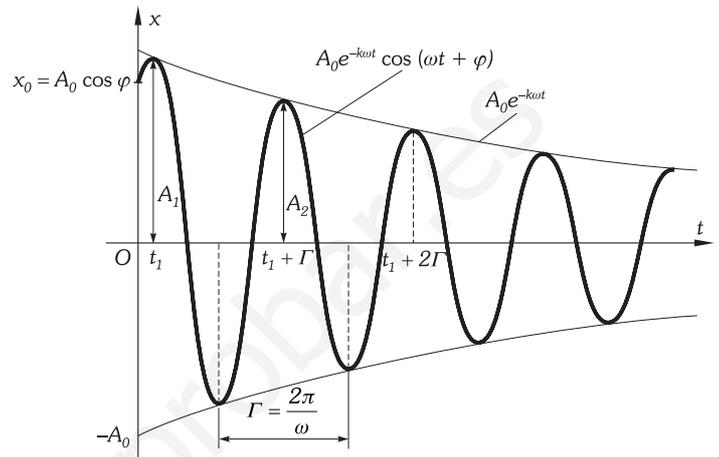


Fig. III-36.- El movimiento amortiguado como función del tiempo cuando  $\varphi \neq 0$ . Obsérvese la disminución continua de su amplitud.

Hemos definido «período» de un movimiento como aquel intervalo de tiempo, siempre el mismo, en que la partícula se encuentra en las mismas condiciones de movimiento (misma posición, velocidad y aceleración). En el caso del *movimiento amortiguado*, no cumple estas condiciones y por tanto *no es periódico*. Sin embargo  $\Gamma$  (que no es el período del movimiento) tiempo que se tarda en una oscilación si es constante y de valor:

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$$

Hemos dicho que  $\omega$  y por lo tanto  $\Gamma$  eran características propias del oscilador; queremos decir que son los mismos para él independientemente de las condiciones de su movimiento (amplitud, velocidad, ...), y por tanto una oscilación cualquiera de él dura siempre lo mismo.

Esta última propiedad de los osciladores fue observada por Galileo y aplicada básicamente para la medida de tiempos cortos con gran precisión (relojes).

Si en un instante  $t_1$  la amplitud de la vibración es  $A_1$ , trascurrido un tiempo  $\Gamma$ , en el instante  $t_1 + \Gamma = t_2$ , la amplitud será  $A_2 < A_1$  (Fig. III-36), según la (22) tomarán los valores:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A_0 e^{-k\omega t_1} \\ A_2 &= A_0 e^{-k\omega (t_1 + \Gamma)} \end{aligned} \right| \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = e^{k\omega \Gamma} = e^{2\pi k} = e^\delta \Rightarrow \ln \frac{A_1}{A_2} = 2\pi k = \delta$$

A  $\delta = 2\pi k = k\omega \Gamma$ , se le llama «DECREMENTO LOGARÍTMICO» cualquiera que sea la amplitud del oscilador amortiguado decrece en  $e^\delta$  en el transcurso de tiempo que hemos llamado  $\Gamma^*$ .

Es evidente que cuanto más pequeño sea el coeficiente de amortiguamiento  $k$ , más rápidamente se amortigua el movimiento de la partícula.

**PROBLEMAS: 93 al 98.**

\* Nos ocupamos aquí del movimiento armónico SUBAMORTIGUADO. En el Capítulo VI párrafo 10 veremos el AMORTIGUAMIENTO CRÍTICO y el SOBREAMORTIGUADO.

## PROBLEMAS

## A) MAGNITUDES FUNDAMENTALES

1. La ecuación vectorial horaria de una partícula que se mueve en un plano, viene dada en el SI por la expresión:  $\mathbf{r} = (2t^2 - 1)\mathbf{i} + (t^3 + 1)\mathbf{j}$ . Calcular: 1) El vector de posición inicial. 2) La distancia al observador (distancia al origen del sistema de referencia) a los 5 s de haber empezado a contar el tiempo. 3) Espacio recorrido por la partícula en el tercer segundo.

2. La ecuación vectorial horaria del movimiento de una partícula escrita en el SI es:  $\mathbf{r} = (3 - 6t^2 - 3t^3)\mathbf{i} + (5 + 4t^2 + 2t^3)\mathbf{j} + (2 + 2t^2 + t^3)\mathbf{k}$ . Determinar la ecuación analítica de su trayectoria y su ley horaria.

3. La ecuación vectorial horaria del movimiento de una partícula que se mueve en un plano OXY, viene dada en el SI:  $\mathbf{r} = (2t + 1)\mathbf{i} + 2(2t + 1)^{3/2}/3\mathbf{j}$ . Determinar la ecuación analítica [ $y = f(x)$ ] y su ley horaria [ $s = s(t)$ ] y representarla.

4. La ley horaria de un punto móvil está dada en el SI por la expresión:  $s = t^2 + t + 1$ . Calcular: 1) Posición inicial del móvil. 2) Velocidad media en el intervalo comprendido entre tres y cinco segundos.

5. Un automóvil ha ido de la ciudad A a la B distantes entre sí 180 km en 3 h, y sin pérdida de tiempo retorna en 3,5 h. 1) ¿Cuál es la «velocidad media» en el trayecto de ida? 2) ¿Cuál es la «velocidad media» en el trayecto de vuelta? 3) ¿Cuál es la «velocidad media» en el trayecto ida-vuelta?

6. La ley horaria del movimiento de una partícula en trayectoria plana queda determinada en el SI:  $s(t) = t^2 + t + 1$ . Si el móvil respecto de un sistema de referencia OXY, a los 2 s de iniciado el movimiento se encuentra en el punto (3, 3) m y a los 4 s, en el (5, 7) m. Determinar: 1) La velocidad media en su desplazamiento sobre su trayectoria. 2) El vector velocidad media y su módulo.

7. Una partícula se mueve en el plano OXY; un observador colocado en O sabe que las ecuaciones paramétricas de la trayectoria escritas en el SI son:  $x = 2 + t$ ,  $y = 2 + 3t + 2t^2$ . 1) Determinar la forma explícita de la trayectoria. 2) La expresión del vector de posición y del vector velocidad de ella. 3) Las condiciones iniciales del movimiento. 4) Los valores del vector de posición y velocidad para  $t = 2$  s. 5) Distancia de la partícula al observador en ese momento. 6) El vector desplazamiento y el vector velocidad media entre  $t = 2$  s y  $t = 5$  s.

8. Una partícula se mueve de tal forma que en cada instante el valor de su velocidad (módulo) queda determinada en el SI por la función:  $v = 10 - 2t$ . Determinar: 1) Las velocidades inicial y en los instantes  $t = 2$  s y  $t = 9$  s. 2) La ley horaria de su movimiento (distancia al origen de espacios recorridos  $s = 0$ ), si para  $t = 0$  el punto se encuentra a 11 m del origen y hacer una representación gráfica de esta ley. 3) Distancia al origen de espacios para  $t = 2$  s y  $t = 9$  s, e indicar en qué instante cambia el sentido del movimiento. 4) Espacio recorrido por la partícula entre 2 y 9 s; tomando una trayectoria cualquiera en un sistema OXYZ, representar el sentido del movimiento sobre ella poniendo los puntos mencionados en los apartados anteriores. 5) Velocidad media de la partícula en el intervalo considerado.

9. Una partícula se mueve sobre una trayectoria plana, cuya ecuación expresada en el SI es:  $y = x^2 + 1$ ; para  $x = 1$  m entonces  $v_y = 3$  m/s. Calcular el vector velocidad en ese momento.

10. Si el radio vector que nos define la posición de una partícula viene dado por:  $\mathbf{r} = (3t^2 - 5)\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + \text{sen } \pi t\mathbf{k}$ . Calcular las expresiones del vector velocidad y del vector aceleración.

11. El radio vector de un punto móvil queda determinado por las siguientes componentes:  $x = 4 + 3t$ ,  $y = t^3 + 5$ ,  $z = 2t + 4t^2$ , en las que  $x$ ,  $y$ ,  $z$  vienen expresadas en cm y el tiempo en s. Determinar la velocidad y la aceleración del punto en el instante  $t = 1$  s.

12. El vector velocidad del movimiento de una partícula referido a un punto O (velocidad definida por un observador en O) viene dado en el SI por:  $\mathbf{v} = (2t + 8)\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + (6t^2 - 8)\mathbf{k}$ . El vector que nos define la posición inicial sobre la trayectoria es:  $\mathbf{r}_0 = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$  m. Determinar: 1) El vector velocidad inicial y su módulo. 2) El vector velocidad para  $t = 5$  s. 3) La expresión del vector de posición en cualquier instante. 4) La distancia del móvil al origen O (distancia a que se encontraría el móvil, de un observador colocado en el origen de los vectores de posición) 1 s después de haber empezado a contar el tiempo.

13. El vector aceleración de una partícula referido a un punto O (vector aceleración definido por un observador en O) viene dado por:  $\mathbf{a} = 2(18t^2 + 1)\mathbf{i} + 9t\mathbf{j}$  (SI). En el instante  $t = 0$  la velocidad es nula y el

vector de posición es:  $\mathbf{r}_0 = 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$  m. Se trata de determinar el vector velocidad y el vector de posición de la partícula en cualquier instante.

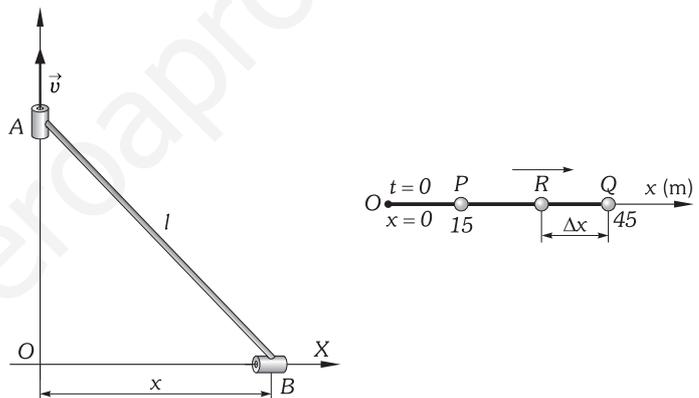
14. El vector aceleración de una partícula en movimiento viene expresado en el SI:  $\mathbf{a} = 6t\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ , inicialmente la partícula se encuentra en  $P_0(1, 3, -2)$  m y transcurridos 3 s su velocidad es:  $\mathbf{v} = 3t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$  m/s. Calcúlese el vector velocidad y el vector de posición en cualquier instante.

## B) MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS. MAGNITUDES ANGULARES

15. La fórmula que da la posición de una partícula que se mueve en trayectoria recta, escrita en el SI es:  $x = 7t^3 - 2t^2 + 3t + 1$ . Calcular: 1) Ecuación de la velocidad. 2) Ecuación de la aceleración. 3) Espacio recorrido por la partícula en el tercer segundo.

16. El movimiento de un punto material en línea recta viene dado por la ecuación escrita en el sistema CGS:  $x = e^{3t} - 5$ . Calcular: 1) Las expresiones de la velocidad y aceleración en función del tiempo y de la posición. 2) Valor de la aceleración inicial. 3) Valor de la velocidad inicial.

17. El extremo A de una varilla de longitud  $l$  de la figura asciende por el eje OY con una velocidad constante  $v$ , siendo  $y = 0$  en  $t = 0$ . El extremo B se mueve sobre el eje OX. Determinar las ecuaciones del movimiento del extremo B.



Problema III-17.

Problema III-23.- La partícula pasa de  $P \rightarrow R \rightarrow Q$ .

18. La velocidad de una partícula que se mueve en trayectoria recta está dada por la ecuación  $v = 7/(1 + t^2)$  SI. Calcular las expresiones de la posición y de la aceleración en función del tiempo sabiendo que en el instante inicial la partícula está en el origen.

19. La ecuación de la velocidad de una partícula que se mueve en trayectoria recta, viene dada en el SI por:  $v = 4t^2 - 6t + 2$ . Sabiendo que en el instante  $t = 0$ ,  $x_0 = 3$  m, calcular: 1) Ecuación de la posición en cualquier instante. 2) Ecuación de la aceleración. 3) La velocidad inicial del móvil. 4) Aceleración media entre los instantes  $t = 1$  s y  $t = 2$  s.

20. Una partícula que posee un movimiento rectilíneo recorre un espacio de 7,00 m antes de empezar a contar el tiempo, y cuando  $t = 2,00$  s posee una velocidad de 4,00 m/s. Si la ecuación de su aceleración escrita en unidades del SI es:  $a = 3,00t^2 - 1,00$ . Calcular: 1) Ecuación de la velocidad y posición. 2) La velocidad media de la partícula entre los instantes  $t = 2,00$  s y  $t = 3,00$  s. 3) Representar gráficamente  $x = x(t)$ ,  $v = v(t)$  y  $a = a(t)$  en el intervalo entre  $t = 0$  y  $t = 4,00$  s, haciendo un esquema de la trayectoria de la partícula.

21. Un movimiento rectilíneo es tal que su velocidad viene dada en función del desplazamiento por la ecuación  $v = 3x + 1$ . Hallar sus ecuaciones horarias sabiendo que para  $t = 0$  el móvil se encuentra en el origen.

22. Una partícula parte del reposo en  $t = 0$  y en trayectoria recta, su velocidad viene dada en el SI por la ecuación:  $v = 2\sqrt{x}$ . 1) Demostrar que su aceleración es constante con el tiempo y calcular su valor. 2) Determinar su ley horaria [ $x = x(t)$ ].

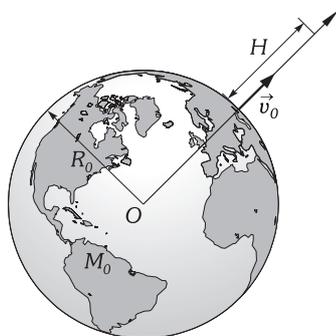
23. El cuadrado de la velocidad de una partícula que se mueve en trayectoria recta de origen O, como indicamos en la figura, viene dado

en el si por la expresión:  $v^2 = 345 - 5x$ . Determinar: 1) El tiempo que tarda la partícula en ir de P a Q distantes entre sí 30 m. 2) Espacio recorrido por ella ( $\Delta x$ ) un segundo antes de llegar a Q.

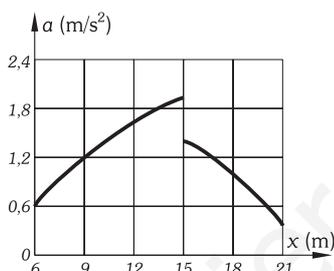
24. La ecuación de la aceleración en función de la velocidad de una partícula en trayectoria recta es:  $a = 3\sqrt{1-v^2}$ , sabiendo que el móvil parte del reposo en el origen, calcular las ecuaciones de este movimiento [ $x = x(t)$ ,  $v = v(t)$  y  $a = a(t)$ ].

25. En el proyecto de una pista de aterrizaje para grandes aviones a reacción se ha propuesto un estanque de agua de poca profundidad (aproximadamente 1 m). El avión en el momento de contactar con el agua se considera que tiene una velocidad de 180 km/h y debe reducirse a 27 km/h en una distancia de 300 m; durante su recorrido la resistencia que se opone al movimiento produce una deceleración que viene dada por:  $a = -kv^2$ . Calcular: 1) El valor de k (que depende del tamaño y forma del tren de aterrizaje que se sumerge en el estanque). 2) El tiempo transcurrido en tal recorrido.

26. La variación de la aceleración de la gravedad con la altura viene dada por la fórmula:  $g = -GM_0/(R_0 + h)^2$  y cuando  $h = 0$  entonces  $|g| = g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Teniendo en cuenta esta expresión, calcular la velocidad inicial  $v_0$  que habría que darle a un cuerpo (sin propulsión autónoma) para que lanzado desde la superficie terrestre, ascienda una altura vertical de 4 000 km. (Radio terrestre  $R_0 = 6 000 \text{ km}$ , y supondremos nula la resistencia del aire).



Problema III-26.



Problema III-28.

27. La aceleración  $a$  de una partícula que se mueve en el eje X viene expresada en función de la posición por la fórmula:  $a = -\omega^2 x$ , cuando  $x = 0$  entonces  $v = v_0$  y  $t = 0$ . Encontrar las expresiones de la velocidad  $v$  y de la posición  $x$  en función del tiempo.

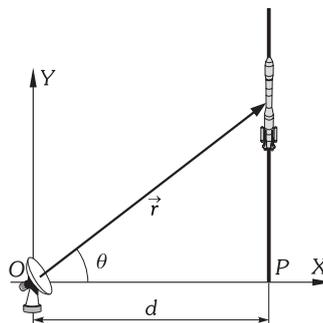
28. Durante una fase del movimiento rectilíneo de un vehículo experimental, el registro de su aceleración en función de su desplazamiento [ $a = a(x)$ ] viene dado por la gráfica de la figura. La velocidad es de 12 km/h en  $x = 6 \text{ m}$  y, el mecanismo del motor hace que la aceleración descienda bruscamente (punto de discontinuidad en la gráfica) en  $x = 15 \text{ m}$ . Representar  $v = v(x)$  en el intervalo considerado y calcular la velocidad en  $x = 21 \text{ m}$ .

29. Un punto móvil parte del reposo de un punto O, en trayectoria recta, acelera durante 10 s a  $2 \text{ m/s}^2$  y a continuación a  $3 \text{ m/s}^2$  hasta alcanzar una velocidad de 50 m/s, conservándola hasta que decelera durante 12 s y se para en un punto P. El tiempo total empleado en el trayecto OP es de 60 s. Representar las curvas  $a = a(t)$ ,  $v = v(t)$  y  $x = x(t)$  y calcular la distancia OP sobre la trayectoria.

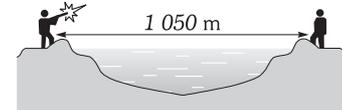
30. El movimiento de una partícula en trayectoria recta es tal que para  $t = 0$  es  $x = 0$  y la ecuación de su velocidad viene dada en el si por la ecuación:  $v = t^2 - 2t$ . 1) Representar gráficamente las funciones  $v(t)$ ,  $x(t)$  y  $a(t)$  en el intervalo de tiempo comprendido entre  $t_1 = 1 \text{ s}$  y  $t_2 = 3 \text{ s}$ . 2) Calcular el espacio total recorrido por la partícula en ese intervalo de tiempo. 3) Describir el movimiento de la partícula.

31. Un mecanismo de freno consiste esencialmente en un pistón que puede desplazarse en un cilindro fijo lleno de aceite. Cuando el pistón retrocede con una velocidad inicial  $v_0$ , el aceite es forzado a pasar a través de orificios que tiene el pistón, originando en el mismo una deceleración proporcional a su velocidad, es decir:  $a = -kv$ . Expresar  $v(t)$ ,  $x(t)$  y  $v(x)$ , dibujando las curvas correspondientes.

32. Se dispara una cohete verticalmente, su vuelo se sigue por radar desde un punto O que dista  $d$  del punto de lanzamiento P como se indica en la figura. Determinar la velocidad y aceleración del cohete en función de  $r$  y  $\theta$  y sus derivadas respecto al tiempo  $\dot{r}$  y  $\dot{\theta}$ .



Problema III-32.



Problema III-37.

33. La velocidad de rotación de un faro luminoso es constante e igual a  $\omega$  y está situado a una distancia  $d$  de una playa completamente recta. Calcular la velocidad y aceleración con que se desplaza el punto luminoso sobre la playa cuando el ángulo que forman  $d$  y el rayo es  $\theta$ .

34. Queremos filmar un coche que viaja a velocidad  $v$  constante por una carretera recta desde un punto que dista  $d$  de ella. Calcular la velocidad angular y la aceleración angular de giro con que debemos mover la cámara para un ángulo cualquiera  $\theta$ .

### C) MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS Y UNIFORMES

35. Sabiendo que la estrella  $\alpha$ -Centauro (la más próxima a nosotros después del Sol) se encuentra de la Tierra a  $4,04 \times 10^{13} \text{ km}$ , calcular el tiempo que tarda la luz de  $\alpha$ -Centauro en llegar a la Tierra.

36. La distancia mínima a que debe estar un muro para que se produzca eco al emitir enfrente de él una sílaba, es de 17 m; el mínimo tiempo para que se perciban dos sílabas distintamente es 0,1 s (poder separador del oído medio). Calcular con estos datos la velocidad de propagación del sonido en el aire, teniendo en cuenta que el sonido va y vuelve en el trayecto de 17 m. ¿Cuál es el valor de una velocidad «supersónica» en km/h?

37. Entre dos observadores hay una distancia de 1 050 m; uno de ellos dispara un arma de fuego y el otro cuenta el tiempo que transcurre desde que ve el fogonazo hasta que oye el sonido, obteniendo un valor de 3,0 s. Despreciando el tiempo empleado por la luz en hacer tal recorrido, calcular la velocidad de propagación del sonido (ver figura).

38. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en los dos problemas anteriores, calcular: 1) La componente de la velocidad del viento en la dirección de los observadores en la experiencia del problema. 2) ¿Qué tiempo tardaría el sonido en recorrer los 1 050 m si los observadores del anterior problema invirtieran sus posiciones?

39. Nos encontramos en una batalla naval, en un buque situado entre el enemigo y los acantilados de la costa. A los 3 s de ver el fogonazo oímos el disparo del cañón, y a los 11 s del fogonazo percibimos el eco. Calcular la distancia a que están de nosotros el enemigo y la costa. Velocidad del sonido, 340 m/s.

40. Un ciclista marcha por una región donde hay muchas subidas y bajadas. En las cuestas arriba lleva una velocidad constante de 5 km/h y en las cuestas abajo de 20 km/h. Calcular: 1) ¿Cuál es su velocidad media si las subidas y bajadas tienen la misma longitud? 2) ¿Cuál es su velocidad media si emplea el mismo tiempo en las subidas que en las bajadas? 3) ¿Cuál es su velocidad media si emplea doble tiempo en las subidas que en las bajadas?

41. Dos móviles marchan en sentidos contrarios, dirigiéndose el uno al encuentro del otro con las velocidades de 4 y 5 cm/s respectivamente. Sabiendo que el encuentro tiene lugar a 1,52 m, de la posición de partida del primero, determinar la distancia entre los móviles al comenzar el movimiento y el tiempo transcurrido hasta que se encontraron.

42. Un acorazado se aleja de la costa, en la que hay un alto acantilado. A 680 m de la costa dispara un cañonazo; el eco es percibido 4,1 s después. Calcular la velocidad del acorazado. (Se supone para el sonido la velocidad de 340 m/s).

43. Un móvil parte de un punto con una velocidad de 110 cm/s y recorre una trayectoria rectilínea con aceleración de  $-10 \text{ cm/s}^2$ . Calcular el tiempo que tardará en pasar por un punto que dista 105 cm del punto de partida. (Interpretar físicamente las dos soluciones que se obtienen).

44. Hallar las fórmulas de un movimiento uniformemente variado sabiendo que la aceleración es  $8 \text{ cm/s}^2$ , que la velocidad se anula para  $t = 3 \text{ s}$ , y que pasa por el origen ( $x = 0$ ) en  $t = 11 \text{ s}$ .

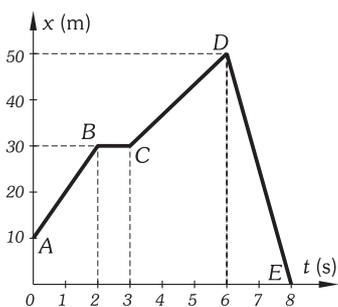
45. La velocidad de un punto que se mueve en trayectoria recta queda expresada en el SI por la ecuación:  $v = 40 - 8t$ . Para  $t = 2 \text{ s}$  el punto dista del origen  $80 \text{ m}$ . Determinar: 1) La expresión general de la distancia al origen. 2) El espacio inicial. 3) La aceleración. 4) ¿En qué instante tiene el móvil velocidad nula? 5) ¿Cuánto dista del origen en tal instante? 6) Distancia al origen y espacio recorrido sobre la trayectoria a partir de  $t = 0$ , cuando  $t = 7 \text{ s}$ ,  $t = 10 \text{ s}$ , y  $t = 15 \text{ s}$ .

46. Trazar la curva de la posición y la de la velocidad en función del tiempo en el movimiento dado por la fórmula  $x = 4,00 - 26,00t + 4,00t^2$  (SI) y determinar los instantes para los cuales la velocidad y el espacio tienen el mismo valor numérico.

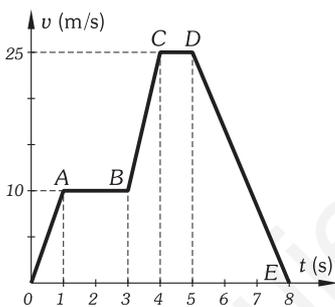
47. Un automóvil arranca de un punto con movimiento uniformemente acelerado, alcanzando a los  $5 \text{ s}$  la velocidad de  $108 \text{ km/h}$  desde cuyo momento la conserva, hasta que a los  $2 \text{ minutos}$  de alcanzarla, frena hasta pararse al producirle los frenos una deceleración de  $10 \text{ m/s}^2$ . 1) Calcular el tiempo transcurrido y el espacio recorrido desde que arranca hasta que se para. 2) Hacer una representación gráfica de  $x = x(t)$ ,  $v = v(t)$  y  $a = a(t)$ .

48. El gráfico de la figura nos representa el movimiento realizado por un móvil en trayectoria recta. Interpretar y clasificar su movimiento.

49. El gráfico de la figura nos representa la velocidad de un móvil en trayectoria recta, en el que para  $t = 0$ ,  $x_0 = 0$ . Determinar las ecuaciones de la posición y de la aceleración interpretando el movimiento que tiene en cada caso.



Problema III-48.



Problema III-49.

50. Dos puntos materiales A y B se mueven con movimiento uniformemente acelerado partiendo del reposo; la aceleración de B es doble que la de A y el tiempo que emplea A en su trayectoria es triple que el de B. ¿Qué camino recorre B, con respecto al recorrido por A?

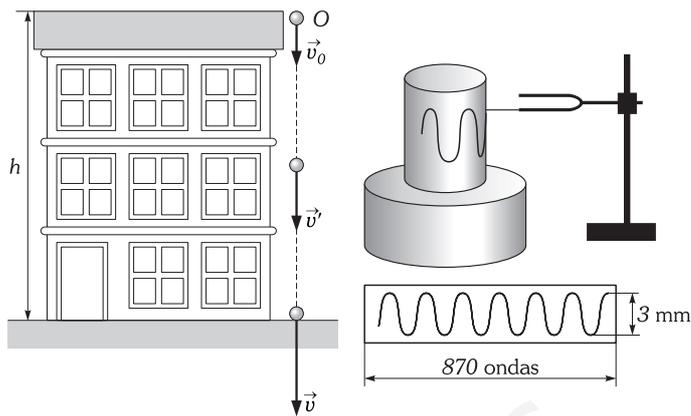
51. Un automóvil que está parado, arranca con una aceleración de  $1,5 \text{ m/s}^2$ . En el mismo momento es adelantado por un camión que lleva una velocidad constante de  $15 \text{ m/s}$ . Calcular: 1) Distancia contada desde el punto de cruce en la que alcanza el automóvil al camión. 2) Velocidad del automóvil en ese momento.

52. Un automóvil y un camión parten en el mismo momento, inicialmente el coche se encuentra a una cierta distancia del camión; si el coche tiene una aceleración de  $3 \text{ m/s}^2$  y el camión de  $2 \text{ m/s}^2$  y el coche alcanza al camión cuando este último ha recorrido  $60 \text{ m}$ . Calcular: 1) Distancia inicial entre ambos. 2) Velocidad de cada uno en el momento del encuentro.

53. Dos cuerpos A y B situados a  $2 \text{ km}$  de distancia salen simultáneamente en la misma dirección y sentido, ambos con movimiento uniformemente acelerado, siendo la aceleración del más lento, el B, de  $0,32 \text{ cm/s}^2$ . Deben encontrarse a  $3,025 \text{ km}$  de distancia del punto de partida del cuerpo B. Calcular el tiempo que invertirán en ello y cuál será la aceleración de A, así como las velocidades de los dos en el momento de encontrarse.

54. Desde la cornisa de un edificio de  $60 \text{ m}$  de alto se lanza verticalmente hacia abajo un proyectil con una velocidad de  $10 \text{ m/s}$  (tomar  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ). Calcular: 1) Velocidad con que llega al suelo. 2) Tiempo que tarda el llegar al suelo. 3) Velocidad cuando se encuentra en la mitad de su recorrido. 4) Tiempo que tarda en alcanzar la velocidad del apartado 3).

55. Desde el balcón situado a  $14,1 \text{ m}$  sobre el suelo de una calle, lanzamos un cuerpo verticalmente hacia arriba con una velocidad de  $10 \text{ m/s}$ . Calcular el tiempo que tardará en llegar al suelo ( $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ).



Problema III-54.

Problema III-68.

56. Desde lo alto de una torre de  $100 \text{ m}$  de alta se lanza verticalmente hacia arriba una piedra con la velocidad de  $15 \text{ m/s}$ . La piedra llega a una determinada altura y comienza a caer por la parte exterior de la torre. Tomando como origen de ordenadas el punto de lanzamiento, calcular la posición y la velocidad de la piedra al cabo de  $1$  y  $4 \text{ s}$  después de su salida. ¿Cuál es la altura alcanzada por la piedra y qué tiempo tarda en alcanzarla? Asimismo calcular la velocidad cuando se encuentra a  $8 \text{ m}$  por encima del punto de partida y cuando cayendo pasa por el punto de partida. ¿Cuánto tiempo transcurre desde que se lanzó hasta que vuelve a pasar por dicho punto? ¿Cuánto tiempo tarda en llegar al suelo y qué velocidad lleva en ese momento? ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ ).

57. Una piedra que cae libremente pasa a las  $10^h$  frente a un observador situado a  $300 \text{ m}$  sobre el suelo, y a las  $10^h 2^s$  frente a un observador situado a  $200 \text{ m}$  sobre el suelo ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ ). Se pide calcular: 1) La altura desde la que cae. 2) En qué momento llegará al suelo. 3) La velocidad con que llegará al suelo.

58. Determinar la profundidad de un pozo si el sonido producido por una piedra que se suelta en su brocal, al chocar con el fondo, se oye  $2 \text{ s}$  después de ser soltada. (Velocidad del sonido:  $340 \text{ m/s}$ ;  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ).

59. Se deja caer una piedra desde un globo que asciende con una velocidad de  $3 \text{ m/s}$ ; si llega al suelo a los  $3 \text{ s}$  y  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , calcular: 1) Altura a que se encontraba el globo cuando se soltó la piedra. 2) Distancia globo-piedra a los  $2 \text{ s}$  del lanzamiento.

60. Dos proyectiles se lanzan verticalmente de abajo hacia arriba, el primero con una velocidad inicial de  $50 \text{ m/s}$  y el segundo con la velocidad inicial de  $30 \text{ m/s}$ . ¿Qué intervalo de tiempo tiene que haber entre los dos lanzamientos para que los dos lleguen a la vez al suelo? ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ ).

61. Dos proyectiles se lanzan verticalmente hacia arriba con dos segundos de intervalo, el primero con una velocidad inicial de  $50 \text{ m/s}$  y el segundo con la velocidad inicial de  $80 \text{ m/s}$ . ¿Cuál será el tiempo transcurrido hasta que los dos se encuentren a la misma altura? ¿A qué altura sucederá? ¿Qué velocidad tendrá cada uno en ese momento? ( $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ).

62. La cabina de un ascensor de altura  $3 \text{ m}$  asciende con una aceleración de  $1 \text{ m/s}^2$ . Cuando el ascensor se encuentra a una cierta altura del suelo, se desprende la lámpara del techo. Calcular el tiempo que tarda la lámpara en chocar con el suelo del ascensor. ( $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ).

63. A una cierta hora del día los rayos solares inciden sobre un lugar con un ángulo  $\varphi$  con la horizontal; dejamos caer libremente un cuerpo desde una altura  $h$  sobre un terreno horizontal. Calcular la velocidad de la sombra cuando el cuerpo se encuentra a una altura  $y$  del suelo.

64. Si la resistencia que opone el aire en reposo produce una deceleración  $a = -kv$  (se opone al movimiento en su seno), y suponiendo que  $g$  es constante, calcular: 1) La posición en función del tiempo en el ascenso de un objeto lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial  $v_0$ . 2) La altura máxima alcanzada por el objeto.

D) OSCILACIONES

65. Demostrar que un movimiento vibratorio armónico de trayectoria recta, coincide con el movimiento de la proyección sobre un diámetro, de una partícula que gira uniformemente alrededor de una circunferencia\*.

66. Un punto material describe uniformemente una trayectoria circular de 1 m de radio, dando 30 rpm. Expresar la ecuación del movimiento vibratorio armónico que resultaría al proyectar sobre un diámetro las posiciones del punto material en los dos casos siguientes: 1) Se comienza a contar el tiempo cuando la proyección del punto móvil es el centro de la circunferencia y el movimiento va en el sentido de las agujas de un reloj. 2) En el caso de comenzar a contar el tiempo cuando el radio ha girado desde la posición anterior un ángulo de  $57,328^\circ$ .

67. Un MAS viene dado por la ecuación  $x = A \sin(\omega t + \varphi)$  siendo las condiciones iniciales (para  $t = 0$ )  $x = x_0$  y  $v = v_0$ ; determinar las constantes A y  $\varphi$  para una determinada pulsación  $\omega$ .

68. En la experiencia correspondiente a la figura el cilindro da una vuelta en 2 s. Dada una vuelta, el dibujo que se ha realizado en el papel consta de 870 ondulaciones completas cuya máxima dimensión transversal es 3 mm. Determinar la frecuencia, el período y la ecuación de movimiento —supuesto vibratorio armónico simple— de la punta entintada, si entra en contacto con el cilindro cuando pasa por su posición de equilibrio, en el sentido que se considerará de x crecientes. Calcular también la elongación al cabo de 0,1 y 0,01 s de iniciado el movimiento.

69. La ecuación del movimiento de una partícula viene dada en el SI por la expresión:  $x = 10^{-2} \cos(2\pi t + \pi/4)$ . Calcular: 1) El período de la vibración. 2) Los valores extremales de la velocidad y aceleración de la partícula.

70. Un punto material oscila con movimiento vibratorio armónico simple de amplitud 2 cm y frecuencia 10 Hz. Calcular su velocidad y aceleración extremas y la velocidad y aceleración en el tiempo  $t = 1/120$  s. Suponer la fase inicial nula.

71. La aceleración de un movimiento queda determinada por la expresión:  $a = -16\pi^2 x$ , estando a medida en  $\text{cm/s}^2$  y x (distancia al origen) en cm. Sabiendo que el desplazamiento máximo es 4 cm y que se ha comenzado a contar el tiempo cuando la aceleración adquiere su valor absoluto máximo, en los desplazamientos positivos, determinar: 1) La ecuación del desplazamiento para cualquier instante. 2) La velocidad y aceleración extremas. 3) La velocidad y la aceleración cuando el desplazamiento es la mitad del máximo.

72. Para un MAS de la partícula, su velocidad es 3 cm/s cuando su elongación es 2,4 cm y 2 cm/s cuando su elongación es 2,8 cm. Determinar la amplitud y su frecuencia angular.

73. Las aceleraciones extremas de un MAS para una partícula son:  $\pm 158 \text{ cm/s}^2$ , la frecuencia de las vibraciones es 4 Hz y la elongación cuando  $t = 0,125$  s es  $x = 0,125$  cm y  $v < 0$ . Escribir la ecuación del MAS de la partícula.

74. Una partícula que se mueve con un movimiento vibratorio armónico simple, tiene un desplazamiento inicial  $x_0 = 1,5$  cm, una velocidad inicial dirigida en el sentido positivo del eje X de  $v_0 = 3\pi\sqrt{3}$  cm/s y su período es 1 s. Determinar las ecuaciones horarias del MAS.

75. Una partícula vibra con un MAS obedeciendo a la ecuación horaria dada en el SI:  $x(t) = 10^{-2} \cos(8\pi t + \pi/6)$ . 1) Hacer la representación gráfica  $x = x(t)$ . 2) Determinar el tiempo que tarda la partícula en pasar por tercera vez por la posición de equilibrio. 3) Calcular el espacio recorrido por la partícula en ese tiempo.

76. La gráfica de la figura nos representa la posición en función del tiempo de una partícula que oscila en torno al origen. Determinar: 1) Sus ecuaciones horarias  $x = x(t)$ ,  $v = v(t)$  y  $a = a(t)$  y representar las dos últimas. 2) El espacio recorrido por la partícula en el primero, segundo y tercer segundo a partir de  $t = 0$ .

77. Una partícula, suspendida de un muelle vertical, realiza un movimiento vibratorio armónico con una amplitud de 10 cm y una frecuencia de 0,5 Hz. se empieza a contar tiempo en el instante en que la partícula está 5 cm por encima de su posición de equilibrio y bajando. 1) Obtener su ecuación de movimiento. 2) ¿En qué instantes alcanza la máxima elongación negativa? 3) ¿En qué instantes pasa por la posición inicial?

78. Una partícula realiza un movimiento vibratorio armónico en el eje OX, siendo su ecuación:  $x = 2 \cos(2t - \pi/3)$  escrita en el SI. 1) Representar gráficamente el desplazamiento x, la velocidad v y la aceleración a en función del tiempo t. 2) Representar gráficamente la velocidad y la aceleración en función del desplazamiento.

79. Determinar la ecuación del movimiento vibratorio armónico que resulta de estar sometida una partícula a las vibraciones:  $x_1 = 5 \sin 2\pi t$  y  $x_2 = 5 \sin(2\pi t + \pi/3)$  estando éstas escritas en el sistema CGS. Construir el diagrama vectorial (Fresnel) de la composición de amplitudes.

80. Calcular la diferencia de fase que deben tener los movimientos vibratorios armónicos del mismo período, dirección y amplitud, para que el movimiento resultante tenga la misma amplitud que cualquiera de ellos. Representar gráficamente los movimientos componentes y el resultante.

81. Determinar la amplitud y la ecuación general del movimiento vibratorio armónico que resulta al estar sometido un punto material a las vibraciones  $x_1 = 3 \sin(8\pi t + \pi/2)$  y  $x_2 = 4 \sin 8\pi t$ , estando escritas en el sistema CGS. Construir el diagrama vectorial de la composición de amplitudes.

82. Sometemos a una partícula a tres movimientos armónicos de la misma frecuencia y que tienen la misma dirección de vibración; siendo 0,30, 0,35 y 0,45 mm las amplitudes de estos y la diferencia de fase entre el primero y el segundo  $25^\circ$ , y entre el segundo y el tercero  $35^\circ$ ; determinar la amplitud de la vibración resultante y su fase relativa al primer componente.

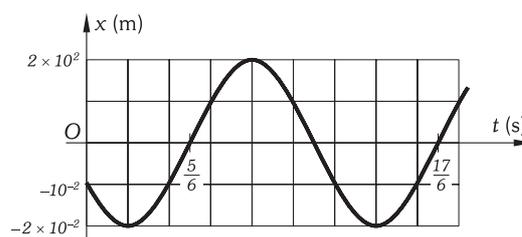
83. Una partícula se encuentra sometida a dos MAS de la misma dirección y frecuencia encontrándose en cuadratura y teniendo por ecuaciones escritas en el sistema CGS:  $x_1(t) = 4 \sin(\pi t + 5\pi/6)$  y  $x_2(t) = 3 \sin(\pi t + \pi/3)$ . Componer analítica y gráficamente estos dos MAS y representar su diagrama vectorial.

84. Una partícula está sometida a dos MAS que tienen la misma dirección y cuyas ecuaciones escritas en el CGS son:  $x_1 = 0,2 \sin 5\pi t$  y  $x_2 = 0,2 \sin 10\pi t$ . 1) Hallar la ecuación del movimiento resultante y su período. 2) Determinar el momento en el que la partícula se encuentra por primera vez en su máxima separación al origen ( $x = 0$ ) y, calcular ésta. 3) Representar gráficamente y en función del tiempo los MAS componentes [ $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ ] y el movimiento resultante [ $x = x(t)$ ].

85. Una partícula participa simultáneamente de dos MAS de la misma dirección, cuyas ecuaciones escritas en el sistema CGS son:  $x_1 = 0,3 \cos \pi t$  y  $x_2 = 0,3 \cos 2\pi t$ . 1) Determinar la ecuación del movimiento resultante y su período. 2) Hallar el instante en que la partícula se encuentra por primera vez en su máxima separación al origen ( $x = 0$ ) y calcular ésta. 3) Momento en que toma en valor absoluto y por primera vez su máxima velocidad y calcular ésta. 4) Representar gráficamente y en función del tiempo las ecuaciones de los MAS componentes y del movimiento resultante.

86. Una partícula está sometida a tres MAS de amplitudes  $A_1 = 3$  mm,  $A_2 = 1$  mm y  $A_3 = 2$  mm y cuyas frecuencias respectivas son:  $\nu_1 = 20$  Hz,  $\nu_2 = 60$  Hz y  $\nu_3 = 100$  Hz, si la diferencia de fase entre ellos cuando  $t = 0$ , es igual a cero: 1) Escribir las ecuaciones de los componentes de la vibración compleja y calcular su período. 2) Dibujar la gráfica de estas componentes. 3) Dibujar la gráfica de la vibración compleja resultante y calcular su período.

87. La ecuación horaria del movimiento de una partícula escrita en el CGS es:  $x(t) = 0,4(1 + \cos 20\pi t) \sin 40\pi t$ . 1) Determinar las vibraciones armónicas que lo componen y representálas gráficamente en función del tiempo. 2) Calcular la frecuencia de este movimiento y representálo gráficamente en función del tiempo.



Problema III-76.

\* Ver movimiento circular y uniforme en el capítulo V.

**88.** Una partícula está sometida a dos MAS en la misma dirección y de ecuaciones escritas en el CGS:  $x_1 = 0,20 \text{ sen } 120\pi t$  y  $x_2 = 0,30 \text{ sen } 116\pi t$ . 1) Determinar el período del movimiento resultante. 2) La función de modulación, sus valores extremos y los momentos que toma éstos. 3) Representar gráficamente la ecuación del movimiento resultante y la función de modulación.

**89.** Averiguar la frecuencia de la vibración resultante y la frecuencia de las pulsaciones que se producen al estar sometido un punto material a vibraciones de la misma dirección y de frecuencias 440 y 442 Hz. Suponiendo 5 cm la amplitud de cada una de las vibraciones y que ambas están en concordancia de fase ( $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ), determinar la expresión general de la elongación en función del tiempo.

**90.** Determinar la ecuación de la vibración que resulta de estar sometida una partícula a los movimientos vibratorios armónicos de ecuaciones:  $x_1 = 0,5 \text{ cos } 10\pi t$  y  $x_2 = 0,5 \text{ cos } 12\pi t$  (escritas en el sistema CGS y teniendo ambas la misma dirección de vibración). Calcúlese también el período de batido, el de vibración y representar gráficamente la función de la vibración resultante.

**91.** Se superponen dos MAS de la misma dirección actuando sobre una partícula, la oscilación resultante viene dada por la ecuación escrita en el SI:  $x(t) = 0,02 \text{ cos } 92,7t \text{ cos } 2,3t$ . Hallar: 1) Las ecuaciones de los MAS cuya vibración resultante pueda dar dicha ecuación. 2) El período de la pulsación resultante.

**92.** Una partícula sometida a dos MAS en la misma dirección, amplitudes iguales a 0,2 mm y de frecuencias muy próximas, dan como resultado pulsaciones de período 0,1 s. Si la frecuencia del segundo movimiento aumenta en 0,025 de su valor, el período de las pulsaciones se duplica. Determinar la ecuación del movimiento resultante.

**93.** De un oscilador con amortiguamiento viscoso conocemos la frecuencia angular  $\omega$  y el índice de amortiguamiento  $k$ . Si en el instante  $t = 0$  es  $x = x_0$  y  $v = v_0$ , determinar los valores de la distancia máxima alcanzada por la partícula a partir de la posición de equilibrio  $A_0$  y la fase inicial  $\varphi$ .

**94.** Una partícula oscila con movimiento amortiguado de tal forma que su amplitud máxima a partir de una determinada vibración, se reduce de  $A = 0,2 \text{ m}$  a  $0,1 \text{ m}$  en 10 ciclos de oscilación. Calcular en cuántos ciclos se reduce la amplitud de  $A$  a  $0,05 \text{ m}$ .

**95.** Una partícula realiza oscilaciones amortiguadas de ecuación:  $x(t) = A_0 e^{-k\omega t} \text{ sen } \omega t$ . Calcular: 1) La velocidad de la partícula en  $t = 0$ . 2) Instantes en que el punto alcanza las posiciones límites.

**96.** ¿Cuántas veces disminuye la aceleración de una partícula que se encuentra en su posición extrema, con movimiento vibratorio amortiguado, en  $n$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) vibraciones? El decremento logarítmico de este movimiento vale 0,2.

**97.** La ecuación del movimiento oscilatorio amortiguado de una partícula viene dada en el sistema CGS:  $x(t) = 10 e^{-0,25t} \text{ sen } 0,5\pi t$ . Hallar: 1) El índice de amortiguamiento y el decremento logarítmico. 2) ¿Cuánto disminuye la velocidad de la partícula, a partir de una posición en la que  $x = 0$ , en una oscilación. 3) Hacer la gráfica de  $x = x(t)$ .

**98.** El decremento logarítmico de un movimiento vibratorio amortiguado es 0,40, su frecuencia de oscilación 5 Hz y su fase inicial  $\pi/4$ . La elongación es 0,10 cm, 1 s después de comenzar a contar el tiempo. 1) Determinar la ecuación de este movimiento vibratorio amortiguado. 2) Hallar la velocidad de la partícula vibrante en los momentos en que  $t$  es igual a: 0, 0,2, 0,4 y 0,6 s. 3) Construir la gráfica  $x = x(t)$ .

# CAPÍTULO IV

## CINEMÁTICA DE LOS MOVIMIENTOS CURVILÍNEOS DE LA PARTÍCULA. MOVIMIENTOS RELATIVOS

### A) MOVIMIENTOS CURVILÍNEOS DE LA PARTÍCULA

#### IV - 1. Análisis del movimiento de la partícula en un plano en coordenadas cartesianas y por su trayectoria y ley horaria

Para su estudio en coordenadas cartesianas, se considera que la partícula se encuentra sometida a dos movimientos rectilíneos simultáneos en las direcciones de los ejes OX y OY; resueltos estos, tal y como lo hemos estudiado en el capítulo anterior, obtenemos  $x = x(t)$ ,  $v_x(t) = \dot{x}$  y  $a_x(t) = \dot{v}_x = \ddot{x}$  para el eje OX e  $y(t)$ ,  $v_y(t) = \dot{y}$  y  $a_y(t) = \dot{v}_y = \ddot{y}$  para el eje OY; las ecuaciones (8) del párrafo III-10, prescindiendo de la coordenada  $z = z(t)$ , nos resuelven el problema fundamental ya que nos proporcionan  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$  y  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ , es decir:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \\ \mathbf{v}(t) &= \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ \mathbf{a}(t) &= \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} d\mathbf{r} &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(t) dt \\ \int_{v_1}^{v_2} d\mathbf{v} &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{a}(t) dt \end{aligned} \right. \quad (1)$$

En la Fig. IV-1, hemos representado los componentes de  $\mathbf{r}(x, y)$ ,  $\mathbf{v}(v_x, v_y)$  con la condición de ser siempre tangente en la trayectoria y  $\mathbf{a}(a_x, a_y)$ .

De las ecuaciones (1) y concretamente la primera de ellas, eliminando  $t$  de  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  obtenemos  $y = f(x)$ , ecuación explícita de la trayectoria y de ellas la ley horaria  $s = s(t)$  tal y como se hizo en el párrafo III-4.

Para comprender mejor la magnitud vector aceleración se realiza el siguiente estudio: en la Fig. IV-2a, hemos tomado las posiciones arbitrarias de la partícula  $P_1, P_2, P_3 \dots$  sobre su trayectoria, cuyos vectores de posición son  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3 \dots$ ; las velocidades de estos son  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \dots$ , vectores tangentes a la trayectoria ya que  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ . Si en un punto Q arbitrario, trazamos los vectores equipolentes a  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \dots$  sus extremos definirán una curva llamada HODÓGRAFA (Fig. IV-2b); por definición  $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$ , los vectores aceleración en cada punto de esta curva son tangentes a ella. Obsérvese que la relación que guardan entre sí el vector velocidad y el de posición respecto de la trayectoria es la misma que entre el vector aceleración con el vector velocidad y la hodógrafa. En resumen: la ecuación de la hodógrafa se obtiene haciendo la sustitución  $X = v_x$  e  $Y = v_y$  y eliminando  $t$  entre las ecuaciones paramétricas de las velocidades obteniéndose para un movimiento plano  $f(X, Y) = 0$  (Fig. IV-3).

La gran mayoría de los movimientos de partículas que se estudian en la Física aplicada son movimientos rectilíneos o curvilíneos planos. El análisis tridimensional de los movimientos en coordenadas cartesianas, es obvio que es el mismo que en el bidimensional añadiendo el estudio del movimiento de la partícula en el eje OZ y aplicando las ecuaciones (8) del párrafo III-10.

**PROBLEMAS: 1 al 14.**

#### IV - 2. Movimiento circular

«El movimiento circular de una partícula es aquel cuya trayectoria es una circunferencia».

Tomando el origen O CENTRO DE ROTACIÓN (Fig. IV-4) para el sistema de referencia cartesiano (OXY) y la recta OX como la recta fija base para la definición de las magnitudes angulares (ver párrafo III-12), estas últimas serán:

$$\boxed{\varphi = \varphi(t)} \quad \boxed{\omega = \omega(t) = \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}} \quad \boxed{\alpha = \alpha(t) = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = \frac{d\omega}{dt}} \quad \boxed{\omega d\omega = \alpha d\varphi} \quad (2)$$

La obtención de  $\omega$  y  $\varphi$  a partir de  $\alpha$ , se realiza por integración, resultando:

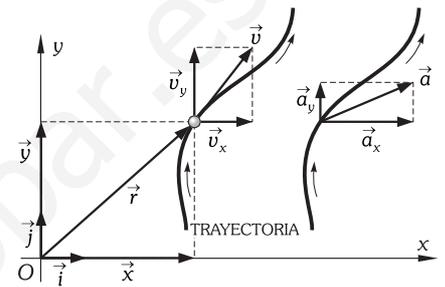


Fig. IV-1.- Representación gráfica de  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$  (con la condición de ser siempre tangente a la trayectoria) y  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ .

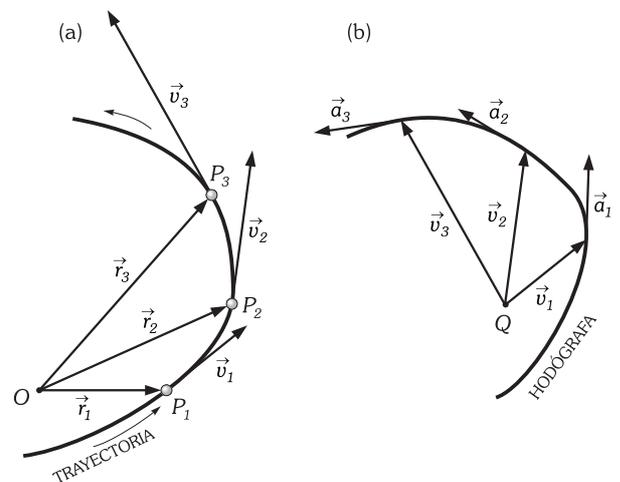


Fig. IV-2.- Hodógrafa.

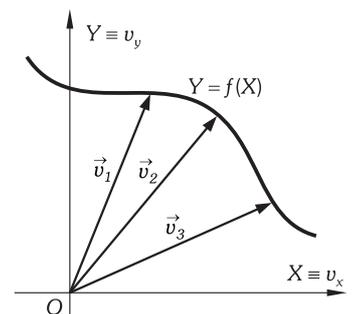


Fig. IV-3.- Hodógrafa.

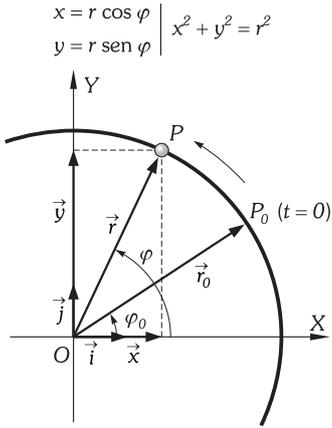


Fig. IV-4.- Movimiento circular. Convenimos que un ángulo es positivo, cuando el desplazamiento angular es como el de esta figura, es decir, antihorario.

$$\omega = \omega_0 + \int_{t_0}^t \alpha dt$$

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{t_0}^t \omega dt$$

Hemos puesto  $\varphi$  en vez de  $\theta$  para distinguir en análisis posteriores, la coordenada generalizada  $\theta$  del ángulo descrito en trayectoria circular, pero téngase bien claro que este estudio es un caso particular y ambas coinciden.

Dando a  $\omega$  y  $\alpha$  carácter de vectorial axial (párrafo II-3) cuyos módulos son los valores expresados en (2), dirección la de una recta perpendicular al plano de la circunferencia trayectoria y de sentido, para  $\omega$  el de avance de un sacacorchos que gira como el punto, y para  $\alpha$  en la dirección de  $\omega$  si esta aumenta con el tiempo (acelerado angular), y en sentido contrario si disminuye (decelerado angular). En consecuencia:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e} = \dot{\varphi} \mathbf{e}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \mathbf{e} = \dot{\omega} \mathbf{e} = \ddot{\varphi} \mathbf{e}$$

En las que  $\mathbf{e}$  (Fig. IV-5) es el vector unitario perpendicular al plano en que se realiza el giro, tiene la dirección del que llamaremos EJE DE ROTACIÓN  $e$  y sentido el que corresponde a este vector axial (el mismo que  $\omega$ ).

De la Fig. IV-5 deducimos que el arco  $\Delta s$  recorrido por la partícula en el tiempo  $\Delta t$  toma el valor:  $\Delta s = r \Delta \varphi$ , dividiendo por  $\Delta t$  y pasando al límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  nos quedará:  $\dot{s} = ds/dt = r d\varphi/dt$  y teniendo en cuenta las definiciones de velocidad instantánea ( $v$ ) y de velocidad angular ( $\omega$ ) obtenemos:

$$v = \omega r \tag{3}$$

ecuación que no es vectorial pero que nos relaciona los módulos instantáneos de estas magnitudes.

La relación vectorial entre estas tres últimas magnitudes se deduce considerando que  $\omega$  es perpendicular a  $r$ , y  $v$  es perpendicular a  $r$  y  $\omega$  (Fig. IV-5); por tanto la expresión vectorial de (3) será:

$$v = \omega \times r \tag{4}$$

Si a la relación modular (3) la derivamos con respecto al tiempo obtenemos:

$$\frac{dv}{dt} = \omega \frac{dr}{dt} + \frac{d\omega}{dt} r \tag{5}$$

el primer sumando del segundo miembro es nulo ya que la trayectoria es circular y por tanto  $r$  en módulo es constante; y teniendo en cuenta las definiciones de aceleración instantánea (módulo del vector aceleración) y aceleración angular, podemos escribir la fórmula (5) de la forma:

$$a = \alpha r$$

Si derivamos la (4) respecto del tiempo, y teniendo en cuenta que  $r$  no es constante en dirección y sentido y por tanto tiene derivada temporal y su valor es  $\dot{r} = v$ , obtenemos las relaciones vectoriales:

$$a = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \mathbf{e} \times r + \omega \times \frac{dr}{dt} = \alpha \times r + \omega \times v$$

en la derivada de  $\omega = \dot{\varphi} \mathbf{e}$ , el vector  $\mathbf{e}$  no tiene derivada temporal por lo que no la hemos puesto. Teniendo en cuenta (4), nos queda:

$$a = \alpha \times r + \omega \times (\omega \times r)$$

**PROBLEMAS: 15 al 18.**

**IV - 3. Conceptos de: Círculo osculador, radio de curvatura, centro de curvatura y plano osculador**

Tomemos tres puntos muy próximos sobre una curva,  $P, P'$  y  $P''$  (Fig. IV-6); de las circunferencias tangentes a la curva en  $P$ , la que tiene en dicho punto un contacto tal que  $P'$  y  $P''$  pertenecen a ella cuando éstos tienden a confundirse con  $P$  la llamamos CÍRCULO OSCULADOR\*. Al radio de este círculo lo llamamos RADIO DE CURVATURA y al centro CENTRO DE CURVATURA.

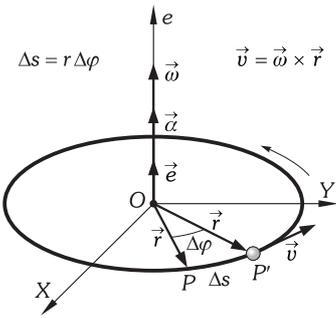


Fig. IV-5.- El vector velocidad y el vector velocidad angular son perpendiculares.

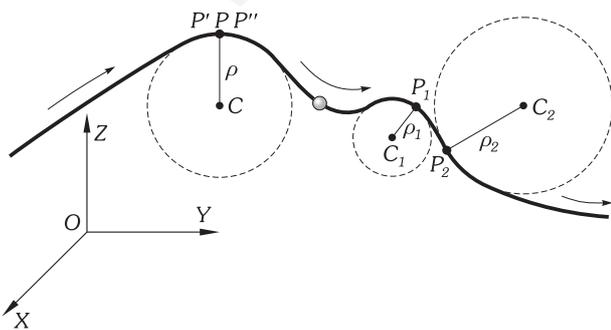


Fig. IV-6.- Concepto de radio de curvatura.

\* Recordar que para que una circunferencia esté definida por su ecuación analítica se necesitan tres puntos de ella, y a la inversa.

En el caso de una circunferencia todos los puntos de ésta tienen el mismo radio de curvatura que coincide con el radio de la circunferencia.

El círculo osculador pertenece al plano determinado por dos tangentes sucesivas a la curva, en  $P$  y  $P'$  por ejemplo, cuando ambos puntos tienden a confundirse. A este plano se le denomina PLANO OSCULADOR. *Pertenece a este plano el vector velocidad y el vector aceleración del movimiento de la partícula, aunque este movimiento sea tridimensional; ya que de la definición del vector aceleración instantánea se deduce que se trata de un vector situado en el plano determinado por  $\mathbf{v}(t + \Delta t)$  y  $\mathbf{v}(t)$  en el límite cuando  $\Delta t$  tiende a cero, es decir, en el plano osculador.*

*Cinemáticamente llamaremos a los puntos  $C, C_1, C_2 \dots$  correspondientes a los centros de curvatura en el movimiento de una partícula a lo largo de la curva CENTROS INSTANTÁNEOS DE ROTACIÓN y a los ejes perpendiculares en  $C, C_1, C_2 \dots$  al círculo osculador (o al plano osculador) EJES INSTANTÁNEOS DE ROTACIÓN.*

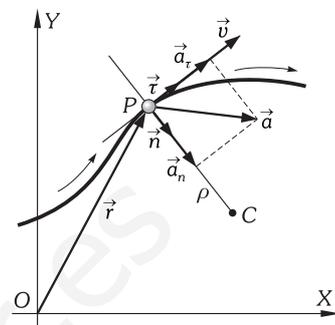


Fig. IV-7.- Componentes intrínsecas del vector aceleración.

**IV - 4. Componentes tangenciales y normales de los vectores velocidad y aceleración en el movimiento curvilíneo plano de la partícula**

Otra forma de estudiar el movimiento curvilíneo plano de la partícula consiste en analizar las componentes de la velocidad y aceleración instantánea de ésta, según la dirección tangencial y normal a su trayectoria en la posición en que se encuentra, en un determinado instante. En este análisis utilizamos, como vemos a continuación, las magnitudes angulares.

Los vectores unitarios  $\tau$  y  $n$ , definen las direcciones tangente y normal a la trayectoria en el instante en que la partícula se encuentra en un punto  $P$  de ella (Fig. IV-7); estos vectores unitarios tienen su módulo constantemente igual a la unidad, variando con el tiempo en dirección y sentido y, por tanto son derivables respecto de él.

En la Fig. IV-8 la partícula pasa de  $P$  a  $P'$  en el tiempo  $\Delta t$ , si hacemos tender  $\Delta t$  a 0, podremos poner que  $ds = \rho d\phi$  referida al centro instantáneo de rotación, en la que  $\rho$  será el radio instantáneo de curvatura de la trayectoria en ese punto; teniendo en cuenta que el vector velocidad es siempre tangente a la trayectoria:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) = \dot{s} \boldsymbol{\tau} = \frac{ds}{dt} \boldsymbol{\tau} = \frac{\rho d\phi}{dt} \boldsymbol{\tau} = \rho \dot{\phi} \boldsymbol{\tau} = \rho \omega \boldsymbol{\tau}$$

$\omega$  es la velocidad angular instantánea de la partícula en su movimiento circular alrededor del centro instantáneo de rotación (centro de curvatura) y  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{v}/v$ .

Descomponemos el vector aceleración  $\mathbf{a}$  (que como ya se ha dicho no tiene una dirección característica) en la dirección de la tangente  $\mathbf{a}_t$ , a la que llamamos ACELERACIÓN TANGENCIAL, y en la dirección de la normal  $\mathbf{a}_n$  (dirección de  $\rho$ ) que denominamos ACELERACIÓN NORMAL O CENTRÍPETA, constituyendo sus COMPONENTES INTRÍNSECAS.

Como se demostrará a continuación, los módulos de las aceleraciones tangencial y normal son:

$$\left. \begin{aligned} a_t &= \frac{dv}{dt} \\ a_n &= \frac{v^2}{\rho} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n}$$

El sentido físico de cada componente es el siguiente: la aceleración tangencial mide en cada instante la rapidez del cambio del módulo de la velocidad; es nula en todos los movimientos uniformes ( $v = cte$ ), tanto rectilíneos como circulares y curvilíneos en general. La aceleración normal es la responsable de los cambios en la dirección del vector velocidad; es nula exclusivamente en los movimientos rectilíneos, y distinta de cero en los curvilíneos, incluso si son uniformes.

La aceleración de una partícula en un punto es única, de forma que se puede establecer una relación entre sus componentes cartesianas e intrínsecas, a través de su módulo:

$$\mathbf{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 = a_t^2 + a_n^2$$

Para demostrar las anteriores afirmaciones consideremos un móvil que en un tiempo  $\Delta t$  muy pequeño, (Fig. IV-8) recorre un espacio sobre su trayectoria también muy pequeño:  $\Delta s = PP'$ , pasando de una velocidad  $\mathbf{v}$  en  $P$  a otra  $\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}$  en  $P'$ , referidas a  $O$  como origen. Para hallar  $\Delta \mathbf{v}$ , diferencia de las dos velocidades, trazamos en un punto cualquiera  $A$ , los vectores equipotentes a  $\mathbf{v} = \mathbf{AB}$  y a  $\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v} = \mathbf{AD}$ . La diferencia  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{BD}$  se descompone en  $\mathbf{ED}$  y  $\mathbf{BE}$ , la primera en la dirección de la tangente y la segunda perpendicular a la anterior, es decir en la dirección de la normal a la curva en  $P$  (dirección del radio de curvatura), y sentido hacia el centro de curvatura de la trayectoria; y podremos poner:

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{ED} + \mathbf{BE} \tag{6}$$

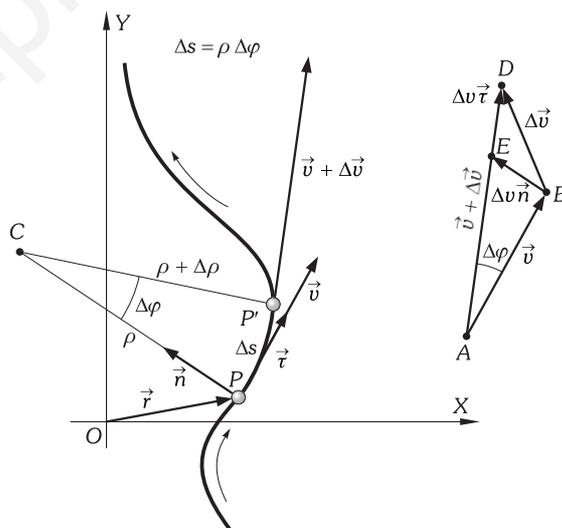


Fig. IV-8.- Componentes intrínsecas del vector aceleración.

El ángulo  $\Delta\varphi$  que forman  $AB$  y  $AD$  (igual al que forman entre sí los radios de curvatura  $CP$  y  $CP'$ ), es extraordinariamente pequeño por serlo  $\Delta s$  y por tanto podemos confundir la perpendicular  $BE$  con el arco de centro  $A$  y de radio  $AE = v$  (Fig. IV-8); en tal caso el valor de  $ED$  es la diferencia numérica (modular) de la velocidad  $v + \Delta v = AD$  y la  $v = AB$ , es decir: *el valor de la variación del módulo de la velocidad, tomado en la dirección de la tangente:*

$$ED = \Delta v \tau \tag{7}$$

En cuanto al valor  $BE$ , confundido con el arco que tiene  $A$  por centro y  $AB = v$  como radio, es el arco que tiene que girar  $v$  para adquirir la dirección de  $v + \Delta v$ : el vector  $BE$  indica el cambio de dirección de la velocidad. Su valor es:  $BE = v \Delta\varphi$ ; pero, considerando el ángulo central, el valor de  $\Delta\varphi$  es:  $\Delta\varphi = \Delta s/\rho$ , que sustituido en el valor  $BE$  e indicando su dirección normal a la trayectoria nos da:

$$BE = \frac{v}{\rho} \Delta s \mathbf{n} \tag{8}$$

Sustituyendo los valores (7) y (8) en la (6) y teniendo en cuenta la definición de vector aceleración:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \tau + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v}{\rho} \frac{\Delta s}{\Delta t} \mathbf{n} = \tau \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} + \frac{v}{\rho} \mathbf{n} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

en el límite  $\Delta v/\Delta t$ , es el valor de  $dv/dt$  y  $\Delta s/\Delta t$  toma el valor de la velocidad  $v$ , luego:

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \tau + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n} \tag{9}$$

Para expresar el vector aceleración  $\mathbf{a}$  en función de las magnitudes angulares, tendremos en cuenta que  $\mathbf{v} = \rho \omega \tau \Rightarrow v = \rho \omega = \rho \dot{\varphi}$ , y que tanto  $\rho$  como  $\varphi$  en general, son funciones del tiempo, por tanto:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho \dot{\varphi}) = \rho \ddot{\varphi} + \dot{\rho} \dot{\varphi} = \dot{v}$$

En cuanto a la aceleración normal:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \dot{\varphi}^2 \rho = \omega^2 \rho = v \dot{\varphi}$$

luego:

$$\mathbf{a} = \dot{v} \tau + v \dot{\varphi} \mathbf{n} = (\rho \ddot{\varphi} + \dot{\rho} \dot{\varphi}) \tau + \dot{\varphi}^2 \rho \mathbf{n}$$

El movimiento circular es un caso particular del movimiento curvilíneo estudiado en esta cuestión. Sus ecuaciones se obtienen sin más que sustituir  $\rho$  por  $r$ ,  $\dot{\rho} = 0$ ,  $\dot{\varphi} = \omega$  y  $\ddot{\varphi} = \alpha$  quedándonos:

$$v = \omega r \quad a_\tau = \alpha r \quad a_n = r \omega^2 = \frac{v^2}{r} = v \omega$$

Las componentes intrínsecas del vector aceleración, conocidas las ecuaciones vectoriales horarias del movimiento, se pueden calcular teniendo en cuenta que el vector unitario tangente a la trayectoria tiene la dirección del vector velocidad, entonces su valor será:  $\tau = \mathbf{v}/v$ , y por ser el vector aceleración tangencial la proyección sobre la tangente a la trayectoria del vector aceleración, tendremos:

$$a_\tau = \mathbf{a} \cdot \tau \Rightarrow a_\tau = (\mathbf{a} \cdot \tau) \tau$$

Se calculará, por último, el vector unitario normal, sin más que tener en cuenta que:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_\tau \Rightarrow \mathbf{a}_n = \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \tau) \tau$$

de la que se podrán deducir los valores del vector unitario en la dirección de la normal a la trayectoria y dirigida hacia el centro de curvatura y el valor del radio de curvatura:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}_n}{a_n} = \frac{\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \tau) \tau}{|\mathbf{a} \times \tau|} \quad \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \tau) \tau|}$$

Podemos calcular la expresión de la ley horaria del movimiento conociendo el módulo de la aceleración tangencial puesto que  $a_\tau = dv/dt \Rightarrow dv = a_\tau dt$ , e integrando desde un tiempo inicial  $t_0$  hasta un instante cualquiera  $t$ :

$$\int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t a_t dt \Rightarrow v - v_0 = \int_{t_0}^t a_t dt \Rightarrow \boxed{v = v_0 + \int_{t_0}^t a_t dt}$$

Siguiendo el mismo proceso, teniendo en cuenta que  $v = ds/dt$  tenemos:

$$ds = v dt \Rightarrow \int_{s_0}^s ds = \int_{t_0}^t v dt \Rightarrow s - s_0 = \int_{t_0}^t v dt \Rightarrow \boxed{s = s_0 + \int_{t_0}^t v dt}$$

que constituye la ley horaria del movimiento. Hay que resaltar que este proceso sólo se puede completar si se conocen las *condiciones iniciales*, es decir,  $v_0$  y  $s_0$  de  $v$  y  $s$  en  $t_0$ . Este tiempo  $t_0$  no tiene por qué ser necesariamente el origen de tiempos  $t = 0$ , el problema se resuelve de la misma forma para cualquier valor de  $t_0$ , en cuyo caso  $v_0$  y  $s_0$  representarán valores en dicho instante.

Obsérvese, que la resolución de la integral nos da *distancias al origen* contadas sobre la trayectoria y *no el camino recorrido sobre ésta*. Ambas medidas son completamente distintas cuando en el movimiento cambia el sentido de la velocidad. Para obtener el camino sobre la trayectoria, realizaremos la integración para pequeñas etapas, cambiando el signo de la integral cada vez que el móvil cambia de sentido por adquirir velocidad nula. Así, si en los instantes  $t_1, t_2, t_3$  (comprendidos entre  $t_0$  y  $t$ ) el móvil cambia de sentido, por adquirir  $v = 0$  en cada uno de ellos, el camino sobre la trayectoria es:

$$s_T = \left| \int_{t_0}^{t_1} v dt \right| + \left| \int_{t_1}^{t_2} v dt \right| + \left| \int_{t_2}^{t_3} v dt \right| + \left| \int_{t_3}^t v dt \right|$$

es decir, suma de los valores absolutos de los sucesivos recorridos.

**PROBLEMAS: 19 al 30.**

**IV – 5. Generalización al espacio tridimensional de la descripción del movimiento curvilíneo plano para las componentes tangencial y normal**

El PLANO OSCULADOR se define en el espacio tridimensional como el que contiene al círculo osculador, analizado de la misma forma que lo hemos hecho en el plano, es decir: se toma un punto  $P$  de la curva trayectoria y otros dos puntos muy próximos a él, uno a cada lado, cuando esos dos puntos se hacen tender a  $P$ , el plano que los contiene, en el límite, es el plano osculador; el movimiento puede considerarse que instantáneamente ocurre en este plano, que contiene al centro de curvatura  $C$ , a  $\rho$ , y a los vectores  $v, a_n$  y  $a_r$ . Todas las fórmulas escritas para el plano en el párrafo anterior, son aplicables al espacio, en su caso habrá que tener en cuenta la coordenada  $z = z(t)$ .

**PROBLEMAS: 31 al 36.**

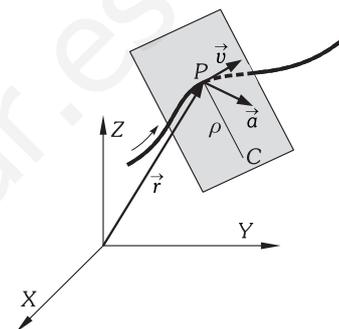


Fig. IV-9.- Los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{a}$ , el radio de curvatura  $\rho$  y el centro del círculo osculador pertenecen al plano osculador.

**IV – 6. Clasificación de los movimientos de una partícula atendiendo a los valores de las componentes intrínsecas del vector aceleración**

$a_n = 0$ MOVIMIENTO RECTILÍNEO $(a_n = v^2/\rho \Rightarrow \rho = \infty)$	$a_r = 0:$	MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME $(a_r = dv/at \Rightarrow v = cte)$
	$a_r \neq 0$	$a_r = cte:$ MOVIMIENTO RECTILÍNEO Y UNIFORMEMENTE ACELERADO $(a_r = a = cte)$ $a_r \neq cte:$ MOVIMIENTO RECTILÍNEO VARIADO
	$\rho = cte$	$a_r = 0:$ MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME $(v = cte, a_n = cte)$
$a_n \neq 0$ MOVIMIENTO EN TRAYECTORIA CURVA $(\rho \neq \infty)$	MOVIMIENTO CIRCULAR	$a_r = cte:$ MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE ACELERADO $(a_n \neq cte)$ $a_r \neq 0:$ MOVIMIENTO CIRCULAR VARIADO $(a_n \neq cte)$
	$\rho \neq cte$	Denominaciones análogas al circular
CURVILÍNEO		

**IV – 7. Componentes de la velocidad y de la aceleración en coordenadas polares**

Otra manera de analizar el movimiento plano de una partícula es la utilización de las coordenadas polares (ver párrafo II-32). Supongamos que un punto  $P$  describe una trayectoria determi-

nada, las ecuaciones horarias del movimiento serán:  $r = r(t)$ ,  $\theta = \theta(t)$ , y la ecuación del vector de posición:

$$\mathbf{r}(t) = r \mathbf{u}_r$$

Derivamos esta expresión para obtener la velocidad:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} \Leftrightarrow \mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\mathbf{u}}_r$$

Por otra parte:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_r &= \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \\ \mathbf{u}_\theta &= -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dot{\mathbf{u}}_r = -\dot{\theta} \sin \theta \mathbf{i} + \dot{\theta} \cos \theta \mathbf{j} = \dot{\theta} (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) = \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta$$

con lo que:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta$$

Y derivando nuevamente para obtener la aceleración:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a} &= \ddot{r} \mathbf{u}_r + \dot{r} \dot{\mathbf{u}}_r + \dot{r} \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta + r \ddot{\theta} \mathbf{u}_\theta + r \ddot{\theta} \mathbf{u}_\theta + r \dot{\theta} \dot{\mathbf{u}}_\theta \\ \dot{\mathbf{u}}_r &= \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta \\ \dot{\mathbf{u}}_\theta &= -\dot{\theta} \cos \theta \mathbf{i} - \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{j} = -\dot{\theta} \mathbf{u}_r \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{u}_r (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) + \mathbf{u}_\theta (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \quad (10)$$

Por otra parte;  $(2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta})$  se puede transformar de la siguiente forma:

$$\frac{1}{r} (2r \dot{r} \dot{\theta} + r^2 \ddot{\theta}) = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta})$$

así que una expresión alternativa para la aceleración es:

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) \mathbf{u}_\theta$$

Es importante elegir adecuadamente la forma de analizar el movimiento respecto a las formulaciones vistas (coordenadas cartesianas, polares, ley horaria ...) y decidir cual es la forma más cómoda y rápida a utilizar en cada problema, siempre teniendo en cuenta la forma en que vienen especificados los datos.

**PROBLEMAS: 37 al 41.**

### B) ESTUDIO DE DIVERSOS MOVIMIENTOS CURVILÍNEOS SINGULARES DE LA PARTÍCULA

#### IV – 8. Movimiento circular uniforme y movimiento circular uniformemente acelerado

Las ecuaciones de los movimientos circulares uniforme y uniformemente acelerado, son las mismas que las de los «lineales» de un punto, haciendo las siguientes sustituciones:

s (espacio) .....	$\varphi$ (ángulo)
v (velocidad tangencial) .....	$\omega$ (velocidad angular)
a (aceleración tangencial) .....	$\alpha$ (aceleración angular)

MOVIMIENTO CIRCULAR Y UNIFORME:

«Es un movimiento cuya trayectoria es una circunferencia y la velocidad angular permanece constante con el tiempo».

En este movimiento al recorrer el móvil los mismos ángulos en los mismos tiempos, también recorrerá iguales arcos en los mismos tiempos y por tanto el módulo de su velocidad será constante. Las ecuaciones de las magnitudes angulares serán:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t \quad \omega = cte \quad \alpha = 0$$

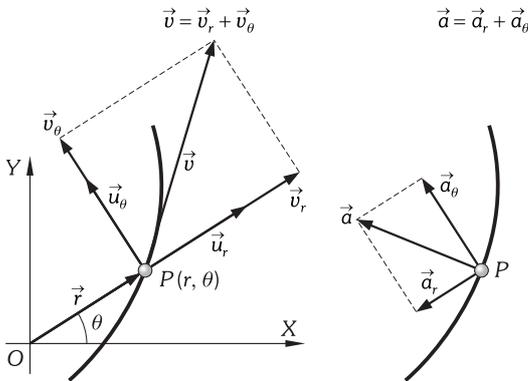


Fig. IV-10.- Componentes de la velocidad y de la aceleración en coordenadas polares.

Este movimiento es PERIÓDICO puesto que la partícula pasa por cada punto de la circunferencia trayectoria a intervalos de tiempo iguales. Llamando PERÍODO ( $T$ ) al tiempo que tarda el móvil en dar una vuelta completa y FRECUENCIA ( $\nu$ ) al número de vueltas dadas en la unidad de tiempo, podremos encontrar una relación entre estas dos magnitudes mediante la siguiente proporcionalidad directa:

$$\begin{array}{l} \text{Si en } T \text{ segundos el móvil da } 1 \text{ vuelta} \\ \text{Si } 1 \text{ segundo el móvil da } \nu \text{ vueltas} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nu = \frac{1}{T}}$$

pudiéndose expresar el valor de la velocidad angular en función de estas magnitudes:

$$\boxed{\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu}$$

Hemos visto la relación existente entre  $\nu$  y  $\omega$ , podremos expresar el valor de ésta primera:

$$v = \omega R = \frac{2\pi}{T} R = 2\pi\nu R$$

La única aceleración existente es la normal o centrípeta por ser la dirección lo único que varía en la velocidad. Su valor es constante en módulo por ser  $\nu$  y  $r$  constantes, pudiendo expresarla:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2} R = 4\pi^2 \nu^2 R$$

MOVIMIENTO CIRCULAR Y UNIFORMEMENTE ACELERADO:

«Es un movimiento cuya trayectoria es una circunferencia y el vector aceleración angular permanece constante con el tiempo».

En el párrafo IV-2 se dedujo que  $a_t = \alpha R$ , como  $\alpha$  es constante y el radio de la circunferencia trayectoria también lo es, deducimos que el módulo de la aceleración tangencial será constante con el tiempo.

Las ecuaciones de las magnitudes angulares serán:

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2}$$

$$\boxed{\omega = \omega_0 + \alpha t}$$

$$\boxed{\alpha = cte}$$

$$\boxed{\omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 + 2\alpha(\varphi - \varphi_0)}}$$

Todas las expresiones anteriores, con sus casos particulares de  $\omega_0 = 0$ ,  $\varphi_0 = 0$  ó ambos, son válidas tanto si la aceleración angular es positiva como si es negativa. En cada caso particular bastará con sustituir  $\alpha$  por su valor numérico con el signo correspondiente.

**PROBLEMAS: 42 al 58.**

#### IV - 9. Tiro horizontal

Al lanzar un cuerpo horizontalmente su movimiento es el resultante de uno de avance debido al impulso inicial, y otro de caída, debido a su peso.

El primero, una vez cesa la fuerza productora del impulso, es rectilíneo y uniforme, por no existir nada que a él se oponga. El segundo es uniformemente acelerado, sin velocidad inicial y con aceleración la de la gravedad ( $g$ ); tomando los ejes tal y como indicamos en la Fig. IV-11, el movimiento según OX verificará:

$$x = v_0 t \quad v_x = v_0 \quad a_x = 0 \quad (11)$$

$$\text{y para el eje OY: } y = \frac{1}{2} g t^2 \quad v_y = g t \quad a_y = g \quad (12)$$

luego las ecuaciones del tiro horizontal serán:

$$\boxed{\mathbf{r} = v_0 t \mathbf{i} + \frac{1}{2} g t^2 \mathbf{j}}$$

$$\boxed{\mathbf{v} = v_0 \mathbf{i} + g t \mathbf{j}}$$

$$\boxed{\mathbf{a} = g \mathbf{j}}$$

Despejando  $t$  en la primera de las (11) y sustituyendo en la primera de las (12) obtenemos la ecuación de la trayectoria en forma explícita:

$$y = \frac{g}{2v_0^2} x^2 = Kx^2$$

ya que  $g/2v_0^2$  es una constante característica del lugar ( $g$ ) y del tiro ( $v_0$ ). La ecuación de la trayectoria  $y = Kx^2$ , nos representa una parábola tangente al eje X en el origen (Fig. IV-11).

**PROBLEMAS: 59 al 63.**

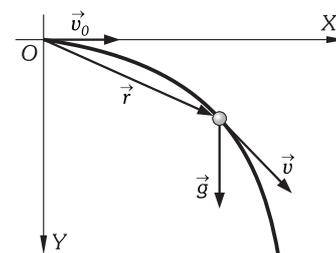


Fig. IV-11.- Tiro horizontal.

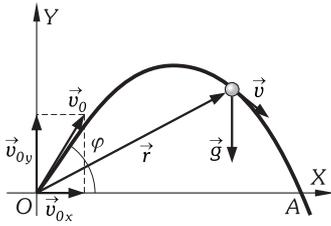


Fig. IV-12.- Tiro oblicuo.

**IV – 10. Tiro oblicuo**

Lancemos un cuerpo con velocidad inicial  $v_0$ , que forma un ángulo  $\varphi$  con la horizontal. Tomando el sistema de referencia como indicamos en la Fig. IV-12, la componente horizontal de la velocidad inicial es:  $v_{0x} = v_0 \cos \varphi$ , y la vertical:  $v_{0y} = v_0 \sin \varphi$ .

El movimiento es el resultante de uno de avance horizontal, rectilíneo y uniforme, y otro rectilíneo y uniformemente acelerado; por tanto las ecuaciones según OX serán:

$$x = v_{0x}t = v_0 t \cos \varphi \quad v_x = v_0 \cos \varphi \quad a_x = 0 \quad (13)$$

y para el eje OY:

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 t \sin \varphi - \frac{1}{2}gt^2 \quad v_y = v_0 \sin \varphi - gt \quad a_y = -g \quad (14)$$

luego las ecuaciones del movimiento serán:

$$\mathbf{r} = v_0 t \cos \varphi \mathbf{i} + \left( v_0 t \sin \varphi - \frac{1}{2}gt^2 \right) \mathbf{j} \quad \mathbf{v} = v_0 \cos \varphi \mathbf{i} + (v_0 \sin \varphi - gt) \mathbf{j} \quad \mathbf{a} = -g \mathbf{j}$$

ECUACIÓN DE LA TRAYECTORIA EN FORMA EXPLÍCITA. Despejando  $t$  en la primera de las ecuaciones (13) y sustituyendo en la primera de las (14), se obtiene:

$$y = v_0 \sin \varphi \frac{x}{v_0 \cos \varphi} - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \varphi} = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \varphi} \Rightarrow \boxed{y = Kx - K'x^2}$$

$K$  y  $K'$  son constantes características del lugar ( $g$ ) y del tiro ( $v_0$  y  $\varphi$ ). La ecuación obtenida representa una parábola tangente a  $v_0$  en el origen.

CÁLCULO DEL ALCANCE. Se llama *alcance máximo* a la distancia desde el lugar de tiro al punto en que el proyectil pasa por la misma horizontal de aquél (punto A en la Fig. IV-12). Para determinar el tiempo que tardará el cuerpo en adquirir el alcance máximo  $x_{\max}$  bastará hacer  $y = 0$  y se obtienen los valores posibles de  $t$ :

$$v_0 t \sin \varphi - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad \left| \begin{array}{l} t = 0 \quad (\text{origen}) \\ t = \frac{2v_0 \sin \varphi}{g} \quad (\text{tiempo empleado en llegar a A}) \end{array} \right. \quad (15)$$

Si sustituimos este tiempo en  $x$  tendremos el valor del alcance:

$$\boxed{x = v_0 \cos \varphi \frac{2v_0 \sin \varphi}{g} = \frac{2v_0^2 \sin \varphi \cos \varphi}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}}$$

Como  $\sin 2\varphi = \sin (180^\circ - 2\varphi)$ , los ángulos complementarios  $\varphi$  y  $90^\circ - \varphi$ , tienen el mismo alcance (tiro rasante y por elevación).

Si el ángulo de tiro es  $45^\circ$ :  $2\varphi = 90^\circ$ ;  $\sin 2\varphi = 1$  (valor máximo del seno). El alcance mayor es el del tiro de  $45^\circ$ .

CÁLCULO DE LA ALTURA MÁXIMA. Para calcular el tiempo que tarda el móvil en adquirir la altura máxima basta considerar que, al llegar a la cúspide de la trayectoria, la velocidad vertical se ha anulado:

$$v_y = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 \sin \varphi = gt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0 \sin \varphi}{g} \quad (16)$$

Sustituyendo este valor de  $t$ , en  $y$ , obtenemos:

$$\boxed{y_{\max} = v_0 \sin \varphi \frac{v_0 \sin \varphi}{g} - \frac{1}{2}g \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{g} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{g}}$$

Observamos de (15) y (16) que: *El tiempo de alcance máximo es el doble que el tiempo que tarda el cuerpo en alcanzar su altura máxima.*

**PROBLEMAS: 64 al 76.**

**IV – 11. Composición de movimientos vibratorios armónicos de la misma frecuencia y direcciones de vibración perpendiculares**

«Vamos a demostrar que, en general, producen a una partícula un movimiento de trayectoria elíptica». En efecto: sean las ecuaciones de los movimientos componentes:

$$x = A_1 \sin \omega t \quad y = A_2 \sin (\omega t + \varphi)$$

Hemos puesto la misma pulsación  $\omega$  ya que el período de ambos movimientos es el mismo. El primer movimiento lo consideramos sin corrección de fase por la arbitrariedad en la elección del origen de tiempos. De la segunda ecuación obtenemos, por desarrollo del seno:

$$\frac{y}{A_2} = \text{sen } \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \text{sen } \varphi$$

y sustituyendo el seno y el coseno de  $\omega t$  por sus valores en función de  $x$ :

$$\frac{y}{A_2} = \frac{x}{A_1} \cos \varphi + \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \text{sen } \varphi$$

pasando  $\frac{x \cos \varphi}{A_1}$  al primer miembro y elevando al cuadrado, se obtiene:

$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} \cos^2 \varphi - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \varphi = \text{sen}^2 \varphi - \frac{x^2}{A_1^2} \text{sen}^2 \varphi$$

pasando el último término al primer miembro y simplificando:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \varphi = \text{sen}^2 \varphi$$

ecuación de una *elipse*, que nos da la forma de la trayectoria en forma implícita.

CASOS PARTICULARES:

1) La diferencia de fase es cero ó  $2K\pi$ . La ecuación general queda reducida a:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} = 0 \Rightarrow \left[ \frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2} \right]^2 = 0 \Rightarrow \frac{y}{A_2} = \frac{x}{A_1} \Rightarrow y = \frac{A_2}{A_1} x$$

Ecuación de una recta que pasa por el origen de coordenadas y de coeficiente angular positivo. El movimiento es rectilíneo en el primer y tercer cuadrante (Fig. IV-13). La ecuación del movimiento vibratorio armónico que resulta para este caso particular es:

$$r = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \text{sen } \omega t$$

2) La diferencia de fase es  $\pi/2$  ó  $(2K+1)\pi/2$ , es decir, los dos movimientos componentes se encuentran en cuadratura. La ecuación general queda reducida a:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

Ecuación de una *elipse centrada en los ejes* (Fig. IV-14). En este caso, si  $A_1 = A_2$  el movimiento es circular.

3) La diferencia de fase es  $\pi$  ó  $(2K+1)\pi$ . La forma de la ecuación general es:

$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} + \frac{2xy}{A_1 A_2} = 0 \Rightarrow \left[ \frac{y}{A_2} + \frac{x}{A_1} \right]^2 = 0 \Rightarrow \frac{y}{A_2} = -\frac{x}{A_1} \Rightarrow y = -\frac{A_2}{A_1} x$$

Ecuación de una recta que pasa por el origen de coordenadas y de coeficiente angular negativo. El movimiento es rectilíneo en el 2.º y 4.º cuadrante (Fig. IV-15).

La ecuación del movimiento vibratorio armónico resultante es:

$$r = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \text{sen } \omega t$$

Si la diferencia de fase no es igual a los valores estudiados en los casos anteriores, el movimiento es *elíptico* (Fig. IV-16 b, d, f, h); la inclinación de las elipses queda determinada por la del movimiento rectilíneo inmediato a la elipse, en las figuras dibujadas.

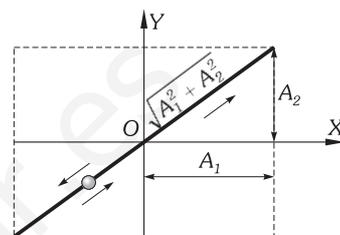


Fig. IV-13.— Trayectoria de la partícula sometida a dos MAS perpendiculares y de la misma frecuencia, cuando  $\varphi = 0$  ó  $2K\pi$ .

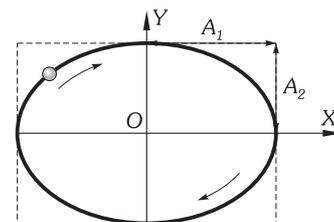


Fig. IV-14.— Trayectoria de la partícula sometida a dos MAS perpendiculares y de la misma frecuencia, cuando  $\varphi = \pi/2$ .

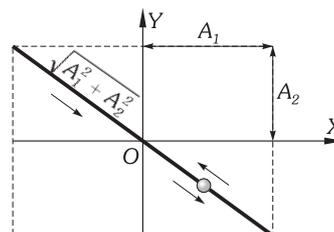


Fig. IV-15.— Trayectoria de la partícula sometida a dos MAS perpendiculares y de la misma frecuencia cuando  $\varphi = \pi$  ó  $(2K+1)\pi$ .

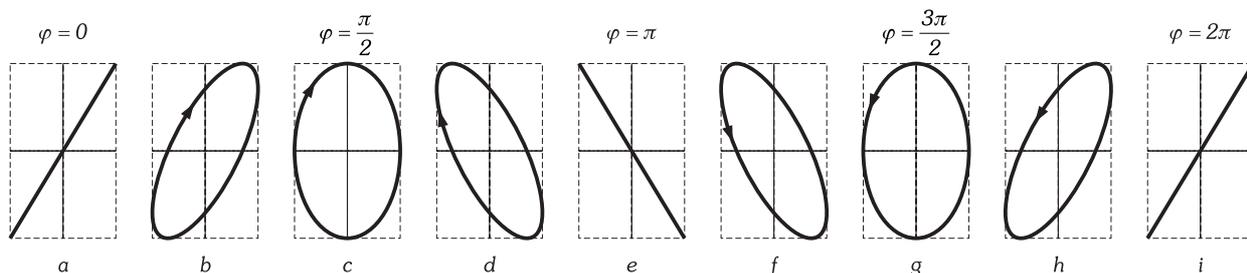


Fig. IV-16.— Composición de MAS perpendiculares del mismo período.

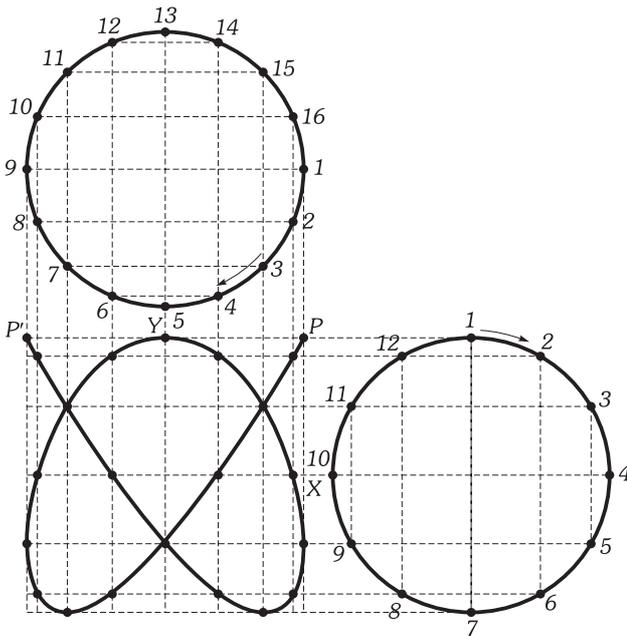


Fig. IV-17.- Curva de Lissajous para  $T_1/T_2 = 4/3$  y  $\varphi = 0$

El movimiento es *dextrógiro* (sentido de las saetas de un reloj) cuando la diferencia de fase está comprendida entre *cero* y  $\pi$ , si lo está entre  $\pi$  y  $2\pi$  el movimiento es *levógiro* (sentido contrario a las saetas de un reloj).

**PROBLEMAS: 77 al 79.**

**IV - 12. Composición de movimientos vibratorios armónicos perpendiculares de distinta frecuencia. Curvas de Lissajous**

Supongamos un punto material sometido a dos movimientos vibratorios armónicos perpendiculares y cuyos períodos están entre sí en la relación:  $T_1/T_2 = K_2/K_1$  ( $K_1$  y  $K_2$  números primos entre sí).

Al ser  $T_1K_2 = T_2K_1 = T$ , cuando por el primer movimiento el punto haya realizado  $K_2$  vibraciones enteras, por el segundo habrá realizado  $K_1$ , volviendo por tanto al punto de partida para describir de nuevo su trayectoria en el tiempo  $T$ .

A tales trayectorias del punto material se les llama CURVAS DE LIS-SAJOUS, que se pueden dibujar fácilmente considerando las proyecciones sobre los ejes de dos trayectorias circulares uniformes de períodos iguales a los dos M.ÁS. La relación de períodos considerada en la Fig. IV-17 es  $4/3$ . Cada cuadrante de la circunferencia superior se ha dividido en 4 partes iguales y el de la lateral en 3, numerando los puntos de una y otra correlativamente. La proyección de los puntos de la circunferencia superior sobre X, determina la abscisa, y la lateral sobre Y, la ordenada. Se ha supuesto en el dibujo como

punto de partida el P. El punto material recorre a trayectoria de P a P' y retorno de P' a P, en el tiempo T. Suponiendo otra relación de períodos y otras diferencias de fase se obtienen curvas muy diversas. Las curvas de Lissajous se pueden observar en el aparato llamado *oscilógrafo de rayos catódicos*, cuyo estudio corresponde a la *Electrónica*.

**PROBLEMA: 80.**

**C) MOVIMIENTOS RELATIVOS**

**IV - 13. Sistema de referencia. Principio de relatividad de Galileo. Sistemas inerciales**

En el estudio de los fenómenos físicos cambian posiciones y tiempos, cada observador puede elegir un instante cualquier como origen de tiempos, un punto origen y tres ejes cartesianos; a este conjunto lo llamaremos SISTEMA DE REFERENCIA relativo al observador; pudiéndose determinar la posición y el tiempo para un acontecimiento con tres coordenadas cartesianas  $x, y, z$  y el tiempo  $t$ .

Veremos en el capítulo siguiente *las tres Leyes de Newton*, enunciadas en los cursos más elementales de Física, son fundamentales para el completo análisis del movimiento de la partícula; en la primera de ellas manejamos el concepto de PARTÍCULA LIBRE *entendiendo como tal aquella que no interactúa con otras (se encuentra aislada del resto del Universo), encontrándose en reposo o en estado de movimiento rectilíneo y uniforme (decimos que se encuentra en su estado natural); para sacar la partícula de tal estado se necesita que otra (u otras) interactúe con ella. A la interacción entre dos partículas se le llama FUERZA y por su efecto causa aceleración a cualquiera de ellas.*

*Las tres leyes de la Mecánica de Newton solamente son válidas para sistemas de referencia inerciales (SRI) o simplemente sistemas inerciales; para comprender su definición, observemos a la partícula libre desde un sistema de referencia no inercial (SRNI), o lo que es lo mismo, que está dotado con una aceleración  $\mathbf{a}$ ; para tal observador todos los objetos que se mueven con él y él mismo están en reposo, y sobre la partícula libre dirá que se mueve con una aceleración  $-\mathbf{a}$ , ¡se equivoca!, puesto que nada interacciona con la partícula libre, luego no es correcto aplicarle el concepto de fuerza y menos aplicarle la segunda ley, ni la tercera puesto que no existirá su «pareja». Para que sea correcta la aplicación de las tres leyes de Newton definimos:*

«SISTEMAS INERCIALES son aquellos desde los cuales se vea a la partícula libre con aceleración nula».

*Serán pues sistemas inerciales equivalentes todos los que se encuentren en reposo o en movimiento rectilíneo y uniforme (sin aceleración), desde todos ellos se cumplen las tres leyes de la MECÁNICA CLÁSICA, a este hecho se le ha dado el nombre de PRINCIPIO DE RELATIVIDAD DE GALILEO o PRINCIPIO DE LA RELATIVIDAD CLÁSICO.*

En el párrafo III-3 decíamos que no existían sistemas de referencia en reposo, por lo menos no es posible con los medios que tenemos actualmente a nuestro alcance, saber si existe algo en reposo en el Universo y por tanto nuestros sistemas de referencia están animados de movimiento.

Esta dificultad fue superada por Galileo al enunciar que: «Las leyes de la mecánica son idénticas para un observador en reposo absoluto y para uno que se mueve con movimiento de traslación rectilíneo y uniforme con respecto al primero».

Este postulado no tiene aplicación práctica al no disponer de sistemas de referencia en reposo absoluto. Sin embargo, supongamos que tenemos un sistema de referencia en reposo  $S$ , y otros dos sistemas  $S_1$  y  $S_2$  que se mueven con movimiento rectilíneo y uniforme con respecto a  $S$ . Las leyes físicas se observan de la misma manera en  $S$  y en  $S_1$ . Por la misma razón, las leyes de la mecánica serán observadas de la misma forma en  $S$  y en  $S_2$ . Por lo tanto lógicamente las leyes de la mecánica se observarán de la misma manera tanto en el sistema  $S_1$  como en el sistema  $S_2$ . Pudiéndose enunciar que:

«Las leyes de la mecánica son idénticas para dos observadores que se hallan uno con respecto al otro en movimientos rectilíneo y uniforme».

Los sistemas que cumplen tales condiciones son INERCIALES O GALILEANOS, todos ellos son equivalentes, es decir no podemos mediante experiencias mecánicas realizadas en un sistema inercial distinguir si está en reposo o con velocidad constante.

La expresión matemática de este principio la podemos obtener de la siguiente manera: supongamos que tenemos dos sistemas  $S (X, Y, Z)$  y  $S' (X', Y', Z')$  (Fig. IV-18), que en el instante  $t = t' = 0$  coinciden sus orígenes, y que se mueve uno con respecto al otro con movimiento rectilíneo y uniforme de traslación, siendo  $\mathbf{V}$  la velocidad de  $S'$  con respecto a  $S$ . Transcurrido un tiempo  $t$  un punto  $P$  cualquiera del espacio tendrá por vector de posición con respecto a  $S$ :  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$  y con respecto a  $S'$ :  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(x', y', z')$  y están ligados estos vectores (según la Fig. IV-18) por la relación:

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t} \quad (17)$$

fórmula que junto con la hipótesis de la Mecánica Clásica del TIEMPO ABSOLUTO.

$$\boxed{t = t'} \quad (18)$$

nos constituye el grupo de fórmulas llamadas TRANSFORMACIÓN DE GALILEO. La HIPÓTESIS DEL TIEMPO ABSOLUTO la podemos enunciar de la siguiente forma:

«El tiempo transcurre de la misma manera en dos sistemas de referencia cualquiera».

Lo que queremos decir con este postulado de la Mecánica Clásica, es que dos observadores que se encuentran moviéndose uno con respecto al otro con movimiento rectilíneo y uniforme o no, miden idéntico intervalo de tiempo en el transcurso de un mismo fenómeno.

La fórmula vectorial (17) equivale a:

$$\begin{aligned} x &= x' + V_x t \\ y &= y' + V_y t \\ z &= z' + V_z t \end{aligned} \quad (19)$$

Enunciaremos el PRINCIPIO DE RELATIVIDAD DE GALILEO partiendo de lo antes dicho, de la forma:

«Las leyes de la Física Clásica permanecen invariantes (tienen la misma forma) en un cambio de coordenadas definido por las ecuaciones (19), siempre considerando la hipótesis del tiempo absoluto».

Si el movimiento de los ejes lo consideramos paralelo al eje  $X$  (Fig. IV-19), las ecuaciones (19) nos quedan:

$$\begin{aligned} x &= x' + Vt \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}$$

que sin pérdida de generalidad serán las que se apliquen normalmente.

Derivando sucesivamente la expresión (17) respecto al tiempo, teniendo en cuenta que  $\mathbf{V} = \mathbf{cte}$ , obtenemos las ecuaciones de transformación de velocidades y aceleraciones:

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}} \quad \boxed{\mathbf{a} = \mathbf{a}'}$$

Como ejemplo, esta última igualdad nos permite comprobar la invarianza de la segunda ley de Newton ante una transformación de Galileo, ya que los dos observadores montados en los sistemas inerciales  $S$  y  $S'$  la formularán:  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  y  $\mathbf{F}' = m\mathbf{a}'$ , teniendo, en consecuencia, idéntica expresión formal.

Téngase muy en cuenta que desde dos sistemas inerciales como los que hemos tomado se cumple que la posición y la velocidad del punto  $P$  son diferentes, es decir:  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{v} \neq \mathbf{v}'$  y  $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$ .

El primer paso de la mecánica es estudiar el «lugar» (sistema de referencia) en el que realizamos los experimentos e investigaciones, ya que los resultados de éstos son distintos en diferentes

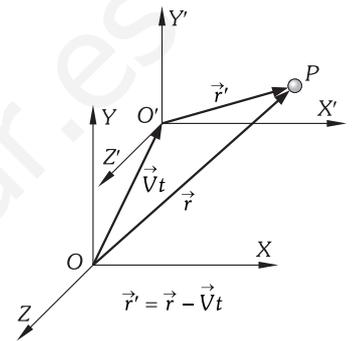


Fig. IV-18.- Sistemas inerciales.

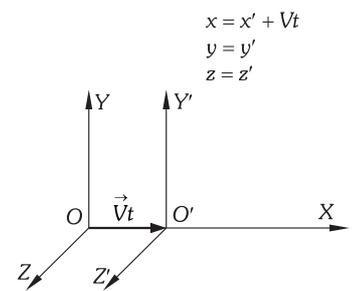


Fig. IV-19.- Sistemas inerciales considerando el movimiento entre ambos paralelo al eje  $X$ .

condiciones de movimiento. (Las leyes físicas no son las mismas en laboratorios con distintas aceleraciones y en uno con velocidad rectilínea y uniforme). Nuestra dificultad está en elegir el sistema inercial conveniente para nuestros estudios.

Las medidas realizadas en sistemas de referencia inerciales diremos que son «absolutas» y se considera que este sistema está «fijo» en el espacio.

Un sistema de referencia solidario a la superficie de la Tierra, al tener un movimiento de giro alrededor de su eje, no es un sistema inercial perfecto, puesto que, debido a esta rotación, actúa una aceleración que aunque pequeña no es despreciable en todos los casos.

¿Y si tomamos el sistema de referencia en el centro de la Tierra? Tampoco es un sistema inercial perfecto, puesto que por su giro alrededor del Sol, actúa una aceleración, que aunque más pequeña que en el caso anterior, no es nula.

¡Entonces tomemos como sistema de referencia el Sol! Pues tampoco es un sistema inercial perfecto; puesto que lleva una determinada aceleración hacia el centro de nuestra Galaxia producida por su giro alrededor de su centro\*.

¿Existe algún sistema inercial en el Universo?, esto equivale a preguntarse sobre la posibilidad de encontrar una partícula libre, es decir, alejada de toda influencia del resto del Universo, lo que en la práctica es irrealizable. (Es un convenio establecido el considerar las estrellas llamadas fijas como sistema inercial de referencia patrón).

Deberemos pues conformarnos con sistemas que sean «casi» inerciales, es decir, aquellos en que la aceleración del propio sistema sea despreciable frente a las que intervienen en el fenómeno en estudio. Así por ejemplo: en el lanzamiento de cohetes, vuelo espacial, cálculo de trayectorias de satélites artificiales y problemas de este tipo, la rotación de la Tierra produce un efecto apreciable, y la elección del centro del sistema de referencia tendrá que ser el centro de la Tierra, el centro del sol o una estrella fija; sin embargo, en los problemas de maquinarias, estructuras, etc, la corrección es tan pequeña que no influyen para nada en nuestros cálculos, pudiéndose despreciar; en estos problemas y bajo un punto de vista práctico, aplicamos directamente las leyes de la mecánica a medidas efectuadas respecto a la superficie terrestre, pudiendo considerarlas como absolutas.

**PROBLEMAS: 81 al 85.**

**IV - 14. Movimiento relativo. Aceleración de Coriolis**

El problema que nos planteamos es el siguiente: un observador está animado de un movimiento cualquiera en el espacio (no se encuentra en un sistema inercial) y estudia el movimiento de una partícula; conocido el movimiento de ésta relativo a él pretende determinar el movimiento con relación a otro sistema que considera fijo (sistema inercial). Dicho de otra forma: supongamos un sistema de ejes fijo ( $O X Y Z$ ) y otro ( $O' X' Y' Z'$ ) dotado de un movimiento cualquiera, e independientemente una partícula  $P$  se mueve en el espacio; conocido el movimiento de  $P$  respecto a los ejes móviles ( $O' X' Y' Z'$ ) determinar el movimiento de la partícula respecto a los ejes que consideramos fijos ( $O X Y Z$ ).

Tal como se aprecia en la Fig. IV-20 el vector de posición de la partícula con respecto al sistema fijo es:

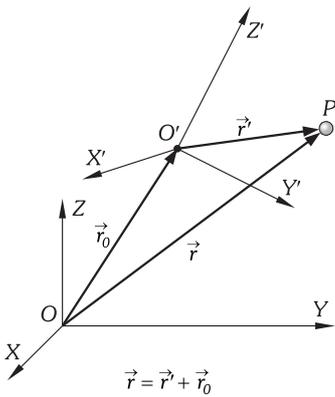


Fig. IV-20.- El sistema ( $O', X', Y', Z'$ ) no es inercial respecto al ( $O, X, Y, Z$ ) que sí que lo es.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0 \tag{20}$$

derivando con respecto al tiempo obtenemos:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \dot{\mathbf{r}}' + \dot{\mathbf{r}}_0 \tag{21}$$

Vamos a adoptar las siguientes notaciones para el desarrollo analítico de esta fórmula:

- Coordenadas de  $P$  referidas a  $O$  . . . . .  $P(x, y, z)$
- Coordenadas de  $P$  referidas a  $O'$  . . . . .  $P(x', y', z')$
- Coordenadas de  $O'$  referidas a  $O$  . . . . .  $O'(x_0, y_0, z_0)$
- Vectores unitarios del sistema ( $X Y Z$ ) . . . . .  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$
- Vectores unitarios del sistema ( $X' Y' Z'$ ) . . . . .  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$

de esta forma llamaremos a:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} + \dot{z} \mathbf{k} \tag{22}$$

VELOCIDAD ABSOLUTA del punto  $P$  referida a  $O$ .

El vector  $\mathbf{r}'$  lo expresaremos:  $\mathbf{r}' = x' \mathbf{i}' + y' \mathbf{j}' + z' \mathbf{k}'$ , y como  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$  son los vectores unitarios invariablemente unidos al triedro móvil ( $O' X' Y' Z'$ ), no son, por tanto, constantes con el tiempo (varían en dirección y sentido, no así en módulo que es invariablemente la unidad); entonces:

\* Según está demostrado a partir de los estudios realizados sobre los corrimientos por efecto Doppler, de las líneas espectrales, este valor es aproximadamente  $3 \times 10^{-8} \text{ cm/s}^2$ .



$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \left( \frac{dx'}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt} \mathbf{k}' \right) + \left( x' \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y' \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z' \frac{d\mathbf{k}'}{dt} \right) \quad (23)$$

al primer paréntesis lo llamamos VELOCIDAD RELATIVA ( $\mathbf{v}_r$ ) de la partícula referida a  $O'$  como origen (velocidad medida por un observador colocado en  $O'$ ):

$$\mathbf{v}_r = \dot{x}' \mathbf{i}' + \dot{y}' \mathbf{j}' + \dot{z}' \mathbf{k}' \quad (24)$$

Para conocer el valor del segundo paréntesis de la igualdad (23) necesitaremos calcular el valor de las derivadas respecto del tiempo de los vectores unitarios. Resolvemos esta cuestión como un caso particular del movimiento del sólido rígido; considerando al sistema formado por los tres vectores unitarios como tal: de la Fig. IV-21 obtenemos que el vector unitario  $\mathbf{i}'$  respecto al sistema que consideramos fijo es:

$$\mathbf{i}' = \mathbf{r}_I - \mathbf{r}_O$$

en la que  $\mathbf{r}_I$  es el vector de posición del extremo del vector  $\mathbf{i}'$  referido a  $O$  (fijo).

Derivando con respecto al tiempo:

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \mathbf{v}_I - \mathbf{v}_O$$

pero por tratarse de un movimiento de un sistema rígido al punto  $I$  le podemos aplicar la fórmula (2) del párrafo IX-1 y nos dará:

$$\mathbf{v}_I = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O'I} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}'$$

que sustituida en la anterior:

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}'$$

haciendo lo mismo con  $\mathbf{j}'$  y  $\mathbf{k}'$  obtenemos:

$$\frac{d\mathbf{j}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}' \quad \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}'$$

que constituyen el grupo de las llamadas FÓRMULAS DE Denis Simeón POISSON (1781-1840), que sustituidas en el segundo paréntesis de la (23) nos queda:

$$x' \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y' \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z' \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times x' \mathbf{i}' + \boldsymbol{\omega} \times y' \mathbf{j}' + \boldsymbol{\omega} \times z' \mathbf{k}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (25)$$

finalmente; teniendo en cuenta que:

$$\mathbf{r}_O = \mathbf{OO}' = x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j} + z_0 \mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_O = \dot{\mathbf{r}}_O = \dot{x}_0 \mathbf{i} + \dot{y}_0 \mathbf{j} + \dot{z}_0 \mathbf{k} \quad (26)$$

obtenemos para valor de la VELOCIDAD ABSOLUTA, sustituyendo (22), (23), (24), (25) y (26) en (21):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + (\dot{x}_0 \mathbf{i} + \dot{y}_0 \mathbf{j} + \dot{z}_0 \mathbf{k} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = \mathbf{v}_r + (\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \quad (27)$$

al segundo sumando de esta igualdad se le llama VELOCIDAD DE ARRASTRE ( $\mathbf{v}_a$ ) justificándose esta denominación ya que es la velocidad que tendría el punto  $P$  si estuviese unido a  $O'$  formando un sistema rígido; si  $P$  y  $O'$  pertenecieran a un sólido rígido diríamos que marcha «arrastrado» por el cuerpo; queda pues como igualdad fundamental del movimiento relativo:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_a$$

Obtenemos la *aceleración* con que se mueve la partícula con respecto al sistema de ejes fijos, derivando (27) con relación al tiempo:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}_r + \dot{\mathbf{v}}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' \quad (28)$$

derivando (24) respecto al tiempo tendremos:

$$\frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \left( \frac{d^2x'}{dt^2} \mathbf{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2} \mathbf{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2} \mathbf{k}' \right) + \left( \frac{dx'}{dt} \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\mathbf{k}'}{dt} \right)$$

y llamando al primer paréntesis ACCELERACIÓN RELATIVA  $\mathbf{a}_r$  del punto  $P$  respecto a  $O'$  (aceleración medida por el observador colocado en  $O'$ ), y teniendo en cuenta las fórmulas de Poisson en el segundo, nos queda:

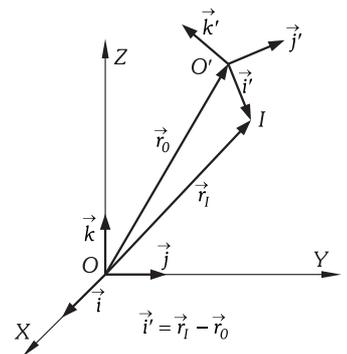


Fig. IV-21.— Los vectores unitarios  $\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}'$  y  $\mathbf{k}'$ , son variables con el tiempo.

$$\frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \mathbf{a}_r + \left[ \frac{dx'}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}') + \frac{dy'}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}') + \frac{dz'}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}') \right] = \mathbf{a}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$$

y como de (23) y (25):

$$\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

sustituyendo en (28) obtenemos:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \left[ \mathbf{a}_0 + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \right] + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r \tag{29}$$

expresión cuyos sumandos tienen el siguiente significado físico:

$\mathbf{a}_r = a'_x \mathbf{i}' + a'_y \mathbf{j}' + a'_z \mathbf{k}'$ , es la aceleración del Punto  $P$  que mediría un observador desde  $O'$ , prescindiendo del giro de  $S'$ .

$\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_0 + (d\boldsymbol{\omega}/dt) \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ , es la que llamaremos ACELERACIÓN DE ARRASTRE, cuya denominación queda justificada si la comparamos con la (5) del párrafo IX-4 y hacemos las mismas consideraciones que para la velocidad de arrastre. Consta de  $\mathbf{a}_0 = d\mathbf{v}_0/dt$ , que es la aceleración de  $S'$  respecto de  $S$  debido a la traslación de  $S'$ ;  $(d\boldsymbol{\omega}/dt) \times \mathbf{r}' = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}'$ , que es la aceleración tangencial producida por el giro de  $S'$ ; y de  $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$  que es la aceleración centrípeta debida a la rotación de  $S'$ .

El último sumando recibe el nombre de ACELERACIÓN COMPLEMENTARIA O DE CORIOLIS:

$$\mathbf{a}_c = 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$$

que aparece siempre que el sistema  $S'$  gira y la partícula tiene una  $\mathbf{v}_r$  no paralela a  $\boldsymbol{\omega}$ .

Luego la ACELERACIÓN ABSOLUTA del punto  $P$  será:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_a + \mathbf{a}_c$$

**IV – 15. Casos particulares de movimientos relativos\***

- 1) LOS EJES MÓVILES ESTÁN ANIMADOS DE UN MOVIMIENTO RECTILÍNEO Y UNIFORME CON RESPECTO AL QUE CONSIDERAMOS FIJO. En este caso  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{v}_0 t$  (Fig. IV-18, haciendo  $\mathbf{V} = \mathbf{v}_0$ ), además se verifica que:  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{v}_0 = \text{cte}$  luego de (20), (27) y (29) se obtiene:

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}' \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_r \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_r$$

si a la primera de las ecuaciones le añadimos la hipótesis del tiempo absoluto ( $t = t'$ ) obtenemos el grupo de ecuaciones que hemos llamado transformación de Galileo, y a los sistemas en que se verifican sistemas inerciales. Consecuencia de la última de estas ecuaciones es:

«La aceleración es un invariante en todos los sistemas que se mueven con movimiento rectilíneo y uniforme con respecto a un sistema de referencia que consideramos fijo».

- 2) EL MOVIMIENTO DE LOS EJES MÓVILES ES DE TRASLACIÓN NO UNIFORME: en este caso se verifica la condición:  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ , y teniendo en cuenta que no es constante  $\mathbf{v}_0$ , obtenemos para las ecuaciones de transformación:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}' \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_r \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_r$$

Este estudio se podía haber hecho sin tener en cuenta el caso general, sin más que derivar la primera de estas ecuaciones y considerando que  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ ; prescindiendo del cálculo matemático empleado en el apartado anterior.

- 3) MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA RESPECTO A EJES EN ROTACIÓN UNIFORME. En este caso los dos observadores giran uno respecto al otro sin movimiento de traslación relativo; supondremos por simplicidad que los orígenes de los sistemas referenciales coinciden ( $O \equiv O'$ ); por tanto se verificará:  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$  y  $\boldsymbol{\omega} = \text{cte}$ , y se obtiene para las ecuaciones de transformación:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$$

Prescindiendo del caso general, se puede hacer un desarrollo matemático más sencillo (por lo menos comparado con el caso general) que nos lleva a la conclusión de la existencia de la aceleración de Coriolis; en efecto: supongámonos sentados en el centro de una plataforma que gira uniformemente en torno al eje  $Z'$  (Fig. IV-22) y lancemos un cuerpo a lo largo del eje  $X'$ , con una velocidad  $v$ . El cuerpo está tan pulimentado y el disco tan fino que aquél avanza en línea recta, resbalando el disco bajo él. Al cabo de un tiempo  $t$ , el cuerpo está en la posición que se indica en la

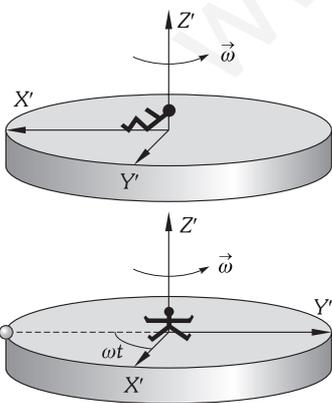


Fig. IV-22.– Aceleración de Coriolis.

\* En el capítulo de dinámica (V) se estudiará el movimiento relativo a ejes en la superficie terrestre y la acción de la fuerza de Coriolis en ella.

Fig. IV-22, y para el observador, sentado en el centro del disco, se ha desplazado el cuerpo hacia su derecha un ángulo  $\omega t$ , siendo  $\omega$  la velocidad angular de giro del disco.

El arco  $s$  que «aparentemente» ha recorrido el cuerpo es:  $s = \omega r t$ , siendo  $r$  (radio) el espacio recorrido por el cuerpo sobre el disco, con movimiento uniforme durante el tiempo  $t$ , con velocidad  $v$  ( $r = vt$ ); y, por tanto:  $s = \omega vt t = \omega vt^2$

La velocidad correspondiente a este espacio  $s$  es:  $v = ds/dt = 2 \omega vt$ , y la aceleración relativa (aceleración para el observador situado en los ejes móviles) es:  $a_r = dv/dt = 2v\omega$ . Como la aceleración absoluta del punto móvil (referida a unos ejes fijos) es nula, la fórmula de la aceleración que hemos obtenido en el estudio de ejes en traslación ( $\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_0$ ) no es válida en nuestro caso ( $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$  por estar fijo el origen de coordenadas y  $\mathbf{a}_r \neq \mathbf{0}$ ). Es necesaria la existencia de otra aceleración, que sumada a la relativa y la de arrastre, nos de la absoluta (en nuestro caso, cero). Ello nos pone de manifiesto la existencia de una nueva aceleración llamada de Coriolis; en el ejemplo que estudiamos igual y contraria a la relativa.

**PROBLEMAS: 86 al 96.**

### PROBLEMAS

#### A) MOVIMIENTOS CURVILÍNEOS DE LA PARTÍCULA

1. La ecuación vectorial horaria de una partícula que se mueve en un plano, viene dada en el si:  $\mathbf{r}(t) = (t-1)\mathbf{i} + (2t-t^2)\mathbf{j}$ . Calcular: 1) El vector de posición inicial. 2) La distancia al observador (distancia al origen) a los 3 s de haber empezado a contar el tiempo. 3) Ecuación de la trayectoria en forma explícita y su representación gráfica.

2. Una partícula describe una trayectoria cuya ecuación en el si viene dada por:  $\mathbf{r} = (t^2 + t + 1)\mathbf{i} - (3t^3 + 2t^2)\mathbf{j}$ . Calcular: 1) El vector velocidad en cualquier instante. 2) El vector aceleración en cualquier instante. 3) El vector velocidad media en el tercer segundo. 4) El vector aceleración media en el tercer segundo. 5) La ecuación de la hodógrafa.

3. Una partícula se mueve en el plano OXY con una velocidad:  $\mathbf{v} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ , en  $t=0$  se encuentra en  $P_0(a, 0)$ . Calcular: 1) La ecuación analítica de su trayectoria. 2) Tiempo que emplea en llegar a su punto cualquiera  $P(x, y)$  de su trayectoria.

4. Una partícula se mueve sobre la curva  $y=f(x) = 3x^2$  (si) con velocidad constante de 1 m/s. Un foco luminoso situado en el punto (6,0), medidas estas coordenadas en m, sigue al móvil proyectando una sombra sobre el eje OY. Determinar la velocidad de esta sombra cuando la partícula se encuentre en un punto de abscisa  $x = 1$  m.

5. La ecuación de la trayectoria de una partícula con velocidad constante  $v = \dot{s}$  es:  $y = \cos h x$  («CATENARIA»\*) escrita en el si. Si para  $t=0$  entonces  $x=0$ , determinar las ecuaciones vectoriales horarias de su velocidad, aceleración y la ecuación analítica de la hodógrafa.

6. Una partícula se muestra sobre la parábola  $y^2 = 4x$  escrita en el si, de manera que la hodógrafa del movimiento con relación al origen sea la misma parábola. Determinar las ecuaciones vectoriales horarias, sabiendo que para  $t=0$  es  $y=2$  m.

7. Un acorazado navega con rumbo NE a una velocidad de 30 mile/h. Suena zafarrancho de combate y uno de los tripulantes marcha corriendo de babor a estribor para ocupar su puesto, a una velocidad de 10 km/h. Calcular el valor de la velocidad resultante y su dirección.

8. Deseamos volar en un avión a 500 km/h hacia el E, la velocidad del viento es 80 km/h. ¿Cuál debe ser la velocidad y rumbo de nuestro avión? 1) Si el viento sopla hacia el S. 2) Si el viento sopla hacia el SE. 3) Si el viento sopla hacia el SO.

9. La velocidad que provocan unos remeros a una barca es de 8 km/h. La velocidad del agua de un río es 6 km/h, y la anchura de tal río 100 m. 1) Suponiendo la posición de la proa perpendicular a las orillas, calcular el tiempo que tarda la barca en cruzar el río y la distancia a que es arrastrada, aguas abajo, por la corriente. 2) ¿En qué dirección debe colocarse la proa de la barca para alcanzar el punto de la orilla opuesta situado enfrente del de partida? (punto de partida y llegada en la perpendicular común a las orillas). 3) ¿Qué velocidad, respecto a tierra, lleva la barca en los dos casos estudiados? 4) ¿Cuánto tarda en atravesar el río

10. Una canoa de 2,5 m de larga está junto a la orilla de un río y perpendicularmente a ella. Se pone en marcha con una velocidad de 5 m/s y al llegar a la orilla opuesta ha avanzado en el sentido de la co-

riente 23,4 m. 1) Calcular la velocidad del agua sabiendo que el río tiene una anchura de 100 m. 2) Si la canoa marcha a lo largo del río, determinar el camino recorrido en 1 min según vaya en el sentido de la corriente o en sentido contrario.

11. Una motora parte de la orilla de un río de anchura  $e$  y perpendicularmente a ella, su motor le proporciona una velocidad constante  $c$ . La velocidad de la corriente crece proporcionalmente a la distancia a la orilla de modo que su valor máximo en el centro del río es  $V$  y en las orillas es cero. Calcular: 1) Las leyes vectoriales horarias del movimiento. 2) La distancia que ha sido arrastrada la motora por el agua cuando llega a su orilla opuesta. 3) La ecuación analítica de la trayectoria.

12. En un terreno horizontal se lanza un proyectil verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/s. El viento le produce una aceleración horizontal constante  $e$  igual a  $g/5$ , siendo  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Calcular: 1) Las ecuaciones vectoriales horarias. 2) La ecuación analítica de la trayectoria. 3) La distancia entre el punto de lanzamiento y el del impacto con la horizontal. 4) La altura máxima que alcanza el proyectil. 5) El ángulo que forma con la horizontal el vector velocidad en el punto del impacto.

13. Sobre un globo que asciende desde la superficie de la Tierra con velocidad constante  $v_0$ , actúa el viento produciéndole una componente horizontal de la velocidad proporcional a su altura ( $v_x = ky$ ). Determinar: 1) La ecuación analítica de su trayectoria. 2) Las ecuaciones vectoriales horarias.

14. Dos carreteras se cruzan bajo un ángulo de  $90^\circ$  por medio de un puente. Ambas carreteras están situadas en planos horizontales. La altura del puente (distancia vertical entre ambas carreteras) es de 11 m. Por la superior circula un coche a la velocidad de 4 m/s, y por la inferior otro a la velocidad de 3 m/s. Cuando el primer coche se encuentra en el centro del puente, el segundo se encuentra exactamente debajo de él. Determinar: 1) La distancia que los separa al cabo de 12 s después de haberse cruzado. 2) La velocidad con que se separan al cabo de estos 12 s. 3) Valor de la aceleración en este momento.

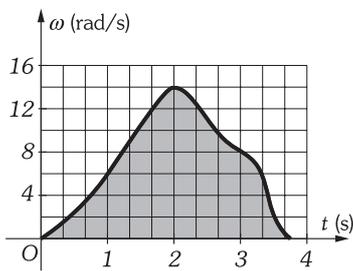
15. Una partícula describe una trayectoria circular de 3 m de radio. El arco descrito en cualquier instante viene dado por:  $l = t^2 + t + 1$  (si). Calcular a los 2 s de iniciado el movimiento: 1) El arco. 2) El ángulo. 3) El módulo de las velocidades lineal y angular. 4) El valor de la aceleración angular.

16. La Fig. nos representa la variación de la velocidad angular de una polea con el tiempo. Calcular el número de vueltas que la polea ha realizado hasta pararse.

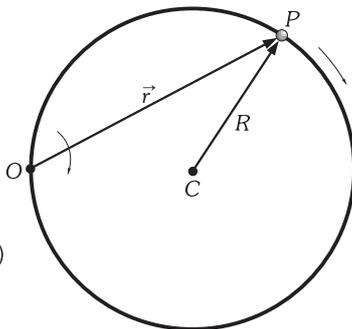
17. Al desconectar de la fuente de alimentación a un motor que en régimen normal gira a  $\omega_0$  rad/s, su rotor desacelera por la acción del rozamiento del aire y del rozamiento constante con los cojinetes según la ecuación:  $\alpha = -b - c\omega^2$ , donde  $b$  y  $c$  son constantes y  $\omega$  la velocidad angular del rotor. Calcular el tiempo que tarda en pararse.

18. La velocidad angular de una partícula, que se mueve partiendo del reposo en trayectoria circular de  $r = 1$  m, viene expresada en el si:  $\omega = \pi t^2$ . Calcular: 1) El ángulo girado, la velocidad angular y la aceleración angular, 1 s después de iniciado el movimiento. 2) Tomando como

sistema de referencia OXYZ, siendo O el centro de la circunferencia, P<sub>0</sub> el punto de partida sobre el eje OX, y el eje OZ perpendicular a la circunferencia trajectoria; determinar el vector velocidad (**v**) y el vector aceleración (**a**), en el instante indicado en 1.



Problema IV-16.



Problema IV-28.

**19.** La aceleración tangencial de un punto móvil queda determinada en el sistema CGS por la función:  $a_t = 6 - 2t$ . Para  $t = 0$ ,  $v_0 = 0$ . Calcular: 1) La expresión general del módulo de la velocidad. 2) En qué instantes la velocidad es nula. 3) ¿Qué aceleración tangencial tiene el móvil en tales instantes?

**20.** La ecuación que nos define la trayectoria de una partícula en un plano OXY y referida a O como origen, viene dada por:  $\mathbf{r} = 5t\mathbf{i} + (10\sqrt{3}t - 5t^2)\mathbf{j}$  (SI), queremos determinar: 1) La ecuación de la trayectoria escrita en forma explícita  $y = f(x)$  y su representación gráfica. 2) Expresiones del vector velocidad y del vector aceleración. 3) Módulos de la aceleración tangencial y normal para  $t = 1$  s.

**21.** Una partícula se mueve en trayectoria plana, siendo las componentes coordenadas del radio vector que define la posición de la partícula en cualquier instante:  $x = 2t^2 - 3$ ,  $y = t^3 + 1$  expresadas x e y en m y t en s. Calcular: 1) Vectores velocidad y aceleración. 2) El instante en que **v** y **a** son paralelos. 3) El vector unitario en la dirección de la tangente a la trayectoria en cualquier instante. 4) Los vectores aceleración tangencial y normal para  $t = 1$  s. 5) El vector unitario en la dirección normal a la trayectoria, el valor del radio de curvatura y el vector de posición del centro de curvatura para  $t = 1$  s.

**22.** Un movimiento de trayectoria plana es tal que:  $x = 1 + \sin \pi t$ ,  $y = t - \cos \pi t$  (SI). Calcular: 1) Vectores velocidad y aceleración. 2) Las componentes intrínsecas del vector aceleración para  $t = 2$  s. 3) Valor del radio de curvatura en tal instante. 4) Coordenadas del centro de curvatura en ese mismo instante.

**23.** La ecuación que define la trayectoria plana de un punto móvil es:  $y = x^2 - 9$  (SI), y la abscisa en función del tiempo es de la forma:  $x = 2t - 3$  (SI). Calcular: 1) Expresiones del vector de posición, del vector velocidad y del vector aceleración. 2) Las aceleraciones tangencial y normal en el instante  $t = 2,00$  s. 3) Los instantes en los que el vector de posición y el vector velocidad son perpendiculares.

**24.** Supongamos un movimiento circular de radio 27 cm y cuyo espacio (l) (distancia sobre la propia curva a un origen tomado en ella), queda determinado por la ecuación:  $l = 3 + t + 2t^2$ , en la que el espacio está medido en cm y el tiempo en s; se trata de calcular el vector aceleración en el instante  $t = 2$  s.

**25.** Una partícula se mueve en trayectoria circular de radio 1 m. La partícula, inicialmente en reposo es acelerada con  $\alpha(t) = 12t^2 - 6t - 4$  (SI). Determinar: 1) La posición angular de la partícula en función del tiempo. 2) Los módulos de las componentes intrínsecas del vector aceleración. 3) Espacio recorrido sobre la trayectoria a los 2,30 s de iniciado el movimiento.

**26.** El ángulo de rotación de un volante que gira alrededor de su eje fijo viene dado por la ley:  $\varphi = \varphi_0 + kt^2$ , donde  $\varphi_0$  y k son constantes. En un instante t la velocidad lineal de un punto de su periferia es v. Calcular el módulo del vector aceleración total de ese punto en tal instante.

**27.** Una partícula se mueve en trayectoria plana y circular de 1 m de radio, el valor de su aceleración tangencial en módulo es siempre igual a su velocidad. En el instante inicial su velocidad angular es de  $\pi$  rad/s. Determinar, al cabo de 1 s: 1) La aceleración angular de la partícula. 2) La aceleración tangencial. 3) La velocidad angular.

**28.** La figura nos representa una partícula que gira en trayectoria circular de radio  $R = 1$  m, de modo que el radio vector que parte de O tiene una velocidad angular constante:  $\dot{\theta} = 2\pi$  rad/s. Si para  $t = 0$ ,

$r = 2R$ , determinar: 1)  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$  y  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ . 2) Los vectores aceleración tangencial y normal para  $t = 5$  s.

**29.** Una partícula se mueve en trayectoria plana, siendo los componentes coordenadas del radio vector que define la posición de la partícula, en cualquier instante y escritas en el SI:  $x = 4 \sin 2t$ ,  $y = 2 \cos 2t$ . Determinar: 1) Ecuación analítica de su trayectoria en la forma  $f(x, y) = 0$ . 2) El sentido del movimiento de la partícula sobre su trayectoria. 3) Ecuación de la hodógrafa. 4) Valores de los vectores aceleración total, tangencial y normal para  $t = 9\pi/8$  s.

**30.** Una partícula describe una curva plana que escrita en el SI tiene por ecuación  $y^2 = 4x$  con una componente de la aceleración según el eje OX que es constante e igual a  $8 \text{ m/s}^2$ . Para  $t = 4$  s se encuentra en el origen de coordenadas. Calcular: 1) Las ecuaciones vectoriales horarias del movimiento. 2) Los vectores aceleración tangencial y normal para  $t = 2$  s.

**31.** Las componentes coordenadas del vector que nos define la trayectoria de una partícula son en el SI:  $x = 3t^3 - 5$ ,  $y = 6t^2 - 1$ ,  $z = 4t^3 - 6$ . Calcular los módulos de la aceleración tangencial y normal para  $t = 1$  s.

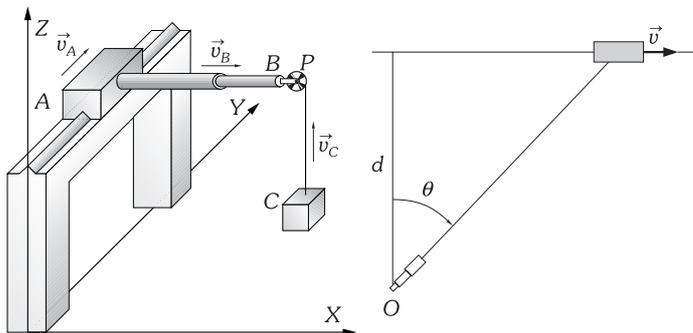
**32.** El vector velocidad del movimiento de una partícula viene dado por:  $\mathbf{v} = (3t - 2)\mathbf{i} + (6t^2 - 5)\mathbf{j} + (4t - 1)\mathbf{k}$  (SI) y el vector que nos define la posición inicial es:  $\mathbf{r}_0 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$  m, calcular: 1) La expresión del radio vector en cualquier instante. 2) Ecuación del vector aceleración. 3) Los vectores aceleración tangencial y normal para  $t = 1$  s.

**33.** El vector velocidad de una partícula referido a un punto O (velocidad definida por un observador en O) viene dado en el SI por:  $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 4t\mathbf{j} - 3t^2\mathbf{k}$ . Determinar para  $t = 1$  s: 1) El vector unitario en la dirección de la tangente a la trayectoria. 2) El vector aceleración tangencial. 3) El vector aceleración normal. 4) El vector unitario en la dirección de la normal a la trayectoria. 5) El valor del radio de curvatura.

**34.** El vector aceleración de una partícula referido a un punto O (vector aceleración definido por un observador en O) viene dado en el SI por:  $\mathbf{a} = 2(18t^2 + 1)\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$ . En el instante  $t = 0$  la velocidad es nula y el vector de posición es:  $\mathbf{r}_0 = 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$  m. Se trata de determinar para  $t = 1$  s. 1) Las componentes intrínsecas del vector aceleración. 2) El valor del radio de curvatura. 3) La posición del centro de curvatura.

**35.** Una partícula recorre la hélice que tiene por ecuación escrita en el SI:  $\mathbf{r}(t) = 3 \cos 2t \mathbf{i} - 3 \sin 2t \mathbf{j} + \sqrt{3} t \mathbf{k}$ . Determinar: 1) Los vectores aceleración tangencial y normal en  $t = \pi$  s. 2) Espacio recorrido por la partícula durante ese tiempo.

**36.** En la Fig. el carro A y el brazo B se mueven con velocidades  $v_A$  y  $v_B$ , y aceleraciones  $a_A$  el primero, y  $a_B$  respecto de A el segundo. Por su parte la polea P sube el bloque C con velocidad  $v_C$  y aceleración  $a_C$  respecto de ella. En un instante determinado las coordenadas de C son  $x_0, y_0, z_0$ , respecto del origen O. Determinar, en ese instante, la posición del centro de curvatura de la trayectoria de C. DATOS:  $v_A = 0,4 \text{ m/s}$ ,  $v_B = 0,4 \text{ m/s}$ ,  $v_C = 0,2 \text{ m/s}$ ,  $a_A = -0,2 \text{ m/s}^2$ ,  $a_B = 0,2 \text{ m/s}^2$ ,  $a_C = 0,1 \text{ m/s}^2$ ,  $x_0 = 1 \text{ m}$ ,  $y_0 = 4 \text{ m}$ ,  $z_0 = 5 \text{ m}$ .



Problema IV-36.

Problema IV-37.

**37.** Desde un punto, distante d metros de un tramo recto de vía, se sigue con un catalejo el paso de un tren que marcha a velocidad v, como se indica en la Fig. Expresar la velocidad del tren en función de d,  $\theta$  y de la velocidad angular de giro del catalejo.

**38.** Las ecuaciones horarias del movimiento de una partícula en trayectoria plana, y en coordenadas polares entre  $t = 0$  y  $t = 80$  s son:  $r = 25t(80 - t)$  y  $\theta = \sqrt{0,5 - 3 \times 10^{-4}t}$ , escritas en el SI. Determinar a los 30 s de iniciado el movimiento: 1) El vector velocidad y el vector aceleración y su módulo. 2) En qué momento y para qué valor de  $\theta$  la velocidad del proyectil es perpendicular al vector de posición.

**39.** Un tubo recto de longitud  $l$  gira en un plano horizontal con velocidad angular constante  $\omega$  alrededor de un punto  $O$  como se indica en la Fig. El tubo está lleno de un líquido que inicialmente se encuentra en reposo; una partícula  $P$  de él, recorre una trayectoria que puede aproximarse a una curva en espiral logarítmica de ecuación:  $r = r_0 e^{k\theta}$  siendo  $k$  una constante adimensional. Determinar la velocidad y la aceleración de la partícula en el momento que sale del tubo.

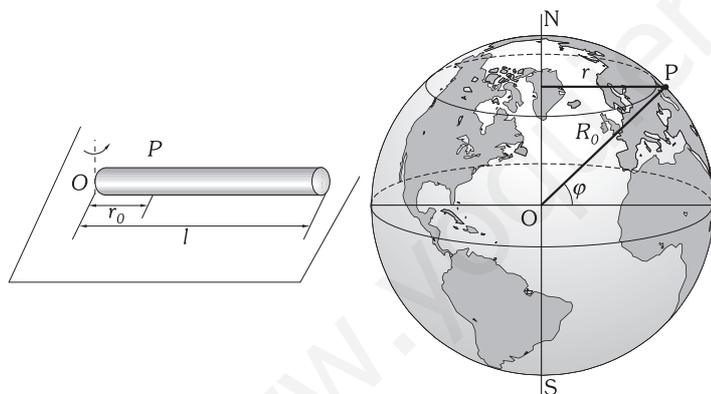
**40.** En un río, desde la orilla opuesta al embarcadero y frente a él, parte una barca enfilando su proa constantemente hacia dicho punto. La anchura del río es de  $200$  m y las velocidades del agua y de la barca respecto de la orilla son de igual módulo. Calcular a qué distancia del embarcadero aparcará la barca. (Resolver el problema utilizando coordenadas polares).

**41.** Una partícula parte del punto  $(4,0)$  m en un movimiento plano, con velocidad inicial paralela al eje  $OY$ . Se mueve de forma que su vector de posición,  $\mathbf{r}$ , gira en torno a  $O(0,0)$  con velocidad angular constante,  $\omega = 2$  rad/s, y su aceleración es siempre perpendicular a  $\mathbf{r}$ .  
1) Obtener la ecuación de su trayectoria. 2) Calcular el tiempo que tarda en alejarse hasta  $8$  m del origen y la posición en ese instante.

**B) MOVIMIENTOS CURVILÍNEOS SINGULARES DE LA PARTÍCULA**

**42.** Un volante gira con una velocidad angular constante de  $50$  rad/s. Calcular: 1) La velocidad de un punto de la periferia sabiendo que su radio es  $R = 1$  m. 2) La velocidad de un punto colocado a una distancia de  $0,5$  m del centro. 3) Espacio recorrido por ambos puntos materiales en el tiempo de  $1$  min. 4) El número de vueltas de da el volante en ese tiempo.

**43.** 1. Calcular la velocidad angular de cualquier punto de la Tierra en su movimiento de rotación alrededor del eje terrestre. 2. Calcular la velocidad tangencial y la aceleración normal de un punto  $P$  sobre la Tierra (ver Figura) situado en un lugar de  $60^\circ$  de latitud. (Radio terrestre =  $6\,300$  km).



Problema IV-39.

Problema IV-43.

**44.** Un punto material describe uniformemente una trayectoria circular de radio  $1$  m, dando  $30$  vueltas cada minuto. Calcular el período, la frecuencia, la velocidad angular, la tangencial, la areolar y la aceleración centrípeta.

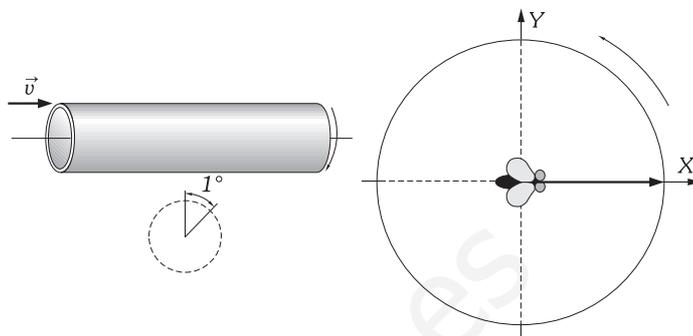
**45.** Desde el mismo punto de una circunferencia parten dos móviles en sentidos opuestos. El primero recorre la circunferencia en  $2^h 4^{min}$ , el segundo recorre un arco de  $6^\circ 30'$  por minuto. Determinar en qué punto se encontrarán y el tiempo invertido.

**46.** Una partícula se mueve con movimientos circular y uniforme ( $\omega = cte$ ) de radio  $R$ . Si tomamos el origen de un sistema de coordenadas en el centro de la circunferencia trayectoria, calcular las ecuaciones vectoriales horarias. (Tomamos  $O$  como centro de la circunferencia trayectoria y la posición inicial de la partícula sobre el eje  $OX$ ).

**47.** Un cilindro de cartón de  $20$  m de altura gira alrededor de su eje a razón de  $1$  vuelta cada  $10$  segundos. En la dirección de la generatriz se hace un disparo y se observa que los radios que pasan por los impactos hechos en las bases forman un ángulo de un grado. Calcular la velocidad del proyectil (ver Fig.).

**48.** Una mosca camina en línea recta con movimiento uniforme a lo largo del radio  $R$  del disco de vidrio de la figura al mismo tiempo que éste gira con velocidad angular constante. Suponiendo que el tiempo

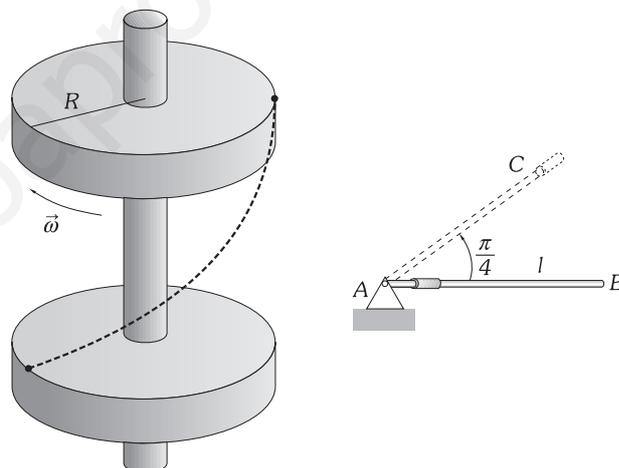
que tarda la mosca en recorrer el radio es el mismo que el período de giro del disco. 1) Dibujar la trayectoria de la mosca, con relación a los ejes fijos  $X$  e  $Y$  que se ven por transparencia a través del vidrio. 2) Determinar las ecuaciones horarias de éste movimiento en función de  $v$  (velocidad de la mosca) y  $\omega$  (velocidad angular del disco) con relación a los ejes fijos.



Problema IV-47.

Problema IV-48.

**49.** El disco de radio  $R$  de la Fig. desliza sin rozamiento a lo largo de su eje; dejamos que caiga y a su vez le comunicamos en el instante inicial una velocidad angular constante  $\omega$ . Determinense las ecuaciones horarias del movimiento de un punto situado en el borde del disco.



Problema IV-49.

Problema IV-58.

**50.** Un volante de  $2$  dm de diámetro gira a su eje a  $3\,000$  rpm. Un freno lo para en  $20$  s. Calcular: 1) La aceleración angular supuesta constante. 2) Número de vueltas dadas por el volante hasta que se para. 3) El módulo de la aceleración tangencial, normal y total de un punto de su periferia una vez dadas  $100$  vueltas.

**51.** La velocidad angular de un volante, disminuye uniformemente desde  $900$  a  $800$  rpm en  $5$  s. Encontrar: 1) La aceleración angular. 2) El número de revoluciones efectuado por el volante en el intervalo de  $5$  s. 3) ¿Cuántos segundos más serán necesarios para que el volante se detenga?

**52.** Un automotor parte del reposo, en una vía circular de  $400$  m de radio, y va moviéndose con movimiento uniformemente acelerado, hasta que a los  $50$  s de iniciada su marcha, alcanza la velocidad de  $72$  km/h, desde cuyo momento conserva tal velocidad. Hallar: 1) La aceleración tangencial en la primera etapa del movimiento. 2) La aceleración normal, la aceleración total y la longitud de vía recorrida en ese tiempo, en el momento de cumplirse los  $50$  s. 3) La velocidad angular media en la primera etapa, y la velocidad angular a los  $50$  s. 4) Tiempo que tardará el automotor en dar cien vueltas al circuito.

**53.** Dos móviles parten simultáneamente del mismo punto y en el mismo sentido recorriendo una trayectoria circular. El primero está animado de movimiento uniforme de velocidad angular  $2$  rad/s y el segundo hace su recorrido con aceleración angular constante de valor  $1$  rad/s<sup>2</sup>. ¿Cuánto tiempo tardarán en reunirse de nuevo y qué ángulo han descrito en tal instante? La circunferencia sobre la cual se mueven los móviles es de  $2$  m de radio. ¿Qué velocidad tiene cada uno de los

móviles en el instante de la reunión? ¿Qué aceleración tangencial? ¿Qué aceleración normal? ¿Qué aceleración resultante y en qué dirección?

54. Un móvil parte del reposo en el origen y recorre una trayectoria circular de 20 cm de radio con una aceleración tangencial que viene dada el sistema CGS por la expresión:  $a_t = 60t$ . Determinar en módulo, dirección y sentido, la aceleración del móvil a los 2/3 s de iniciado el movimiento.

55. Una partícula describe una circunferencia de 27 cm de radio, aumentando con el tiempo el valor de su velocidad, de una forma constante. En un punto A de su trayectoria la velocidad es 9 cm/s; en otro B, transcurridos 0,25 s, es 10 cm/s. Calcular el vector aceleración en el punto A.

56. Una partícula posee un movimiento circular y uniforme de 1 m de radio, dando 1 vuelta en 10 s. Calcular: 1) El vector de posición referido al centro de la trayectoria como origen si la partícula inicialmente se encuentra en el punto  $P_0(0, 1)$  m. 2) El vector velocidad y aceleración a los 5 s de iniciado el movimiento. 3) Velocidad media en el intervalo de 5 s comprendido entre el quinto y décimo segundo.

57. El vector de posición de una partícula que se mueve en trayectoria plana es:  $\mathbf{r} = (5 \cos \pi t - 1)\mathbf{i} + (5 \sin \pi t + 2)\mathbf{j}$  (SI). 1) Demuéstrase que el movimiento es circular y uniforme. 2) Calcular el radio de la circunferencia trayectoria. 3) Calcular la frecuencia de este movimiento.

58. La barra de la Fig. puede girar en un plano vertical accionada por un motor en A, que le proporciona exclusivamente dos valores de aceleración angular,  $+\pi/12$  y  $-\pi/6$  rad/s<sup>2</sup>. El cilindro C, partiendo de la posición indicada, recorre la barra con dos tipos de aceleración como únicas posibilidades,  $+mt$  y  $-0,6$  m/s<sup>2</sup>. Partiendo del reposo en la posición horizontal, el sistema evoluciona para llegar a la situación, también de reposo, indicada con puntos en la figura, después de barrer  $\pi/4$  rad. Si la longitud de la barra es de 2,125 m, calcular el valor del coeficiente  $m$  de una de las aceleraciones posibles del cilindro.

59. Un avión de bombardeo, en vuelo horizontal, a la velocidad de 360 km/h, y a una altura sobre un objetivo de 1 000 m, lanza una bomba. 1) ¿A qué distancia del objetivo inmóvil, contada horizontalmente, debe proceder al lanzamiento? 2) Si el objetivo es un camión que marcha en carretera horizontal, a 72 km/h en la misma dirección y plano vertical que el bombardero ¿a qué distancia del objetivo, contada horizontalmente, se debe proceder al lanzamiento si el objetivo se mueve en distinto o en el mismo sentido?

60. Un avión en vuelo horizontal, a una velocidad constante de 500 km/h lanza tres bombas en intervalos de 3 s. Dibujar en un esquema la posición del avión y las bombas a los 3 s de lanzar la tercera. Se supone nula la resistencia del aire.

61. Sobre la superficie de un lago, a 5 m sobre ella y horizontalmente, se dispara un proyectil, con una velocidad de 5 m/s. Determinar: 1) El tiempo que tarda el proyectil en introducirse en el agua. 2) La distancia horizontal recorrida por el proyectil hasta que se introduce en el agua. 3) Valor de la tangente del ángulo que forma el vector velocidad con la horizontal en el momento que el proyectil se introduce en el lago.

62. Dos aviones están situados en la misma vertical; la altura sobre el suelo de uno de ellos es 4 veces mayor que la del otro como se indica en la figura. Pretenden bombardear el mismo objetivo. Siendo la velocidad del más alto  $v$  ¿qué velocidad debe llevar el más bajo?

63. Un avión en vuelo horizontal rectilíneo, a una altura de 7 840 m y con una velocidad de 450 km/h, deja caer una bomba al pasar por la vertical de un punto A del suelo. 1) ¿Al cabo de cuánto tiempo se producirá la explosión de la bomba por choque con el suelo? 2) ¿Qué distancia habrá recorrido entre tanto el avión? 3) ¿A qué distancia del punto A se producirá la explosión? 4) ¿Cuánto tiempo tardará en oírse la explosión desde el avión, a contar desde el instante del lanzamiento de la bomba, si el sonido se propaga a 330 m/s?

64. Se dispara un cañón con un ángulo de 15°, saliendo la bala con la velocidad de 200 m/s ( $g = 10$  m/s<sup>2</sup>). Se desea saber: 1) La distancia teórica que alcanzará la bala sobre la horizontal. 2) La velocidad con que llega a tierra, en valor absoluto y dirección. 3) Si tropieza con una colina que se encuentra a la mitad de su alcance, de 300 m de alta. ¿Por qué? 4) En caso afirmativo, ¿qué solución podríamos dar si queremos hacer blanco en el mismo objetivo y con el mismo cañón (la misma velocidad inicial) disparando desde el mismo sitio?

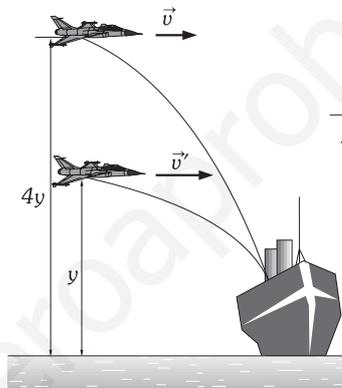
65. Se dispara un cañón desde un acantilado de 50 m de altura y con un ángulo de 45° por encima de la horizontal, siendo la velocidad de salida del proyectil de 490 m/s. Calcular: 1) Tiempo que tarda el proyectil

en llegar a la superficie del mar. 2) Posición del impacto. 3) Velocidad en ese instante.

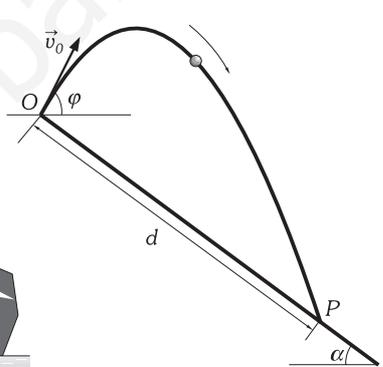
66. Una pelota resbala por un tejado que forma un ángulo de 30° con la horizontal, y al llegar a su extremo, queda en libertad con una velocidad de 10 m/s. La altura del edificio es 60 m y la anchura de la calle a la que vierte el tejado 30 m. Calcular: 1) Ecuaciones del movimiento de la pelota al quedar en libertad y ecuación de la trayectoria en forma explícita (tomar el eje X horizontal y el Y vertical y positivo en sentido descendente). 2) ¿Llegará directamente al suelo o chocará antes con la pared opuesta? 3) Tiempo que tarda en llegar al suelo y velocidad en ese momento. 4) Posición en que se encuentra cuando su velocidad forma un ángulo de 45° con la horizontal.

68. Se dispara un cañón con un ángulo  $\varphi$  por encima de la horizontal, saliendo la bala con una velocidad  $v_0$ . Determinar en función del tiempo las expresiones de los módulos de la aceleración tangencial y normal. Calcular el radio de curvatura de su trayectoria en cualquier instante.

69. Desde lo alto de un plano inclinado (punto O de la figura) un ángulo  $\alpha$  con la horizontal lanzamos un objeto con velocidad inicial  $v_0$  y formando un ángulo  $\varphi$  con la horizontal. Determinar la distancia  $d$  a la que cae el objeto medida sobre el plano inclinado.



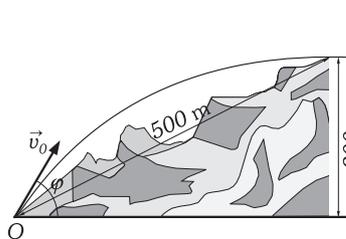
Problema IV-62.



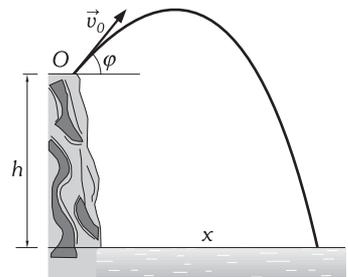
Problema IV-69.

70. Un observador de radar está detectando desde tierra la aproximación de un proyectil. En cierto instante obtiene la siguiente información: a) El proyectil ha alcanzado su máxima altura y se está moviendo horizontalmente con una velocidad  $v$ . b) La distancia en línea recta al proyectil es  $l$  y la visual a éste forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal. Encontrar la distancia entre el observador y el punto de impacto de proyectil. ¿Pasa el proyectil sobre su cabeza o llega al suelo antes de alcanzarlo? (La distancia se ha de expresar en función de las cantidades observadas  $v$ ,  $l$ ,  $\theta$  y el valor conocido de  $g$ . Se ha de suponer que la tierra es plana y que el observador está en el plano de la trayectoria del proyectil).

71. Con un proyectil queremos rebasar una colina de 300 m de alta desde 500 m de distancia a la cima (ver figura). Calcular: 1) Ángulo de lanzamiento. 2) Velocidad mínima necesaria.



Problema IV-71.

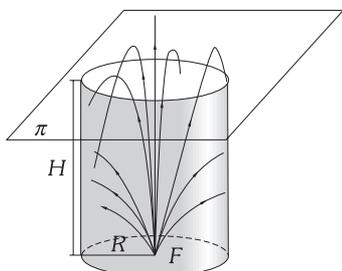


Problema IV-72.

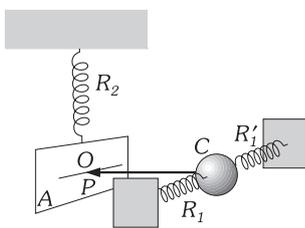
72. ¿Qué ángulo habrá que darle a la velocidad en el lanzamiento de un proyectil desde un acantilado de 10 m de altura (ver figura) para obtener el alcance máximo? Velocidad de salida del proyectil 10 m/s. Calcular también dicho alcance.

73. Demostrar que en un tiro oblicuo el radio de curvatura es mínimo en la cúspide de la trayectoria.

**74.** Determinar la ecuación de la «PARÁBOLA DE SEGURIDAD» definida como: «La ecuación de la envolvente de todas las parábolas trayectorias de un proyectil disparado bajo un ángulo cualquiera  $\varphi$ , pero con la misma velocidad inicial  $v_0$ ». Llamada así porque los puntos situados por encima de ella están fuera del alcance del proyectil, cualquiera que sea la dirección del disparo. Despreciar la resistencia del aire. ¿Qué condición deben cumplir  $H$  y  $R$  del cilindro de la figura para que una fuente  $F$ , supuesta puntual, colocada en el centro de su base y emitiendo partículas con velocidad máxima  $v_0$ , no las lance fuera del cilindro?



Problema IV-74.



Problema IV-78.

**75.** Sobre la plataforma de un tren que se mueve sobre un terreno horizontal con una velocidad de 30 m/s, está montado rígidamente un cañón que lanza sus proyectiles a 500 m/s. (Tomar  $g = 10 \text{ m/s}^2$  y despreciar la resistencia del aire). Determinar las ecuaciones vectoriales horarias del movimiento del proyectil en los siguientes casos: 1) El disparo se efectúa perpendicularmente a la dirección del movimiento y en la dirección horizontal. 2) El disparo se efectúa perpendicularmente a la dirección del movimiento y en dirección vertical y hacia arriba. 3) El disparo se efectúa en el plano perpendicular a la dirección del movimiento y formando un ángulo de  $45^\circ$  sobre la horizontal. 4) El disparo se efectúa formando un ángulo de  $30^\circ$  con la dirección del movimiento, contado éste en el plano horizontal, y  $60^\circ$  con el plano horizontal.

**76.** Un proyectil es lanzado con una velocidad:  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$  m/s desde un punto de coordenadas (2, 1, 1) m. Si está sometido a la aceleración de la gravedad (dirección y sentido negativo del eje OZ) y a una fuerza debida al viento que le produce una aceleración en la dirección positiva del eje OX de  $2 \text{ m/s}^2$ , calcúlense: 1) ecuaciones vectoriales horarias del movimiento. 2) La ecuación analítica de la trayectoria. 3) Las componentes intrínsecas del vector aceleración en la cúspide de su trayectoria. 4) La distancia de la cúspide al punto de partida.

**77.** Una partícula está sometida a dos movimientos vibratorios armónicos perpendiculares, de ecuaciones:  $x = 4 \cos 0,5\pi t$  e  $y = 3 \cos (0,5\pi t - 0,5\pi)$  escritas en el SI. 1) Calcular la ecuación de la trayectoria de la partícula y dibujarla. 2) Obtener el instante y la posición en que la velocidad de la partícula forma un ángulo de  $+45^\circ$  con el semieje OX positivo.

**78.** La punta entintada de la figura vibra horizontalmente cuando estiramos el resorte  $R_1$ , comprimiendo  $R_1'$  y soltamos el cuerpo C. Tal punta toca a la superficie A pendiente del resorte  $R_2$ . Estiramos éste y soltamos A en el instante en el P pasa por su posición de equilibrio (O). Las dos vibraciones perpendiculares son del mismo período. ¿Qué figura dibuja la punta P? Determinar la ecuación de tal trayectoria, siendo las amplitudes de los movimientos de A y P 10 y 5 cm respectivamente.

**79.** Una partícula está sometida a dos MAS perpendiculares de la misma amplitud y frecuencia y además se encuentran en «cuadratura» [ $\Delta\varphi = (2K + 1)\pi/2, K \in \mathbb{N}$ ]. Determinar: 1) La ecuación analítica de la trayectoria y las leyes vectoriales horarias del movimiento, expresando  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y)$  y  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ . 2) Los valores de las componentes intrínsecas del vector aceleración.

**80.** Dibujar la curva del Lissajous correspondiente a dos MAS de direcciones perpendiculares cuyos períodos están en la relación 5/4, cuyas amplitudes son iguales y se inician ambos movimientos en el origen de coordenadas.

**C) MOVIMIENTOS RELATIVOS**

**81.** En el instante  $t = 0$  los orígenes de dos sistemas de referencia S y S' coinciden. El sistema S' se mueve con traslación pura de tal forma que  $X \equiv X'$ , y la velocidad de O' es de 5 m/s respecto de O. Una partícula de 3 kg de masa se mueve a lo largo del eje OX con una velocidad de 3 m/s respecto del origen O'. 1) Determinar la velocidad de la

partícula respecto del origen O y su posición cuando han transcurrido 3 s. 2) En el momento de transcurrir esos 3 s se le aplica una fuerza que le produce una aceleración de  $5/3 \text{ m/s}^2$  en la dirección del eje OX, determinar su velocidad respecto a O' a los 5 s de iniciado el movimiento. 3) Determinar la aceleración de la partícula respecto de S y S'.

**82.** Dejamos caer un cuerpo en el interior de un ascensor desde 2 m de altura cuando está parado y cuando asciende con movimiento rectilíneo y uniforme de velocidad 1 m/s. ¿A qué altura sobre el suelo del ascensor se encontrará el cuerpo a los 0,5 s, en cada uno de los casos?

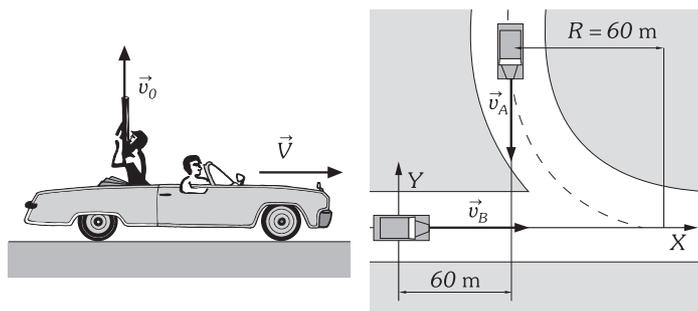
**83.** La Fig. nos representa a un individuo en un coche que se mueve horizontalmente a la velocidad de 108 km/h y que dispara un fusil en dirección vertical con velocidad de 216 km/h. Describir las ecuaciones horarias del movimiento: 1) Desde el punto de vista del observador en el vehículo. 2) Desde el punto de vista de un observador fijo en la carretera. (Tomar  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ).

**84.** La ecuación vectorial horaria del movimiento de una partícula respecto de un determinado sistema inercial S, viene dada en el SI:  $\mathbf{r} = (3t - t^2)\mathbf{i} + (4t - 1)\mathbf{j} - (3t^2 - 2)\mathbf{k}$ . Un segundo sistema de referencia S' se mueve respecto del primero con movimiento de traslación pura y velocidad  $\mathbf{V}(-1, 3, 2)$  m/s, coincidiendo con S en  $t = 0$ . Determinar la velocidad y la aceleración descritas desde el sistema S'.

**85.** Respecto de dos sistemas de referencia, S y S', la posición de una partícula móvil está definida por los vectores  $\mathbf{r} = (t^2 - 2t + 5)\mathbf{i} + (t^2 + 4t)\mathbf{j} + (t + 2)\mathbf{k}$  y  $\mathbf{r}' = (t^2 + t + 3)\mathbf{i} + (t^2 + 2t)\mathbf{j} + (t - 3)\mathbf{k}$ , respectivamente y estando estas ecuaciones escritas en el SI. Describir el movimiento del sistema S' respecto del S.

**86.** En el mismo momento en que arranca un tren con una aceleración de  $1 \text{ m/s}^2$ , un pasajero avanza en sentido contrario con una velocidad constante de 0,5 m/s respecto del tren. En ese mismo instante un niño, montado también en el tren, comienza a avanzar montado en su triciclo, al que le comunica una aceleración respecto al tren de  $0,2 \text{ m/s}^2$  y en la misma dirección del movimiento. Calcular: 1) La velocidad y la aceleración del pasajero a los 5 s del arranque, respecto a un observador parado en la estación. 2) La velocidad y la aceleración del niño a los 5 s de comenzar el movimiento, respecto del mismo observador.

**87.** La figura representa dos coches, el A se desplaza a 80 km/h tomando una curva circular de 60 m de radio; el coche B llega a la posición indicada con una velocidad de 100 km/h por una carretera recta. El conductor del coche B, para evitar el riesgo de choque, reduce su velocidad a razón de  $5 \text{ m/s}^2$ . Calcular la velocidad y la aceleración que parece tener A cuando es observado por el conductor del coche B para la posición representada en la figura.



Problema IV-83.

Problema IV-87.

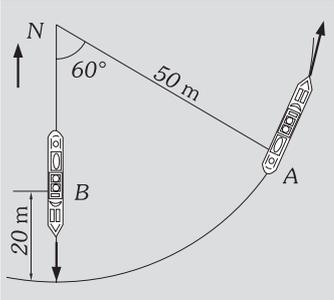
**88.** Una lancha rápida A está tomando una curva de 50 m de radio con una velocidad constante de 50 km/h. Cuando A pasa por la posición indicada en la figura, otra lancha B se encuentra en el lugar señalado en la figura, y está acelerando hacia el sur a razón de  $2 \text{ m/s}^2$ . Determinar la aceleración de A cuando se observa desde B en ese instante.

**89.** Un autobús marcha por una carretera recta en un día de lluvia. Un pasajero mide el ángulo que forman las gotas de lluvia con la vertical y obtiene que, cuando el autobús va a 80 km/h el ángulo es de  $30^\circ$  hacia la parte trasera, y cuando va a 100 km/h el ángulo aumenta a  $45^\circ$ . Calcular la velocidad de las gotas y el ángulo de caída medidos por un peatón parado en el arcén.

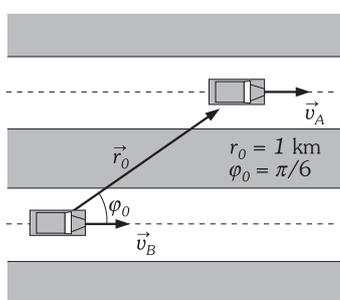
**90.** Una partícula desliza desde la parte más alta de un plano, inclinado  $37^\circ$  respecto de la horizontal, sin velocidad inicial y con aceleración constante de  $5 \text{ m/s}^2$ . Por otra parte un observador, cuya posición inicial coincide con la partícula, se traslada horizontalmente con velocidad constante de 4 m/s y de sentido contrario a la correspondiente com-

ponente de la aceleración de la partícula. Calcular la ecuación de la trayectoria de la partícula respecto del citado observador.

91. Dos móviles, A y B, circulan en el mismo sentido por dos carreteras rectas paralelas. En un instante determinado el móvil A posee una velocidad de 36 km/h y una aceleración de  $2 \text{ m/s}^2$ , y el B lleva una velocidad constante de 108 km/h. La posición de ambos en el instante indicado es la representada en la Fig. Calcular: 1) Velocidad de B respecto de A,  $v_{BA}$ , en función del tiempo. 2) Componentes radial y tangencial de  $v_{BA}$ . 3) Velocidad angular de B respecto de A.



Problema IV-88.



Problema IV-91.

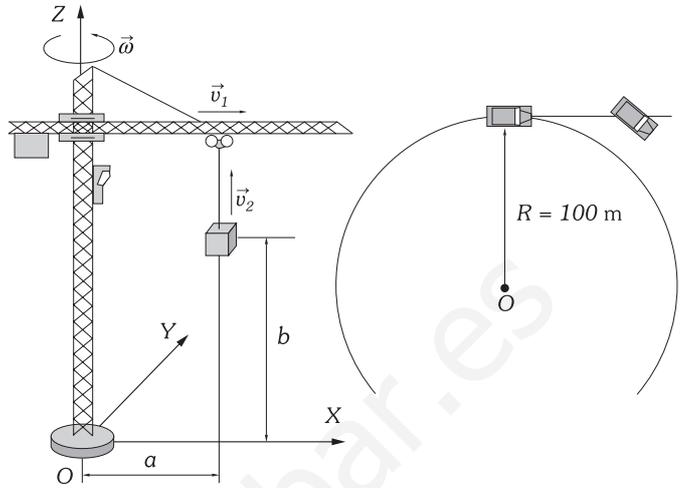
92. Supongamos una masa de aire que si no existiese la rotación de la Tierra, se desplazaría a lo largo de un meridiano del polo N hacia el Ecuador, a una velocidad de 100 km/h. Considerando la rotación terrestre, calcular en  $\text{cm/s}^2$  la aceleración de Coriolis que afecta a tal masa de aire e indicar hacia donde se realiza la desviación.

93. Una plataforma circular gira horizontalmente respecto de un eje vertical por su centro, fijo, con velocidad angular creciente. Una partícula se desplaza a lo largo de un radio de la plataforma aumentando su velocidad conforme se aleja del centro. 1) Dibujar los vectores velocidad relativa, de arrastre y absoluta. 2) Dibujar los vectores aceleración relativa, de arrastre, de Coriolis y absoluta.

94. Una grúa de construcción gira sobre su eje con velocidad angular constante de  $0,2 \text{ rad/s}$ . Por su brazo se desplaza, alejándose del eje con una velocidad de  $2 \text{ m/s}$ , el carro, que a su vez levanta un peso a  $1 \text{ m/s}$  respecto de él. En un instante determinado, el peso se encuentra a  $10 \text{ m}$  del eje de la grúa y a  $15 \text{ m}$  sobre el suelo. Calcular el radio y el centro de curvatura de la trayectoria del peso que, en ese instante, medirá un observador quieto en el suelo.

95. Un automóvil recorre una pista circular de radio  $100 \text{ m}$  con una aceleración tangencial de  $0,2 \text{ m/s}^2$ . Desde él se observa a un segundo automóvil y se miden las características instantáneas de su movimiento; resultan ser: distancia =  $200 \text{ m}$ , velocidad de acercamiento  $20 \text{ m/s}$ , aceleración de aproximación  $0,10 \text{ m/s}^2$ , ángulo formado por su

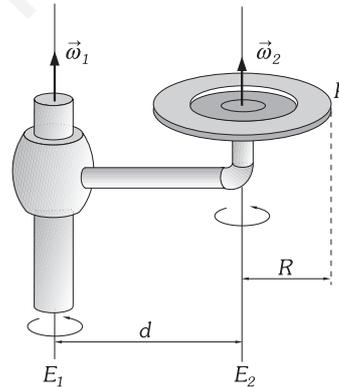
posición con el eje del primer vehículo  $0^\circ$ , velocidad angular  $0,10 \text{ rad/s}$  y aceleración angular  $0,05 \text{ rad/s}^2$ . En el instante indicado en la figura, la velocidad del primer automóvil es de  $30 \text{ m/s}$ , respecto del suelo. Calcular la velocidad y aceleración del segundo automóvil medidas desde el suelo.



Problema IV-94.

Problema IV-95.

96. El disco de la figura arranca con una velocidad angular  $\omega_2 = 2t \text{ rad/s}$ , mientras que su eje lo hace con  $\omega_1 = 0,5 \text{ rad/s}$  respecto del eje  $E_1$  de la máquina. El punto P es el más alejado del eje  $E_1$ . Calcular la aceleración, en función del tiempo, del punto P, respecto de un sistema exterior fijo. Considerar  $R = 10 \text{ cm}$ ,  $d = 40 \text{ cm}$ .



Problema IV-96.

### FUERZA Y MASA. LAS TRES LEYES DE NEWTON. ESTÁTICA DE LA PARTÍCULA

#### A) PRIMERA LEY DE NEWTON. CONCEPTO DE FUERZA. ESTÁTICA DE LA PARTÍCULA

##### V – 1. Introducción

En Cinemática hemos estudiado el movimiento de la partícula sin tener en cuenta su «masa» y la «fuerza» que sobre ella actúa, de cuyo análisis, relación entre ellas y las magnitudes cinemáticas, se ocupa la DINÁMICA. Desarrollaremos la Dinámica en tres partes referidas a una partícula, a un sistema de partículas y al sólido rígido.

Se basa la Dinámica de la partícula en tres leyes fundamentales enunciadas por Newton, apoyándose en la observación, experimentación, y teorías de científicos anteriores a él, siendo Galileo, Kepler y Descartes los más relevantes. Newton utilizó el cálculo diferencial en la descripción de la Mecánica, del que junto con su coetáneo Gottfried W. Leibniz (1646-1716), fueron descubridores, y que causó una auténtica revolución metodológica. Las llamaremos LEYES FUNDAMENTALES DEL MOVIMIENTO: 1ª ley de inercia. 2ª ley de acción de fuerzas. 3ª ley de acción y reacción. Estas leyes son estrictamente válidas para SISTEMAS DE REFERENCIA INERCIALES (párrafo IV-13).

El problema fundamental de la Dinámica es el mismo que hemos planteado en la cinemática ampliado al conocimiento de la «fuerza» que actúa sobre la partícula y su «masa». Tendremos resuelto este problema si nos proporcionan dos variables independientes como pueden ser su masa y su vector de posición en cualquier instante; diremos que nos definen su ESTADO DINÁMICO, con ellas tendremos la información suficiente para determinar su movimiento y la causa que lo ha producido, puesto que a partir del vector de posición tendremos su velocidad y su aceleración y, como se verá en la segunda ley de Newton, podremos calcular la fuerza que lo produce. La posición de la partícula  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  como dato, puede ser sustituida por  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$  o  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$  con las correspondientes condiciones de contorno, ya que están interrelacionadas entre ellas, y podemos dar la «fuerza» en vez de la «masa» por su relación antes dicha.

Las tres leyes de Newton que también son llamadas principios, dos de ellas no lo son, la primera y tercera pueden ser deducidas de un principio más fundamental y universal de la Física que es el principio de conservación del momento lineal, como se verá en el párrafo VIII-4; la segunda ley de Newton es una definición y por tanto sí será un principio. No obstante en su estudio en este tema, las vamos a enumerar como empíricas tal y como procedió Newton.

Utilizamos en estas leyes el concepto abstracto de PARTÍCULA (o PUNTO MATERIAL) que por definición (párrafo III-3), al referirnos a un cuerpo le excluye de su geometría y de su posible movimiento de rotación en torno a un eje que pase por ella. Un ejemplo que utilizamos en muchos problemas, y que puede ayudarnos a comprender, por su sencillez y empleo en la Física más elemental, es la consideración de un cuerpo como una partícula con su misma masa localizada en su centro de gravedad (CG), sobre la que actúa el «peso» y otras fuerzas exteriores a él que situamos también en tal punto.

##### V – 2. Primera ley de Newton. Concepto de fuerza. Estática de la partícula

La observación desde un sistema inercial de la naturaleza nos lleva a la conclusión de la siguiente ley:

*«Ninguna partícula es capaz por sí misma de modificar su estado de reposo o variar su velocidad; en definitiva: es incapaz de producirse una aceleración; para que esta se produzca es necesario que otra u otras partículas actúen sobre ella».*

Así un cuerpo en el suelo horizontal está en reposo y permanecerá en él, y suponemos que la superficie sobre la que se encuentra «equilibra» la interacción entre la Tierra y él, y solamente se moverá cuando lo impulsemos con otro. Una pelota que rueda se para por la acción del «rozamiento» con el suelo, una bala al atravesar una tabla disminuye su velocidad por la acción de ésta sobre la bala. La variación de la dirección de la velocidad de un cuerpo, es también provocada por la acción de otro sobre él; así una pelota cambia el sentido de su velocidad al chocar contra la pared o por efecto del viento sobre ella.

La invariabilidad de la componente horizontal de la velocidad de los proyectiles en su vuelo en el vacío es debida a que sobre ellos y en esa dirección no actúa ningún otro cuerpo.

Analicemos el siguiente experimento: lancemos sobre un terreno horizontal un cuerpo prismático de madera; veremos cómo va disminuyendo su velocidad hasta pararse. Lancemos el mismo cuerpo sobre una superficie horizontal encerada y su velocidad sufrirá, cada segundo, *menor* disminución. Esto sucede porque son menores los rozamientos que existen entre el cuerpo y la superficie sobre la que desliza. Si lanzamos el cuerpo sobre una superficie horizontal de hielo la *disminución* de su velocidad será todavía *menor*. Anulamos el agente externo imaginándonos que tal cuerpo no *sufriese rozamiento alguno*, *la velocidad se mantendría constante*, es decir, el cuerpo seguirá siempre con la misma velocidad.

Estas y otras muchas observaciones de los movimientos en la Naturaleza llevaron a Galileo a enunciar la ley con la que hemos comenzado este párrafo. Diremos que *«el movimiento rectilíneo y uniforme de la partícula es un estado tan natural como el reposo y que la partícula es libre cuando sobre ella no interactúan otras»*.

Es obvio que la comprobación experimental directa de ésta última afirmación es irrealizable; es, como todas las leyes físicas, una idealización que se obtiene por la abstracción de la observación y el experimento, puesto que no conocemos ningún cuerpo real que esté libre de la influencia de su entorno\*

*Si la suma de las interacciones del resto del Universo sobre una partícula es nula; o bien por encontrarse lo suficientemente lejos de las demás su influencia es «despreciable», en tales casos decimos que está en EQUILIBRIO respecto de un observador inercial, y cuando esto ocurre, se encuentra en reposo o en movimiento rectilíneo y uniforme (sin aceleración). Al estudio de este caso lo llamamos en Física ESTÁTICA DE LA PARTÍCULA, cumpliéndose la condición:*

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

Ésta última ecuación y para un sistema de referencia inercial OXYZ, nos representa tres ecuaciones escalares, que responden a:

$$\Sigma F_{ix} = 0 \quad \Sigma F_{iy} = 0 \quad \Sigma F_{iz} = 0$$

que son independientes (cualquiera de ellas puede verificarse independientemente de las otras) y que tienen que cumplirse a la vez para que exista equilibrio.

Newton, resume todo lo anteriormente dicho en su PRIMERA LEY o LEY DE INERCIA:

*«Toda partícula abandonada a sí misma, o está en reposo o en movimiento rectilíneo y uniforme con respecto a un sistema inercial (únicos estados en que no existe modificación de la velocidad)», o lo que es lo mismo: «Ninguna partícula, es apta para modificar por sí misma su estado de reposo o movimiento, o en definitiva, incapaz de producirse una aceleración». «A la interacción entre dos partículas se le llama FUERZA y puede por su efecto causar la aceleración en cualquiera de ellas».*

*Con frecuencia prescindimos del resto del Universo considerando solamente la interacción que sobre una partícula ejerce, decimos que sobre ella actúa una FUERZA suma vectorial de todas las interacciones (fuerzas) que sobre ella ejercen las demás y a las que llamamos FUERZAS EXTERIORES, y a su cuantificación y al análisis que realizamos de su movimiento lo hemos llamado DINÁMICA DE LA PARTÍCULA.*

Ahora bien, en la práctica podemos decir que: distintas partículas varían su velocidad en cantidades diferentes al actuar sobre ellas las mismas interacciones, por ejemplo: un camión cargado es más lento en el arranque o frenado que cuando está vacío; además se observa que sigue moviéndose un automóvil después de desconectar el motor; un hombre que corre no puede pararse de repente; al arrancar un autobús, los pies de un pasajero también se ponen en movimiento sujetándose al suelo por el rozamiento, sin embargo, el resto de su cuerpo tiende a quedar en reposo, lo que hace que se incline en dirección opuesta al movimiento; ocurre al revés durante la parada (frenado del autobús), el pasajero se inclina hacia adelante; si el autobús toma una curva, la tendencia del pasajero a seguir con la dirección del movimiento que tenía, hace que éste se incline hacia fuera de la curva...

Decimos que la causa de estos fenómenos es la «inercia».

*«Se llama INERCIA al fenómeno de conservación de la velocidad de una partícula cuando otras partículas no actúan sobre ella».*

Veremos en la segunda ley de Newton que *la medida cuantitativa de la inercia es la que llamaremos masa inerte*.

\* Más adelante, cuando se estudie el sólido rígido, veremos que el estado de rotación uniforme, es también un estado natural de éste.

### V – 3. Las fuerzas en la naturaleza. Fuerzas fundamentales

En nuestro diario acontecer comprobamos la existencia de fuerzas muy habituales; podemos analizar el esfuerzo muscular que realizamos, por ejemplo al estirar un resorte elástico, en principio habrá un movimiento de sus partículas durante el tiempo que dura el estiramiento, pero una vez provocada la deformación seguiremos ejerciendo ese esfuerzo y el sistema se encuentra en reposo; no hay variación de velocidad y sí existe esa acción sobre el resorte, lo que nos hace pensar, que en ocasiones, *las fuerzas son las causantes de deformaciones en los cuerpos*.

Utilicemos nuestro esfuerzo en sujetar un cuerpo, ahora diremos que nuestro esfuerzo se emplea en *compensar* el PESO del cuerpo, ese peso que compensamos es *otra fuerza* que surge por efecto de estar el cuerpo en presencia de la Tierra y razonamos diciendo: *las fuerzas pueden actuar sobre un cuerpo no sólo por «contacto directo», sino que también pueden ejercerse sobre él a distancia*. En la Naturaleza existen distintos tipos de estas fuerzas transmitidas a distancia en los llamados *campos de fuerzas*; así si dejamos caer un cuerpo sobre la Tierra la existencia del «peso» hace que el cuerpo «caiga» con una aceleración que queda perfectamente determinada realizando medidas de los espacios y tiempos, lo que nos confirma nuestra anterior conclusión: la existencia de una fuerza (PESO) transmitida a distancia. Sobre la superficie de un objeto que reposa o se desliza sobre una segunda superficie, esta segunda ejerce una fuerza perpendicular a ella y sobre el objeto que se apoya a la que denominamos FUERZA NORMAL.

Si dejamos caer una bolita de acero en un «fluido viscoso», aceite por ejemplo, observamos que inicialmente se acelera hasta adquirir un movimiento de velocidad constante. Razonamos diciendo que: el peso de la bolita se ha compensado con una fuerza proporcional a la velocidad que posee, por lo que al aumentar ésta aumenta también la fuerza hasta que el efecto del peso y de la «RESISTENCIA» se compensan; concluimos diciendo que: *«En ocasiones las fuerzas se limitan a equilibrar las llamadas resistencias pasivas»*. Son también de un tipo parecido *las que se oponen al movimiento de un cuerpo al deslizarse sobre la superficie de otro, debiendo su existencia a las rugosidades y deformaciones de las superficies en contacto*.

Existe otro tipo de fuerzas que se «transmiten a distancia» que llamamos ELÉCTRICAS y que pueden ser de dos tipos, de atracción y de repulsión (dos cuerpos con cargas de igual signo se repelen y de signo contrario se atraen); además, las cargas eléctricas tienen la propiedad de que al moverse unas respecto de las otras aparece otra fuerza más (además de la eléctrica) que recibe el nombre de *magnética*, ambas están íntimamente ligadas, su efecto es simultáneo, por lo que las denominaremos FUERZAS ELECTROMAGNÉTICAS.

Todo lo anteriormente dicho parece inducirnos a clasificar las fuerzas en dos tipos, las que actúan *por contacto directo*, como la que hacemos para empujar una mesa, y las que actúan *a distancia*, como la fuerza atractiva de la Tierra sobre la Luna. Sin embargo, para la Física no existe tal distinción, por mucha presión que hagamos *nunca existe contacto*, en el sentido microscópico, entre las moléculas de la mano y las de la mesa. *Todas las fuerzas se ejercen entre cuerpos situados a cierta distancia no nula uno de otro*. Pongamos otro ejemplo: en principio nos parece irreconciliable la idea de la fuerza que «sentimos» al caminar sobre el suelo, con la interacción entre el Sol y la Tierra, puesto que entendemos que al andar por la Tierra la «tocamos» y sin embargo entre el Sol y la Tierra existe una gran distancia; precisamente en éste último punto es en el que las cosas no son tan diferentes como parecen puesto que, como sabemos, los átomos que constituyen la materia están separados manteniendo sus posiciones de forma parecida a como lo hacen el Sol y la Tierra. En nuestro ejemplo, los pies nunca están en contacto con la Tierra, aunque sus moléculas se acerquen mucho a las del suelo, produciéndose un desplazamiento en sus posiciones.

Hay, además, otras manifestaciones menos familiares de las fuerzas, como pueden ser la explosión de una estrella o la convivencia pacífica de los protones en un núcleo, para cuya explicación debemos recurrir al comportamiento de las partículas elementales. Puesto que toda la materia está constituida por partículas, y son éstas las que interaccionan entre sí, consideraremos las *fuerzas* como las *causas que permiten a dos partículas reconocerse entre sí y reaccionar una ante la presencia de la otra*.

*Todas las fuerzas que observamos en el Universo conocido y tal y como se concibe hoy en día, pueden ser explicadas en términos de cuatro fuerzas (o interacciones) que las partículas se ejercen a las que llamamos: GRAVITACIONALES, ELECTROMAGNÉTICAS, NUCLEARES FUERTES y NUCLEARES DÉBILES; las propiedades de las partículas que originan esas interacciones son: la MASA, la CARGA ELÉCTRICA, la CARGA DE COLOR características de las partículas llamadas QUARKS, (que no tiene nada que ver con el color que observamos de los objetos) y la CARGA DÉBIL, respectivamente. Las partículas fundamentales no suelen tener estas cuatro características y por tanto producen y se ven afectadas de formas diferentes por las cuatro fuerzas. Pueden tener uno o varios tipos de fuentes, así de la masa solo hay uno, para la carga eléctrica dos y para la carga de color existen seis. Son fuentes «extensas» las compuestas por fuentes puntuales (aunque muchas veces en la formulación de las leyes físicas se utilizan como puntuales), por ejemplo el protón y el neutrón son extensas por estar formados por tres quarks. De acuerdo con la teoría actual los *electrones* y los *quarks* son fuentes puntuales, es decir, no están constituidos por otras partículas menores.*

Las cuatro fuerzas descritas son transmitidas a distancia, la transmisión por los «bosones mediadores» de esa fuerza en el vacío tiene un tiempo puesto que «viaja», según la teoría de Einstein, a la velocidad de la luz ( $c \approx 3 \times 10^8$  m/s), es decir una partícula no se entera de que está en presencia de otra hasta que su interacción no llega a cualquiera de ellas; así por ejemplo, de cualquier fenómeno que pueda producirse en el Sol, nos enteramos en la Tierra unos 8 min después del evento. Para la Mecánica clásica y a nivel terrestre, el tiempo transcurrido en el intercambio de bosones mediadores es tan pequeño que despreciándolo, podemos decir macroscópica y sensorialmente que los cuerpos están en «contacto»; en nuestro ejemplo que hemos puesto al principio decimos que sí «tocamos» el suelo al caminar. La experiencia nos ha demostrado que el enfoque idóneo en el análisis de la propagación y la existencia de estas interacciones en el espacio se concretan con el concepto de CAMPO, *entendiendo por tal, la perturbación o deformación que una partícula provoca en el espacio que la rodea y que hace que otra partícula de las mismas características se entere de la presencia de la primera y propagándose éste a la velocidad de la luz*. Desde este punto de vista, las interacciones no se verifican «directamente» entre partículas, sino entre cada una de ellas y el campo producido por la otra.

En definitiva actualmente, en la TEORÍA DE PARTÍCULAS, se conocen *doce partículas puntuales* que se dividen en dos grupos: los LEPTONES, que incluyen al *electrón*, el *muón*, el *tau*, al *neutrino electrónico*, al *neutrino muónico* y al *neutrino tau*; y los QUARKS, denominándose *arriba*, *abajo*, *encanto*, *extraño*, *cima* y *valle*.

En las teorías actuales, para que las partículas se reconozcan y reaccionen al encontrarse separadas y en presencia unas de otras, se utiliza el MODELO DE FUERZAS DE INTERCAMBIO, en el que la fuerza es generada por el intercambio de una entidad o «partícula» llamada BOSÓN MEDIADOR, son «puntuales» lo que significa que experimentalmente no se ha podido medir ningún efecto atribuible a su tamaño, desempeñan el papel de portador de «momento lineal»; los bosones que han sido detectados experimentalmente son: los FOTONES, LOS GLUONES inseparables de los quarks y no han sido detectados separados de ellos, decimos que están «confinados», y los BOSONES DÉBILES o MESONES  $W^\pm$  y  $Z$ , responsables de las interacciones básicas electromagnéticas, nuclear fuerte y la débil respectivamente; el bosón responsable de la interacción gravitatoria, el GRAVITÓN, que no ha sido detectado experimentalmente, es en este modelo de intercambio, hipotético.

#### INTERACCIONES FUNDAMENTALES

FUERZA	PROPIEDAD DE LA MATERIA	BOSÓN MEDIADOR
Gravitatoria	Masa	Gravitón
Electromagnética	Carga eléctrica	Fotón
Nuclear fuerte	Carga de color	Gluón
Nuclear débil	Carga débil	Bosón débil

Los experimentos, que dan confirmación a parte de estas teorías, son realizados en los *aceleradores de partículas* de los que son de destacar el Hera (acrónimo de Hadron-Elektron-Ring-Aulage, o sea instalación en anillo para electrones y hadrones) ubicado en Hamburgo, el Lep de Ginebra de electrones y quarks, y el Tevatrón de Fermilab en Chicago que es de protones y antiprotones. La función de estas «monumentales» instalaciones es la detección de los más pequeños que conocemos en el Universo (chocante ¿no?), las partículas elementales y se puede decir que son «*supermicroscopios de electrones*» que permiten «echar una ojeada» en el interior del protón, hasta estructuras 2 000 veces menores que él, es decir  $5 \times 10^{-18}$  m.

Analicemos brevemente algunos aspectos de cada una de las cuatro fuerzas básicas que las partículas se ejercen:

La FUERZA GRAVITATORIA es de largo alcance. Depende de las masas de los objetos y es siempre atractiva. A gran escala, es la que gobierna los movimientos planetarios, estelares, galácticos, etc., y, en general, la estructura y evolución del Universo, y en particular es la que nos mantiene unidos a la superficie terrestre: es la responsable de las mareas del movimiento de satélites artificiales... etc. Su estudio más detallado se hará en el capítulo XI.

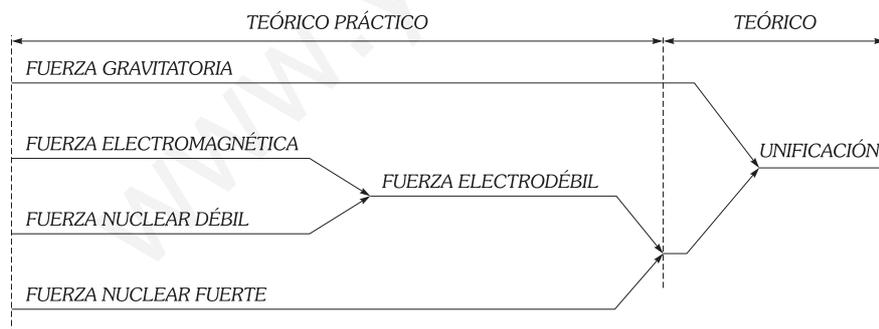
La FUERZA ELECTROMAGNÉTICA, de largo alcance, es atractiva o repulsiva. Es mucho más intensa que la gravitatoria, la cual entre partículas elementales es casi siempre despreciable, por ejemplo la fuerza de repulsión electrostática entre dos protones de un núcleo es del orden de  $10^{36}$  veces mayor que la gravitatoria entre ellos. Mantiene unidas a las moléculas (las fuerzas de van der Waals no son sino el resultado de complejas interacciones electromagnéticas, principalmente dipolares), es responsable de las interacciones entre los átomos de una molécula o entre los protones y electrones de un átomo. Se ejerce entre objetos magnetizados o con carga eléctrica. El electromagnetismo permite describir adecuadamente el comportamiento de radiaciones tan importantes como ondas de radio, microondas, infrarrojos, luz visible, ultravioleta, rayos X o rayos gamma. Es tam-

bién responsable de las reacciones químicas y por tanto de todos los procesos biológicos. Su estudio más detallado se hará más adelante en los capítulos de Electromagnetismo.

La FUERZA NUCLEAR FUERTE es de alcance muy pequeño, del orden de un *fentómetro* (o *fermi* diámetro aproximado del núcleo atómico), es decir, de  $10^{-15}$  m y decrece rápidamente con la separación de las partículas y cuando éstas están separadas unos pocos fentómetros es despreciable; así ocurre con los núcleos atómicos componentes de una molécula o estructura material, como la separación entre ellos es de  $10^{-10}$  m, la fuerza nuclear fuerte es prácticamente nula y los átomos se mantienen unidos exclusivamente por fuerzas eléctricas. La interacción nuclear fuerte tiene lugar entre las partículas llamadas HADRONES que incluyen protones y neutrones del núcleo atómico y, por tanto, es responsable de la coexistencia de estos a pesar de la intensa repulsión electrostática entre los protones. Tiene un comportamiento bastante complejo, hace que los nucleones dentro del núcleo se atraigan fuertemente entre sí, con una intensidad unas 150 veces mayor que la repulsión electrostática a la distancia de 1 fm; sin embargo, si los nucleones se acercan demasiado, esta fuerza se vuelve repulsiva, como ocurre en cualquier «enlace».

Mucho más intensa que la gravitatoria, pero menos que la fuerte, es la FUERZA ELECTRODÉBIL una fuerza muy compleja que se manifiesta de dos formas muy diferentes: la *fuerza nuclear débil* y la *electromagnética*, por esta razón, es habitual tratarlas separadamente, como si se tratase de dos interacciones fundamentales distintas, sin embargo está confirmado experimentalmente que ambas no son sino manifestaciones de una misma fuerza más general. La FUERZA DÉBIL tiene una intensidad de  $10^{-5}$  veces la fuerte y un alcance aún menor que el de ésta, de unos  $10^{-18}$  m ó  $10^{-3}$  fm; a tal distancia es cuando su intensidad es similar a la fuerza electromagnética, pero a 1 fm son más  $10^7$  veces más débiles. Es la responsable de la desintegración de algunos núcleos radiactivos y de todas las interacciones en las que intervienen «*neutrinos*», actúa en la formación de los núcleos atómicos en las estrellas y posibilita la producción de radiación y de energía calorífica en el Sol por un proceso de fusión nuclear así como la desintegración de núcleos atómicos. Tanto la nuclear fuerte como la débil serán estudiadas con más detalle en el capítulo XXX.

El hecho de que las tres fuerzas puedan coexistir, prevaleciendo una u otra según el fenómeno estudiado, hace pensar a los físicos que se trata de *tres manifestaciones distintas de una única interacción fundamental responsable de todos los fenómenos del Universo*. La búsqueda de esta *teoría unificada* ha conocido hitos que merece la pena destacar. La primera gran unificación de dos tipos de fenómenos descritos de distinta forma hasta entonces, la realizó Newton al demostrar que la gravitación actúa de la misma forma entre objetos celestes y entre objetos sobre la Tierra. A mediados del siglo XIX, James Clerk Maxwell unificó las teorías de electricidad y magnetismo al demostrar que se engloban en una única formulación electromagnética. Ya en el siglo XX, Einstein, mediante la relatividad, unificó los conceptos de espacio y tiempo, y los de materia y energía. En 1967, los trabajos de Steven Weinberg y Abdus Saslam, condujeron a la fuerza electrodébil. En la actualidad, esta última fuerza y la fuerte están englobadas en el llamado «*Modelo Estándar*» sin embargo este modelo no incluye la fuerza gravitatoria que, por ahora, es la que más resiste a la tan buscada teoría unificada; se supone que deben coincidir a la distancia inimaginable de  $10^{-29}$  m, no siendo posible con la *técnica actual* realizar experimentos a distancias tan pequeñas, serían necesarios aceleradores de partículas de dimensiones semejantes a las de la Vía Láctea.



Esquema del camino hacia la «teoría unificada»

Volviendo al terreno de la *Mecánica Clásica*, en cuyo estudio nos centraremos en los próximos capítulos, no es relevante la consideración de las fuerzas que actúan sólo a escala nuclear. Nos limitaremos a la interacción gravitatoria y a la electromagnética, que es en definitiva la responsable de los fenómenos más familiares, como pueden ser que una cuerda soporte una determinada TENSION sin romperse, que un libro no traspase una mesa, limitándose a ejercer una cierta presión sobre ella, o que al intentar deslizar una superficie sobre otra encontremos una resistencia, que llamaremos ROZAMIENTO.

Por el momento, para el estudio de movimientos con velocidades mucho menores que  $c$ , es más que suficiente la teoría que se deriva de las leyes de Newton, en la que supondremos que la interacción entre partículas es instantánea, y consideraremos la fuerza como una medida de la intensidad de dicha interacción.

En definitiva, hemos dicho repetitivamente que la fuerza era la acción de un cuerpo sobre otro y además que tiende a hacer que se mueva el cuerpo en la dirección de su acción sobre él, pudiéndose decir:

«Las interacciones entre los cuerpos se describen con el concepto de FUERZA, gozando ésta de los atributos: módulo, dirección y sentido; son por tanto magnitudes vectoriales».

#### V - 4. Principios que impone la Naturaleza en el estudio de las fuerzas

La observación y comprobación experimental del comportamiento vectorial de las fuerzas, nos lleva a establecer unos PRINCIPIOS que se verifican en todos los casos independientemente de la naturaleza u origen de esas fuerzas:

- 1) Dos fuerzas iguales, de la misma dirección y sentido contrario se anulan si sus puntos de aplicación están unidos rigidamente (Fig. V-1).
- 2) Dos fuerzas concurrentes en un punto producen el mismo efecto que otra fuerza, cuyo módulo y dirección son los de la diagonal del paralelogramo construido con las dos fuerzas como lados (Fig. V-2). De forma más general: Las acciones de varias fuerzas que actúan sobre un punto material se superponen sin modificar el efecto que cada una de ellas produciría independientemente.
- 3) Si varias fuerzas actúan sobre un cuerpo y éste se encuentra en equilibrio es que una de ellas es igual y de sentido contrario a la resultante de las demás.

Un TEOREMA muy importante consecuencia del primer principio es:

Una fuerza se puede deslizar a lo largo de su propia dirección si los puntos de aplicación están unidos rigidamente; es decir: LAS FUERZAS SON VECTORES DESLIZANTES.

Queremos demostrar que la fuerza  $F$  la podemos trasladar al punto  $O'$  (Fig. V-3).

Apliquemos a  $O'$  dos fuerzas iguales a  $F$ , una de su mismo sentido,  $F_1$ , y otra del contrario,  $F_2$ . La  $F$  se anula con la  $F_2$  por el principio enunciado, quedando exclusivamente la  $F_1$ .

Llamamos FUERZAS CONCURRENTES a aquellas cuyas líneas de acción pasan por un punto. Las fuerzas que actúan sobre la partícula son totalmente concurrentes; en el caso de actuar sobre un objeto no puntual, y no ser concurrentes, veremos más adelante como se calcula la fuerza resultante y como en general, aparece una nueva magnitud física llamada MOMENTO responsable del movimiento de rotación del sólido.

#### V - 5. Composición de fuerzas

Componer fuerzas es hallar una fuerza, resultante, que produce los mismos efectos que las componentes, cuando actúan simultáneamente.

La composición de fuerzas obedece a las mismas leyes que la composición de vectores (Cap. II); teniendo siempre en cuenta que éstas son vectores deslizantes. Estudiemos, por ahora, los siguientes casos:

- a) FUERZAS EN LA MISMA DIRECCIÓN: La resultante de varias fuerzas de la misma dirección es otra fuerza de la misma dirección y cuyo módulo es la suma o diferencia de los módulos, según que las componentes sean del mismo o distinto sentido.
- b) FUERZAS CONCURRENTES: No es necesario que las propias fuerzas concurren; basta con que lo hagan sus prolongaciones. Se trasladan las fuerzas a un punto común, por deslizamiento (Fig. V-4); y luego, si interesa, se traslada su resultante hasta un punto  $O$  del cuerpo. Si las fuerzas son más de dos, se repite esta construcción con todas las fuerzas dadas y las resultantes parciales, hasta obtener la resultante única.
- c) FUERZAS PARALELAS Y DEL MISMO SENTIDO\*: La resultante de dos fuerzas paralelas y del mismo sentido, es otra fuerza paralela a ellas y del mismo sentido, cuyo módulo es la suma de los módulos, y cuya línea de acción, situada entre las dos fuerzas, divide al segmento que las une en partes inversamente proporcionales a las componentes.

En efecto: en el sistema de fuerzas  $F$  y  $F'$  (Fig. V-5), podemos aplicar en sus orígenes,  $A$  y  $B$ , dos fuerzas  $-f$  y  $f$  sin que se alteren los efectos del sistema. Al componer  $F$  con  $-f$  y  $F'$  con  $f$ , obtenemos  $R_1$  y  $R_2$ ; que trasladadas al punto  $C$  de concurrencia, las descomponemos en dos direcciones paralelas a las primitivas y volvemos a encontrarnos en  $C$ , con las fuerzas  $f$  y  $-f$ , que se anulan, y las  $F$  y  $F'$  ( $CE$  y  $CD$ ) que se suman produciendo  $R$ .

$$R = F + F'$$

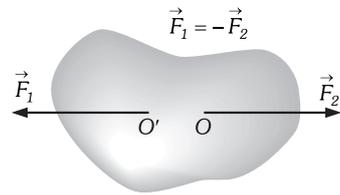


Fig. V-1.- Equilibrio.

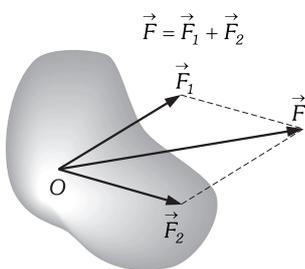


Fig. V-2.- Las fuerzas se suman como vectores.

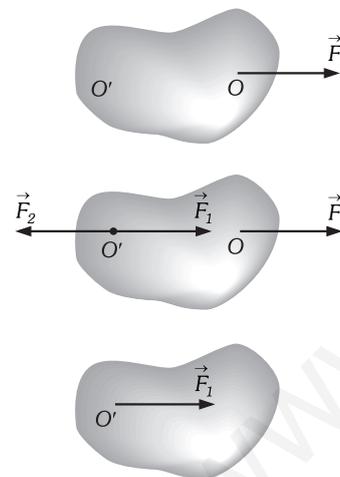


Fig. V-3.- Las fuerzas son vectores deslizantes. Los tres sistemas son equivalentes.

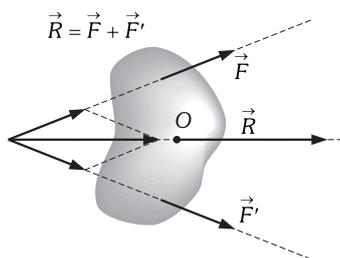


Fig. V-4.- Composición de fuerzas concurrentes.

\* Necesitamos realizar este estudio referente a la DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO, porque para el análisis del punto de aplicación del PESO (CENTRO DE GRAVEDAD) para sólidos en presencia de la Tierra, reducimos a tales objetos a partículas situadas en tal punto, y de igual masa.

Como vemos el módulo del vector  $\mathbf{R}$ , por ser la suma de dos vectores que tienen la misma dirección y sentido, será la suma de los módulos de estos dos:

$$R = F + F'$$

Trasladada  $\mathbf{R}$ , deslizándose sobre sí misma, obtenemos, en  $O$ , la resultante buscada. En los triángulos  $CR_1E$  y  $CAO$ , semejantes, se verifica:  $F/f = CO/OA \Rightarrow F \times OA = f \times CO$ , y en los  $CDR_2$  y  $COB$ :  $F'/f = CO/OB \Rightarrow F' \times OB = f \times CO$ . Y por lo tanto:

$$F \times OA = F' \times OB \Rightarrow \frac{F}{F'} = \frac{OB}{OA}$$

d) FUERZAS PARALELAS Y DE SENTIDOS CONTRARIOS: La resultante es otra fuerza paralela a las componentes del sentido de la mayor, cuyo módulo es la diferencia de los módulos y cuya línea de acción está fuera del segmento que une las fuerzas y del lado de la mayor; dividiendo, exteriormente, a dicho segmento en partes inversamente proporcionales a las componentes.

En efecto: Considerando el sistema de fuerzas  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{F}'$  (Fig. V-6), podemos descomponer  $\mathbf{F}$  en dos: una igual y de sentido contrario a  $\mathbf{F}'$ , aplicada en  $B$ ; y otra  $\mathbf{F} - \mathbf{F}'$  aplicada en  $O$  que será la resultante del sistema, ya que las demás quedan anuladas. Se habrá de cumplir según el párrafo anterior:

$$(F - F') OA = F' \times AB \Rightarrow \frac{F - F'}{F'} = \frac{AB}{OA}$$

y aplicando: Suma de numerador y denominador es al denominador, etc. obtendremos

$$\frac{F}{F'} = \frac{OA + AB}{OA} \Rightarrow \frac{F}{F'} = \frac{OB}{OA}$$

La construcción geométrica para los dos últimos casos se hará de la siguiente manera: se toma sobre  $\mathbf{F}'$  una distancia  $BC = F$ ; y sobre  $\mathbf{F}$ , una distancia  $AD = F'$ , invirtiendo su posición.

El punto de intersección de  $CD$  y  $AB$  nos determina la línea de acción de la resultante y ésta será la suma o diferencia de las fuerzas componentes, según sean del mismo o distinto sentido (Fig. V-7).

Para demostrar que  $O$  pertenece a la línea de acción de la resultante basta considerar los triángulos semejantes  $OAD$  y  $OBC$  en los que se verifica:  $F/F' = OB/OA$ , expresión conforme con la condición fijada anteriormente.

### V - 6. Fuerzas localizadas y distribuidas. Equilibrio de partículas ligadas

Desde un punto de vista macroscópico las fuerzas las podemos considerar como *localizadas* o *distribuidas*. Las fuerzas localizadas las situaremos sobre el punto material sobre el que actúan; en ocasiones, en el equilibrio (o movimiento) de los puntos materiales, existe una interacción entre ellos, y su posición de equilibrio (o movimiento) dependerá de la posición de otro o varios de ellos; decimos que están «conectados» o que existen ligaduras entre ellos.

Los tipos más comunes de éstas que se encuentran en los problemas de Estática (o dinámica) y que *transmiten fuerzas localizadas* son: los *cables* o *cuerdas* que en principio consideramos flexibles, inextensibles y sin peso apreciable frente a los componentes del sistema, pudiendo ser sometidos a tensiones que actúen siempre en la dirección del cable, transmitiéndose a lo largo de él sin variación de su módulo y aplicarla a la partícula a la que se encuentra unido. Cables, con las limitaciones indicadas, que pasan por *poleas* sin rozamiento apreciable tanto entre cuerda-polea, como entre eje-polea; también las consideraremos de masa despreciable frente a las que componen el sistema, en este caso la tensión de la cuerda que pasa por la polea o poleas no sufre variación en módulo. *Gomas* y *resortes (muelles)* elásticos lineales, en ambos se desarrolla una fuerza elástica restauradora que por estiramiento se localiza en la partícula que va unida a ellos, tal fuerza la consideraremos proporcional a la deformación producida, es decir, a su alargamiento. Las gomas elásticas y filiformes obviamente no producen transmisión de fuerza en la comprensión porque se doblarían; no ocurre así en los muelles que pueden someterse a estiramiento y compresión, transmitiéndose en las dos direcciones de su eje; tampoco en este caso se considera el peso de la goma o resorte.

Las *fuerzas distribuidas*, pueden serlo en un volumen, como cuando actúa una fuerza gravitacional o eléctrica, y así por ejemplo el «peso» de un cuerpo es la suma de las fuerzas gravitacionales que localizamos en cada partícula que lo constituyen, veremos en un estudio próximo que estas fuerzas distribuidas la localizaremos en su *Centro de Gravedad (CG)* y consideraremos al cuerpo como una partícula con su masa localizada en él; para objetos homogéneos y con simetría central el CG estará en tal centro de simetría, en caso contrario será preciso realizar los cálculos para deter-

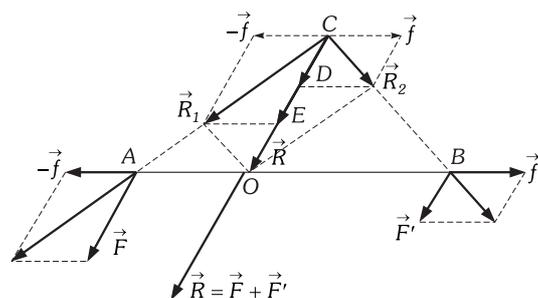


Fig. V-5.- Composición de fuerzas paralelas del mismo sentido.

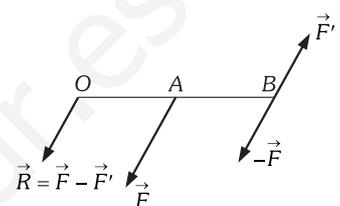


Fig. V-6.- Composición de fuerzas paralelas y de sentidos contrarios.

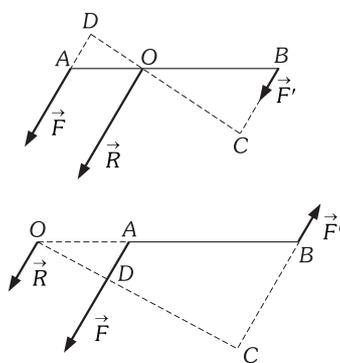


Fig. V-7.- Composición de fuerzas paralelas: construcción geométrica.

minar su localización. Son también fuerzas distribuidas las fuerzas normales que actúan en las superficies de contacto de los sistemas ligados, podremos considerar a tal fuerza como localizada cuando, por ejemplo, las superficies en contacto sean despreciables frente a las otras dimensiones del cuerpo, y también cuando la presión sobre la superficie en contacto la podamos considerar prácticamente homogénea; la suma de todas las fuerzas distribuidas las supondremos en estos casos, aplicadas a la línea que pasa por el punto considerado.

Los problemas con objetos en contacto o conectados, los resolveremos tratando cada cuerpo por separado, decimos que lo «aislamos», y en el caso que nos ocupa consideraremos a los cuerpos puntuales y a las fuerzas a que están sometidos localizadas en ellos, dibujando un diagrama de fuerzas aplicándoles las condiciones de equilibrio (cuando estas fuerzas no están compensadas aplicaremos a la resultante la segunda ley de Newton).

Las limitaciones que ponemos en la resolución de muchos problemas de Estática (generalizables a los de Dinámica) nos dan conclusiones con una determinada precisión y muchas veces totalmente válidas en las aplicaciones mecánicas; otras muchas veces será necesario tener en cuenta las imprecisiones, puesto que el error cometido puede influir notablemente en la producción de determinados mecanismos. En la resolución de problemas comenzamos estudiando los sistemas con supuestos que sucesivamente iremos considerando.

**PROBLEMAS: 1 al 36.**

**B) MOMENTO LINEAL. SEGUNDA Y TERCERA LEY DE NEWTON**

**V – 7. Definición de momento lineal para una partícula**

En el estudio de la dinámica, y extensiblemente a toda la Física, utilizamos magnitudes cuya importancia se irá viendo a medida que avancemos en nuestros estudios; éstas son entre otras, el momento lineal, impulso, momento angular, energía cinética, energía potencial, densidad, presión, ... etc. Introducimos estas magnitudes por definición, es decir, generamos una magnitud en la que nos interesa relacionar otras. Por ejemplo, al definir «velocidad» (magnitud parcialmente comprendida desde que se inicia nuestra razón) nos interesa una relación «espacio-tiempo» que nos de una idea de la «rapidez» de los cuerpos que se mueven a nuestro alrededor.

Si UNA PARTÍCULA de masa  $m$  está moviéndose, en un instante determinado, con la velocidad  $\mathbf{v}$ , definimos el MOMENTO LINEAL DE LA PARTÍCULA en ese instante (CANTIDAD DE MOVIMIENTO, MOMENTUM O ÍMPETU) como:

«Un vector ( $\mathbf{p}$ ), producto de su masa ( $m$ ) por la velocidad ( $\mathbf{v}$ ) que posee en ese instante».

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

y si  $\mathbf{r}$  es el vector de posición de la partícula referido a un origen  $O$ , teniendo en cuenta la definición de velocidad, podremos poner:

$$\mathbf{p} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt} = m\dot{\mathbf{r}}$$

El momento lineal se mide en el SI en  $\text{kg} \cdot \text{m/s}$ , o, como vamos a ver, en N.s.

Es evidente que distintas partículas  $m_1, m_2, \dots$  con distintas velocidades  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$  pueden tener el mismo momento lineal, basta para ello que se verifique:  $m_1 \mathbf{v}_1 = m_2 \mathbf{v}_2 = \dots$

**PROBLEMAS: 37 y 38**

**V – 8. Segunda ley de Newton. Primera ecuación del movimiento. Masa inerte**

Hemos visto que para que una partícula varíe su velocidad es necesario que otra u otras actúen sobre ella; la forma más general de describir ésta interacción es diciendo que:

«La fuerza que hace que dos partículas interaccionan entre sí y modifiquen su estado natural (reposo o movimiento rectilíneo y uniforme) se describe por el intercambio entre ellas de momento lineal».

Nos vamos a limitar a estudiar una sola partícula reduciendo sus interacciones con el resto del universo a un solo término que hemos llamado fuerza exterior  $\mathbf{F}$ , resultante de todas las que actúan sobre ella, y si ésta no es nula (el sistema no está equilibrado) entonces, siguiendo el planteamiento de Newton, la definimos cuantitativamente de la siguiente manera:

«El valor de la FUERZA TOTAL que actúa sobre una partícula, medida desde un sistema de referencia inercial, es igual a la derivada respecto al tiempo de su momento lineal».

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \dot{\mathbf{p}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \frac{dm}{dt} = m\dot{\mathbf{v}} + \dot{m}\mathbf{v}$$

si la masa de la partícula es constante  $\dot{m} = 0$  entonces:

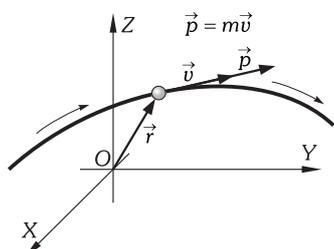


Fig. V-8.- Momento lineal, cantidad de movimiento o ímpetu de una partícula.

$$\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}} = m\ddot{\mathbf{r}}$$

a esta ecuación la llamaremos PRIMERA ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO DE LA PARTÍCULA. Teniendo en cuenta la definición de aceleración, escribimos:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Podemos así enunciar el SEGUNDO PRINCIPIO DE NEWTON O DE ACCIÓN DE FUERZAS de una forma más restrictiva, ya que ponemos la condición de masa constante, pero que nos resultará de gran utilidad en la práctica:

«Las fuerzas que actúan sobre una partícula son proporcionales a las aceleraciones que le producen».

Si sobre una partícula aplicamos diversas fuerzas — $F_1, F_2, F_3$ , etc.— se verifica que a doble, triple, etc., se produce doble, triple, etc., aceleración; es decir:

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_3}{a_3} = \dots = \text{cte.}$$

«A la constante de proporcionalidad entre la fuerza y la aceleración que produce, se le llama MASA INERTE de la partícula».

Insistimos de nuevo en el concepto fundamental de masa inerte que hemos nombrado anteriormente; y así: si aplicamos la misma fuerza a dos partículas distintas y la primera resulta más acelerada que la segunda, diremos que ésta tiene más masa inerte que aquella. «La masa es pues una medida cuantitativa del fenómeno de la inercia, es decir, de las dificultades que presenta una partícula cuando se pretende cambiar su estado de movimiento no dependiendo ni de su posición ni de la interacción con otras, es una propiedad inherente a ella».

En el capítulo I asociábamos a cada cuerpo un número (su masa) que se obtenía comparándolo con otro que tomábamos como «patrón», utilizando para ello la balanza, basada en la fuerza gravitatoria que actúa sobre el cuerpo; se tenía así un valor al que se le llama MASA GRAVITATORIA O MASA PESANTE.

En principio podría ocurrir que una partícula respondiera de distinta forma ante interacciones de distinta naturaleza (por ejemplo eléctrica y gravitatoria), con lo que sus masas inerte y gravitatoria podrían ser diferentes, sin embargo, no se conoce ninguna experiencia, hasta la fecha, que confirme que una partícula responda de distinta forma ante interacciones de distinta naturaleza, de hecho la identidad de ambas masas es la base de la teoría de la relatividad general de Einstein, que por ahora ha sido confirmada cada vez que ha sido puesta a prueba. Por estas razones, no distinguiremos a partir de ahora entre una y otra, y llamaremos a ambas simplemente «masa».

Hemos comenzado este párrafo por una definición:  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$  que está en perfecto acuerdo con el principio de «acción de fuerzas» enunciado por Newton, y esta fórmula es la expresión matemática de este principio.

Si nos preguntamos: ¿De dónde sale esto? nuestra respuesta es la misma a la dada para el primer principio de Newton: «está basado en la observación, y la ecuación anterior es la expresión matemática de nuestro estudio experimental siendo por tanto, una ley empírica».

Una de las innumerables comprobaciones experimentales de las afirmaciones hechas se obtiene cogiendo un plano que podemos inclinar el ángulo que queramos, con lo cual podremos actuar sobre un objeto con diferentes fuerzas, produciéndole distintas aceleraciones.

En efecto: sobre un plano liso (el rozamiento lo consideraremos nulo) ponemos un objeto de masa  $M$  después de inclinarlo un ángulo  $\varphi_1$ , sobre el objeto actúan las fuerzas exteriores indicadas en la Fig. V-9 (peso  $\mathbf{P} = M\mathbf{g}$  y la reacción normal del plano  $\mathbf{N}$ ) que le producirán un movimiento uniformemente acelerado con la aceleración dirigida hacia abajo de la pendiente del plano inclinado; el conjunto de las dos fuerzas los referimos al sistema de ejes  $OXY$  indicado en la Fig. V-9, con el eje  $OX$  en la dirección y sentido de  $\mathbf{a}$ , y el eje  $OY$  perpendicular a él. Al descomponer el peso  $\mathbf{P}$  en tales direcciones obtenemos:

$$F_1 = P_x = Mg \operatorname{sen} \varphi_1$$

$$P_y = Mg \operatorname{cos} \varphi_1$$

la componente  $P_y$  es anulada por la fuerza normal  $\mathbf{N}$ , por no existir movimiento en tal eje, y la fuerza causante del movimiento a la que hemos llamado  $F_1$  es perfectamente medible una vez calculado  $M$  con una balanza y medido el ángulo  $\varphi_1$ . La medida de  $a_1$  se hará midiendo la longitud recorrida por el objeto sobre el plano ( $l$ ) con una regla, y el tiempo que tarda en recorrerla ( $t$ ) con un cronómetro, hecho esto, la aplicación de las fórmulas del MRUA, nos proporciona el valor de  $a_1$ , en efecto:

$$l = \frac{1}{2} a_1 t^2 \Rightarrow a_1 = \frac{2l}{t^2}$$

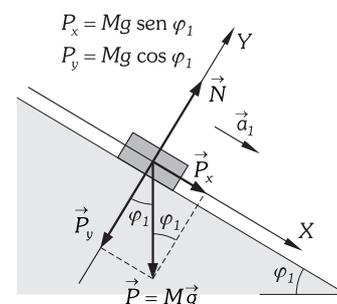


Fig. V-9.- Comprobación experimental de la Segunda Ley de Newton. Al variar el ángulo que forma el plano con la horizontal la componente del peso en la dirección del eje  $OX$  variará siendo ésta la responsable del M.R.U.A. del objeto en estudio.

Variando el ángulo de inclinación del plano a  $\varphi_2, \varphi_3, \dots$  las fuerzas responsables de las aceleraciones del objeto de masa  $M$  considerado:  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , y cuyos valores serán  $F_2 = Mg \text{ sen } \varphi_2, F_3 = Mg \text{ sen } \varphi_3, \dots$  son perfectamente medibles, de la misma forma que lo hemos hecho para el caso con el ángulo  $\varphi_1$ . Entonces verificamos que

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_3}{a_3} = \dots = M$$

de esta forma habremos comprobado experimentalmente la Segunda Ley de Newton.

**V - 9. Tercera Ley de Newton**

La Tercera Ley de Newton ha estado subyacente en lo anteriormente analizado; ésta ley se refiere a las interacciones mutuas que se ejercen entre sí las partículas, y la enunciaremos, haciendo referencia a un sistema formado por dos de ellas de la siguiente manera:

«Cuando dos partículas interactúan, la fuerza  $F_{21}$  que la primera ejerce sobre la segunda es igual y opuesta a la  $F_{12}$  que la segunda ejerce sobre la primera, estando ambas sobre la recta que une a las partículas».

$$F_{12} + F_{21} = 0$$

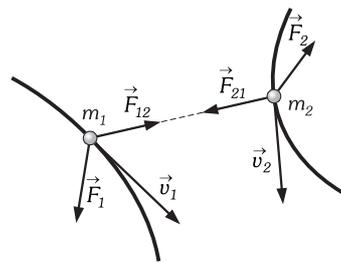


Fig. V-10.-  $F_{21} = -F_{12}$  independientemente de  $F_2$  y  $F_1$

Su justificación, como la primera ley, se hará partiendo del «Principio de Conservación del Momento lineal», a ella se llegó inicialmente con una observación minuciosa de la forma de proceder de la Naturaleza.

Si a una de esas fuerzas la llamamos «ACCIÓN», la otra recibe el nombre de «REACCIÓN». Es evidente en este enunciado que las fuerzas, como resultado de una interacción, se producen siempre por parejas de igual módulo, y con la característica de estar ambas (acción y reacción) aplicadas a cuerpos distintos. Así por ejemplo: sobre un bloque que descansa encima de una mesa (Fig. V-11), la fuerza que actúa sobre él, y hacia abajo en su peso  $P$ , debida a la atracción de la Tierra; una fuerza igual y opuesta  $P' = -P$  es ejercida por el bloque sobre la Tierra. La mesa, ejerce sobre él una fuerza hacia arriba y perpendicular a las superficies en contacto  $N$ ; el bloque ejerce a su vez una fuerza hacia abajo igual y de sentido contrario  $N' = -N$ ; las  $P$  y  $P'$  y las  $N$  y  $N'$  son de acción y reacción, y en este caso son todas iguales entre sí en módulo ( $N = N' = P = P'$ ).

La validez de este principio es independiente de la existencia de otras fuerzas originadas por otras partículas ( $F_1$  y  $F_2$ , en la Fig. V-10). La ecuación del movimiento para las partículas 1 y 2 de la figura serán:

$$F_1 + F_{12} = m_1 a_1 \qquad F_2 + F_{21} = m_2 a_2$$

si las fuerzas resultantes debidas al resto del universo son nulas, entonces:  $F_1 = F_2 = 0$ , obteniéndose:  $F_{12} = m_1 a_1 = -F_{21} = -m_2 a_2$ , y expresando esta igualdad en módulos, nos queda:  $m_1 a_1 = m_2 a_2 \Rightarrow m_1/m_2 = a_2/a_1$ ; tenemos así otro procedimiento para la medida de masas, sin más que elegir una de ellas como unidad patrón mediremos la otra calculando sus aceleraciones\*.

Insistimos en que los tres principios de Newton que hemos enunciado están referidos a SISTEMAS INERCIALES.

Hay que tener un especial cuidado en la aplicación de ésta ley puesto que nos origina frecuentemente errores; en el estudio de un sistema sometido a fuerzas tendremos que hacer un esquema de éstas actuando sobre el cuerpo y es absolutamente necesario ver claramente cuál de las dos fuerzas de la pareja se está considerando, para lo cual es necesario «aislar» el cuerpo en cuestión y ver cuál es la fuerza activa (acción) sobre él.

**PROBLEMAS: 39 al 85.**

**V - 10. La conservación del momento lineal como teorema**

«Si sobre la partícula, la fuerza total que actúa es nula, su momento lineal se mantiene constante durante el movimiento.»

En efecto:  $F = 0 \Rightarrow \dot{p} = 0 \Rightarrow p = mv = cte$

Es evidente que este teorema coincide con la 1ª ley de Newton.

**V - 11. Impulso lineal. Su relación con el momento lineal**

«Se define la magnitud IMPULSO LINEAL como el producto de la fuerza por el tiempo que actúa sobre la partícula.»

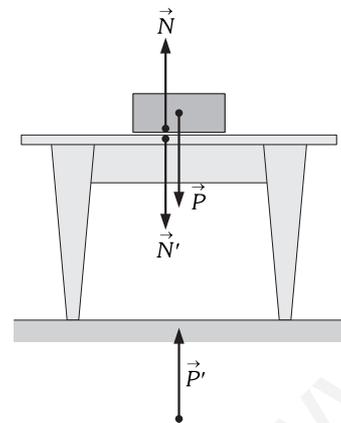


Fig. V-11.- Fuerzas de acción y reacción. Sobre el bloque actúan  $P$  y  $N$ .

\* De esta forma es como se determinó por primera vez la masa de un electrón en el átomo, y es uno de los argumentos que condujeron a Newton a enunciar la «Ley de Gravitación Universal».

En un desplazamiento infinitesimal durante un tiempo  $dt$ :

$$d\mathbf{I} = \mathbf{F} dt$$

y en uno finito entre los instantes  $t_0$  a  $t$ :

$$\mathbf{I} = \int_{t_0}^t \mathbf{F} dt$$

De la primera ecuación del movimiento para una partícula, deducimos:

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} \Rightarrow d\mathbf{I} = \mathbf{F} dt = d\mathbf{p} = d(m\mathbf{v}) \Rightarrow \mathbf{I} = \int_{t_0}^t \mathbf{F} dt = m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_0$$

«El impulso comunicado a un punto material se emplea en modificar su momento lineal».

Despejando en la última ecuación  $\mathbf{v}$ , nos queda:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \frac{1}{m} \mathbf{I} \\ \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{r}} \end{aligned} \right| \Rightarrow \int_{t_0}^t d\mathbf{r} = \int_{t_0}^t \left( \mathbf{v}_0 + \frac{1}{m} \mathbf{I} \right) dt \Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 (t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t \mathbf{I} dt$$

expresión que nos resuelve en muchos casos el problema formal de la dinámica.

La magnitud impulso es muy útil en casos en que una fuerza muy intensa actúa durante un tiempo muy corto sobre una partícula, como ocurre en las percusiones (por ejemplo al dar con una raqueta un golpe a una pelota de tenis) en las que en la mayoría de los casos es imposible llegar a conocer esa fuerza, no así la variación del momento lineal y por tanto el impulso que nos describe perfectamente el efecto de percusión en la dinámica de la partícula.

El PROMEDIO TEMPORAL DE UNA FUERZA en un intervalo  $\Delta t = t - t_0$ , se define:

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^t \mathbf{F} dt = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}$$

« $\langle \mathbf{F} \rangle$  es la fuerza constante que produce la misma variación del momento lineal en el mismo intervalo de tiempo, que la que realmente actúa [ $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$ ] en una percusión.»

**PROBLEMAS: 86 al 93.**

### C) MAGNITUDES DINÁMICAS ANGULARES DE LA PARTÍCULA

#### V - 12. Diferentes formas de analizar el movimiento producido por las fuerzas. Generalización del estudio cinemático

El problema que tratamos de resolver es: conocida la fuerza total  $\mathbf{F}(t)$  que en un instante determinado actúa sobre la partícula (resultante de sus interacciones con el resto del Universo y que en general será una función del tiempo), y la masa de ella, resolver el problema cinemático; es decir: calcular  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$  y  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ .

Se reduce el problema a uno de cálculo integral en el que tendrán que conocerse las correspondientes condiciones de contorno. Para su resolución en *coordenadas rectangulares*, consideraremos las tres componentes coordenadas de la fuerza total que actúa sobre la partícula, las cuales estarán referidas a un sistema inercial OXYZ:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \Rightarrow \begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \\ F_z = ma_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = F_x/m \\ a_y = F_y/m \\ a_z = F_z/m \end{cases}$$

obteniéndose así el valor de  $\mathbf{a}(t)^*$ . De la ecuación  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ , tendremos:  $dv_x = a_x dt$ ,  $dv_y = a_y dt$  y  $dv_z = a_z dt$ , de las cuales, por integración, obtenemos los valores de  $v_x$ ,  $v_y$  y  $v_z$  y por tanto de  $\mathbf{v}(t)$ . Considerando que  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ , deducimos:  $dx = v_x dt$ ,  $dy = v_y dt$  y  $dz = v_z dt$ , de las que por una nueva integración, obtenemos las componentes coordenadas del vector de posición y en consecuencia  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ; quedando el problema que nos hemos planteado totalmente resuelto.

En cinemática y como otra manera de estudiar los movimientos de la partícula, analizábamos las COMPONENTES TANGENCIAL Y NORMAL de la aceleración y velocidad; planteando el problema dinámico en la misma línea, descompondremos las fuerzas que actúan sobre la partícula en las direcciones según la tangente a la trayectoria y según la normal (dirigida hacia la concavidad de la trayectoria). Si llamamos  $\mathbf{F}(t)$  a la resultante total de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula,  $\mathbf{F}_t$  a la resultante de todas las componentes tangenciales y  $\mathbf{F}_n$  a la de las normales, que se la llama

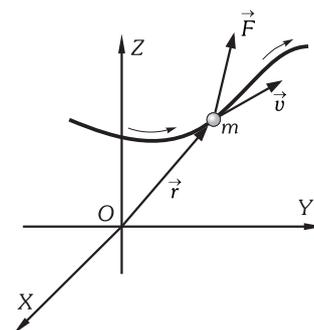


Fig. V-12.-  $\vec{F}$  y  $\vec{v}$  pertenecen al mismo plano (plano osculador).

\* El problema a partir de aquí se reduce a los ya estudiados en *cinemática*.

FUERZA CENTRÍPETA; aplicando la segunda ley de Newton y teniendo en cuenta la (9) del párrafo IV-4, obtenemos:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m(\mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n) = m \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} + m \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n} = F_t \boldsymbol{\tau} + F_n \mathbf{n}$$

que en función de las magnitudes angulares estudiadas:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\dot{v} \boldsymbol{\tau} + mv\dot{\phi} \mathbf{n} = m(\rho\ddot{\phi} + \dot{\rho}\dot{\phi}) \boldsymbol{\tau} + m\dot{\phi} \rho \mathbf{n}$$

para el caso particular del movimiento circular de radio  $R$  en el que  $\rho = R$ ,  $\dot{\rho} = 0$ ,  $\dot{\phi} = \omega$  y  $\ddot{\phi} = \alpha$ , nos queda

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\alpha R \boldsymbol{\tau} + m\omega^2 R \mathbf{n}$$

Pudiéndose expresar la FUERZA CENTRÍPETA de la forma:

$$F_n = m \frac{v^2}{R} = m\omega^2 R = m4\pi^2 \nu^2 R$$

de acuerdo con los diversos valores ya estudiados de la aceleración normal.

Debe observarse que la fuerza centrípeta no es una fuerza más a añadir a las que actúan sobre la partícula, sino que llamamos así a la resultante de las componentes de todas las fuerzas reales actuantes, en la dirección radial y sentido hacia el centro de curvatura. Así por ejemplo: si una partícula de masa  $m$  gira en un plano horizontal bajo la acción de la tensión  $\mathbf{T}$  y el peso  $m\mathbf{g}$  (Fig. V-14), con movimiento circular uniforme; la fuerza centrípeta es  $F_n = \mathbf{T} + m\mathbf{g}$ , por lo tanto pondremos  $\mathbf{T} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}_n$ , o bien, descomponiendo  $\mathbf{T}$  en una componente horizontal,  $\mathbf{T}_H$ , y otra vertical  $\mathbf{T}_V$  tendremos  $F_n = \mathbf{T}_H$ , con lo que  $T_H = ma_n \Rightarrow T_H = mv^2/R$ . Estas últimas ecuaciones se han planteado desde el punto de vista de un observador inercial.

También se ha descrito el movimiento plano en COORDENADAS POLARES, obteniéndose para la aceleración la ecuación (10) del párrafo IV-7. Supongamos que una partícula de masa  $m$  se encuentra en un instante determinado en un punto  $P$  de coordenadas polares  $r$  y  $\theta$  (Fig. V-15), descomponiendo la fuerza resultante  $\mathbf{F}$  de las fuerzas que actúan sobre la partícula en sus componentes radial y transversal, resulta ser la ecuación de su movimiento:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{u}_r + m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \mathbf{u}_\theta = F_r + F_\theta$$

Todos los problemas que se han propuesto en cinemática, son convertibles en dinámicos sin más que incluir  $\mathbf{F}$  o  $m$  como dato.

**PROBLEMAS: 94 al 109.**

**V - 13. Definición del momento de una fuerza con respecto a un punto\***

«EL MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN PUNTO ( $\mathbf{N}$ ) es un vector libre igual al producto vectorial del vector de posición del origen de la fuerza respecto del punto, por la propia fuerza».

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Según esta definición,  $\mathbf{N}$  es un vector perpendicular al plano determinado por la fuerza y el punto, cuyo sentido (hacia arriba en el caso de la Fig. V-16) coincide con el avance de un sacacorchos que apoya su punta en  $O$  y, colocado perpendicularmente al plano formado por el vector y el punto, girase en el sentido que indica el vector  $\mathbf{F}$  alrededor del punto. El módulo del momento es:

$$N = Fr \sin \varphi = Fd$$

ya que  $r \sin \varphi = d$ , siendo  $d$  la menor distancia del punto a la dirección del vector.

Como la fuerza es un vector deslizante, si en vez de suponerla aplicada en  $P$ , la suponemos aplicada en  $P'$ , el momento de  $\mathbf{F}$  con respecto a  $O$  será:

$$\mathbf{N}' = \mathbf{r}' \times \mathbf{F} = \mathbf{OP}' \times \mathbf{F} \quad \Bigg| \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N} = (\mathbf{r}' + \mathbf{P}'\mathbf{P}) \times \mathbf{F} = \mathbf{r}' \times \mathbf{F} + \mathbf{P}'\mathbf{P} \times \mathbf{F} = \mathbf{N}'$$

\* Consideramos conveniente repetir esta definición dada en el capítulo II párrafo 18

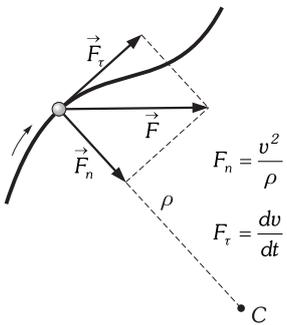


Fig. V-13.- Componentes intrínsecas del vector fuerza en un instante determinado.

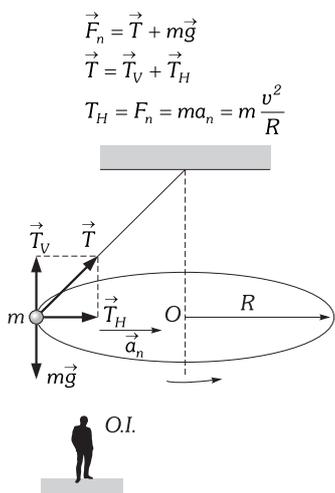


Fig. V-14.- Partícula de masa  $m$  girando en un plano horizontal bajo la acción de las fuerzas  $\mathbf{T}$  y  $m\mathbf{g}$  (péndulo cónico).

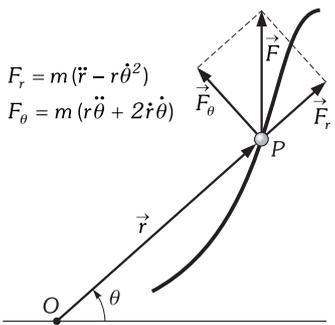


Fig. V-15.- Componentes polares del vector fuerza en un determinado instante.



ya que el producto vector  $\mathbf{P}'\mathbf{P} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$  por tener ambos vectores la misma dirección, lo que demuestra:

«El momento de una fuerza con respecto a un punto no varía aunque el origen de la fuerza se desplace a lo largo de su dirección».

El momento de una fuerza respecto de un punto  $O$  ( $\mathbf{N}$ ) es distinto que el momento de dicha fuerza respecto de otro punto  $O'$  ( $\mathbf{N}'$ ), la relación entre ellos se deduce de la Fig. V-18 en la que:  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{O}'\mathbf{O}$  y como:

$$\mathbf{N}' = \mathbf{r}' \times \mathbf{F} = (\mathbf{r} + \mathbf{O}'\mathbf{O}) \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{O}'\mathbf{O} \times \mathbf{F} \Rightarrow \boxed{\mathbf{N}' = \mathbf{N} + \mathbf{O}'\mathbf{O} \times \mathbf{F}}$$

«El momento de una fuerza respecto a un punto  $O'$  es igual al momento respecto a otro  $O$  más el momento de dicha fuerza respecto al punto  $O'$  supuesta aplicada en  $O$ ».

Es obvio que el momento de una fuerza respecto a un punto contenido en su recta de acción es nulo.

### V - 14. Definición de momento angular de una partícula

Supongamos una partícula de masa  $m$ , cuyo vector de posición en un instante determinado es  $\mathbf{r}$  (Fig. V-19), moviéndose con una velocidad  $\mathbf{v}$  con respecto a un punto  $O$ , origen del vector  $\mathbf{r}$ . Definimos MOMENTO ANGULAR DE LA PARTÍCULA (o MOMENTO CINÉTICO) CON RESPECTO A  $O$ , como:

«Un vector ( $\mathbf{J}$ ) resultado del producto vectorial del vector de posición ( $\mathbf{r}$ ) por el vector momento lineal ( $\mathbf{p}$ ) de la partícula», o lo que es lo mismo: «El momento de la cantidad de movimiento respecto a  $O$ ».

$$\boxed{\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}} \tag{1}$$

Teniendo en cuenta las definiciones de  $\mathbf{p}$  y de  $\mathbf{v}$ , podemos poner:

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

El momento angular de la partícula dependerá del momento lineal y del punto  $O$  elegido para calcularlo, si cambiamos este último, como (Fig. V-20):

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{O}'\mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{J}' = (\mathbf{r} + \mathbf{O}'\mathbf{O}) \times \mathbf{p} = \mathbf{J} + \mathbf{O}'\mathbf{O} \times \mathbf{p} \tag{2}$$

ecuación que nos relaciona los momentos angulares de una partícula respecto de dos puntos distintos  $O$  y  $O'$ . Ambos momentos tendrán, en general, distintos dirección y módulo; sin embargo, esto no ocurre en el caso de que  $O$  y  $O'$  pertenezcan a una recta paralela a la velocidad instantánea (Fig. V-21), entonces sus módulos son iguales, y valen:

$$J = r p \text{ sen } \varphi = b p$$

siendo  $b$  el brazo de  $\mathbf{p}$  respecto de  $O$ , o sea, la menor distancia de  $O$  a la recta soporte de  $\mathbf{p}$ .

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J} + \mathbf{O}'\mathbf{O} \times \mathbf{p}$$

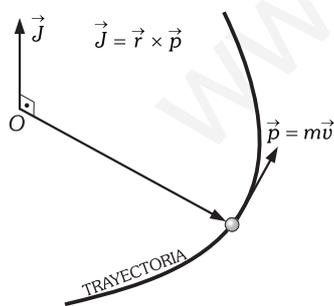


Fig. V-19.- Momento angular.

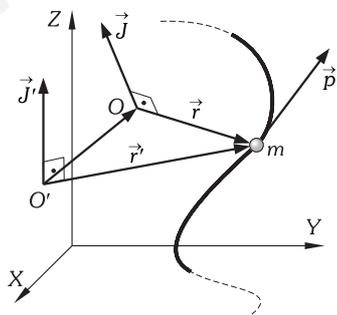


Fig. V-20.- Relación entre los momentos angulares referidos a dos puntos diferentes.

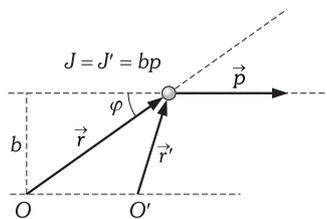


Fig. V-21.- Si  $O$  y  $O'$  pertenecen a una recta paralela a la velocidad instantánea, los módulos de los momentos angulares respecto a dichos puntos son iguales.

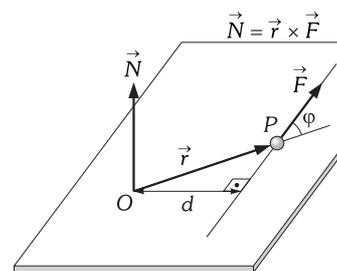


Fig. V-16.- Momento de una fuerza respecto de un punto.

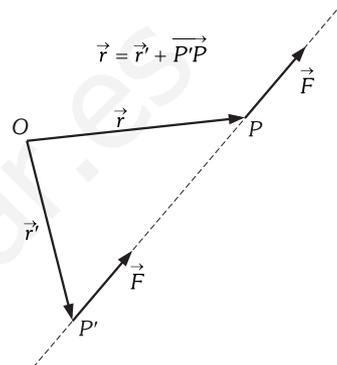


Fig. V-17.- El momento de una fuerza con respecto a un punto no varía aunque el origen la fuerza se desplace a lo largo de su dirección.

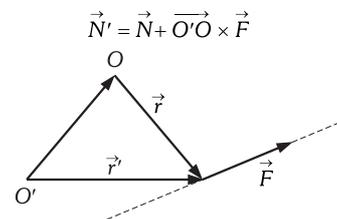


Fig. V-18.- Cambio de centro de momento.

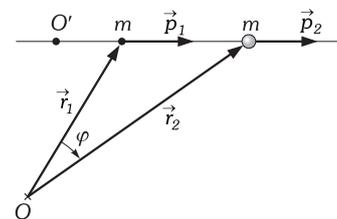


Fig. V-22.- El momento angular de una partícula, que posee un movimiento rectilíneo, respecto a cualquier punto de su trayectoria es cero.

Un caso particular interesante nos permitirá introducirnos en las aplicaciones dinámicas del momento angular. Si la partícula posee un movimiento rectilíneo, respecto de cualquier punto de su trayectoria ( $O'$  en Fig. V-22) se tiene  $\mathbf{J}' = \mathbf{0}$ , y por otra parte, desde  $O$  la velocidad de la partícula sólo tiene componente en dirección radial. Sin embargo, desde  $O$  medimos  $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$  ( $\mathbf{J} = \mathbf{cte}$  si

el movimiento es además uniforme, y  $\mathbf{J} \neq \text{cte}$  si es variado); además, la velocidad de la partícula respecto de  $O$  tiene componente perpendicular al vector de posición, cuyo módulo de acuerdo con IV-7 (coordenadas polares) es:  $v_\phi = r\dot{\phi}$ . En conclusión, podemos asociar momento angular de la partícula con la idea de vector de posición barriendo ángulos en el tiempo.

Como ya se puede intuir, esta magnitud va a ser de capital importancia en el estudio del movimiento de rotación, aunque como acabamos de ver no es privativo de él.

En COORDENADAS POLARES, como  $\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r$  y  $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$ , obtenemos:

$$\mathbf{J} = mr\mathbf{u}_r \times (\dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta) \Rightarrow \boxed{J = mr^2\dot{\theta}} \quad (3)$$

que tiene la dirección perpendicular a  $\mathbf{u}_r$  y  $\mathbf{u}_\theta$ .

**V – 15. Segunda ecuación del movimiento de la partícula**

Una vez definido el momento angular de una partícula, vamos a estudiar qué magnitudes lo hacen variar de un instante a otro. Si derivamos  $\mathbf{J}$  respecto del tiempo, obtenemos:

$$\dot{\mathbf{J}} = \frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}$$

el primer sumando de esta expresión es nulo por ser  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  y  $\mathbf{p}$  dos vectores paralelos, y el segundo, en virtud del segundo principio de Newton, lo podemos poner de la forma:

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{N}$$

donde  $\mathbf{F}$  es la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula, y  $\mathbf{N}$  el momento resultante. Tenemos, en definitiva:

$$\boxed{\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{J}}{dt} = \dot{\mathbf{J}}}$$

expresión que llamaremos SEGUNDA ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO DE LA PARTÍCULA; pudiéndose enunciar:

«El momento, respecto de un punto, de la fuerza neta que actúa sobre una partícula es igual a la derivada temporal del momento angular de la partícula, respecto del mismo punto».

Si derivamos respecto del tiempo la ecuación (2), teniendo en cuenta que el vector  $\mathbf{O'O}$  es constante, obtenemos:

$$\dot{\mathbf{J}}' = \dot{\mathbf{J}} + \mathbf{O'O} \times \dot{\mathbf{p}} \Rightarrow \mathbf{N}' = \mathbf{N} + \mathbf{O'O} \times \mathbf{F}$$

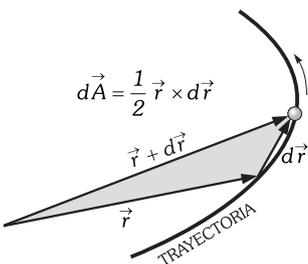
y volvemos a tener la expresión ya obtenida en el párrafo V-13 que nos relaciona los momentos de la fuerza respecto de dos puntos distintos.

**V – 16. Velocidad y aceleración areolar**

Spongamos que una partícula describe una trayectoria cualquiera y tomemos un punto fijo  $O$  arbitrario. Se define VELOCIDAD AREOLAR:

$$\boxed{\mathbf{V}_A = \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \dot{\mathbf{A}}}$$

en la que  $d\mathbf{A}$  tiene de módulo el área barrida por el radio vector que parte de  $O$  en el tiempo  $dt$  y tiene la dirección perpendicular a dicha área. De la Fig. V-23, la definición de producto vectorial, y (1):



$$d\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{r} + \frac{1}{2} \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times d\mathbf{r} \Rightarrow \boxed{\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{V}_A = \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{1}{2m} \mathbf{J}} \quad (4)$$

y teniendo en cuenta (3) podemos expresar el módulo de este vector en polares:

$$\boxed{V_A = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}} \quad (5)$$

Fig. V-23.– Área barrida por el radio vector en un tiempo  $dt$ .

ACELERACIÓN AREOLAR es un vector axial, límite a que tiende el incremento del vector velocidad areolar, dividido por el incremento del tiempo cuando éste tiende a cero.

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V_A}{\Delta t} = \frac{dV_A}{dt} = \frac{1}{2m} \frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2m} N$$

Es, por lo tanto, la derivada de la velocidad areolar con respecto del tiempo, o la derivada segunda del área barrida por el radio vector con respecto del tiempo dos veces.

**V - 17. La conservación del momento angular como teorema**

«Si el momento, respecto de un punto, de la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula es nulo, su momento angular respecto al mismo punto permanece constante con el tiempo».

En efecto: si la  $F$  pasa por un punto (o es nula) entonces su momento respecto a él es  $N = r \times F = 0$  puesto que  $F$  y  $r$  serán paralelos, y como:

$$N = \frac{dJ}{dt} = 0 \Rightarrow J = cte$$

**V - 18. Impulso angular. Su relación con el momento angular**

Se define la magnitud IMPULSO ANGULAR comunicado a una partícula en un tiempo elemental  $dt$ , como:

$$dM = N dt$$

y para un intervalo de tiempo comprendido entre  $t_0$  y  $t$ :

$$M = \int_{t_0}^t N dt$$

de la segunda ecuación del momento deducimos:

$$N = \frac{dJ}{dt} \Rightarrow dM = N dt = dJ \Rightarrow M = \int_{t_0}^t dJ = J - J_0$$

«El impulso angular se emplea en modificar el momento angular.»

**V - 19. Fuerzas centrales. Teorema de las áreas**

«Diremos que una FUERZA ES CENTRAL cuando su dirección pasa siempre por un punto fijo llamado CENTRO».

Supongamos a una partícula sometida a una fuerza central, la segunda ecuación del movimiento referida al centro será:  $N = dJ/dt = r \times F = 0$ , por tener  $r$  y  $F$  la misma dirección. En consecuencia:

$$J = r \times mv = cte$$

siendo el vector  $J$  perpendicular al plano que forman  $r$  y  $v$ , su constancia en dirección, nos demuestra que el plano de  $r$  y  $v$  es siempre el mismo, es decir: *la trayectoria es plana*.

Teniendo en cuenta (4), obtenemos para la velocidad areolar, cuando la partícula se mueve bajo la acción de una fuerza que siempre tiene la dirección de un punto (FUERZA CENTRAL):

$$V_A = \frac{dA}{dt} = cte$$

que en polares y según (5) se escribe:  $V_A = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = cte$

pudiéndose enunciar el TEOREMA DE LAS ÁREAS:

«En los movimientos producidos por fuerzas centrales la trayectoria seguida por la partícula es plana y la velocidad areolar es constante, por lo tanto, las áreas barridas por el radio vector (vector de posición) en los mismos tiempos son iguales».

**PROBLEMAS: 110 al 122**

**D) SISTEMAS NO INERCIALES.  
DINÁMICA DEL MOVIMIENTO RELATIVO DE LA PARTÍCULA**

**V - 20. Principio de equilibrio dinámico o principio de D'Alembert**

En la resolución de muchos problemas de mecánica nos resulta muy cómodo describir un determinado fenómeno desde el punto de vista de un observador ligado a un sistema no inercial, es

decir, con aceleración respecto de otro inercial. Interpretar de esta forma los movimientos nos obliga, como vamos a ver, a introducir en su descripción unas fuerzas *ficticias desde el punto de vista de un observador inercial*, a las que llamaremos FUERZAS DE INERCIA O PSEUDOFUERZAS.

Por ahora analicemos unos ejemplos sencillos que nos conducirán a enunciar el principio de equilibrio dinámico. Supongamos que un observador desde la acera de una carretera (sistema inercial) ve arrancar un coche y describe el fenómeno diciendo que por efecto de la fuerza producida por el motor el coche se mueve con una aceleración, y cuantifica el fenómeno escribiendo la segunda ley de Newton:  $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$ . Un observador en el interior del coche (sistema no inercial) dice que debido a la fuerza que el motor ejerce sobre el auto, sobre él actúa una fuerza en sentido contrario que le aprieta al respaldo del asiento, concluye diciendo que sobre el coche con todos sus ocupantes, actúa una fuerza (que repetimos, es ficticia desde el punto de vista inercial) de sentido contrario a la fuerza producida por el motor. Es decir, el observador *no inercial* saca en consecuencia que: «Cuando una fuerza ( $\mathbf{F}$ ) produce una aceleración a un cuerpo, se origina en éste, una fuerza igual y opuesta a la primera. El valor de esta fuerza es  $-M\mathbf{a}$ , tal fuerza se llama "FUERZA DE INERCIA"». [Principio de Jean le Rond D'ALEMBERT (1717-1783).

$$\mathbf{F} - M\mathbf{a} = 0$$

«En todo sistema, la suma de todas las fuerzas que actúan sobre él incluidas las de inercia, ha de ser igual a cero» (PRINCIPIO DE EQUILIBRIO DINÁMICO).

Las fuerzas de inercia no verifican al principio de acción y reacción puesto que no son el producto de la interacción entre dos cuerpos.

Este método de resolver los problemas, menos pedagógico que la aplicación del segundo principio de Newton, y en el que utilizaremos no sólo las fuerzas «reales» sino también las de inercia, nos reduce el problema dinámico a uno de estática que en ocasiones es más sencillo e incluso más intuitivo.

Analicemos otro ejemplo que nos permite aclarar más lo anteriormente dicho. Supongamos la situación esquematizada en la Fig. V-24. El vehículo se mueve con aceleración  $\mathbf{a}$  hacia la derecha. El observador inercial interpreta la inclinación del péndulo razonando que, para que la esfera se acelere solidariamente con todo el vehículo, la resultante  $\mathbf{F} = m\mathbf{g} + \mathbf{T}$  debe ser horizontal, verificándose  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ . Por la misma razón, su compañero del interior del vehículo debe agarrarse fuertemente al soporte. El observador no inercial, que suponemos incapaz de ver el exterior del vehículo, además de notar un tirón hacia la izquierda que debe compensar con la fuerza de su brazo para evitar caer, ve el péndulo inclinado y en reposo con respecto a él. Si quiere asociar reposo con

fuerza resultante nula, debe introducir una fuerza,  $\mathbf{F}_{in}$ , sobre el péndulo para escribir:  $\mathbf{T} + m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{in} = \mathbf{0}$ , o bien:  $\mathbf{F} + \mathbf{F}_{in} = \mathbf{0}$ , respondiendo esta ecuación al principio de D'Alembert. Tanto el observador inercial como el no inercial pueden escribir ecuaciones válidas referentes al péndulo,  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  y  $\mathbf{F} + \mathbf{F}_{in} = \mathbf{0}$  respectivamente (con  $\mathbf{F}_{in} = -m\mathbf{a}$ ).

De la misma naturaleza es, la fuerza que tira hacia afuera al ocupante de un vehículo que describe una curva (*fuerza centrífuga*), causa ésta misma de la ingravidez en un vehículo espacial.

Analicemos desde éste punto de vista el ejemplo dado en el párrafo V-12 y que representábamos en la Fig. V-14. Si nos situamos ahora sobre la masa  $m$  como observadores no inerciales (Fig. V-25) notaremos una fuerza que nos empuja hacia fuera y veremos el centro de la trayectoria siempre a la misma distancia de nosotros, es decir, respecto de la dirección radial estamos en reposo. Escribiremos (principio de D'Alembert):  $\mathbf{T} + m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{cf} = \mathbf{0}$ , o bien la componente horizontal de  $\mathbf{T}$ :  $T_H = F_{cf}$ , donde con  $F_{cf}$  designamos a la fuerza que nos empuja hacia fuera y que llamaremos FUERZA CENTRÍFUGA. Esta fuerza, que nos inventamos y que nadie nos hace, es de igual módulo y de sentido contrario que la centrípeta,  $\mathbf{F}_{cf} = -mv^2 \mathbf{n}/R$  ( $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal a la trayectoria de la partícula y dirigido hacia su centro).

Como se ve en las ecuaciones anteriores, ambos observadores llegarán a los mismos resultados numéricos para sus cálculos. El observador inercial no interpreta la «tendencia» hacia afuera del no inercial como una fuerza, sino como una «tendencia» (inercia) a seguir con movimiento rectilíneo y uniforme.

Para la resolución de muchos problemas de mecánica, nos conviene describir el movimiento de una partícula en movimiento curvilíneo, desde el punto de vista de un observador montado en ella (sistema no inercial), por la simplificación que ello introduce.

**PROBLEMAS: 55, 59, 71, 72, 95, 104 y 123.**

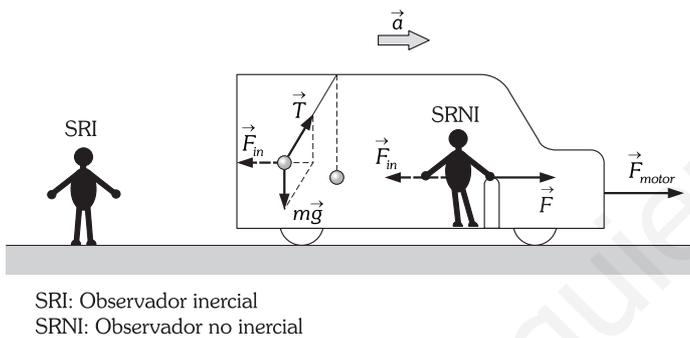


Fig. V-24.- Fuerzas de inercia.

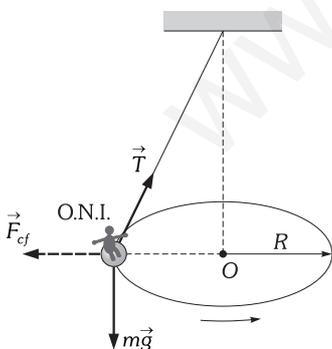


Fig. V-25.- Descripción del movimiento del péndulo cónico por un observador montado en la partícula (sistema no inercial).

**V - 21. Dinámica del movimiento relativo. Fuerza de arrastre y fuerza de Coriolis**

Sabemos que las observaciones que efectuamos desde la superficie de la Tierra (por ejemplo), están hechas desde un sistema no inercial y para determinados trabajos, los factores de corrección que hay que introducir al «traducirlos» a un sistema inercial, pueden ser de consideración. Haremos primeramente un estudio general del problema y luego estudiaremos el movimiento relativo a la superficie terrestre.

En el capítulo IV apartado C estudiábamos el caso cinemático general y relacionábamos las medidas efectuadas desde un sistema de referencia no inercial ( $\mathbf{r}' =$  vector de posición,  $\mathbf{v}_r =$  velocidad relativa,  $\mathbf{a}_r =$  aceleración relativa) con las que se realizarían desde un sistema inercial ( $\mathbf{r} =$  vector de posición,  $\mathbf{v} =$  velocidad absoluta,  $\mathbf{a} =$  aceleración absoluta) mediante las fórmulas:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}' \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + [\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'] \tag{6}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_a + \mathbf{a}_c = \mathbf{a}_r + \left[ \mathbf{a}_0 + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \right] + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$$

en las que  $\mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{v}_0$  y  $\mathbf{a}_0$  son el vector de posición, velocidad y aceleración del origen del sistema de referencia del observador referido al sistema inercial y  $\boldsymbol{\omega}$  es el vector que nos caracteriza la rotación instantánea del sistema no inercial.

Llamando  $\mathbf{F}$  a la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula cuya masa es  $m$ , el observador inercial escribirá la segunda ley de Newton de la forma:  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ . Por su parte, el observador no inercial mide para el punto móvil una aceleración  $\mathbf{a}_r$  con lo que interpretará que sobre la partícula actúa una fuerza  $\mathbf{F}_r$  dada por  $\mathbf{F}_r = m\mathbf{a}_r$ . Evidentemente las fuerzas  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{F}_r$  son distintas, ésta última contiene los términos:

$$\mathbf{F}_r = m\mathbf{a}_r = m(\mathbf{a} - \mathbf{a}_a - \mathbf{a}_c) = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_a - m\mathbf{a}_c$$

que la escribimos de la forma:

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{F} + \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_c$$

llamada ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA DINÁMICA DEL MOVIMIENTO RELATIVO mediante la cual, podemos estudiar la dinámica desde un sistema no inercial en la forma ordinaria, si añadimos a las fuerzas exteriores los términos  $\mathbf{F}_a$  y  $\mathbf{F}_c$ ; los cuales corresponden a las fuerzas de inercia (ficticias desde el sistema inercial), que no son fuerzas que actúen sobre la partícula por ningún tipo de interacción con otras partículas, y contienen los siguientes términos:

FUERZA DE ARRASTRE: 
$$\mathbf{F}_a = -m\mathbf{a}_a = -m\mathbf{a}_0 - m \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

$-m\mathbf{a}_0$  = Fuerza en la dirección de la traslación de  $S'$  (sistema no inercial) respecto de  $S$  (inercial) y de sentido contrario a la aceleración del sistema  $S'$ .

$-m \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}'$  = Fuerza de sentido contrario a la aceleración tangencial de la partícula respecto de  $S'$ .

$-m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$  = Fuerza de módulo  $m\omega^2\rho$  y sentido hacia fuera del radio de curvatura de la trayectoria (fuerza centrífuga).

FUERZA DE CORIOLIS: 
$$\mathbf{F}_c = -m\mathbf{a}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$$

El observador no inercial la ha de considerar siempre que esté girando respecto del inercial y la partícula en estudio tenga una  $\mathbf{v}_r$  (respecto de él) no paralela a su velocidad angular.

**V - 22. Movimiento relativo a ejes en la superficie terrestre**

Tratamos de encontrar la ecuación del movimiento de la partícula para reducir las medidas dinámicas efectuadas sobre la superficie de la Tierra (sistema de observación no inercial) a un sistema de ejes que consideramos inercial definido por un triedro trirectángulo (OXYZ) con origen en el centro de la Tierra, el eje OZ en la dirección del eje polar y sentido hacia el norte, entonces el plano XOY será el del ecuador y definimos el sentido positivo del eje OX en la dirección del punto vernal (es el punto equinocial de primavera, se llama también punto Aries pues está dirigido hacia esa constelación). Consideramos, además, la Tierra como esférica y girando alrededor de su eje con velocidad angular constante  $\boldsymbol{\omega}$  que irá invariablemente en el sentido positivo del eje OZ y cuyo módulo toma el valor:  $\omega = 73 \times 10^{-6}$  rad/s.

Para simplificar el problema que nos planteamos, consideremos un sistema (OX'Y'Z') con origen en el centro de la Tierra y que gira con ella alrededor del eje OZ (Fig. V-26). En estas condiciones tendremos que:

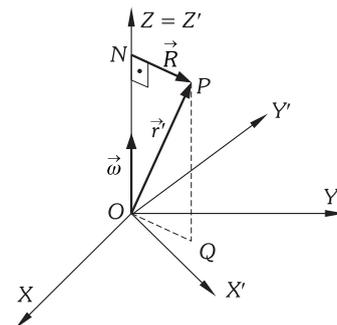


Fig. V-26.- Movimiento relativo a ejes en la superficie terrestre.

$$r_0 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}' \\ \mathbf{v}_0 = \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_0 = \mathbf{0} \end{cases} \wedge \omega = \text{cte} \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = \mathbf{0}$$

además, si  $\mathbf{r}'$  lo descomponemos como se indica en la figura, en suma de dos vectores  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{ON}$  tendremos:

$$\omega \times \mathbf{r}' = \omega \times \mathbf{R} + \omega \times \mathbf{ON} = \omega \times \mathbf{R}$$

$$\omega \times (\omega \times \mathbf{r}') = \omega \times [\omega \times \mathbf{R} + \omega \times \mathbf{OR}] = \omega \times (\omega \times \mathbf{R})$$

ya que  $\omega \times \mathbf{ON}$  es nulo por tener ambos vectores la misma dirección; y aplicando la propiedad del doble producto vectorial vista en el párrafo II-17, obtenemos:

$$\omega \times (\omega \times \mathbf{R}) = (\omega \cdot \mathbf{R}) \omega - \omega^2 \mathbf{R} = -\omega^2 \mathbf{R}$$

puesto que  $\omega \times \mathbf{R} = \mathbf{0}$ , por ser perpendiculares. Según lo anterior las ecuaciones (6) nos quedan:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \omega \times \mathbf{R} \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_r - \omega^2 \mathbf{R} + 2 \omega \times \mathbf{v}_r$$

multiplicando la última por  $m$  y empleando la notación establecida en el párrafo anterior, tendremos:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_r - m\omega^2 \mathbf{R} + 2m\omega \times \mathbf{v}_r \Rightarrow \boxed{\mathbf{F}_r = \mathbf{F} + m\omega^2 \mathbf{R} - 2m\omega \times \mathbf{v}_r}$$

ecuación que es la misma que para el movimiento respecto a la superficie terrestre ya que si definimos un sistema solidario con la Tierra, con su origen en la superficie permanecerá invariable respecto al  $(OX'Y'Z')$  y las medidas de la velocidad y aceleración relativas serán las mismas.

Considerando el caso en que sobre la partícula, que se encuentra en un lugar próximo a la superficie terrestre, la única fuerza externa que actúa es la atracción de la Tierra (párrafo VI-1), entonces:

$$\mathbf{F} = -G \frac{mM_0}{R_0^3} \mathbf{R}_0 = m\mathbf{g}_0$$

que sustituida en la anterior nos queda:  $\mathbf{F}_r = m\mathbf{g}_0 + m\omega^2 \mathbf{R} - 2m \omega \times \mathbf{v}_r$ , llamando:  $\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \omega^2 \mathbf{R}$ , o sea el vector resultante de la atracción terrestre y la fuerza centrífuga, que se denomina ACELERACIÓN EFECTIVA DE LA GRAVEDAD y que es el vector que nos señala la dirección de la plomada (ésta es la aceleración que nos mide un péndulo), escribiremos:

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{g} - 2\omega \times \mathbf{v}_r \Leftrightarrow \mathbf{F}_r = m\mathbf{g} - 2m \omega \times \mathbf{v}_r$$

Si además de la atracción terrestre existe otra fuerza exterior  $\mathbf{F}$ , la ecuación del movimiento respecto a los ejes  $(OX'Y'Z')$  definidos será:

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{F} + m\mathbf{g} - 2m \omega \times \mathbf{v}_r$$

La fuerza de Coriolis será nula cuando la partícula se encuentre en reposo respecto al observador colocado en  $(OX'Y'Z')$ , ya que  $\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$ ; y será despreciable comparada con el término  $\omega^2 \mathbf{R}$ , cuando el movimiento de la partícula respecto a  $(OX'Y'Z')$  sea lento, es decir  $\mathbf{v}_r$  pequeña. La aceleración de Coriolis se tendrá muy en cuenta en caída de cuerpos desde gran altura y en el estudio de las trayectorias de los cohetes y satélites debido a la gran velocidad, relativa a la superficie terrestre, que alcanzan.

### V - 23. Influencia de la rotación de la Tierra en la dirección de la plomada

Vamos a hacer aplicación de la fórmula ya obtenida:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_r - m\omega^2 \mathbf{R} + 2m \omega \times \mathbf{v}_r$$

en la que  $\mathbf{F}$  es la suma de todas las fuerzas externas descritas por un observador ligado a un sistema de ejes tal y como representamos en la Fig. V-27 tomando el valor:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}_0 + \mathbf{T}$$

$\mathbf{T}$ : tensión de la cuerda que sujeta a la partícula que hace de plomada.  $\mathbf{F}_r = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{v}_r = \mathbf{0} \Rightarrow 2m \omega \times \mathbf{v}_r = \mathbf{0}$ , puesto que la plomada se encuentra en reposo respecto a unos ejes solidarios con la superficie de la Tierra, quedándonos:

$$m\mathbf{g}_0 + \mathbf{T} = -m\omega^2 \mathbf{R}$$

en la que:

$$\mathbf{R}_0 = R_0 \cos \varphi \mathbf{i} + R_0 \sin \varphi \mathbf{j}$$

$$\mathbf{g}_0 = -G \frac{M_0}{R_0^3} \mathbf{R}_0 = -G \frac{M_0}{R_0^2} (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j})$$

$$\mathbf{R} = R_0 \cos \varphi \mathbf{i}$$

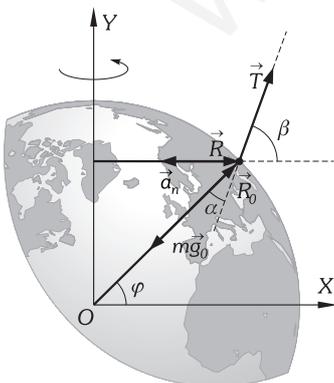


Fig. V-27.- Ángulo  $\alpha$  que se desvía la plomada en un lugar de latitud  $\varphi$ , debido a la rotación de la Tierra.

luego 
$$\mathbf{T} = -m\mathbf{g}_0 - m\omega^2\mathbf{R} = m \cos \varphi \left( G \frac{M_0}{R_0^2} - \omega^2 R_0 \right) \mathbf{i} + G \frac{mM_0}{R_0^2} \sin \varphi \mathbf{j}$$

con lo que:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{T_y}{T_x} = \frac{G \frac{mM_0}{R_0^2} \sin \varphi}{m \cos \varphi \left( G \frac{M_0}{R_0^2} - \omega^2 R_0 \right)} \Rightarrow \beta = \operatorname{arctg} \frac{GM_0 \operatorname{tg} \varphi}{GM_0 - \omega^2 R_0^3} = \varphi + \alpha \Rightarrow \alpha = -\varphi + \operatorname{arctg} \frac{GM_0 \operatorname{tg} \varphi}{GM_0 - \omega^2 R_0^3}$$

evidentemente esta desviación está dirigida hacia el Sur en el hemisferio Norte (hacia el Norte en el hemisferio Sur).

**V - 24. Acción de la fuerza centrífuga en la caída libre desde pequeñas alturas**

Consideremos la ecuación  $\mathbf{F}_r = m\mathbf{g} - 2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$ , en la que despreciamos la aceleración de Coriolis (término  $-2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$ ) por considerar que  $\mathbf{v}_r$  es pequeña en la caída libre de la partícula desde pequeñas alturas, comparadas con el radio terrestre, sobre su superficie, nos queda:

$$\mathbf{F}_r = m\mathbf{g} = m\mathbf{g}_0 + m\omega^2\mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \omega^2\mathbf{R}$$

aplicando esta última ecuación a unos ejes móviles de referencia ( $O'X'Y'Z'$ ) de manera que su origen  $O'$  se encuentre en un lugar de latitud  $\varphi$  sobre el hemisferio Norte, el eje  $O'Z'$  definido en la dirección del radio terrestre y sentido positivo hacia afuera de la Tierra, el eje  $O'Y'$  tangente al meridiano del lugar y sentido positivo hacia el polo Norte y el eje  $O'X'$  tangente al paralelo que pasa por el lugar y por tanto en la dirección positiva Este (Fig. V-28), obtenemos:

$$\begin{cases} g_{0x'} = 0 \\ g_{0y'} = 0 \\ g_{0z'} = -g_0 = -G \frac{M_0}{R_0^2} \end{cases} \left| \begin{array}{l} R_{x'} = 0 \\ R_{y'} = -R \operatorname{sen} \varphi = -R_0 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \\ R_{z'} = R \operatorname{cos} \varphi = R_0 \operatorname{cos}^2 \varphi \end{array} \right.$$

luego:

$$\begin{aligned} g_{x'} &= \frac{d^2 x'}{dt^2} = 0 \\ g_{y'} &= \frac{d^2 y'}{dt^2} = -\omega^2 R_0 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \\ g_{z'} &= \frac{d^2 z'}{dt^2} = -G \frac{M_0}{R_0^2} + \omega^2 R_0 \operatorname{cos}^2 \varphi \end{aligned}$$

La primera de estas ecuaciones nos indica que el movimiento de caída libre (sin velocidad inicial) de la partícula se realiza en el plano meridiano (plano  $OX'Y'$  de la Fig. V-28); la tercera que la componente de la fuerza centrífuga se opone a que el cuerpo caiga sobre la superficie terrestre, el movimiento de caída es uniformemente acelerado partiendo del reposo con la aceleración  $g_{z'}$  que es prácticamente igual a la aceleración de la gravedad del lugar que vamos a llamar  $g$ , y por tanto, para una altura  $h$  se verificará:  $h = gt^2/2 \Rightarrow t^2 = 2h/g$ ; y la segunda que el movimiento en el eje  $OY'$  es uniformemente acelerado partiendo del reposo, y experimentará un desplazamiento:

$$y' = \frac{1}{2} g_y t^2 = -\omega^2 R_0 \frac{h}{g} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi$$

el signo menos nos indica que este desplazamiento es hacia el Sur en el hemisferio Norte (haciendo un estudio para el hemisferio Sur obtenemos un desplazamiento hacia el Norte).

**V - 25. Acción de la fuerza de Coriolis en la caída libre y en el movimiento horizontal**

Tomemos un sistema de referencia ( $O'X'Y'Z'$ ) idéntico al descrito en la cuestión anterior, el vector  $\boldsymbol{\omega}$  tendrá por componentes coordenadas (Fig. V-28):

$$\omega_x = 0 \quad \omega_y = \omega \operatorname{cos} \varphi \quad \omega_z = \omega \operatorname{sen} \varphi$$

$$\begin{aligned} R_{y'} &= -R \operatorname{sen} \varphi = -R_0 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \\ R_{z'} &= R \operatorname{cos} \varphi = R_0 \operatorname{cos}^2 \varphi \end{aligned}$$

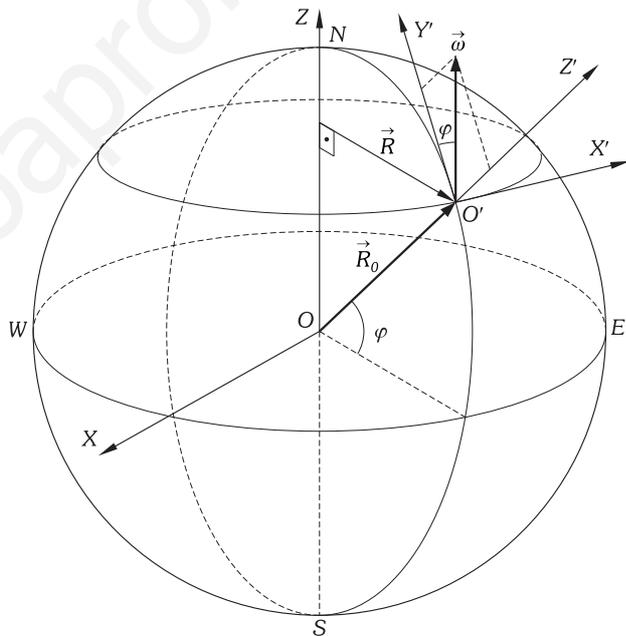


Fig. V-28.- Acción de la fuerza centrífuga en la caída libre desde "pequeñas" alturas comparadas con el radio terrestre.

1) CAÍDA LIBRE

En el caso de la caída libre en la expresión:

$$F_r = mg - 2m \omega \times v_r \Rightarrow a_r = g - 2 \omega \times v_r$$

no vamos a considerar la desviación producida por la fuerza centrífuga y tomaremos el vector  $g$  y el  $v_r$  en la dirección vertical descendente, que ahora coincide con el eje  $Z'$ , por lo que  $g(0, 0, -g)$  y  $v_r(0, 0, -v_r)$ , tomando para  $g$  el valor de la aceleración de la gravedad del lugar; en estas condiciones el valor de la aceleración de Coriolis es:

$$-2\omega \times v_r = -2 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \omega \cos \varphi & \omega \sin \varphi \\ 0 & 0 & -v_r \end{vmatrix} = 2\omega v_r \cos \varphi \mathbf{i}$$

que tiene el sentido positivo del eje  $O'X'$  (dirigido hacia el Este); sustituyendo, deducimos:

$$a_{rx'} = \frac{d^2x'}{dt^2} = 2\omega v_r \cos \varphi \quad a_{ry'} = \frac{d^2y'}{dt^2} = 0 \quad a_{rz'} = \frac{d^2z'}{dt^2} = -g$$

la segunda de estas ecuaciones nos dice que el movimiento tiene lugar en el plano  $X'O'Z'$ , la tercera nos da el recorrido según la vertical:

$$\frac{dz'}{dt} = v_r = -gt \Rightarrow z' = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

en la que  $h$  es la altura desde la que cae el móvil, y por tanto el grave llega al suelo ( $z' = 0$ ) en un tiempo:  $t = \sqrt{2h/g}$ ; y como  $v_r = gt$ , obtenemos de la primera de las ecuaciones:

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = 2\omega gt \cos \varphi \Rightarrow \frac{dx'}{dt} = \omega gt^2 \cos \varphi \Rightarrow x' = \frac{1}{3}\omega g \left[ \frac{2h}{g} \right]^{3/2} \cos \varphi \Rightarrow x' = \frac{2}{3}\omega h \sqrt{\frac{2h}{g}} \cos \varphi$$

este valor nos da el desplazamiento hacia el Este que sufre el grave contado desde la vertical del punto de partida. En ambos hemisferios el desplazamiento debido a la fuerza de Coriolis es hacia el Este.

2) MOVIMIENTO HORIZONTAL

Estudiamos el lanzamiento de un cuerpo en la dirección del meridiano del lugar con una velocidad inicial  $v$  y dirigido hacia el Norte. En este caso  $v_r(0, v, 0)$  y por tanto:

$$2\omega \times v_r = 2 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \omega \cos \varphi & \omega \sin \varphi \\ 0 & v & 0 \end{vmatrix} = -2\omega v \sin \varphi \mathbf{i}$$

luego las componentes de  $a_r$  serán:

$$a_{rx'} = \frac{d^2x'}{dt^2} = 2\omega v \sin \varphi \quad a_{ry'} = \frac{d^2y'}{dt^2} = 0 \quad a_{rz'} = \frac{d^2z'}{dt^2} = -g$$

de la primera deducimos que:

$$x = \omega vt^2 \sin \varphi$$

luego el proyectil sufre una desviación hacia la derecha (dirección Este) del plano de lanzamiento.

Al ser el valor de  $\omega = 2\pi/86\,400 = 73 \times 10^{-6}$  rad/s esta aceleración numéricamente tiene poca importancia, pero es considerable en movimientos de larga duración que tienen lugar en la superficie terrestre, ya que al actuar de forma continua puede producir efectos considerables. Por esta razón, en un río cuya dirección es de Sur a Norte, la orilla derecha resulta más erosionada que la izquierda.

PROBLEMAS

A) COMPOSICIÓN DE FUERZAS. ESTÁTICA DE LA PARTÍCULA

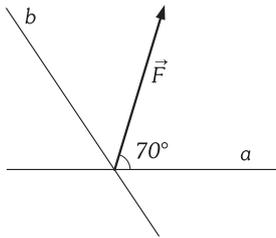
1. Tres fuerzas de módulos 6, 10 y 12 N actúan sobre una partícula, y forman respectivamente ángulos de 60°, 150° y 225° con la dirección positiva del eje OX. Calcular la resultante, su módulo y el ángulo que forma con la dirección positiva del eje OX.

2. Al descomponer la fuerza  $F$ , de módulo 500 N, en las direcciones de las rectas  $a$  y  $b$  indicadas en la Fig. se quiere que la componente en la dirección de la recta  $a$  sea de 200 N. Determinar el valor de la componente en la dirección de la recta  $b$ .

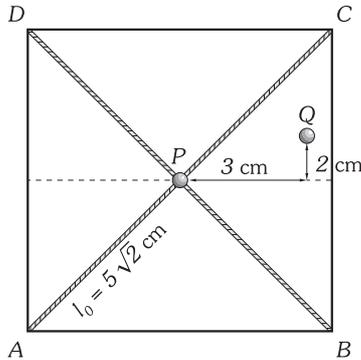
3. Si descomponemos una fuerza  $F$  de 300,0 N en dos componentes cuya diferencia entre sus módulos es:  $F_1 - F_2 = 100,0$  N; y la compo-

nente  $F_1$  forma un ángulo de  $25^\circ$  con  $F$ . Calcular  $F_1$  y  $F_2$  y el ángulo que forman.

4. En el centro  $P$  de un cuadrado rígido  $ABCD$ , situado sobre una mesa horizontal, se encuentra una partícula que va unida a las vértices por cuatro gomas elásticas idénticas, cuya longitud natural (sin estiramiento) es  $l_0 = 5\sqrt{2}$  cm. Las gomas son tales que, al estirarlas, las tensiones que «tirán» de la partícula son proporcionales a la longitud que se alargan, y el valor de la constante de proporcionalidad es  $k = 1$  N/cm. Se traslada la partícula del punto  $P$  al  $Q$  situado en el lugar que nos indica la Fig., y se suelta; calcular la fuerza que actúa sobre la partícula en tal instante.

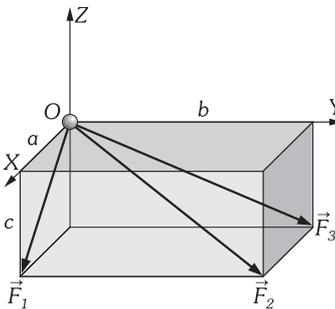


Problema V-2.

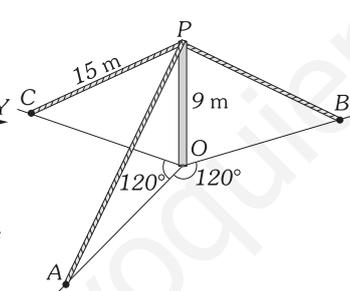


Problema V-4.

5. Sobre la partícula situada en  $O$  actúan las fuerzas que indicamos en la Fig. Los lados del paralelepípedo trirectángulo tienen por longitudes  $a = 3$  cm,  $b = 10$  cm y  $c = 5$  cm. La relación entre fuerza y longitud en el diagrama es  $K = 10$  N/cm. Determinar la fuerza que actúa sobre la partícula.



Problema V-5.



Problema V-6.

6. El poste de 9 m de altura de la Fig. se encuentra en equilibrio en posición vertical sobre un terreno horizontal, sujeto por tres cables que se consideran inextensibles y sin peso apreciable, de longitudes iguales a 15 m, y que se encuentran unidas a él en su parte superior. Las tensiones de los cables  $PA$ ,  $PB$  y  $PC$  son 450, 300 y 200 N respectivamente. Calcular la fuerza resultante que los cables ejercen sobre el poste.

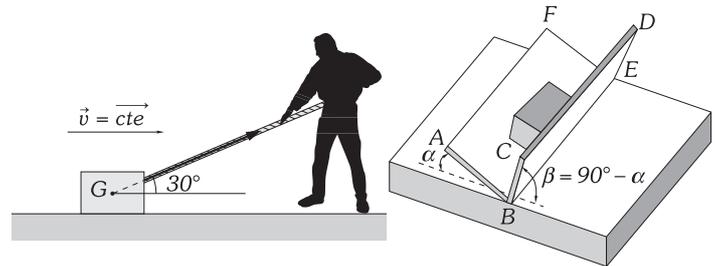
7. Un observador situado en el origen de un sistema de referencia inercial  $OXYZ$ , ve que una partícula se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme, conoce que su peso es  $\mathbf{P} (0, 0, 50)$  N y que es impulsada por  $\mathbf{F}_1 (30, -40, -60)$  N. Determinar la tercera fuerza que actúa sobre la partícula.

8. Arrastramos por una superficie horizontal un bloque de 100,0 kg con movimiento rectilíneo y uniforme; para ello atamos una cuerda inextensible y sin peso apreciable y tiramos de ella con una fuerza de 300,0 N formando un ángulo de  $30^\circ$  con el suelo como indicamos en la Fig. Calcular el valor de la fuerza de rozamiento y la reacción normal del suelo sobre el bloque.

9. Un bloque de 100 kg se encuentra sobre un plano inclinado  $45^\circ$ ; si la fuerza de rozamiento entre el bloque y el plano es despreciable, calcular: 1) Fuerza mínima paralela al plano inclinado capaz de mantener al bloque en reposo. 2) Fuerza mínima horizontal capaz de mantener al bloque en reposo. 3) Fuerza mínima que forma un ángulo de  $15^\circ$  con el plano inclinado capaz de mantener al bloque en reposo y el valor de la reacción normal del plano inclinado sobre el objeto.

10. Los dos brazos de la guía de la figura forman entre sí un ángulo de  $90^\circ$ . Sobre ella descansa un cubo de masa  $m$ . La articulación de la

guía con el plano horizontal permite variar el ángulo  $\alpha$ . 1) Calcular el ángulo  $\alpha$  para el cual la normal ejercida por la cara izquierda ( $ABEF$ ) es  $k$  veces mayor que la otra. 2) ¿Cómo son ambas normales si  $\alpha = 45^\circ$ ?

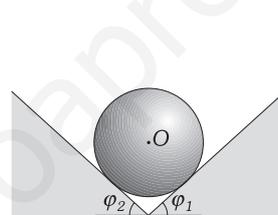


Problema V-8.

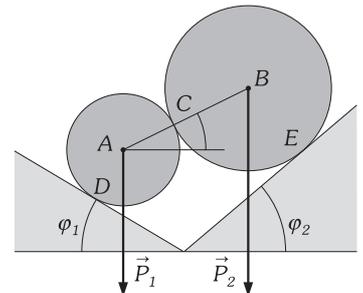
Problema V-10.

11. La esfera de masa  $M$  de la Fig. descansa sobre dos planos inclinados lisos, formando los ángulos  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  con la horizontal. Determinar las reacciones normales a los planos inclinados que actúan sobre la esfera en los puntos de contacto con ellos.

12. En la figura los dos cilindros de centros  $A$  y  $B$  se encuentran en equilibrio y tienen por radios  $R_1$  y  $R_2$ , pesando  $P_1$  y  $P_2$  respectivamente; también son datos los ángulos  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  que los planos forman con la horizontal. Determinar el ángulo  $\varphi$ , que forman la línea de los centros ( $AB$ ) con la horizontal. Suponemos que en los puntos  $C$ ,  $D$  y  $E$  (puntos de contacto entre las distintas superficies), las fuerzas de rozamiento son despreciables.

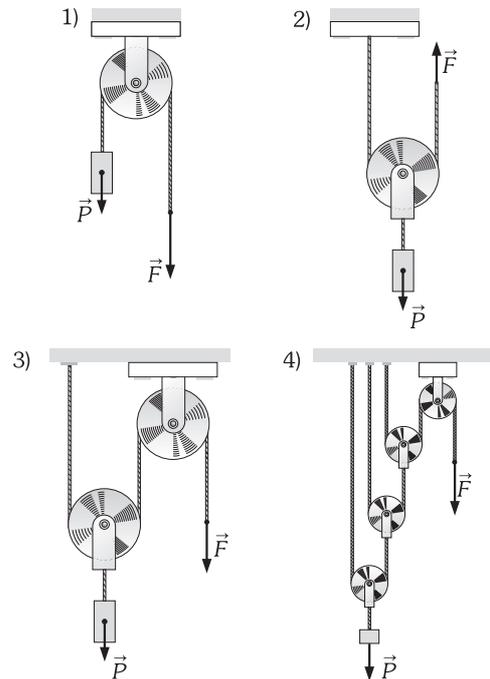


Problema V-11.



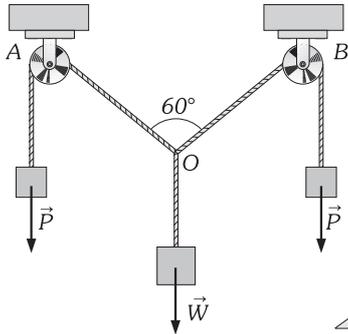
Problema V-12.

13. Determinar la fuerza  $F$  que tiene que aplicar una persona en los cuatro casos de la Fig. para mantener el sistema en reposo o con movimiento rectilíneo y uniforme. El peso  $\mathbf{P}$  es dato, y se consideran despreciables los pesos de las poleas frente a él, y también los rozamientos.

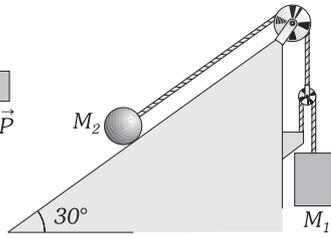


Problema V-13.

14. Un peso de 10 kg pende de una cuerda como indica la figura. Calcular los pesos iguales que hay que colgar de los cabos de la cuerda, que pasa por las poleas A y B, para que exista equilibrio. El rozamiento del eje de las poleas y de la cuerda con las guías es inapreciable.



Problema V-14.



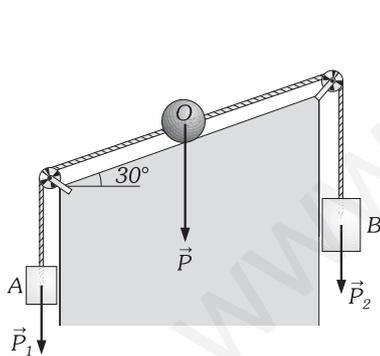
Problema V-16.

15. En el extremo superior de un plano inclinado liso (sin rozamiento apreciable) hay una polea por cuya garganta pasa un cordón que consideramos inextensible y sin peso, uno de los extremos del cordón es vertical y sostiene atado a un extremo un cuerpo de masa 3 kg y el otro cordón se mantiene paralelo al plano inclinado y tiene atado un cuerpo de masa 5 kg. Si el sistema se encuentra en equilibrio, calcular: la tensión de la cuerda, la reacción normal del plano y el ángulo que forma con la horizontal. El rozamiento en el eje de la polea y, entre la cuerda y las guías, existe, pero no es considerable.

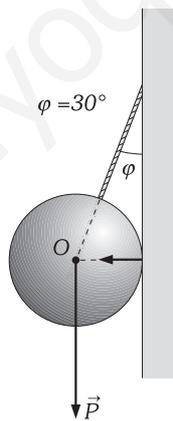
16. ¿Qué relación existe entre las masas  $M_1$  y  $M_2$  del sistema de la Fig. que se encuentra en equilibrio si  $\alpha = 30^\circ$ ? Las masas de las poleas y de las cuerdas, así como los rozamientos, son despreciables.

17. El sistema de la Fig. está en equilibrio. Los pesos  $P_1$  y  $P_2$  valen 10 y 20 N respectivamente. Determinar el peso P de la esfera que se encuentra situada sobre el plano inclinado liso. Los rozamientos en los ejes de las poleas, y entre las guías y la cuerda, son inapreciables. Calcular también la reacción normal del plano inclinado.

18. La esfera de la Fig. pesa 100,0 N está suspendida por una cuerda inextensible y sin peso y descansa sobre una pared vertical lisa. Determinar la tensión de la cuerda y la reacción de la pared sobre la esfera.



Problema V-17.



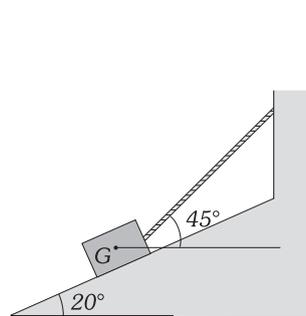
Problema V-18.

19. El bloque de la Fig. es de masa 112,5 kg, está apoyado sobre un plano inclinado liso (sin rozamiento apreciable) y sujeto a la pared vertical con un cable inextensible y sin peso. Calcular la tensión del cable y la reacción normal del plano.

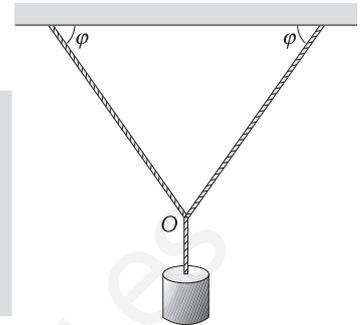
20. 1) Calcular las tensiones de los cabos de la cuerda inextensible y sin peso apreciable de la Fig., en función del ángulo  $\varphi$  y del peso P. Hacer aplicación para  $\varphi = 30^\circ$  y  $P = 100$  kp. 2) La máxima tensión que pueden soportar las cuerdas es T; calcular el ángulo  $\varphi$  para tal tensión, supuesto pendiente el peso P. ¿Sufrirán los cabos de la cuerda mayor o menor tensión, para ángulos menores que  $\varphi$ ?

21. Calcular las tensiones de los cabos de la cuerda inextensible y sin peso apreciable de la Fig. en función de los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , y del peso P. Aplicación:  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ ,  $\gamma = 30^\circ$  y  $P = 100$  kp.

22. Una persona que pesa 70 kg se cuelga de una anilla, que puede deslizarse sin rozamiento apreciable por una cuerda floja de 20 m de longitud, fijada por sus extremos a dos puntos con diferentes alturas; el punto más bajo dista 14 m del otro en dirección horizontal y 3 m en vertical. Determinar la posición y las tensiones en las dos partes de la cuerda cuando la anilla se para. (La cuerda es inextensible y sin peso y la masa de la anilla no es considerable frente al peso de la persona).

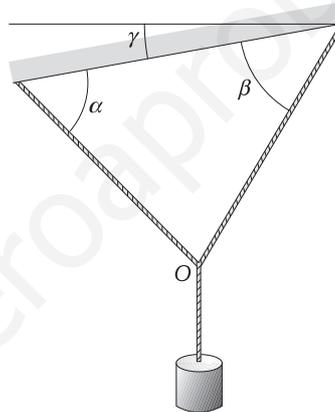


Problema V-19.

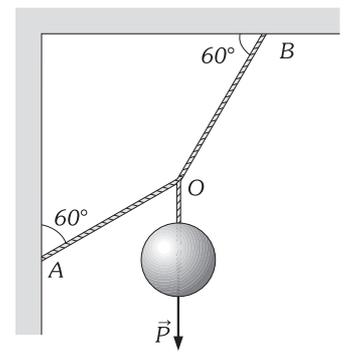


Problema V-20.

23. Calcular las tensiones de las cuerdas inextensibles y sin peso apreciable de la Fig. La masa del colgante es 40,0 kg.



Problema V-21.

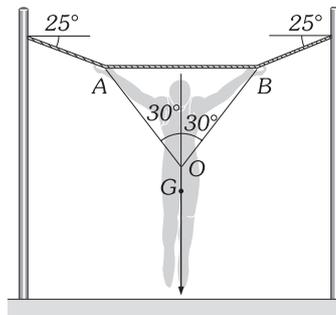


Problema V-23.

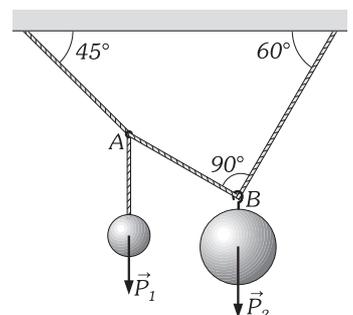
24. Un atleta que pesa 700 N se cuelga de una barra fija que suponemos indeformable. Hallar la fuerza que ejerce cada uno de sus brazos sobre la barra cuando estos forman un ángulo de  $90^\circ$ .

25. Determinar las tensiones de las cuerdas inextensibles y sin peso apreciable de la Fig. y las fuerzas que ejerce el «colgado», de masa 63,5 kg, sobre las cuerdas.

26. El sistema queda en equilibrio de la forma indicada en la Fig. El peso  $P_1$  de 100,0 N está ligado a la cuerda inextensible y sin peso apreciable con un nudo fijo y el  $P_2$  con una anilla que le permite moverse libremente a lo largo de la cuerda. Determinar el valor del peso  $P_2$ .



Problema V-25.

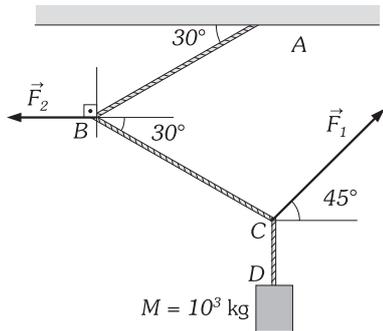


Problema V-26.

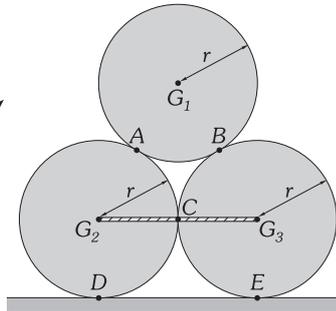
27. Determinar las tensiones de las cuerdas inextensibles y sin peso apreciable (AB, BC y CD), y las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  (ver Fig.), siendo  $M = 1000$  kg.

28. Tres cilindros iguales, homogéneos de radio r y masa M se encuentran apilados en un plano horizontal, y en el equilibrio unidos los

dos inferiores por una cuerda inextensible y sin peso apreciable de longitud  $2r$  (ver Fig.). Si suponemos que no existe rozamiento en los puntos de contacto; determinar la tensión de dicha cuerda y las fuerzas que actúan sobre cada uno de ellos en los puntos de contacto, y con el suelo.

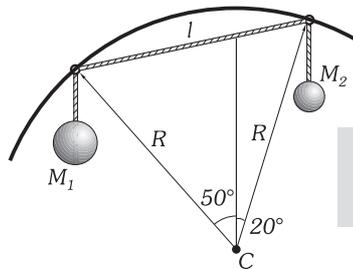


Problema V-27.

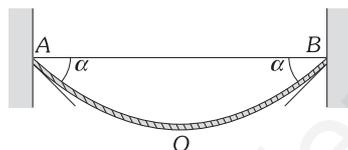


Problema V-28.

29. A un aro rígido le insertamos dos anillas a las que atamos dos bolas de masas  $M_1 = 2$  kg y  $M_2 = 1$  kg; unimos las dos anillas con otra cuerda de longitud  $l = 1$  m (ver Fig.). Consideramos a las cuerdas inextensibles y sin peso y que las anillas pueden deslizarse por el aro sin rozamiento. Calcular: 1) El radio del aro que permite tal situación. 2) La tensión de la cuerda  $l$ .



Problema V-29.



Problema V-30.

30. Un cable homogéneo de peso  $P$  y longitud  $L$ , está sujeto por sus extremos a la pared como se indica en la Fig., en la que el ángulo  $\alpha$  es dado. Determinar: 1) La fuerza que ejerce el cable sobre la pared en el punto A. 2) La tensión del cable en su punto más bajo O. 3) La ecuación de la forma (curva) que adopta el cable.

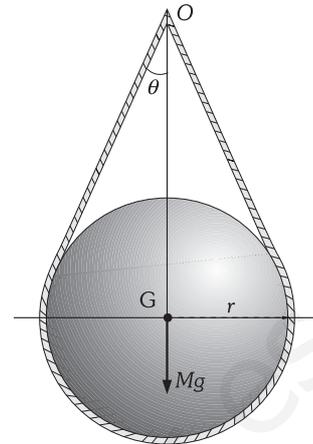
31. Si la resistencia que opone el aire al movimiento de una gota de lluvia en su seno es proporcional a la velocidad con que se mueve ( $R = kv$ ) demostrar que adquiere una velocidad límite y calcular su valor (DATOS:  $k$ : constante de proporcionalidad,  $M$ : masa de la gota y  $g$ : aceleración de la gravedad).

32. 1) De una goma elástica de longitud natural (sin alargamiento)  $l_{01} = 10$  cm se cuelga una partícula de masa  $m = 0,5$  kg; si la tensión de ésta, actuando sobre la partícula, es proporcional a su alargamiento y la constante de proporcionalidad es  $k_1 = 1$  N/cm; determinar la distancia contada desde el punto de suspensión de la goma hasta la posición en que  $m$  se encuentra en equilibrio. 2) A la goma del apartado anterior, le unimos otra de  $l_{02} = 20$  cm y  $k_2 = 2$  N/cm y le colgamos al sistema así formado (las dos gomas en serie) la misma masa  $m$ ; ¿cuál será ahora la distancia pedida en el apartado 1? (Suponemos las gomas de masa despreciable frente a  $m$  y el valor de  $g = 10$  N/kg).

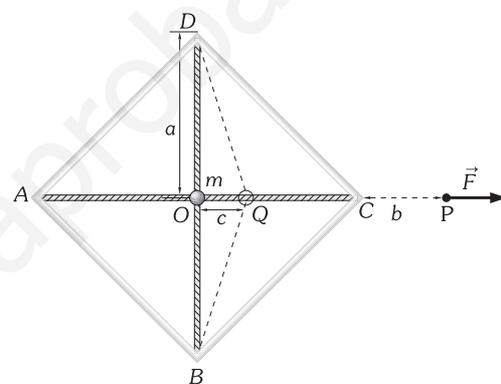
33. Se coloca una goma elástica, de masa despreciable, alrededor de una esfera homogénea de radio  $r$ , que tiene una guía a lo largo de su circunferencia máxima ajustándose a ella sin presión; la colgamos de un punto O como se indica en la Fig. Si en el equilibrio la goma forma con la vertical un ángulo  $\theta$  y su tensión es proporcional al alargamiento, siendo  $k$  la constante de proporcionalidad, determinar la masa de la esfera. (Despreciar los rozamientos entre la guía y la goma).

34. En el centro de un cuadrado rígido ABCD situado sobre una mesa horizontal, se encuentra una partícula que va unida en los vértices por cuatro gomas elásticas idénticas, cuya longitud natural (sin estiramientos) es  $a = 10$  cm. Las gomas son tales que al estirar las tensiones que «tiran» de la partícula son proporcionales a la longitud que se alargan, siendo  $k = 1$  N/cm la constante de proporcionalidad. Se suelta la goma del punto C y estiramos ejerciendo una fuerza  $F$  en la dirección de

la diagonal AC, como indicamos en la Fig., hasta el punto P, quedando el sistema en equilibrio: si el desplazamiento de la partícula es  $c = 2$  cm. Determinar el alargamiento total  $b$  de las gomas AO y OC y la fuerza  $F$ .

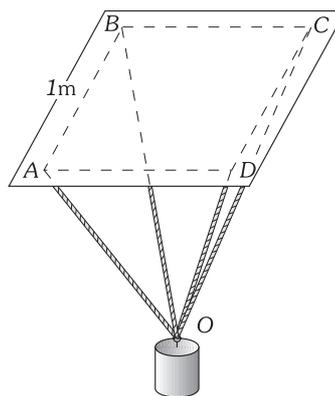


Problema V-33.

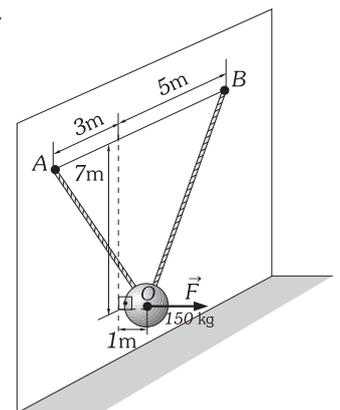


Problema V-34.

35. Determinar la tensión de cada cuerda de la Fig. siendo  $P = 1$  000 kp, ABCD cuadrado de lado 1 m y 1 m la longitud de cada una de las cuerdas ( $AO = BO = CO = DO$ ).



Problema V-35.



Problema V-36.

36. Una bola de 150 kg de masa, está en equilibrio sujeta por dos cables OA y OB a una pared vertical, y separada de ella por efecto de la fuerza  $F$  perpendicular a la pared como se indica en la Fig. Determinar las tensiones de los cables y la fuerza  $F$ .

**B) MOMENTO LINEAL. SEGUNDA Y TERCERA LEY DE NEWTON**

37. Calcular el momento lineal de la Tierra en su órbita respecto del centro del Sol como sistema fijo (inercial). (Masa de la Tierra:  $5,98 \times 10^{24}$  kg; distancia promedio al Sol:  $1,496 \times 10^8$  km; período de revolución: 365,26 d).

**38.** Calcular el momento lineal de un proyectil que pesa 10 kg y se lanza con una velocidad de 100 m/s, formando un ángulo de 45° con la horizontal: 1) En el punto más elevado de su trayectoria. 2) En el punto en que alcanza de nuevo la horizontal. 3) A los 10 s del lanzamiento. **4)** Cuál es la variación total del momento lineal del proyectil desde su lanzamiento hasta que alcanza de nuevo la horizontal.

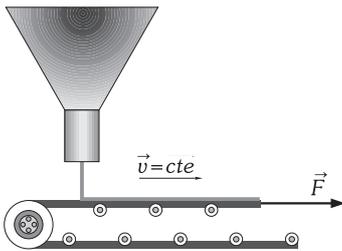
**39.** Calcular el momento lineal de un coche que pesa 1 t y que marcha a una velocidad de 108 km/h. Si frena bruscamente, parándose en 80 m, ¿cuánto vale la fuerza de frenado?

**40.** Un camión de 30 t de masa moviéndose en una carretera horizontal pasa de la velocidad de 30 km/h a 50 km/h en 2 min. Calcular la fuerza adicional ejercida por el motor supuesta constante en tal intervalo de tiempo.

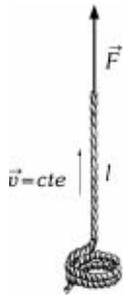
**41.** La rapidez de un móvil varía uniformemente desde 5 m/s hasta 9 m/s en 2 s. Si la fuerza constante que produce esta variación vale 20 kp, calcular: 1) Velocidad media en dicho intervalo de tiempo. 2) Masa de móvil expresada en kg.

**42.** El momento lineal que posee una partícula de masa 20 kg es de 100 N·s, se le aplica una fuerza constante de 50 N en sentido contrario a su movimiento. Determinar: 1) Tiempo que tarda en pararse. 2) Tiempo que tardaría una partícula de 15 kg, que tiene la misma velocidad en llegar al reposo.

**43.** Sobre una cinta transportadora cae trigo a razón de 600 kg/min desde una tolva en reposo. La cinta se mueve con una velocidad de 0,5 m/s (ver Fig.). Calcular la fuerza  $F$  sobre la cinta que hace que la velocidad del sistema permanezca constante.



Problema V-43.



Problema V-44.

**44.** Al extremo de una cuerda flexible, homogénea y de sección constante que se encuentra apilada en el suelo, le aplicamos una fuerza variable capaz de elevarla con velocidad constante  $v$ , como se indica en la figura. Calcular dicha fuerza en función de la altura del extremo de la cuerda sobre el suelo.

**45.** Un globo con todos sus accesorios pesa 200 kg y desciende con una aceleración 10 veces menor que la de la gravedad. Calcular la masa de lastre que tiene que lanzarse para que ascienda con la misma aceleración.

**46.** A una partícula de masa  $m_1$ , una fuerza le comunica una aceleración  $a_1 = 2 \text{ m/s}^2$ ; si se aplica la misma fuerza a otra partícula de masa  $m_2$ , entonces la aceleración producida es  $a_2 = 4 \text{ m/s}^2$ . Calcular la aceleración que provocaría la misma fuerza a las dos masas unidas.

**47.** Sobre un cuerpo actúan las fuerzas indicadas en la figura. Si  $F_1 = 2 \text{ kp}$ ,  $F_2 = 4 \text{ kp}$  y  $F_3 = 6 \text{ kp}$  y la masa del cuerpo es de 1 kg, calcular la aceleración del cuerpo.

**48.** Al actuar una fuerza de 10 N sobre una partícula le produce una aceleración  $a_1 = 2 \text{ m/s}^2$ . Al actuar otra fuerza  $F_2$  sobre la misma partícula la aceleración que le produce es  $a_2 = 3 \text{ m/s}^2$ . Calcular: 1) El valor de  $F_2$ . 2) La aceleración de la partícula si  $F_1$  y  $F_2$  actúan simultáneamente en la misma dirección. 3) Lo mismo que en 2) pero si el ángulo que forman las fuerzas es 60°.

**49.** Sobre una partícula de 1 kg de masa actúan simultáneamente las fuerzas:  $F_1 = i - 3j + 6k \text{ N}$ ,  $F_2 = 2i + 6j - 4k \text{ N}$  y  $F_3 = -2i - 2j + k \text{ N}$ . Calcular: 1) La aceleración de la partícula. 2) La fuerza que hay que añadir para que la partícula esté en reposo. 3) La fuerza que hay que añadir para que la partícula se mueva con una aceleración  $a'' = 3i - 2j + k \text{ m/s}^2$ .

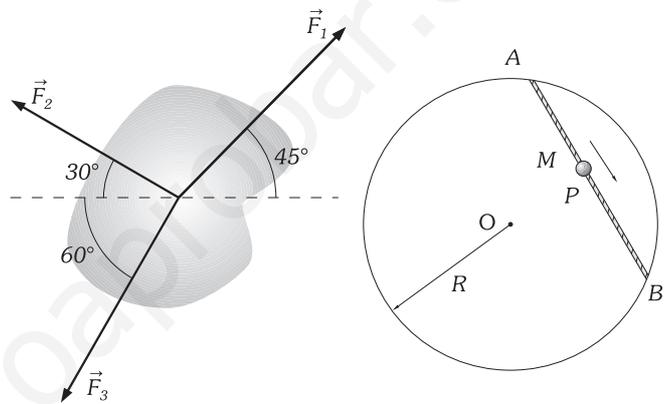
**50.** Sobre una masa puntual de 500 g que se mueve en el plano OXY actúan simultáneamente las fuerzas  $F_1 = 3i + 5j \text{ N}$  y  $F_2 = -i - 3j \text{ N}$ . Si la masa se encuentra inicialmente en el origen de coordenadas y

su  $v_0 = 3i + 4j \text{ m/s}$ , calcular: 1) Las ecuaciones horarias del movimiento. 2) El momento lineal a los 3 s de iniciado el movimiento.

**51.** A una partícula que inicialmente se encuentra en reposo y en el origen de un sistema de coordenadas, se le aplica una fuerza  $F(2, 1, -3) \text{ N}$ ; después de 4 s de iniciado el movimiento la posición viene dada por  $r(x, 4, z) \text{ m}$ . Determinar la masa de la partícula y sus coordenadas  $x, z$ .

**52.** Se deja caer libremente un cuerpo de 10 g de masa. Supuesta nula la resistencia del aire, y cuando su velocidad es  $v = 20 \text{ m/s}$ , se le opone una fuerza que detiene su caída al cabo de 4 s. 1) ¿Cuál debe ser esa fuerza? 2) ¿Qué espacio habrá recorrido hasta el momento de oponerse la fuerza? 3) ¿Qué espacio total habrá recorrido hasta el momento de detenerse?

**53.** Una esferita está ensartada en una cuerda lisa que a su vez está atada a la parte superior A de un aro de radio R, colocado verticalmente, y a otro punto cualquiera B de él (ver figura). Demostrar que el tiempo que tarda la esfera en deslizar desde A hasta B es el mismo cualquiera que sea este último punto.



Problema V-47.

Problema V-53.

**54.** Los cuerpos caen sobre la Tierra, atraídos por ella, con un movimiento acelerado. Si nos suponemos en el interior de una cápsula en forma de esfera metálica hueca, cayendo hacia la Tierra (ver figura), al volcar un vaso de agua, ésta no caería. ¿Podríamos pasear cabeza arriba o cabeza abajo, si, por propulsión, la cápsula sube a gran velocidad y, cesando la propulsión, sigue subiendo durante cierto tiempo, debido a la velocidad adquirida?

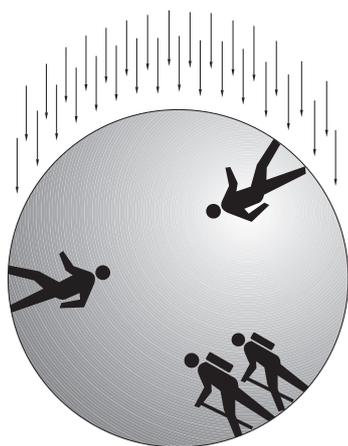
**55.** La vida de un hombre comienza a peligrar cuando sobre él actúan fuerzas mayores que 8 veces su peso. Determinar la aceleración máxima que se le puede dar a una nave espacial, en las proximidades a la superficie terrestre ( $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ) sin que se ponga en peligro la vida de los astronautas.

**56.** Un hilo tiene una resistencia a la ruptura de 0,5 kp. Colgamos de él un cuerpo de 300 g. Calcular la aceleración vertical hacia arriba que hay que dar al sistema para que el hilo se rompa.

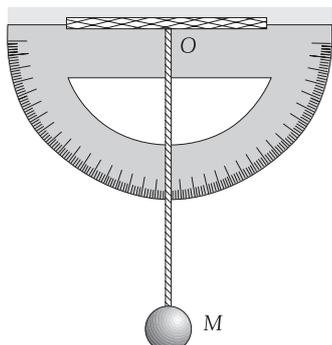
**57.** Sobre una mesa horizontal sin rozamiento se tienen dos pequeños cuerpos de masa  $M = 20 \text{ g}$ , unidos por un hilo ligero de longitud  $l = 1 \text{ m}$ . Si se tira del centro del hilo con una fuerza  $F = 1 \text{ N}$ , perpendicular a él, calcular la velocidad relativa de ambos cuerpos cuando choquen.

**58.** Una bala de 2 g de masa tarda  $10^{-3} \text{ s}$  en recorrer el cañón de un fusil. La fuerza que actúa sobre el proyectil mientras se encuentra en el cañón es de  $F = 500 - 2 \times 10^5 t$ , escrita en el SI. Calcular la velocidad con que sale la bala de la boca del cañón.

**59.** Un acelerómetro es un aparato consistente en un péndulo (esferita que cuelga en el extremo de un hilo muy fino y el otro extremo sujeto a un punto O) que puede desplazarse sobre un círculo graduado (ver Fig.), que nos proporciona el ángulo que forma el hilo con la vertical. Si lo colocamos en un vehículo con el punto O solidario en un punto de él (el techo, por ejemplo) y nos marca un ángulo de 27°, determinar la aceleración del vehículo en los tres casos siguientes: 1) El movimiento es en un terreno horizontal. 2) El vehículo desciende por una pendiente del 10%. 3) El vehículo asciende por una pendiente del 10%.



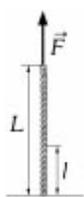
Problema V-54.



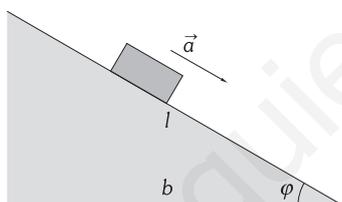
Problema V-59.

60. Un montacargas posee una velocidad de régimen, tanto en el ascenso como en el descenso, de 4 m/s, tardando 1 s en adquirirla al arrancar o en detenerse del todo en las paradas. Se carga un fardo de 600 kg y se sabe, además, que la caja del montacargas, con todos sus accesorios, tiene una masa de 1 200 kg. Calcúlense: 1) Fuerza que ejercerá el fardo sobre el suelo del montacargas durante el arranque para ascender. 2) Íd., íd., durante el ascenso a la velocidad de régimen. 3) Íd., íd., en el momento de detenerse 4) Tensión de los cables del montacargas en el caso 1. 5) Íd., íd., en el instante en que el montacargas inicia su descenso vacío.

61. Tiramos del extremo de una cuerda homogénea, de sección constante y de longitud  $L$ , con una fuerza  $F$  mayor que su peso en dirección vertical y hacia arriba (ver Fig.). Hallar la fuerza con que una parte de longitud  $l$ , contada a partir del otro extremo, actúa sobre la otra.



Problema V-61.



Problema V-63.

62. Sobre un plano inclinado  $30^\circ$  con respecto a la horizontal se coloca un objeto para que baje deslizándose. Si no existen rozamientos entre el objeto y el plano, determínese la aceleración de bajada de éste.

63. Determinar el ángulo con la horizontal que tenemos que darle a un plano inclinado de base fija ( $b$  en la Fig.) para que un objeto lo recorra sin rozamiento en un tiempo mínimo.

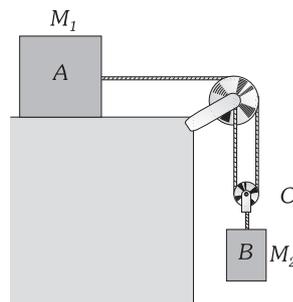
64. Un bloque de masa  $M_1$  que se encuentra sobre una mesa horizontal, sin rozamiento, se une mediante una cuerda horizontal que pasa por una polea de masa despreciable, colocada en el borde de la mesa, a un bloque suspendido de masa  $M_2$ . 1) ¿Cuál es la aceleración del sistema? 2) ¿Cuánto vale la tensión de la cuerda?

65. En el sistema representado en la Fig.  $M_1 = 200$  kg y  $M_2 = 500$  kg, despreciamos los rozamientos en el plano y en las poleas que consideramos de masa despreciable. Calcular la aceleración de los bloques y la tensión de las cuerdas.

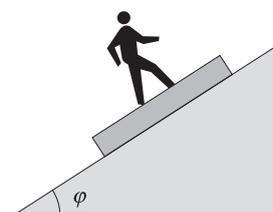
66. En el extremo superior de un plano inclinado  $30^\circ$  sobre la horizontal hay una polea (que supondremos de masa despreciable) por cuya garganta pasa un cordón; uno de los dos ramales de este cordón cae verticalmente y sostiene atado a un extremo un peso de 220 g; el otro cordón se mantiene paralelo al plano inclinado y tiene atado a un extremo una masa  $m$  que desliza sin rozamiento. Si se deja en libertad el sistema, el primer cuerpo cae verticalmente, recorriendo 1 m en 2 s. Se pide: 1) Calcular el valor de  $m$ . 2) Calcular el valor de la tensión en los dos ramales. 3) Si en vez de caer, sube verticalmente recorriendo el mismo espacio en el mismo tiempo, ¿cómo varían los resultados de los dos apartados anteriores?

67. Calcular la aceleración con que ha de subir un atleta de masa  $M_1$  por un tablón de masa  $M_2$  apoyado sobre un plano inclinado un ángulo  $\varphi$ , para que el tablón permanezca inmóvil (ver figura). Entre el tablón y el plano inclinado no existe rozamiento. ¿Qué espacio recorrió el atleta, si su velocidad inicial era  $v_0$ , hasta el momento en que se paró?

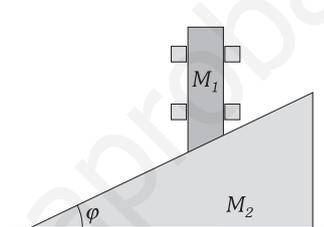
68. En el sistema representado en la Fig., la barra de masa  $M_1$  está obligada a moverse, sin rozamiento apreciable, en dirección vertical y su extremo inferior toca al prisma liso (el rozamiento entre los planos de contacto es despreciable) de masa  $M_2$ . Determinar las aceleraciones de la barra y del prisma.



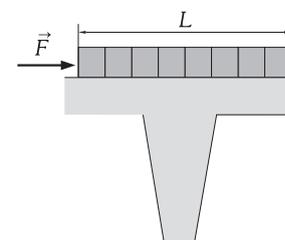
Problema V-65.



Problema V-67.



Problema V-68.



Problema V-69.

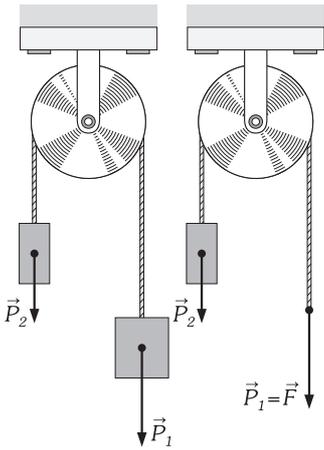
69. La Fig. nos representa una serie de bloques todos iguales de masa total  $M$ , se encuentran sobre un plano horizontal liso, y que completan una longitud  $L$ . Se les aplica una fuerza horizontal constante  $F$  y los bloques, partiendo del reposo, comienzan a caer. Si el rozamiento entre los bloques y el plano es despreciable; determinar la velocidad de los bloques que quedan sobre el plano cuando han caído la mitad de ellos.

70. Por la garganta de una polea de masa despreciable, que gira sin rozamiento alrededor de su eje horizontal, pasa un hilo de masa despreciable, cuyos extremos sostienen dos pesos,  $P_1$  y  $P_2$ . 1) En una primera experiencia los dos ramales del hilo son verticales, valiendo  $P_1 = 539$  gp y  $P_2 = 441$  gp. Despreciando la masa de la polea, calcular: a) La aceleración del sistema. b) El espacio recorrido al cabo de los tres primeros segundos. c) La velocidad adquirida al cabo de esos 3 s. 2) En una segunda experiencia el ramal que sostiene el peso  $P_2$  es paralelo a la línea de máxima pendiente de un plano inclinado,  $30^\circ$  sobre la horizontal, por el que se desliza  $P_2$  sin rozamiento. Calcular los valores que deben tener  $P_1$  y  $P_2$  (cuya suma se mantiene igual que en la experiencia anterior, es decir, 980 gp) para que la velocidad del sistema al cabo de los tres primeros segundos sea la misma que en la experiencia anterior. Calcular la tensión del hilo durante el movimiento. 3) En esta segunda experiencia se corta el hilo en el instante en que han transcurrido los 3 s de iniciarse espontáneamente el movimiento. Calcular la posición y la velocidad de  $P_2$  al cabo de 1,2 s de haberse roto el hilo.

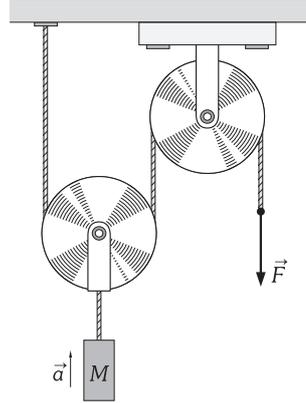
71. Las masas que penden de los extremos del cordón (supuesto inextensible y sin peso) de una máquina de Atwood son 505 g y 495 g. Calcular la velocidad con que desciende la masa mayor, al haber efectuado un recorrido de 1 m (suponemos la polea sin peso).

72. Dos masas iguales, cada una de 1 kg, penden de los extremos de un hilo inextensible y sin peso que pasa por una polea de masa despreciable. ¿Qué diferencia de altura debe haber entre las dos masas para que una sobrecarga de 20 g colocada sobre la más elevada dé lugar a que al cabo de 2 s ambas estén a la misma altura? Si las masas continúan moviéndose, ¿qué diferencia de altura habrá entre ellas al cabo de 4 s?

73. En los sistemas representados en la figura los pesos de los cables y poleas son despreciables.  $P_1 = F = 10$  kp y  $P_2 = 8$  kp. Determinar las aceleraciones de ambos sistemas.



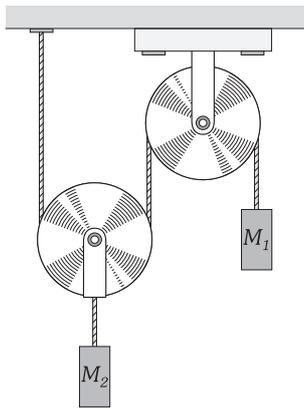
Problema V-73.



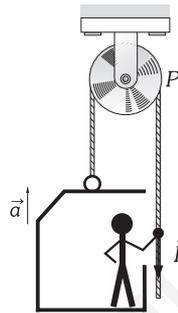
Problema V-74.

74. En el sistema representado en la figura los pesos de los cables y poleas son despreciables. ¿Con qué fuerza  $F$  es necesario tirar del extremo de la cuerda para que la masa  $M$  se mueva hacia arriba con aceleración  $a$ ? ¿Y para que el sistema se encuentre en equilibrio?

75. En el sistema representado en la figura los pesos de los cables y poleas son despreciables. Determinar las condiciones de movimiento en uno u otro sentido y, en su caso, las aceleraciones de los cuerpos.



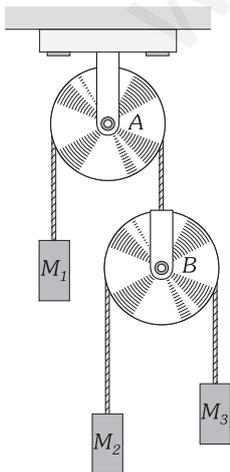
Problema V-75.



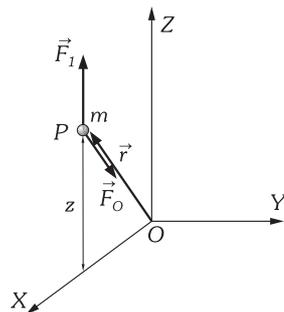
Problema V-76.

76. Una persona de 80 kg situada sobre una plataforma de 20 kg, tira de una cuerda que pasa por una polea unida al techo como se indica en la Fig., permitiéndole elevarse a sí misma y a la plataforma con una aceleración de  $0,2 \text{ m/s}^2$ . Calcular la fuerza que la persona ejerce sobre la cuerda. (Considerar despreciable la masa de la cuerda y de la polea, y no considerar las resistencias posibles en la polea).

77. En el sistema representado en la figura los pesos de los cables y poleas son despreciables. Determinar las aceleraciones de los cuerpos.



Problema V-77.



Problema V-85.

78. El conductor de un camión de 8 t, aplica los frenos de forma que su velocidad disminuye hasta pararse de acuerdo con la ecuación escrita en el si:  $v = 30 - 3t^2$ , en la que  $t$  es el tiempo transcurrido a partir del instante en que aplica los frenos. Determinar: 1) La velocidad con que se movía el camión y el tiempo que tarda en pararse. 2) La fuerza de frenado 4 s después de aplicar los frenos.

79. Un cuerpo de masa  $m$  se mueve sobre una superficie horizontal lisa por la acción de una fuerza que depende del tiempo según la ecuación:  $F = kt$ , en la que  $k$  es una constante determinada. La dirección de la fuerza forma constantemente un ángulo  $q$  con la horizontal. Calcular: 1) La velocidad del cuerpo en el instante en que deja de tocar el suelo. 2) El espacio recorrido en ese tiempo.

80. Una partícula de masa  $m$  que inicialmente se encuentra en reposo y en el origen del eje OX, se mueve sobre este eje por la acción de una fuerza  $F = -k/x^2$ . Determinar cómo varía su momento lineal con el tiempo [ $p = p(t)$ ].

81. La fuerza de resistencia al movimiento en el seno de un fluido viscoso es tal que  $F_r = -kv$  cuando  $v$  es pequeña, en la que  $k$  es una constante dependiente de la forma del cuerpo y del fluido. Si el cuerpo se encuentra sometido a una fuerza constante  $F$  (por ejemplo, el peso en caída libre del cuerpo en el interior del fluido), suponiendo movimiento rectilíneo y que  $t = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge v = v_0$ ; determinar las ecuaciones horarias  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$ , y calcular la velocidad límite.

82. La fuerza de resistencia que se opone al movimiento de un cuerpo de masa  $m$  que cae libremente desde el reposo en un fluido viscoso y en el campo gravitatorio terrestre, es proporcional al cuadrado de su velocidad, siendo  $k$  tal constante; determinar sus ecuaciones horarias  $y = y(t)$  y  $v = v(t)$ .

83. Un móvil de masa  $m$ , en movimiento rectilíneo a lo largo del eje X, se encuentra inicialmente en el origen y con velocidad  $v_0 = 9 \text{ m/s}$ . Está sometido a una fuerza de rozamiento proporcional a la raíz cuadrada de su velocidad, de la forma:  $F_r = -mv^{1/2} \mathbf{i}/2$ . Calcular la distancia que recorre hasta pararse.

84. Se lanza un proyectil de masa  $m$  con velocidad inicial  $v_0$  ( $v_{0x}$ ,  $v_{0y}$ ) (tiro oblicuo con los ejes OXY de referencia tales que para  $t = 0$  entonces  $x = 0$  e  $y = 0$ , y el peso del proyectil sea  $-mg\mathbf{j}$ ) en el seno de un fluido viscoso, en el que la fuerza de resistencia al movimiento es proporcional a la velocidad:  $F_r = -kv$ , donde en  $k$  incluimos la influencia tanto del medio como de la forma del proyectil. Determinar las ecuaciones vectoriales horarias del movimiento.

85. A una partícula de masa  $m$  que inicialmente está colocada respecto a un sistema inercial de referencia en el punto  $P_0(0, 0, z_0)$  y con velocidad  $v(v_0, 0, 0)$ , se le somete a una fuerza  $F_1 = 2k^2 m z \mathbf{k}$  (ver Fig.) y a otra dirigida hacia el origen  $O$  de módulo  $F_0 = k^2 m r$ . Determinar las ecuaciones de la trayectoria y del vector velocidad [ $r = r(t)$  y  $v = v(t)$ ].

86. Una pelota de tenis que pesa 100 g lleva una velocidad de 20 m/s y después de devuelta, en sentido contrario, su velocidad es de 40 m/s. Calcúlese: 1) La variación del momento lineal. 2) Si la pelota permanece en contacto con la raqueta  $10^{-2}$  s, la fuerza media del golpe.

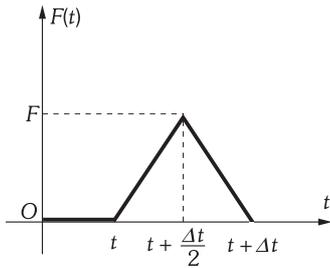
87. Desde una azotea de un edificio de 10 m de altura dejamos caer una pelota de 400 g de masa; después de chocar con el suelo rebota hasta 4,2 m de altura. Determinar: 1) El impulso debido al peso de la pelota en su caída. 2) El impulso recibido en el choque con el suelo.

88. Una pelota de beisbol de 250 g llega al bate con una velocidad horizontal de 25 m/s, inmediatamente después del impacto con el bate sale por delante de él con una velocidad de 50 m/s, formando un ángulo de  $45^\circ$  con la horizontal. Determinar el impulso que le ha comunicado el bate a la pelota.

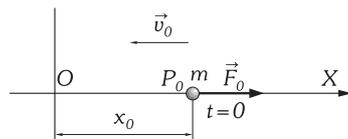
89. Una partícula de 10 kg de masa se mueve sobre una circunferencia de 1 m de radio, con una velocidad constante de 1 m/s. Calcular: 1) La variación de el momento lineal en un recorrido de  $1/4$  de circunferencia. 2) La fuerza media que actúa sobre la partícula en tal recorrido.

90. Una partícula de 200 g esta sometida a una única fuerza dada por la ecuación escrita en el si:  $F = -0,2 \sin 2\pi t$ . Determinar el impulso de ésta fuerza en el intervalo de tiempo comprendido entre 0 y  $T/4$ , siendo  $T$  el período de este movimiento.

91. En la Fig. se representa la fuerza horizontal que actúa sobre un cuerpo de masa  $M$ , en función del tiempo. El cuerpo posee inicialmente una velocidad  $v_0$  hacia la derecha. Determinar: 1) El impulso de dicha fuerza en el intervalo  $\Delta t$ . 2) El valor medio de  $F(t)$  durante el intervalo  $\Delta t$ . 3) La velocidad final del objeto de masa  $M$ , si es  $F(t)$  la única fuerza que actúa sobre él.



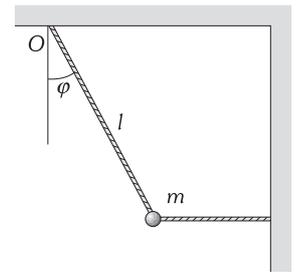
Problema V-91.



Problema V-92.



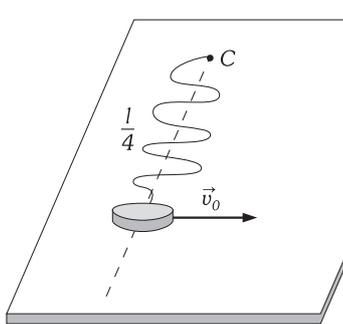
Problema V-96.



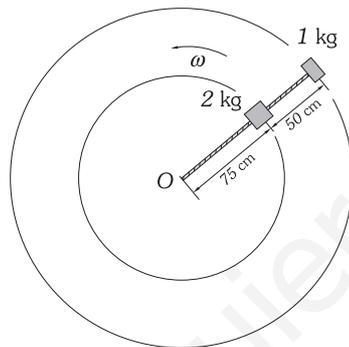
Problema V-101.

**92.** Una partícula de masa  $m = 1 \text{ kg}$  se mueve en el eje  $OX$  de forma que en el instante  $t = 0$ , es  $x_0 = 1 \text{ m}$  y  $v_0 = 2 \text{ m/s}$ , acercándose a  $O$ . La partícula es repelida por  $O$  con una fuerza dada por  $F = mx$  (ver Fig.), siendo  $x = OP$ , y  $P$  la posición en cualquier instante  $t$  de su trayectoria. Determinar: 1) El tiempo que tarda en pasar por el origen de espacios  $O$  y la velocidad en ese momento. 2) El impulso sobre la partícula entre los instantes en que  $x = 0$  y  $x_p = -1 \text{ m}$ .

**93.** En una mesa lisa, una masa  $M$  está en reposo a distancia  $l/4$  de un clavo  $C$  al que está atada mediante una cuerda de longitud  $l$ , como se muestra en la figura. Se le imprime a  $M$  una velocidad  $v_0$  en dirección perpendicular a la que forma inicialmente con el clavo. 1) Calcular el impulso que la cuerda ejerce sobre  $M$  al tensarse. 2) Calcular la velocidad de  $M$  después de tensarse la cuerda.



Problema V-93.



Problema V-94.

**C) MAGNITUDES DINÁMICAS ANGULARES**

**94.** Dos bloques de masas  $2$  y  $1 \text{ kg}$ , unidos entre sí y a un punto fijo  $O$ , describen un movimiento circular con velocidad angular constante de  $4\pi \text{ rad/s}$ , en un plano horizontal sin rozamiento, como se indica en la Fig. Considerando a las cuerdas inextensibles y sin peso; calcular las tensiones de cada una de ellas.

**95.** En un plano vertical damos vueltas a una cuerda de  $1 \text{ m}$  de longitud en cuyo extremo tenemos atado un cubo con agua. ¿Qué mínima velocidad tiene que tener el cubo para que el agua no se vierta cuando está el cubo con la boca hacia el suelo?

**96.** La TVE comentó que el piloto de un «fórmula 1» quiso probar el motor de su «bólide» en ingravidez, para conseguirlo lo introdujo en el interior de un reactor de transporte. Supongamos que vuela a  $970 \text{ km/h}$  y a una altitud de unos  $10 \text{ km}$ , en cuyo lugar  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ; para conseguir su propósito el avión ejecuta un arco de circunferencia vertical tal como se indica en la Fig. ¿Cuánto debe valer la variación del ángulo con el tiempo  $\omega = \dot{\phi}$  a la que el piloto del avión debe inclinar la dirección de vuelo para conseguir en el interior del avión la condición de ingravidez?

**97.** Supuesta la Tierra esférica y sin ningún relieve, calcular la velocidad de un proyectil disparado horizontalmente en las proximidades de la superficie terrestre, para que se «coloque en órbita», es decir, dé vueltas en torno a la Tierra. (Se supone nula la resistencia de aire y  $R_0 = 6370 \text{ km}$ ).

**98.** De un hilo de longitud  $50 \text{ cm}$  vamos suspendiendo pesos cada vez mayores, observando que el hilo se rompe al colgar un peso de  $1 \text{ kp}$ . Atamos al extremo del hilo un peso de  $50 \text{ g}$ , sujetando el otro extremo, hacemos girar al sistema en un plano vertical. Calcular el mínimo número de vueltas por segundo necesarias para que se rompa el hilo y determinar la posición en que se romperá.

**99.** El piloto de un avión se lanza en picado a la velocidad de  $400 \text{ km/h}$  y termina su descenso describiendo, a aquella velocidad, un arco de circunferencia situado en el plano vertical. ¿Cuál será el mínimo radio de esa circunferencia para que la aceleración en el punto más bajo no exceda de  $7g$ ? ¿Cuál será entonces el peso aparente del aviador en el punto más bajo de la trayectoria?

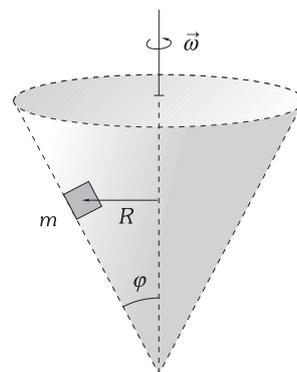
**100.** Calcúlese el ángulo de inclinación con la horizontal con que tiene que colocar un piloto su avión para virar horizontalmente con un radio de  $1 \text{ km}$  a una velocidad de  $360 \text{ km/h}$ .

**101.** Un péndulo simple consiste en una pequeña bola (una partícula) suspendida de un hilo inextensible y sin peso apreciable. En la situación de la Fig. se corta la cuerda horizontal; determinar la razón entre la tensión  $T_a$  de la cuerda del péndulo antes de cortarla y la tensión  $T_d$  de la misma inmediatamente después de su corte.

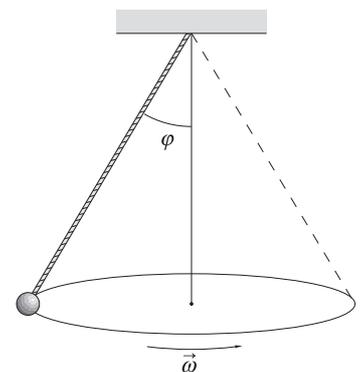
**102.** El objeto muy pequeño de la Fig., gira con velocidad angular constante, y no resbala por la parte interior de un cono de semiángulo  $j$ , encontrándose a una distancia  $R$  del eje de giro, y el rozamiento es despreciable. Determinar el valor que debe tener la frecuencia del movimiento circular para que esto ocurra.

**103.** Hacemos girar a un cuerpo de  $5 \text{ kg}$  de masa atado a una cuerda de  $1$  de longitud con una frecuencia de  $1 \text{ Hz}$ . Calcular la distancia desde el punto fijo al plano horizontal en el que se mueve el cuerpo con movimiento circular y la tensión  $T$  de la cuerda.

**104.** Una partícula atada a una cuerda de  $50 \text{ cm}$  de longitud gira como un «péndulo cónico» como muestra la figura. Calcular el número de vueltas por segundo que tiene que dar para que  $\phi = 60^\circ$ .



Problema V-102.

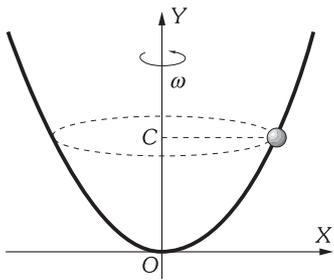


Problema V-104.

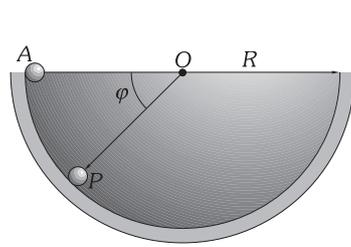
**105.** Una partícula de masa  $m$ , ensartada en un alambre rígido por el que puede deslizar sin rozamiento, se hace girar alrededor del eje  $OY$  con velocidad angular constante  $\omega$  como se indica en la Fig. Determinar la forma que debe tener el alambre  $[y = f(x)]$  para que la partícula describa circunferencias alrededor del eje  $OY$ .

**106.** Se suelta sin velocidad inicial, un pequeño objeto de masa  $m$ , en el borde de un cuenco semicircular de radio  $R$ , como se muestra en la Fig. En un determinado instante se encuentra en  $P$ , formando con la horizontal un ángulo  $\phi$ . Determinar la velocidad angular del objeto y la fuerza ejercida por la superficie sobre él (los rozamientos con la superficie son despreciables).

**107.** La trayectoria de una partícula de  $2 \text{ kg}$  de masa está dada en el  $SI$  y en coordenadas polares por:  $r = 2t^3$  y  $\theta = t^2 - 3t$ . Determinar el módulo de la fuerza resultante que actúa sobre la partícula cuando ha transcurrido  $1 \text{ s}$ .



Problema V-105.



Problema V-106.

**108.** Una partícula de masa  $m$  recorre con velocidad constante  $v$  una cicloide:  $x = R(\theta - \text{sen}\theta)$  e  $y = R(1 - \text{cos}\theta)$ , en las que  $R$  es constante. Determinar en función de  $\theta$ , la fuerza aplicada a la partícula y el radio de curvatura.

**109.** Una varilla delgada de longitud  $l$  lleva ensartada una pequeña esfera de masa  $m$ , que puede deslizar por ella sin rozamiento. Se hace girar la varilla en un plano horizontal alrededor de uno de sus extremos con velocidad angular  $\omega$  constante. Si inicialmente la esfera se encontraba parada en la mitad de la varilla, calcular: 1) La velocidad con que la abandona. 2) El ángulo barrido por la varilla hasta ese instante. 3) La fuerza ejercida por la varilla sobre la esfera un instante antes de abandonarla.

**110.** El vector de posición de una partícula de  $0,5$  kg de masa es:  $\mathbf{r} = 2t^3\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j} - (2t + 1)\mathbf{k}$  m. Calcúlese: 1) Fuerza que actúa sobre la partícula. 2) Momento de esta fuerza respecto al origen del sistema de referencia. 3) Momento lineal y angular de la partícula respecto al origen. 4) El impulso angular entre los intentos  $t = 0$  y  $t = 1$  s.

**111.** Se dispara un proyectil de  $5$  kg de masa con una velocidad de  $400$  m/s, formando un ángulo de  $45^\circ$  con la horizontal y tomándose el punto de lanzamiento como origen de un sistema referencia, calcular: 1) Fuerza que actúa sobre el proyectil. 2) Momento de esta fuerza respecto al origen a los  $2$  s de su lanzamiento. 3) Momento lineal y angular respecto al origen a los  $2$  s de su lanzamiento.

**112.** Sobre una partícula de  $2$  kg de masa que se encuentra inicialmente en el punto  $A(2, -3, 1)$  m, actúa una fuerza constante  $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$  N durante  $2$  s, calcular: 1) Impulso de tal fuerza en ese tiempo. 2) Momento lineal al cabo de los  $2$  s, si para  $t = 0$ ,  $\mathbf{p}_0 = 2\mathbf{i} + 12\mathbf{k}$  N · s. 3) Posición de la partícula al cabo de  $2$  s. 4) Momento angular, respecto al origen, al cabo de los  $2$  s.

**113.** A una partícula de  $1$  kg de masa que se encuentra inicialmente en el punto  $A(1, 2, 1)$  m (respecto a un sistema referencia OXYZ) y que posee una velocidad  $\mathbf{v}_0 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$  m/s se le aplica una fuerza tal que su momento respecto al origen permanece constante y de valor  $\mathbf{N} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$  N · m. Calcular el momento angular de la partícula al cabo de  $3$  s.

**114.** Sobre un cuerpo de  $1$  kg de masa actúan simultáneamente dos fuerzas, de valor:  $\mathbf{F}_1 = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$  N y  $\mathbf{F}_2 = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$  N. Inicialmente el cuerpo se encuentra en el punto  $(2, 1, 0)$  con velocidad nula. En un instante posterior  $t$ , calcular: 1) El momento de la fuerza respecto del origen de coordenadas. 2) El momento angular respecto del mismo origen. 3) Comprobar que se verifica la segunda ecuación de movimiento de la partícula.

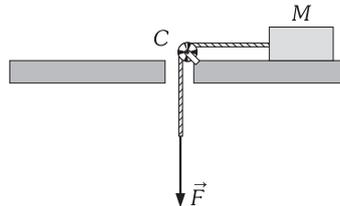
**115.** Desde un punto  $P(a, 0)$  (a una distancia  $a$  del origen  $O$  de un sistema de referencia inercial) dejamos caer paralelamente al eje  $OY$  una partícula de masa  $m$ . 1) Determinar el momento de la fuerza que actúa sobre  $m$  en cualquier instante respecto de  $O$ . 2) Determinar el momento angular de  $m$  en cualquier instante respecto al mismo punto origen  $O$ . 3) Comprobar que es correcta la relación:  $\mathbf{N} = d\mathbf{J}/dt$ .

**116.** Expresar en función de la aceleración areolar  $\beta$ , el valor de la componente transversal  $F_\theta$  de la fuerza total que actúa sobre una partícula.

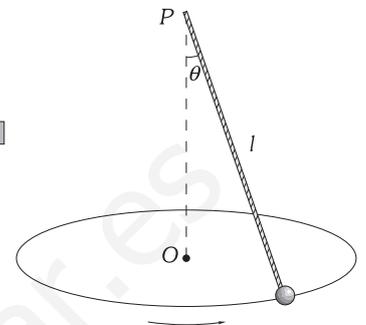
**117.** Un cuerpo de masa  $M$  describe circunferencias de radio  $r_0$ , a velocidad  $v_0$ , sobre una mesa horizontal lisa y sujeto por un hilo que pasa por un orificio en el centro de la mesa, como se indica en la figura. Si se tira del hilo hacia abajo, las circunferencias se acortan hasta tener

un radio  $r$ . Calcular, en función de las magnitudes mencionadas, la nueva velocidad del cuerpo.

**118.** Una partícula cuyo peso es  $mg$  se mueve suspendida de un punto  $P$  mediante un hilo de masa despreciable de longitud  $l$ . Describe una trayectoria circular como se indica en la Fig. El ángulo entre el hilo y la vertical es  $\theta$  y la velocidad angular constante es  $\omega$ . 1) Calcular el momento angular de la partícula respecto al punto  $O$  y justificar su conservación. 2) Demostrar que el momento angular respecto a  $P$  no es constante.

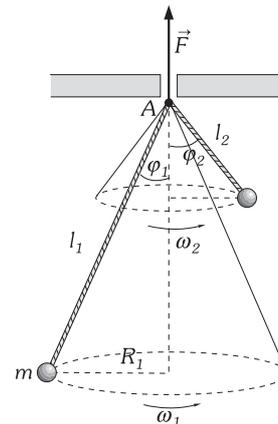


Problema V-117.



Problema V-118.

**119.** Una partícula de masa  $m$  gira en una circunferencia horizontal con velocidad angular constante  $\omega_1$ . La partícula se encuentra en el extremo de un hilo inextensible y sin peso apreciable de longitud  $l_1$ , tal y como se indica en la Fig. 1) Calcular la tensión del hilo y el ángulo  $\varphi_1$ , que forma con la vertical. 2) En un cierto instante se tira del hilo lentamente a través de  $A$  hasta que la longitud es  $l_2$ , calcular  $\varphi_2$  y  $\omega_2$ .



Problema V-119.

**120.** Una partícula de masa  $m$  se encuentra sometida a una fuerza que pasa constantemente por el foco de la elipse trayectoria que describe. La velocidad de la partícula en el punto  $P$ , el más cercano a uno de sus focos  $O$ , es de  $20$  m/s. Determinar la velocidad del punto  $A$  el más alejado de  $O$  conociendo que la razón de las distancias  $OP/OA = 0,5$ .

**121.** Se pretende que una partícula de masa  $m = 0,5$  kg describa la trayectoria parabólica de ecuación  $y = 2x^2 + 2$  m, con velocidad areolar constante, bajo la acción de una fuerza que pasa siempre por el origen de coordenadas. Si en el instante inicial,  $t = 0$ , se encuentra en  $P_0(0, 2)$ , con velocidad  $\mathbf{v}_0 = 4\mathbf{i}$  m/s, obtener: 1) La velocidad areolar. 2) Las componentes de la velocidad de la partícula en función de su posición. 3) La expresión de la fuerza que ha de actuar sobre la partícula, en función también de la posición.

**122.** Una partícula de masa  $m$  se mueve en el plano  $OX$  y sobre una espiral cuyas ecuaciones en coordenadas polares vienen dadas por  $r = k\theta$  y  $\theta = \omega t$ , en las que  $k$  y  $\omega = \dot{\theta}$  son constantes y el eje  $OX$  es el eje polar. Determinar el momento angular de la partícula, y el momento de la fuerza que actúa sobre la partícula respecto de  $O$ .

# CAPÍTULO VI

## PESO. ROZAMIENTO. OSCILACIONES

### A) PESO. CENTRO DE GRAVEDAD

#### VI - 1. Peso de un cuerpo en presencia de la Tierra

Veámos en el capítulo III (cinemática) que los cuerpos caen hacia abajo, hacia la Tierra con la aceleración de la gravedad ( $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ ), luego sobre ellos tendrá que actuar una fuerza dirigida en el mismo sentido que dicha aceleración. Newton dijo que no sólo la Tierra posee la propiedad de atraer hacia sí los cuerpos que se encuentran cerca de su superficie, sino que también existen esas fuerzas de atracción entre cualesquiera dos cuerpos del Universo y las llamó FUERZAS DE GRAVITACIÓN; la no advertencia de la fuerza de atracción de los cuerpos que nos rodean se debe a que son demasiado débiles. Newton enunció la LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL de la siguiente manera:

*«Todos los cuerpos se atraen entre sí con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa».*

$$F = G \frac{MM'}{d^2}$$

G es la CONSTANTE DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL, independiente de todas las circunstancias o medio ambiente que rodee a los cuerpos que se atraen.

Para comprender lo que entendemos por «distancia entre los cuerpos»,  $d$  en la fórmula anterior, tenemos que entender que la distancia que los separa es muy grande comparada con las dimensiones de éstos, pudiendo de esta forma considerarlos como partículas.

Cuando más adelante estudiemos el teorema de Gauss demostraremos que, para aplicar la Ley de Gravitación Universal a un cuerpo con simetría esférica, podemos sustituirlo por una partícula de masa igual a la del cuerpo esférico y colocada en el centro de dicha esfera; de esta forma es como procedemos cuando estudiamos la atracción de la Tierra sobre cuerpos de dimensiones pequeñas comparadas con las de ella, siendo ésta una condición que aceptaremos como válida.

Como más claramente comprenderemos esta ley de interacción entre dos cuerpos será aplicándola a dos partículas  $m_1$  y  $m_2$  como indicamos en la Fig. VI-1 y siendo  $\mathbf{F}$  una magnitud vectorial, escribiremos:

$$\mathbf{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \mathbf{r}_{21}$$

el signo menos nos indica que el vector  $\mathbf{r}_{21}$  que define la posición  $m_2$  relativa a  $m_1$  es de sentido contrario a  $\mathbf{F}_{21}$  (fuerza con que  $m_1$  atrae a  $m_2$ ). El Principio de Acción y Reacción, nos lleva a la conclusión:

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$$

es decir, «La fuerza que la partícula uno ejerce sobre la dos es igual y de sentido contrario a la que la partícula dos ejerce sobre la uno».

En el capítulo XI haremos un estudio monográfico más detallado de las innumerables consecuencias de esta Ley Universal y veremos como Henry Cavendish (1731-1810) entre otros muchos trabajos, determinó con la balanza de torsión la constante G de gravitación universal, dándole el valor:

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$$

la pequeñez de esta constante hace que no se note la atracción entre los cuerpos que nos rodean.

*«Se define la INTENSIDAD DEL CAMPO GRAVITATORIO EN UN PUNTO como la fuerza que actúa sobre la unidad de masa colocada en el punto».*

$$\mathbf{g}(P) = \frac{\mathbf{F}}{m'} = -G \frac{m}{r^2} \mathbf{r} \quad (1)$$

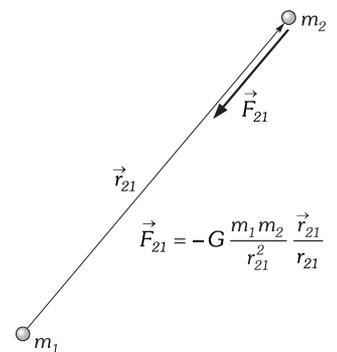


Fig. VI-1.- Ley de gravitación.

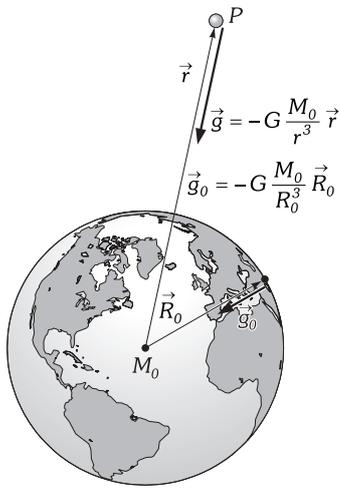


Fig. VI-2.- Intensidad del campo gravitatorio terrestre.

es por tanto un vector ligado, dependiente de las coordenadas del punto que consideremos.

Suponiendo la Tierra como una esfera homogénea, podemos considerar su masa \$M\_0\$ concentrada en su centro, y por tanto, la intensidad de la gravedad en un punto a una distancia \$r\$ de su centro y fuera de ella, es en módulo:

$$g = G \frac{M_0}{r^2}$$

INTENSIDAD DEL CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE EN UN PUNTO es la fuerza con que la Tierra atrae a la unidad de masa, colocada en el punto. La intensidad del campo es un vector de dirección vertical y de sentido hacia el interior de la Tierra.

$$\vec{g} = -G \frac{M_0}{r^3} \vec{r}$$

el signo menos nos indica que el vector \$\vec{r}\$ que nos define la posición de la unidad de masa relativa al centro de la Tierra es de sentido contrario a \$\vec{g}\$. En la superficie terrestre será:

$$\vec{g}_0 = -G \frac{M_0}{R_0^3} \vec{R}_0$$

aproximadamente igual a los ya mencionados \$9,8 \text{ m/s}^2\$. Valor que tomaremos también para puntos próximos a la superficie de la Tierra y que comienza a variar cuando la altura a la que se coloca el cuerpo es significativa frente al radio terrestre: \$R\_0 = 6\,370 \text{ km}\$.

«Llamaremos PESO de un cuerpo en la Tierra a la fuerza que actúa sobre el cuerpo debido a su influencia».

Como \$\vec{g}\$ (intensidad de la gravedad) es la fuerza que actúa sobre la unidad de masa, la que actúa sobre una masa \$m\$ es:

$$\vec{P} = m \vec{g}$$

y para puntos próximos a la superficie de la Tierra:

$$\vec{P}_0 = m \vec{g}_0$$

La variación del peso con la altura es fácilmente deducible, puesto que para un punto \$P\$ a una altura considerable, su valor será:

$$P = G \frac{M_0 m}{(R_0 + h)^2} \quad \Rightarrow \quad P = P_0 \frac{R_0^2}{(R_0 + h)^2}$$

$$h = 0 \quad \Rightarrow \quad P_0 = G \frac{M_0 m}{R_0^2}$$

«El peso de un cuerpo disminuye con la altura sobre la superficie terrestre».

«Cuando un sólido se encuentra sometido a un campo gravitatorio, llamaremos CENTRO DE GRAVEDAD (CG) al punto de aplicación de su peso en dicho campo».

«El Peso de un cuerpo, como ocurre en general para todas las fuerzas, es una función de punto; no así su masa que permanece invariable con su ubicación».

«Llamaremos PESO ESPECÍFICO al peso que corresponde a la unidad de volumen».

$$\gamma = \frac{P}{V} = \rho g$$

El peso específico se mide en \$\text{dyn/cm}^3\$, en el sistema CGS en \$\text{N/m}^3\$ en el SI y en \$\text{kp/m}^3\$ en el TÉCNICO.

Si nos dan el peso específico en \$\text{gramos-peso/cm}^3\$, cada una de estas unidades equivale a \$980 \text{ dyn/cm}^3\$.

La ecuación de dimensiones del peso específico es en los sistemas CGS y SI: \$[\gamma] = [F]/[V] = \text{MLT}^{-2}/\text{L}^3 = \text{ML}^{-2}\text{T}^{-2}\$, y en el sistema TÉCNICO: \$[\gamma] = [F]/[V] = \text{FL}^{-3} = \text{FL}^{-3}\$.

Si el cuerpo no es homogéneo, su peso específico en cada uno de sus puntos es:

$$\gamma = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta V} = \frac{dP}{dV}$$

**VI - 2. Centro de gravedad (CG)**

Supongamos un cuerpo sometido al campo gravitatorio terrestre; cada una de las partículas del cuerpo está solicitada por una fuerza vertical y hacia abajo de valor  $m_1g$  ( $m_1$  = masa de la partícula;  $g$  = intensidad de la gravedad). Siendo los pesos de las partículas fuerzas paralelas\*, la resultante de componerlas (primero dos a dos, las resultantes entre sí, etc.) es una fuerza de valor:  $P = m_1g + m_2g + m_3g + \dots = (m_1 + m_2 + m_3 + \dots) g = Mg$ , siendo  $M$  la masa total del cuerpo.

La dirección del peso es, pues, paralela a las componentes. El punto de aplicación está situado en la vertical  $V$ , que coincide con la dirección de  $P$ . Si consideramos el mismo problema, con el cuerpo en otra posición, el punto de aplicación del peso (de módulo, dirección y sentido idénticos al anterior), estará en la vertical  $V'$ . Cualquiera que sea el número de posiciones que consideremos, todas las verticales,  $V, V', V''$ , que coincide con la del peso en cada caso, se cortan en un punto que es el CG.

El centro de gravedad de una figura homogénea y geométrica es el centro geométrico; si la figura tiene un eje o plano de simetría en él está localizado el centro de gravedad.

El cálculo que nos conduce a la expresión analítica de la posición del CG para cualquier cuerpo, es: imaginemos en un cuerpo cualquiera dos partículas  $A$  y  $C$  (Fig. VI-4) de masas  $m_1$  y  $m_2$ ; el peso de cada una de ellas queda representado por las fuerzas  $m_1g$  y  $m_2g$ . Al componer tales fuerzas paralelas obtenemos la fuerza  $(m_1 + m_2)g$ , aplicada al punto  $B$  (o a uno cualquiera de la vertical que pasa por él) cumpliéndose:  $m_1g/m_2g = BC/AB$ .

Proyectamos  $ABC$  sobre el plano  $XY$ , obteniendo  $A'B'C'$  y, a su vez, proyectemos este segmento sobre el eje  $X$ , obteniendo  $A''B''C''$ . La igualdad anterior se puede escribir:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'} = \frac{B''C''}{A''B''} = \frac{x - x_2}{x_1 - x}$$

$$m_1x_1 - m_1x = m_2x - m_2x_2 \Rightarrow m_1x_1 + m_2x_2 = x(m_1 + m_2) \Rightarrow x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

Componiendo la fuerza obtenida con el peso de una tercera partícula y la resultante con el peso de una cuarta partícula, etc., hasta componer todos los pesos de todas las partículas, obtendríamos:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M}$$

siendo  $M$  la masa total del cuerpo. Repitiendo el mismo razonamiento para los ejes  $Y$  y  $Z$ , los valores de las coordenadas del centro de gravedad son:

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{M} \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{M}$$

Llegamos al mismo resultado teniendo en cuenta que en cada punto del sistema actúa una fuerza  $F_i = m_i g$  y todas ellas son paralelas entre sí, sabemos que existe un punto que llamamos centro de vectores paralelos (II-28) cuyas coordenadas, después de sustituir  $v_i$  por  $m_i g$  y  $R$  por  $\sum m_i g = g \sum m_i = Mg$  coinciden con las obtenidas.

Siendo la partícula un ente ideal sin dimensiones, al aplicar estas fórmulas a un sólido los sumandos se hacen infinitos, con lo que los sumatorios se transforman en integrales, y considerando el cuerpo fraccionado en infinitas partículas elementales de masa  $dm$ , las ecuaciones anteriores se convierten en:

$$x_G = \frac{\int x dm}{M} \quad y_G = \frac{\int y dm}{M} \quad z_G = \frac{\int z dm}{M}$$

las integrales que nos aparecen son definidas y están limitadas por las dimensiones del sólido.

En el tema de Dinámica de los sistemas de partículas, estudiaremos un punto privilegiado (en el cuerpo o fuera de él) llamado CENTRO DE MASA (CM) cuyo concepto es más general que el dado por CG, puesto que para su definición no será necesaria la existencia de un campo gravitatorio; en este tema veremos que:

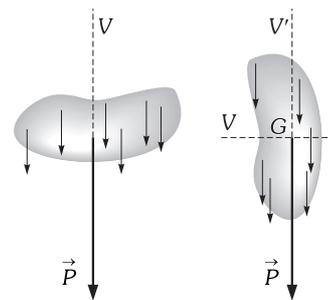


Fig. VI-3.- Centro de gravedad de un sólido.

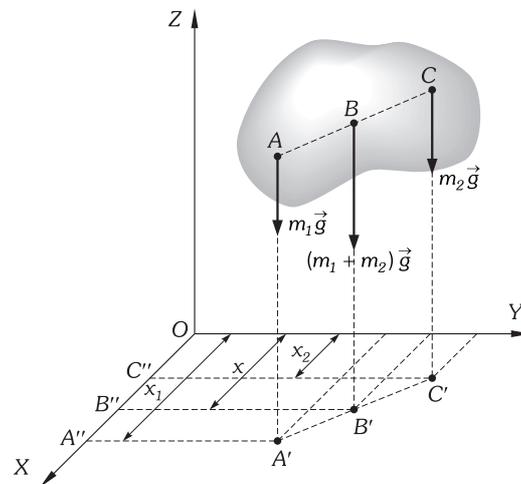


Fig. VI-4.- Coordenadas del centro de gravedad.

\* Consideramos cuerpos de pequeñas dimensiones comparadas con la Tierra.

«Llamamos CM de un sólido a un punto tal que si se aplicase una fuerza cuya dirección pasase por él, estando el cuerpo inicialmente en reposo, adquiriría un movimiento de traslación pura, es decir, sin rotación».

Un cuerpo real podemos considerarlo como una partícula mientras podamos no hacer caso de su rotación en torno a su CM.

Como veremos más adelante, las coordenadas del centro de masa coinciden con las del centro de gravedad. La expresión vectorial de la posición del CG o del CM del sólido será:

$$\mathbf{R} = \frac{\int \mathbf{r} dm}{M} = x_G \mathbf{i} + y_G \mathbf{j} + z_G \mathbf{k}$$

o bien para un sistema de partículas:

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

en la que  $\mathbf{r}_i$  es el vector de posición de una partícula cualquiera de masa  $m_i$ .

Aunque en el cálculo de la posición del CG de un cuerpo, hemos utilizado un campo de fuerzas para determinar su ubicación, el CG de un cuerpo, y en general su CM, solamente depende de su geometría y de como está en ella distribuida su masa.

«El CG (o CM) de un sistema en movimiento variado, tiene la misma aceleración que una partícula de masa igual a la total del sistema, sometida a la misma fuerza externa que la actuante sobre el sistema».

**PROBLEMAS: 9 al 22.**

### VI – 3. Unidades de Fuerza. Unidad técnica de masa

De la formulación del segundo principio de Newton deducimos que la ecuación de dimensiones de una fuerza en el SI y CGS es:  $[F] = [M] [a] = MLT^{-2}$ , y en consecuencia la unidad de fuerza debe expresarse en función de las unidades de masa y aceleración.

$$\text{Si hacemos } \left\{ \begin{array}{l} M = 1 \text{ g} \\ a = 1 \text{ cm/s}^2 \end{array} \right\} \quad F = 1 \text{ dina (CGS)}$$

$$\text{Si hacemos } \left\{ \begin{array}{l} M = 1 \text{ kg} \\ a = 1 \text{ m/s}^2 \end{array} \right\} \quad F = 1 \text{ newton (SI)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{La dina} \\ \text{El newton} \end{array} \right\} \text{ es la fuerza que aplicada a } \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ g} \\ 1 \text{ kg} \end{array} \right\} \text{ de masa le produce la aceleración de } \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ cm/s}^2 \\ 1 \text{ m/s}^2 \end{array} \right\}$$

La equivalencia entre la unidad SI y la CGS es:  $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \times 1 \text{ m/s}^2 = 1000 \text{ g} \times 100 \text{ cm/s}^2 = 10^5 \text{ dyn}$ .

En el sistema técnico la fuerza es magnitud simple; su ecuación de dimensiones es:  $[F] = F$ .

La unidad técnica de fuerza en este sistema es el KILOGRAMO-FUERZA o KILOPONDIO (kp): fuerza con que el kilogramo patrón es solicitado hacia la Tierra al nivel del mar y a  $45^\circ$  de latitud. Su valor en dinas es:  $1 \text{ kp} = 980\,665 \text{ dyn} \approx 9,8 \text{ N}$ .

El gramo-fuerza o pondio (p), milésima parte del kilopondio, equivale (con suficiente aproximación) a 980 dinas.

La masa, en este sistema, es una magnitud compuesta y su ecuación de dimensiones es:  $[M] = [F]/[a] = F/LT^{-2} = L^{-1}FT^2$ .

La UNIDAD TÉCNICA DE MASA (utm) es la masa que al aplicar sobre ella la fuerza de 1 kp experimenta una aceleración de  $1 \text{ m/s}^2$ . La relación entre la utm y el kg masa, es:

$$1 \text{ utm} = \frac{1 \text{ kp}}{1 \text{ m/s}^2} = \frac{9,8 \text{ N}}{1 \text{ m/s}^2} = 9,8 \text{ kg}$$

En nuestro hablar cotidiano, al referirnos al peso decimos: «... x kg de...» o «Peso x kg...», estamos expresándonos en unidades de fuerza en el Sistema Técnico para puntos próximos a la superficie de la Tierra y este número coincide con la masa del cuerpo expresada en kg (SI); ocurre así, debido a la definición del kp. Lo mismo le ocurre al «gramo» que aplicado al peso, no es unidad de los sistemas más utilizados CGS, SI y TÉCNICO ( $1 \text{ gp} = 980 \text{ dyn}$ ). En puntos lo suficientemente alejados del centro de la Tierra el número de peso en «kg» no es el mismo que el de masa en «kg» (mientras que el peso disminuye, la masa permanece invariable).

## B) ROZAMIENTO POR DESLIZAMIENTO

### VI - 4. Introducción

Hasta ahora en la mayor parte de los problemas hemos considerado superficies lisas y cuerpos en contacto que podían moverse sin rozamiento, hacer esto es una simplificación del fenómeno puesto que no existen superficies perfectamente lisas, y siempre aparecen las fuerzas de rozamiento, que son *limitadas* y no impedirán el movimiento cuando las fuerzas aplicadas sean lo suficientemente grandes.

Hay dos tipos de rozamiento o fricción: ROZAMIENTO SECO también llamado ROZAMIENTO DE COULOMB que se presenta en las superficies de contacto entre dos sólidos no lubricados, y ROZAMIENTO FLUIDO. Del primero estudiaremos el de *deslizamiento*, el *estático* y el de *rodadura*; de los dos primeros nos ocuparemos en la siguiente cuestión; la resistencia a la rodadura será objeto de análisis en el estudio del sólido rígido (Capítulo XI, párrafo 14). En cuanto al rozamiento entre fluidos (líquidos y gases) ya nos hemos ocupado en parte, en problemas; analizaremos más puntualmente este fenómeno en el capítulo XII.

Hemos visto que las fuerzas primarias en la naturaleza las reducíamos a cuatro tipos: gravitacionales, electromagnéticas, nucleares fuertes y débiles. Fuerzas tales como las de rozamiento, las tensiones de las cuerdas, la fuerza que ejerce un muelle comprimido o extendido, la fuerza que ejerce el suelo sobre un cuerpo o la pared al empujarla, las fuerzas que se oponen a que un objeto se rompa, ..., de todas ellas decimos que son *macroscópicas*, y su origen mayoritariamente está en las *fuerzas electromagnéticas* de atracción o repulsión entre los átomos y moléculas (fuerzas de enlace), haciendo esto que sea imposible realizar un análisis utilizando estas interacciones puesto que el número de partículas que intervienen en ellas es muy elevado, se tienen que tratar de forma colectiva. Las ecuaciones que plantearemos tanto en el estudio del *rozamiento* como en el de *muelles*, que abordaremos a continuación, son *aproximaciones empíricas*, es decir obtenidas de forma experimental, no habiendo un total entendimiento de estos fenómenos.

Las *fuerzas de rozamiento* son *DISIPATIVAS*. Hay ocasiones en que las fuerzas de rozamiento son indeseables, como ocurre en las máquinas, provocando pérdidas de potencia y desgaste de sus piezas móviles, para reducir estos efectos los ingenieros emplean muchas horas de su trabajo; así por ejemplo: en los coches, alrededor de un 20% de su potencia se emplea en contrarrestar las fuerzas de rozamiento. No siempre son indeseables puesto que sin ellas seríamos incapaces de caminar, el rozamiento entre los pies y el suelo nos permite avanzar y detenernos; las ruedas no podrían rodar puesto que patinarían y un coche no podría tomar una curva...

### VI - 5. Resistencia al deslizamiento

El ROZAMIENTO es una fuerza que se opone al movimiento de los cuerpos, al deslizarse sobre la superficie de otro. Surge entre los cuerpos que están en «contacto» tanto entre los que se encuentran en reposo (ROZAMIENTO ESTÁTICO) como entre los que se mueven (ROZAMIENTO DINÁMICO). La primera observación que confirma la existencia de la fuerza de rozamiento dinámico la veíamos en el capítulo anterior al hacer el estudio de la inercia, veíamos que al comunicar un «impulso» a un cuerpo apoyado en una superficie horizontal deberían adquirir un movimiento rectilíneo y uniforme: sin embargo observamos que va disminuyendo su velocidad hasta pararse, lo que indica la existencia de la *fuerza de rozamiento que actuará en la misma dirección que la velocidad pero en sentido contrario a ella*. La existencia de la fuerza de rozamiento estático la podemos corroborar observando la siguiente experiencia: consideremos un cuerpo de peso  $P$  que se encuentra sobre una superficie horizontal, al aplicarle una fuerza horizontal  $F$  que no saca del reposo al cuerpo; las fuerzas  $F$  y  $P$  tendrán como resultante  $F_1$  (Fig. VI-5) y evidentemente para que haya equilibrio es preciso que esté compensada por la  $F_2$ ; si descomponemos ésta en dos, una  $N$  normal al plano y otra  $R_e$  paralela a él,  $N$  será la reacción del suelo (fuerza que el plano horizontal ejerce sobre el cuerpo) que es igual y de sentido contrario a  $P$  y  $R_e$  será la resistencia al movimiento igual y de sentido contrario a  $F$ .

Las leyes sobre el rozamiento por deslizamiento tanto estático como dinámico fueron establecidas experimentalmente hacia 1779 por Charles Coulomb (1736-1806), razón por las que las denominamos FUERZAS DE ROZAMIENTO DE COULOMB. Un experimento que nos confirman estas leyes puede realizarse con el dispositivo de la Fig. VI-6, en el que vamos colgando del hilo que pasa por la polea, pesos cada vez mayores, observaremos, al comienzo, que el cuerpo apoyado en el plano horizontal *no se mueve*; el peso que, en cada caso, pende del hilo, nos mide el rozamiento estático. Para que se inicie el movimiento del cuerpo es necesaria una fuerza mínima (peso pendiente, en nuestro caso) la cual nos determina el MÁXIMO ROZAMIENTO ESTÁTICO. Tal fuerza es algo mayor que la necesaria para conservar una velocidad constante del cuerpo, en su deslizamiento (ROZAMIENTO DINÁMICO).

Para un mejor entendimiento del párrafo anterior resolvemos el siguiente PROBLEMA numérico: un cuerpo está apoyado en una superficie horizontal; ¿cuánto vale el rozamiento?— Cero. Le aplicamos una fuerza horizontal de 0,1 kp y no se mueve.— El rozamiento estático es 0,1 kp. Al aplicarle 0,2 kp horizontalmente el cuerpo inicia su movimiento.— El rozamiento estático máximo es

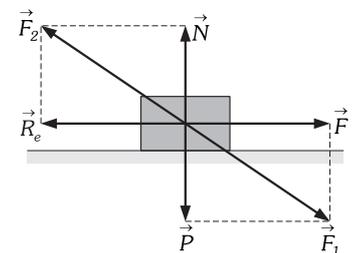


Fig. VI-5.- Fuerza de rozamiento estático.

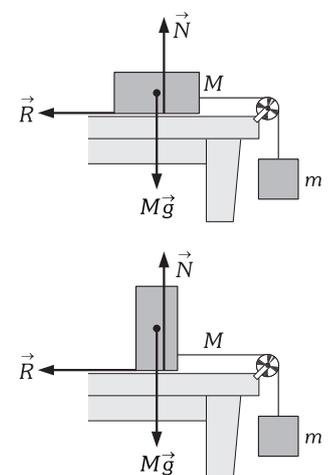


Fig. VI-6.- Dispositivo para observar las propiedades de la fuerza de rozamiento.

0,2 kp. Para que el cuerpo se mueva con velocidad constante es necesaria una fuerza horizontal de 0,15 kp.— El rozamiento dinámico es 0,15 kp. Y ¿si una vez adquirido el movimiento se continuase aplicando una fuerza horizontal de 0,2 kp?— El cuerpo adquiriría una aceleración. Supuesta la masa del cuerpo 0,5 kg se verificaría:

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} \Rightarrow F - R_d = ma \Rightarrow 0,2 - 0,15 = \frac{0,5}{9,8} a \Rightarrow a = \frac{0,05 \times 9,8}{0,5} = 0,98 \text{ m/s}^2$$

Deslizando pesos distintos, de la misma materia y con superficies igualmente pulidas, en la misma superficie horizontal, observamos que «la resistencia al deslizamiento es directamente proporcional al peso ( $P$ ) del cuerpo, si sobre éste no actúa ninguna otra fuerza». Colocando en la misma superficie el mismo cuerpo, de forma que rocen distintas caras de él igualmente pulidas, se observa que «la resistencia al deslizamiento es independiente del área de la superficie que roza».

Por último, colocando pesos idénticos de diversas sustancias en diversas superficies, se comprueba que «la resistencia al deslizamiento depende de la naturaleza de las superficies que rozan».

Podemos compendiar los hechos anteriores en las siguientes conclusiones generales:

1. La fuerza de rozamiento es paralela a las superficies en contacto y, cuando el cuerpo se traslada, tiene la dirección de la velocidad y el sentido contrario a ella, y por tanto, la fuerza de rozamiento produce la disminución del valor absoluto de la velocidad del cuerpo.
2. Es proporcional a la fuerza normal con que se aprietan las superficies en contacto.
3. Es independiente del área de la superficie que roza.
4. Depende de la naturaleza de las superficies que rozan.
5. Una vez que el cuerpo se ha sacado del equilibrio, la fuerza de rozamiento es prácticamente independiente de la velocidad de deslizamiento. (Esto será cierto siempre que el calor producido en la fricción sea lo suficientemente pequeño y no altere las superficies en contacto).
6. Distinguimos entre dos tipos de fuerza de rozamiento; la dinámica que es la que aparece cuando el cuerpo se desliza sobre la superficie y la estática que será la que actúa cuando el cuerpo está en reposo, y que alcanza su valor límite en el instante en que el cuerpo inicia el movimiento.

#### ROZAMIENTO DINÁMICO

Según la 2ª conclusión, tomará el valor:

$$R_d = \mu_d N$$

en la que  $\mu_d$  es el llamado COEFICIENTE DINÁMICO de rozamiento, característico del tipo del superficies, y  $N$  es la fuerza normal con que se aprietan las superficies en contacto. Esta última fórmula la podemos escribir vectorialmente según la 1ª conclusión de la siguiente forma:

$$\mathbf{R}_d = -\mu_d N \frac{\mathbf{v}}{v}$$

en la que  $\mathbf{v}$  es la velocidad del cuerpo que desliza sobre la superficie correspondiente.

Si la superficie sobre la que se desliza el cuerpo es horizontal y sobre el cuerpo no actúan más fuerzas exteriores que su peso y la normal, entonces:  $N = P = Mg$  y por tanto  $R_d = \mu_d Mg$ . En el dispositivo de la Fig. VI-6, si  $m$  es la masa que hace que el sistema se mueva con velocidad constante, entonces  $R_d = mg$ , con lo que se obtiene  $\mu_d = m/M$ ; medidas la masa del cuerpo que desliza y la del que cuelga (con una balanza) se obtendrá un método experimental de cálculo del coeficiente dinámico de rozamiento.

#### ROZAMIENTO ESTÁTICO

La fuerza de rozamiento estático toma valores desde cero hasta el valor máximo, acomodándose a la acción exterior, y mientras la fuerza externa no supere este último valor el cuerpo permanecerá en reposo. La fuerza de rozamiento estático es siempre de igual módulo y sentido opuesto a la componente de la fuerza aplicada al cuerpo paralela a la superficie de contacto de éste con otro cuerpo.

A partir del valor límite definimos el COEFICIENTE DE ROZAMIENTO ESTÁTICO  $\mu_e$  de la forma:

$$\mu_e = \frac{R_{e, \text{máx}}}{N} \Leftrightarrow R_{e, \text{máx}} = \mu_e N$$

donde  $N$  es de nuevo la normal con que se aprietan las superficies en contacto. En general pues:  $0 \leq R_e \leq \mu_e N$ .

En el dispositivo de la Fig. VI-6, si es  $m'$  la masa que hace que el sistema «inicie» su movimiento, en ese instante:  $R_e = m'g$ ; con lo que obtenemos que  $\mu_e = m'/M$ , obteniéndose así un método experimental para la medida del coeficiente estático de rozamiento.

Para dos superficies cualesquiera el coeficiente estático es siempre mayor que el dinámico:

$$\mu_e > \mu_d$$

Si la superficie no es horizontal entonces  $N$  no es igual al peso del cuerpo; así por ejemplo: si el cuerpo se encuentra sobre un plano que podemos inclinar y sobre él no actúan más fuerzas que su peso, la de rozamiento y la reacción normal del plano entonces (Fig. VI-7) se obtiene:

$$\mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow P_x = Mg \operatorname{sen} \varphi \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow N = P_y = Mg \operatorname{cos} \varphi \end{cases} \Rightarrow R = \mu Mg \operatorname{cos} \varphi$$

siendo  $\mu$  el coeficiente estático o el dinámico, según que el cuerpo inicie el deslizamiento o esté ya deslizando con movimiento uniforme. En el primer caso:

$$\mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{R}_e = \mathbf{0} \\ R_e = \mu_e N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_x - \mu_e N = 0 \Rightarrow Mg \operatorname{sen} \varphi = \mu_e Mg \operatorname{cos} \varphi \\ N - P_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mu_e = \operatorname{tg} \varphi}$$

Si el cuerpo desliza con movimiento uniforme, se verifica:

$$\mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{R}_d = \mathbf{0} \\ R_d = \mu_d N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = P_y \\ P_y - R_d = 0 \Rightarrow Mg \operatorname{sen} \varphi = \mu_d Mg \operatorname{cos} \varphi \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mu_d = \operatorname{tg} \varphi}$$

El coeficiente  $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{estático} \\ \text{dinámico} \end{smallmatrix} \right\}$  de rozamiento entre dos sustancias está medido por la tangente del ángulo de inclinación que hay que dar a una superficie plana de la primera para que  $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{inicie el movimiento} \\ \text{deslice uniformemente} \end{smallmatrix} \right\}$  un cuerpo, compuesto por la segunda sustancia.

Si hacemos una representación gráfica de la fuerza horizontal que aplicamos sobre un cuerpo en reposo, en un plano horizontal, para ponerlo en movimiento aumentándola desde cero y la representamos en el eje de abscisas, y la fuerza que se opone a ella (Rozamiento) en el eje de ordenadas obtenemos la Fig. VI-8. En efecto:

Si sobre un cuerpo en reposo aplicamos una fuerza nula, la fuerza de rozamiento es cero (origen de coordenadas).

Si sobre el cuerpo aplicamos una fuerza  $f_1$ , y sigue en reposo, la fuerza que se opone al movimiento (Rozamiento) es  $f_1$ . Si aplicamos otra  $f_2$  y el cuerpo sigue en reposo la fuerza de rozamiento es  $f_2$  ... (Tramo O-A, que sigue la bisectriz del primer cuadrante). Si seguimos aumentando esta fuerza llegaremos al valor  $F = \mu_e N = R_e$ , el cuerpo en ese instante inicia su movimiento. Instantáneamente la fuerza que se opone al movimiento (Rozamiento) disminuye hasta el valor  $F_1 = \mu_d N = R_d$  (salto de A a B).

A partir de ese momento si aumentamos la fuerza aplicada sobre el cuerpo, se opondrá al movimiento la fuerza  $R_d = \mu_d N$  (tramo de B en adelante, paralelo al eje de abscisas).

Una vez puesto el cuerpo en movimiento, para cualquier valor de la fuerza aplicada, la de rozamiento vale siempre  $\mu_d N$ . Para el valor  $F_1$  el cuerpo se moverá con velocidad constante; si la fuerza es mayor que  $F_1$  el movimiento será acelerado, y si es menor será decelerado.

No olvidemos que estas consecuencias son aproximadas y que la representación de los datos experimentales se apartan sensiblemente de las rectas que hemos representado, son consecuencias estadísticas de regresión lineal.

El coeficiente de rozamiento  $\mu$ , no solamente depende de la naturaleza de los materiales, también depende de sus condiciones, es decir, del grado de pulimentación de las superficies en contacto, de la temperatura, de las películas superficiales o de la atracción molecular entre los materiales en contacto que pueden producir microsoldaduras que se forman y se rompen continuamente durante el deslizamiento. La Fig. VI-9 muestra las áreas microscópicas de contacto entre dos superficies, dándonos una idea del fenómeno.

PROBLEMAS: 23 al 77.

### C) DINÁMICA DE LAS OSCILACIONES MECÁNICAS

#### VI - 6. Introducción

Hemos estudiado la Cinemática de las Oscilaciones en el capítulo III, párrafos del 16 al 20 y en el capítulo IV, párrafos 11 y 12, se completa el estudio dinámico de un oscilador, con el conocimiento de la fuerza que produce la oscilación o la masa de la partícula que oscila. Repetimos en esta sección algunas de las características más importantes del MAS y recomendamos al lector un repaso de los temas citados.

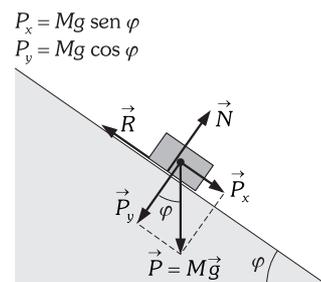


Fig. VI-7.- El plano inclinado nos proporciona otro método de medida de  $\mu_e$  y  $\mu_d$ .

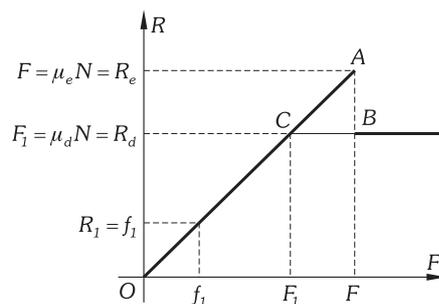


Fig. VI-8.- Representación gráfica de la fuerza de rozamiento en función de la fuerza aplicada a un cuerpo en sentido paralelo a la superficie de contacto de éste con otro cuerpo.

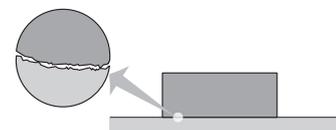


Fig. VI-9.- Áreas de contacto entre dos superficies en las que hemos ampliado una pequeña parte de ellas.

La gran mayoría de los sistemas pueden vibrar libremente de muchas maneras diferentes; en general las vibraciones de los sistemas mecánicos pequeños suelen ser rápidas (las alas de algunos insectos vibran muchas veces por segundo, más de 20 veces por segundo para producir una onda audible) y para objetos grandes suelen ser lentas (la Tierra, después de la sacudida de un terremoto, puede continuar oscilando a un ritmo de una oscilación por hora aproximadamente).

El estudio del oscilador armónico constituye en Física uno de los campos de estudio más importantes, puesto que a pesar de hacerlo a partir de un sencillo *modelo mecánico*, como es una partícula material que oscila en el extremo de un resorte, responde a ecuaciones idénticas a las que se aplican en el estudio de fenómenos tales como: péndulo, vibraciones en cuerdas y tubos (instrumentos musicales) generando ondas sonoras, corrientes alternas, descarga oscilante de un condensador generando ondas electromagnéticas (televisión, teléfono, telégrafo, ...). El cuerpo humano es un complejo productor y receptor de ondas, así nuestras cuerdas bucales vibran, la boca es una caja de resonancia para tales vibraciones, podemos oír, detectamos la luz, ...

Todas las oscilaciones que analizamos tienen en común que son *periódicas*, es decir el movimiento oscilatorio se repite una y otra vez, así por ejemplo en la Fig VI-10 representamos dos casos que parecen muy distintos de oscilaciones mecánicas, y tienen en común que las dos son periódicas; el eje de simetría horizontal de ambas representa el continuo avance del tiempo, pudiéndose determinar el período (intervalo de tiempo en que se produce una oscilación). Según vimos en Cinemática, cuando enunciamos el Teorema de J. Fourier, podemos expresar el caso (b) de la figura como suma de MAS, por lo que éste último es una unidad temática que implica la correspondiente álgebra en el análisis de las oscilaciones.

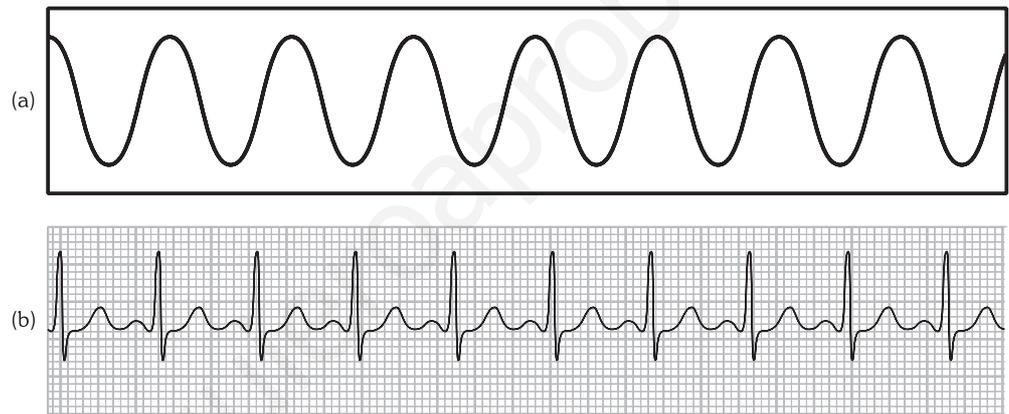


Fig. VI-10.- La (a) corresponde a la oscilación de un diapasón, que es una senoide. La (b) son las variaciones de presión del corazón de un ser humano. El eje horizontal representa el continuo avance del tiempo. La (b) puede ser expresada matemáticamente por una Serie de Fourier.

## VI - 7. Medida de Fuerzas en condiciones estáticas. Dinamómetros.

### Principio ley de Hooke

Para la medida de fuerzas recurriremos, en cada caso, a los efectos que producen; si atendemos a las deformaciones que éstas pueden producir a los cuerpos, en ciertas condiciones, la naturaleza responde obedeciendo al siguiente principio:

*«Las deformaciones producidas en los cuerpos son directamente proporcionales a las fuerzas que actúan».*

Al alargar o comprimir un cuerpo, la distancia entre sus átomos aumenta o disminuye y entre ellos actuarán las fuerzas de atracción o repulsión que obligan a éstos a acercarse o separarse de nuevo a la primitiva distancia al cesar la acción exterior. Así pues, durante la *tracción* o *compresión* de un muelle, surgen fuerzas de naturaleza electromagnética que tienden a hacer que se restablezca las dimensiones iniciales del muelle; el análisis de la fuerza resultante a partir de ellas es extremadamente complejo, cuando no imposible, al igual que en el análisis que hemos hecho en las fuerzas de fricción, tratándose de forma colectiva; como consecuencia las ecuaciones que plantearemos son empíricas y a la fuerza macroscópica que se estudia la llamaremos FUERZA RECUPERADORA ELÁSTICA ( $F_{rec}$ ), pudiéndose enunciar:

*«La fuerza elástica está dirigida en sentido opuesto a la deformación sufrida, y es proporcional a la magnitud de dicha deformación».*

Este enunciado constituye la ley de Robert HOOKE (1635-1703), que se expresa matemáticamente de la forma:

$$F_{rec} = -Kx$$

A  $K$  la llamaremos CONSTANTE DEL MUELLE o COEFICIENTE DE RIGIDEZ y también COEFICIENTE ELÁSTICO. Su ecuación de dimensiones es  $[K] = MT^{-2}$  y en el SI se mide en N/m. Una forma práctica de comprobar esta ley es la que esquematizamos en la Fig. VI-11 que nos representa un resorte de acero y una regla en la que podemos medir la deformación  $x$ , cuando el sistema alcanza el equilibrio, producida por una fuerza externa,  $F_{ext}$  (un peso, por ejemplo, no lo suficientemente grande como para producir deformaciones permanentes o su ruptura) que expresaremos por  $F$  y que será igual y de sentido contrario a la elástica, pudiéndose escribir:  $F = Kx$ . Para otra fuerza  $F'$  si la deformación que le corresponde es  $x'$  entonces la ley se expresará:  $F' = Kx'$ . Tomada una de las fuerzas como unidad podremos medir la otra ya que:  $F/F' = x/x'$ .

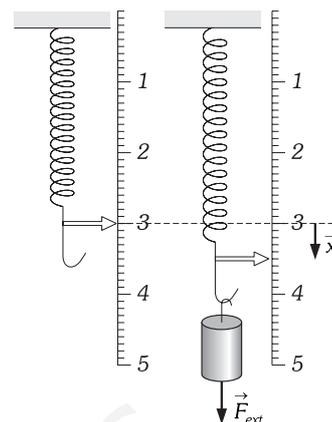


Fig. VI-11.- Dinamómetro.

A los aparatos que se emplean en la medida de fuerzas, tales como el descrito, se les llama DINAMÓMETROS.

Hemos elegido el muelle por su simplicidad en su uso en el laboratorio, pero hay que tener en cuenta que la fuerza elástica aparece no sólo cuando deformamos un muelle sino cuando deformamos cualquier cuerpo. La ley de Hooke es únicamente válida cuando, siendo el cuerpo elástico, la deformación no sea lo suficientemente grande como para producirle deformaciones permanentes. La tracción, compresión, flexión y torsión de una barra, obedecen igualmente a la ley de Hooke. (De estas deformaciones nos ocuparemos en el capítulo de Elasticidad).

**PROBLEMA: 78.**

**VI - 8. Dinámica del movimiento armónico simple. Ecuación básica del mas. Masa unida a un muelle**

Consideremos el experimento indicado en la Fig. VI-12 en el que la partícula (bolita) realiza las oscilaciones en una línea horizontal, después de sacarla de su posición de equilibrio  $O$  y soltarla, bajo la fuerza elástica del muelle en condiciones ideales (no existe amortiguamiento de ningún tipo, es decir: suponemos nulas las resistencias del aire y de frotamiento con la barra en la que está ensartada la bolita).

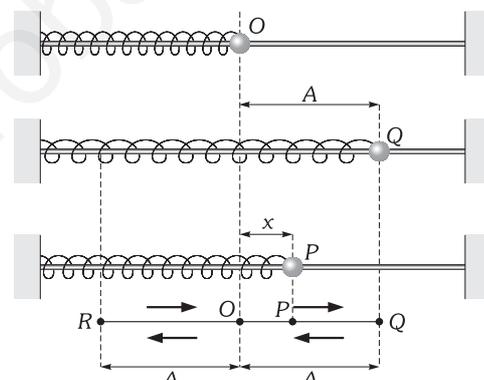


Fig. VI-12.- Movimiento vibratorio armónico simple.

El valor de la fuerza elástica que provoca el movimiento (*ley de Hooke*) es proporcional al desplazamiento ( $x$ ) y de signo contrario a él:  $F = -Kx$ , siendo  $K$  la constante recuperadora. Al movimiento provocado por tal fuerza lo hemos llamado MOVIMIENTO VIBRATORIO ARMÓNICO SIMPLE (MAS).

Sacamos como rasgos más característicos del MAS que:

- 1) El movimiento es periódico, es decir: en intervalos de tiempo iguales el móvil adquiere la misma posición y las mismas características de movimiento.
- 2) El movimiento es oscilatorio o de vaivén a ambos lados de una posición central de equilibrio.
- 3) La máxima separación del cuerpo en su movimiento (amplitud), contada a partir de su posición de equilibrio, es siempre la misma.

Comenzamos el estudio dinámico de este modelo mecánico aplicando la ecuación del movimiento:

$$F = ma \Rightarrow -Kx = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \boxed{m \frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0}$$

que es la ECUACIÓN DIFERENCIAL BÁSICA DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO. Se suele expresar de la forma:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0} \quad (1), \quad \text{con:} \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}}$$

A  $\omega$  se le llama FRECUENCIA ANGULAR (o también FRECUENCIA PROPIA DEL OSCILADOR o PULSACIÓN), se mide en rad/s, y no depende de las condiciones iniciales del movimiento sino solamente de características del oscilador.

La solución de la ecuación (1) es (ver problema III-28):

$$\boxed{x(t) = A \text{ sen } (\omega t + \varphi)}$$

como puede comprobarse simplemente por sustitución. De hecho  $A$  y  $\varphi$  son dos constantes que aparecen de la doble integración que hay que realizar para resolver la ecuación (1), y dependen de las condiciones iniciales del movimiento, que se controlan desde el exterior del sistema.

Como ya se estudió, la pulsación es:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{\nu} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}}$$

Las ecuaciones horarias del movimiento las podemos escribir:

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) = A \operatorname{sen}(2\pi\nu t + \varphi)$$

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi) = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$a(t) = -A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

$$F = ma = -mA\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = -m\omega^2 x$$

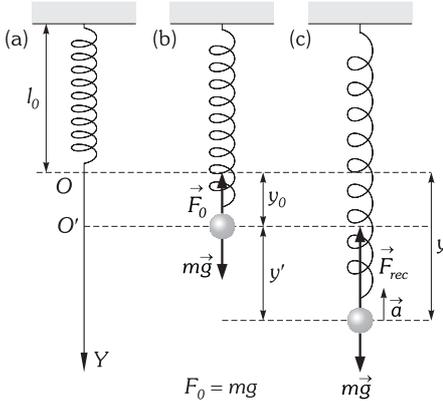


Fig. VI-13.- El oscilador vertical masa-muelle. En (a) indicamos la longitud natural del muelle. En (b) la posición de equilibrio con la bolita colgando. En (c) una posición cualquiera cuando oscila.

Como vimos para un mismo oscilador las características propias son el período y la frecuencia, es decir, el período y la frecuencia son siempre los mismos, pudiendo variar en él la amplitud ( $A$ ) y la fase inicial ( $\varphi$ ).

En consecuencia podemos decir que  $A$  y  $\varphi$  son independientes de  $\omega$  para un mismo oscilador.

Esta última consecuencia tiene importantes aplicaciones de los osciladores, así por ejemplo: para el caso del oscilador constituyente de un reloj, al pasar el tiempo las oscilaciones se amortiguan haciéndose más pequeñas hasta pararse, cada oscilación amortiguada tiene el mismo período. Para que no se pare, hay que comunicarle energía externa, razón por la que hay que darle cuerda, ponerle una nueva pila o mover un volante con las acciones de nuestro brazo cuando el reloj es automático.

Veamos el caso de una partícula de masa  $m$  enganchada a un muelle de masa despreciable y en posición vertical. En la Fig. VI-13(a) indicamos la longitud natural del muelle; en la (b), la posición de equilibrio del sistema en la que  $y_0$  es lo que se ha alargado el resorte respecto de  $O$ ; la (c) nos representa una posición cualquiera después de la que hemos sacado de su posición de equilibrio  $O'$  y la hemos soltado.

La ecuación del movimiento respecto de  $O$ , será:

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \Rightarrow m \frac{d^2 y}{dt^2} = -Ky + mg \Rightarrow m \frac{d^2 y}{dt^2} + Ky = mg$$

diferente de la (1) en el término constante  $mg$ ; podemos eliminar éste sin más que hacer un cambio de variable  $y$  y tomar como eje  $O'$ , luego  $y' = y - y_0$  y como en el equilibrio  $mg = Ky_0$ , entonces  $y_0 = mg/K = cte.$ ; con lo que  $dy'/dt = dy/dt$  y  $d^2 y'/dt^2 = d^2 y/dt^2$ . En conclusión:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 y'}{dt^2} + Ky = mg \\ Ky_0 = mg \end{aligned} \right| \Rightarrow m \frac{d^2 y'}{dt^2} + Ky' = 0$$

que es la ecuación básica del oscilador armónico simple. En consecuencia:

«Para un sistema masa-muelle vertical, se utiliza el mismo tratamiento que se hace al sistema masa-muelle horizontal, situando el origen en la posición de equilibrio, prescindiendo de la influencia del peso».

**PROBLEMAS: 79 al 103.**

**VI - 9. Movimiento vibratorio amortiguado**

Los movimientos vibratorios armónicos que observamos en la realidad, van disminuyendo su amplitud con el tiempo, debido a los rozamientos del cuerpo que vibra con el medio exterior y al rozamiento interno. Los fenómenos de mayor interés son aquellos en que la fuerza de rozamiento que se opone al movimiento es proporcional a la velocidad ( $-Rv$ ); tales fuerzas son de origen viscoso, denominándose a la constante de proporcionalidad ( $R$ ) COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO, cuya ecuación de dimensiones es:  $[R] = MT^{-1}$  y en el SI se medirá en  $N \cdot s/m$ . En la práctica el amortiguador viscoso se instala en los sistemas para retardar o limitar sus vibraciones y consiste en un cilindro lleno de un fluido viscoso y un pistón con orificios a través de los cuales puede pasar el fluido de uno a otro lado del pistón. En la Fig. VI-14 esquematizamos la instalación de un amortiguador.

La fuerza productora del movimiento es pues la suma de la fuerza recuperadora ( $-Kx$ ) y la de rozamiento  $y$ , por tanto se habrá de verificar:

$$F = Ma \Rightarrow -Kx - Rv = ma \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{R}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{K}{m} x = 0 \quad (3)$$

siendo  $m$  la masa del cuerpo que vibra y  $K$  la constante recuperadora. En la cual:

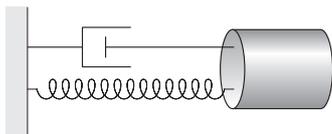


Fig. VI-14.- Esquema de un amortiguador.

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \tau = \frac{2m}{R}$$

son respectivamente la FRECUENCIA PROPIA del oscilador (*frecuencia de la oscilación no amortiguada*) y el TIEMPO DE RELAJACIÓN, en función de los cuales se escribe:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

La solución de la anterior ecuación diferencial, es:

$$x = A_0 e^{-bt} \cos \omega t \quad (4)$$

en la que  $A_0$  es el DESPLAZAMIENTO INICIAL (para  $t=0$  se verifica que:  $x=A_0$ ) y  $b$  y  $\omega$  constantes que hemos de determinar. Para ello hallems las derivadas primera y segunda de  $x$  con respecto a  $t$ :

$$\frac{dx}{dt} = -A_0 e^{-bt} (b \cos \omega t + \omega \sin \omega t) \quad (5)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = A_0 b e^{-bt} (b \cos \omega t + \omega \sin \omega t) - A_0 e^{-bt} (-b\omega \sin \omega t + \omega^2 \cos \omega t) = A_0 e^{-bt} [(b^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2b\omega \sin \omega t] \quad (6)$$

Sustituyendo los valores (4), (5) y (6) en (3), obtenemos:

$$A_0 e^{-bt} [\cos \omega t (K - Rb + mb^2 - m\omega^2) + \sin \omega t (-R\omega + 2mb\omega)] = 0$$

Para que esta ecuación se cumpla para *todos los valores del tiempo*, los coeficientes del seno y del coseno, habrán de ser nulos; del primero obtenemos:

$$R\omega = 2mb\omega \quad \Rightarrow \quad b = \frac{R}{2m} = \frac{1}{\tau}$$

y anulando el coeficiente del coseno, y sustituyendo  $b$  por su valor:

$$K - \frac{R^2}{2m} + m \frac{R^2}{4m^2} - m\omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad K - \frac{R^2}{4m} - m\omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{R^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}} \quad (7)$$

y la frecuencia del movimiento es:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{R^2}{4m^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}} \quad (8)$$

El valor de  $b$  en función de  $\omega$ , es, deducido de la (8):

$$b = \frac{R}{2m} = \sqrt{\frac{K}{m} - \omega^2} = \omega \sqrt{\frac{K}{m\omega^2} - 1} = \omega \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1}$$

y sustituyendo  $\omega^2$  en el denominador de la fracción, llegamos a:

$$b = \omega \sqrt{\frac{R^2}{4Km - R^2}} = k\omega \quad (9)$$

designando por  $k$  al valor de la raíz, llamada ÍNDICE DE AMORTIGUAMIENTO.

Sustituyendo  $b$  por su valor, en (5) obtenemos como ecuación del movimiento vibratorio armónico amortiguado:

$$x = A_0 e^{-k\omega t} \cos \omega t$$

Si consideramos, como caso más general, una fase inicial  $\varphi$  cualquiera, la ecuación anterior se transforma en:

$$x = A_0 e^{-k\omega t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (10)$$

luego es un movimiento vibratorio cuya amplitud decrece con el tiempo según la ecuación exponencial:

$$A = A_0 e^{-k\omega t}$$

Obsérvese que para valores pequeños (próximos a cero) del índice de amortiguamiento  $k$  el movimiento oscilatorio presenta un fuerte amortiguamiento. También es obvio que cualquiera que sea el movimiento amortiguado cuando  $t$  tiende a infinito ( $t \rightarrow \infty$ ) entonces  $x = 0$ .

El PERÍODO DE OSCILACIÓN:  $\Gamma = 1/\nu = 2\pi/\omega$ , y el DECREMENTO LOGARÍTMICO:  $\delta = \ln A_n/A_{n+1} = 2\pi k = k\omega\Gamma = \Gamma/\tau = \Gamma R/2m = b\Gamma$ , se han estudiado en el párrafo III-20.

**VI – 10. Amortiguamiento crítico. Oscilación sobreamortiguada**

La expresión (7) se puede escribir:

$$\omega^2 = \frac{K}{m} - \frac{R^2}{4m^2}$$

que en un caso práctico puede tener valores positivos, nulo o negativos, lo que da lugar a la siguiente clasificación de los movimientos vibratorios amortiguados:

A) MOVIMIENTO SUBAMORTIGUADO: *corresponde a  $\omega > 0$* , y responde al estudio hecho en la cuestión anterior. En él:

$$\frac{R^2}{4m^2} < \frac{K}{m} \Rightarrow R < 2\sqrt{Km}$$

B) AMORTIGUAMIENTO CRÍTICO *es el correspondiente a  $\omega = 0$* , lo que supone un coeficiente de amortiguamiento  $R_c$ , tal que:

$$\frac{K}{m} = \frac{R_c^2}{4m^2} \Rightarrow R_c = 2\sqrt{Km}$$

mayor que en el caso anterior. Las fórmulas (8) y (9) de la cuestión anterior nos indican que la frecuencia es nula (período infinito) y la constante de amortiguamiento se hace infinita. Se llama FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO al coeficiente  $R/R_c$ .

La ecuación de la trayectoria (10), se puede desarrollar de la forma:

$$x = A_0 e^{-k\omega t} (\cos \omega t \cos \varphi - \text{sen } \omega t \text{ sen } \varphi)$$

que cuando  $\omega$  tiende a cero, tiende al valor:

$$x = A_0 e^{-k\omega t} (\cos \varphi - \omega t \text{ sen } \varphi)$$

por tanto en el amortiguamiento crítico:

$$x = e^{-k\omega t} [Mt + N]$$

con  $M$  y  $N$  constantes; el movimiento ya no es oscilatorio (Fig. VI-15), empieza como armónico pero en cuanto la velocidad aumenta lo suficiente la fuerza de rozamiento predomina sobre la recuperadora y amortigua el movimiento en un tiempo mínimo. Por esta razón, este caso de amortiguamiento se utiliza en coches, galvanómetros, balanzas, etc., para conseguir mayor comodidad o mayor rapidez en las medidas.

C) MOVIMIENTO SOBREAMORTIGUADO: Si  $R$  aumenta por encima de  $R_c$ , entonces se tiene:

$$R > 2\sqrt{Km} \Rightarrow \frac{R^2}{4m^2} > \frac{K}{m} \Rightarrow \omega^2 < 0$$

es decir, tanto la frecuencia como la constante de amortiguamiento adquieren valores imaginarios en las fórmulas (8) y (9) del párrafo anterior, lo que no tiene sentido físico: el movimiento no es oscilatorio, verificándose que al separar el cuerpo de su posición de equilibrio y abandonarlo con velocidad nula, no puede pasar al otro lado de ella, moviéndose lentamente y en una forma que nada tiene que ver con el movimiento oscilatorio.

**PROBLEMAS: 104 al 111.**

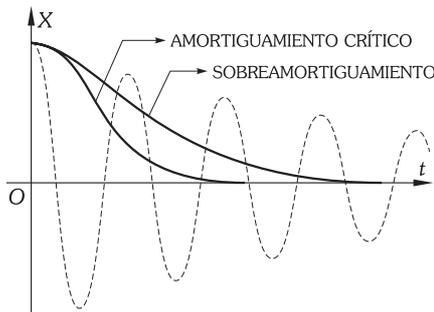


Fig. VI-15.- Amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento.

\* Realizaremos el estudio de las Oscilaciones Forzadas (no libres) y la Resonancia en el capítulo siguiente (ENERGÍA).

PROBLEMAS

A) PESO. CENTRO DE GRAVEDAD

1. 1) Calcular el peso en kp de un hombre de 70 kg de masa, que se encuentra a una altura en la que la intensidad de la gravedad es 970 dyn/g. 2) ¿Cuál es el valor de la intensidad del campo gravitatorio para que el individuo pese 65 kp?

2. 1) ¿Cuánto pesaría un hombre de 70 kg en un planeta de masa y radio 10 veces menores que la masa y el radio de la Tierra? 2) ¿Y en otro planeta de radio 10 veces menor y masa 100 veces menor que los de la Tierra?

3. ¿A qué altura sobre el nivel del mar habría que subir un cuerpo para que su peso fuera la mitad que a ese nivel? ( $R_0 = 6370$  km).

4. ¿A qué altura habrá que subir sobre la superficie terrestre para que  $g$  disminuya en  $2 \text{ m/s}^2$ ? (Radio de la Tierra  $R_0 = 6370$  km;  $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$ ).

5. Si la masa de la Luna es  $1/81$  la masa de la Tierra y su radio  $1/4$  del de ésta. ¿Cuál es el peso de un hombre de 70 kg en la superficie lunar?

6. Determinar la masa y la densidad media de la Tierra. Radio terrestre = 6370 km;  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ ;  $g_0 = 9,8 \text{ N/kg}$ .

7. La masa del Sol es 324 440 veces mayor que la de la Tierra y su radio 108 veces mayor que el terrestre. ¿Cuál sería la altura alcanzada por un proyectil que se lanzase verticalmente hacia arriba desde la superficie solar, a una velocidad de 720 km/h? ¿Cuántas veces es mayor el peso de un cuerpo en el Sol que en la Tierra? ( $g_0 = 9,8 \text{ N/kg}$ ).

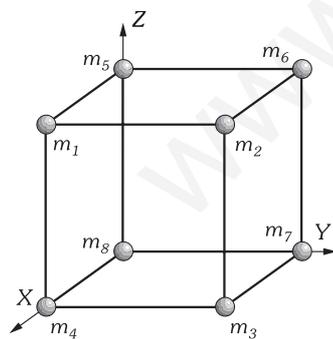
8. ¿En qué punto se equilibran las atracciones que ejercen la Tierra y la Luna sobre un cuerpo? Distancia entre los centros de los dos astros = 384 400 km. La masa de la Tierra es 81 veces mayor que la de la Luna.

9. Demostrar que el CG de una superficie triangular y homogénea se encuentra en el baricentro (punto donde se cortan las medianas).

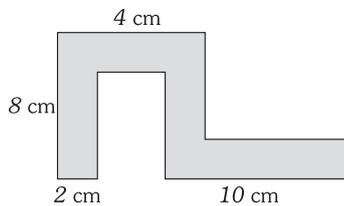
10. ¿Cómo podríamos determinar la posición del CG de la superficie homogénea de un cuadrilátero basándonos en el resultado del ejercicio anterior?

11. 1) Determinar la posición del centro de masas formado por tres puntos materiales A, B, C, de la misma masa, situados en línea recta, siendo  $AB = l_1$  y  $BC = l_2$ . 2) Tres bolas de 8, 2 y 2 kg están en línea recta y separados sus centros unos de otros 1 m y colocadas en el orden indicado. Determinar la posición del centro de masas del sistema. 3) En los vértices sucesivos A, B, C y D de un cuadrado de lado 10 cm hay localizadas masa de 1, 2, 3 y 4 g respectivamente. Determinar la posición del centro de masas.

12. En cada uno de los vértices de un cubo de arista  $l$  están localizadas las masas expresadas en la figura. Determinar las coordenadas del centro de masas.



Problema VI-12.



Problema VI-14.

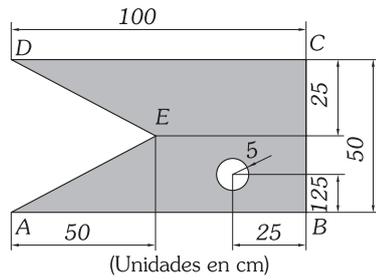
13. Tres masas puntuales de 2, 3 y 4 kg se encuentran en A (1, 2, 1), B (-2, 1, 0) y C (3, 2, 4) referidos a un sistema de ejes cartesianos y medidas estas coordenadas en metros. Calcular el vector de posición del centro de masas.

14. Calcular la posición del centro de gravedad de la superficie plana representada en la figura.

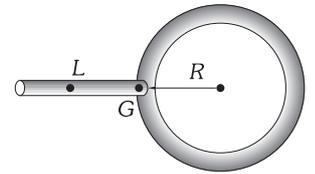
15. Determinar la posición del CM de la superficie plana y homogénea de la figura.

16. Tenemos un alambre homogéneo con el que hemos construido un objeto de la forma de la figura. (Varilla de longitud  $L$  y radio del arco

igual a  $R$ ). Hallar la relación que debe existir entre  $R$  y  $L$  para que el centro de gravedad del sistema sea G.

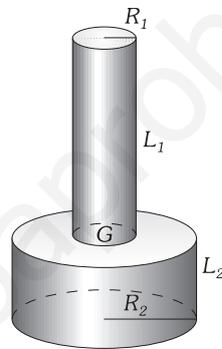


Problema VI-15.

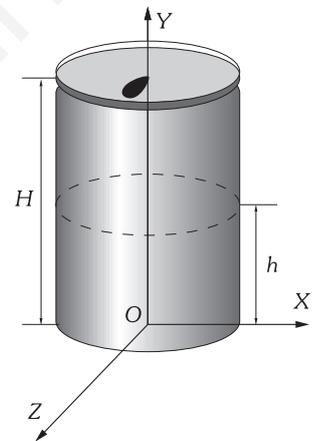


Problema VI-16.

17. Hallar la ley que relaciona las alturas  $L_1$  y  $L_2$  y los radios  $R_1$  y  $R_2$  de los cilindros macizos y homogéneos de la figura, para que el centro de gravedad del sistema sea G (centro común de las caras de contacto).



Problema VI-17.



Problema VI-22.

18. Calcular la posición del centro de masa de un arco de circunferencia de amplitud  $2\alpha$  y radio  $R$ .

19. Calcular la posición del centro de masa de un sector circular de amplitud  $2\alpha$  y radio  $R$ . Hacer aplicación del resultado para calcular la posición del centro de masa para un semicírculo.

20. Calcular la posición del centro de gravedad de una semiesfera de radio  $R$ .

21. Determinar la posición del centro de gravedad de un cono o pirámide rectos y homogéneos.

22. Un recipiente de forma cilíndrica de 30 cm de altura y que pesa en vacío 0,2 kg (ver Fig.) se llena totalmente con 1 kg de líquido; en estas condiciones el centro de gravedad está situado en el centro del cilindro. A medida que vaciamos el recipiente el centro de gravedad se desplaza hacia abajo y una vez vacío se encuentra de nuevo en la mitad. ¿Cuál es la altura del líquido para la que el centro de gravedad se encuentra en el punto más bajo?

B) ROZAMIENTO ESTÁTICO Y DINÁMICO

23. Un cuerpo de 10 kg de masa está apoyado en una superficie horizontal. El valor de la fuerza máxima de rozamiento estático es de 18 N, y la fuerza de rozamiento dinámico es de 15 N. Le aplicamos una fuerza horizontal inicialmente nula y que aumenta con el tiempo a razón constante de 1 N/s. Determinar: 1) La fuerza de rozamiento sobre el bloque a los 10 s de comenzar a actuar. 2) Momento en que el cuerpo comienza a moverse. 3) Aceleración del cuerpo inmediatamente después de iniciado el movimiento. 4) La aceleración del cuerpo 4 s después de iniciado el movimiento.

24. Calcular la fuerza necesaria para arrastrar, con velocidad constante por el suelo horizontal, un bloque de 100 kg, si su coeficiente dinámico de rozamiento es 0,25.

25. Queremos arrastrar por el suelo horizontal un bloque de 100 kg con movimiento uniforme; para ello le atamos una cuerda y ti-

ramos de ella formando un ángulo de  $30^\circ$  con el suelo. Calcular la fuerza necesaria. El coeficiente dinámico de rozamiento entre el suelo y el bloque vale  $0,3$ .

**26.** Un bloque de masa  $M_1$  se encuentra sobre una mesa horizontal, se une mediante una cuerda horizontal que pasa por una polea ligera colocada en el borde de la mesa, a un bloque suspendido de masa  $M_2$ . Determinar el coeficiente dinámico de rozamiento entre el bloque y la mesa cuando el sistema se mueve con movimiento uniforme.

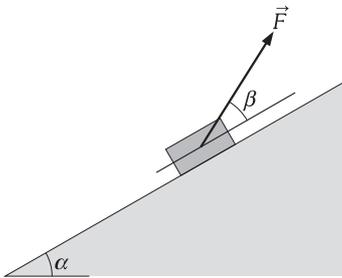
**27.** Sobre un tablero de madera horizontal colocamos un cuerpo también de madera. Vamos inclinando el tablero y cuando forma un ángulo de  $20^\circ$  con la horizontal, el cuerpo se desliza con movimiento uniforme. Calcular el coeficiente dinámico de rozamiento de la madera contra la madera.

**28.** En el extremo superior de un plano inclinado  $\varphi$  sobre la horizontal, hay una polea ligera por cuya garganta pasa un cordón; uno de los ramales de ese cordón se mantiene paralelo al plano inclinado y tiene atada a su extremo una masa  $M$  que sube con movimiento uniforme a lo largo del plano. Si el coeficiente dinámico de rozamiento entre el cuerpo y el plano es  $\mu$ , determinar la masa del cuerpo que colgado del otro extremo del cordón cae verticalmente a esa velocidad constante, y hace subir por el plano al de masa  $M$ .

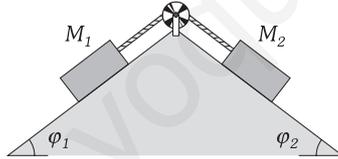
**29.** Se quiere subir un cuerpo por un plano inclinado un ángulo de  $30^\circ$ . El coeficiente dinámico de rozamiento entre la superficie del plano y el móvil es  $0,3$ . El peso del cuerpo es  $10$  kg. Calcular: 1) Fuerza paralela al plano necesaria para subirlo con movimiento uniforme. 2) Fuerza horizontal necesaria para subirlo con movimiento uniforme.

**30.** Calcular la fuerza  $F$  necesaria para subir un cuerpo por un plano inclinado (figura), con movimiento uniforme en función de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $M$  y  $\mu$  siendo  $M$  la masa del cuerpo y  $\mu$  el coeficiente dinámico de rozamiento entre el cuerpo y el plano.

**31.** Sobre un plano inclinado un ángulo  $\varphi$ , se tiene un cuerpo de masa  $M_1$  que está unido, mediante una cuerda que pasa por una polea ligera, con otro cuerpo de masa  $M_2$  apoyado en un plano de ángulo  $\varphi_2$  (ver Fig.). Calcular el coeficiente de rozamiento dinámico entre los cuerpos y los planos (supuesto el mismo) si el sistema se mueve con movimiento uniforme.



Problema VI-30.



Problema VI-31.

**32.** Calcular la fuerza mínima posible que tiene que hacer un hombre arrastrando un cuerpo de  $100$  kg de masa por un terreno horizontal si el coeficiente dinámico de rozamiento entre el cuerpo y el terreno es  $0,5$ .

**33.** Un cuerpo de  $10$  kg se encuentra sobre una superficie horizontal; si el coeficiente de rozamiento estático entre ambos es  $0,3$  y el dinámico es  $0,2$ , calcular: 1) Valor de la fuerza de rozamiento si actuamos sobre el cuerpo con una fuerza horizontal de  $1$  kp. 2) Valor de la fuerza mínima para la que se inicia el movimiento. 3) Valor de la fuerza mínima capaz de mantener al cuerpo con movimiento rectilíneo y uniforme. 4) Valor de la fuerza de rozamiento si actuamos sobre el cuerpo con una fuerza horizontal de  $5$  kp.

**34.** Un camión transporta un cuerpo sobre su plataforma; si el coeficiente de rozamiento estático entre el cuerpo y la plataforma de transporte es  $0,3$ . Determinar la aceleración que puede darse al camión sin que el bloque deslice sobre su plataforma.

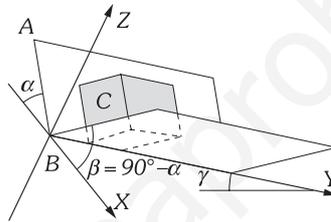
**35.** Calcular la fuerza horizontal mínima con que hay que apretar un bloque de  $1$  kg contra la pared vertical para que éste no se caiga. El coeficiente estático de rozamiento entre pared y bloque vale  $0,5$ .

**36.** Un bloque de  $100$  kg se encuentra sobre un plano inclinado  $45^\circ$ ; si el coeficiente estático de rozamiento entre el bloque y el plano es  $0,3$ , calcular: 1) Fuerza mínima paralela al plano inclinado capaz de

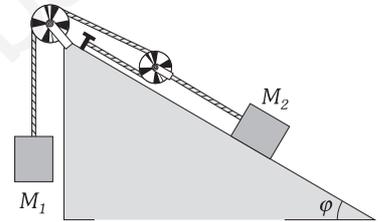
mantener al bloque en reposo. 2) Fuerza mínima horizontal capaz de mantener al bloque en reposo.

**37.** Un cuerpo de masa  $M$  se encuentra en reposo sobre un plano inclinado un ángulo  $\varphi$  respecto de la horizontal. Si el coeficiente estático de rozamiento entre el cuerpo y el plano es  $\mu_e$ . Calcular: 1) La fuerza mínima paralela al plano necesaria para que el cuerpo comience a subir por el plano. 2) La fuerza mínima paralela al plano necesaria para que el cuerpo comience a moverse hacia abajo sobre el plano. 3) La fuerza mínima horizontal para que el cuerpo comience a ascender por el plano. 4) La fuerza mínima horizontal para que el cuerpo comience a descender por el plano.

**38.** Al plano sobre el que se articula la guía del problema V-10 se le dota de un dispositivo que permite variar su inclinación  $\gamma$  respecto de la horizontal como se muestra en la figura. Los coeficientes de rozamiento estático y dinámico del cubo con el brazo  $AB$  son  $\mu_{e1} = 5/4$  y  $\mu_1 = 1$ , y con el brazo  $BC$   $\mu_{e2} = 5\sqrt{3}/12$  y  $\mu_2 = \sqrt{3}/3$ . 1) Para un ángulo  $\gamma > 0^\circ$ , calcular el valor del ángulo  $\alpha_1$  para que las fuerzas de rozamiento estático máximas del cubo con ambos brazos sean iguales. 2) Con  $\alpha = \alpha_1$ , calcular la máxima inclinación  $\gamma_0$  que se puede dar sin que el cubo empiece a deslizar. 3) Si el cubo desliza, ¿cuál es el valor del ángulo  $\alpha_2$  para el que el rozamiento total es máximo? 4) Si  $\alpha = \alpha_2$ , ¿cuál es el ángulo  $\gamma$  necesario para que el cubo descienda a velocidad constante?



Problema VI-38.



Problema VI-39.

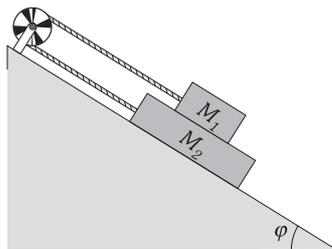
**39.** Entre qué valores puede estar  $M_1$  para que el sistema de la figura esté en equilibrio. Datos:  $M_2 = 100$  kg;  $\mu_e = 0,25$ ;  $\varphi = 30^\circ$ , las poleas tienen masa y rozamientos despreciables.

**40.** En la figura se tiene  $M_1 = 10$  kg y  $M_2 = 20$  kg. El coeficiente estático de rozamiento entre  $M_1$  y  $M_2$  y entre  $M_2$  y el plano inclinado es el mismo e igual a  $0,20$ . Calcular el máximo valor del ángulo  $\varphi$  compatible con el reposo del sistema.

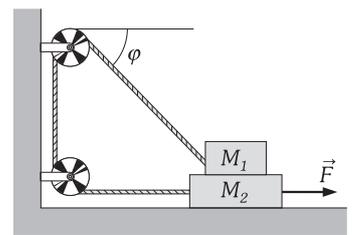
**41.** En la figura se tiene:  $M_1 = 20$  kg,  $M_2 = 10$  kg,  $\varphi = 37^\circ$ , siendo  $\mu_{e1} = 0,25$  el coeficiente de rozamiento estático entre  $M_1$  y  $M_2$ , y  $\mu_{e2} = 0,20$  el correspondiente entre  $M_2$  y el plano horizontal. Calcular el máximo valor que puede tomar  $F$  sin sacar al sistema del reposo.

**42.** Colocamos una cuerda flexible de  $1$  m de longitud sobre una mesa de tal forma que parte de ella cuelga por un extremo (ver Fig.). Si el coeficiente estático de rozamiento entre la mesa y la cuerda es  $0,6$  calcular la máxima longitud de cuerda que puede colgar sin que caiga.

**43.** Un bloque de  $100$  kg de peso se arrastra por una superficie horizontal por la acción de una fuerza también horizontal de  $100$  kp. Si el coeficiente dinámico de rozamiento entre el bloque y la superficie es  $0,25$ , calcular la aceleración que adquiere, su velocidad al cabo de  $1$  min y el espacio recorrido en tal tiempo.

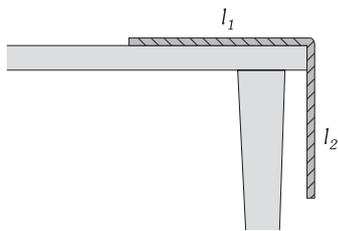


Problema VI-40.

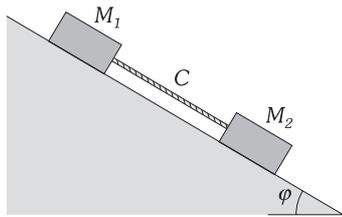


Problema VI-41.

**44.** Un coche parte del reposo y alcanza una velocidad de  $144$  km/h; suponiendo constante la fuerza que se opone al movimiento e igual a  $1$  kp por cada  $100$  kg, calcular el tiempo que tarda en adquirir tal velocidad si la fuerza ejercida por el motor es de  $0,08$  veces el peso del coche.



Problema VI-42.



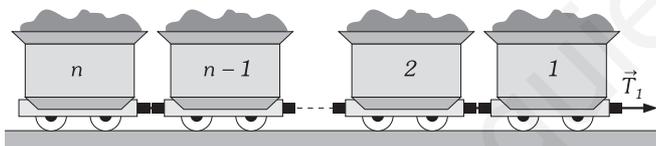
Problema VI-54.

45. Un automóvil que se mueve por una carretera horizontal a la velocidad de 72 km/h frena un instante determinado, dejando las ruedas inmóviles. Si el coeficiente de rozamiento entre las ruedas del coche y la carretera es 0,4, determínese el espacio recorrido por el automóvil hasta que se detiene.

46. Calcular la aceleración  $a$  de un bloque de masa  $M$  que se arrastra por una superficie horizontal por la acción de una fuerza  $F$  que forma un ángulo  $\varphi$  con la dirección del movimiento (con la horizontal), siendo  $\mu$  el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie.

47. Un bloque de hierro de 7 kg de peso es arrastrado sobre una mesa horizontal de madera por la acción de un peso de 2 kg que cuelga verticalmente de una cuerda unida al bloque de hierro y que pasa por una polea ligera. El coeficiente de rozamiento entre el hierro y la mesa es 0,15. Hallar la aceleración del bloque y la tensión de la cuerda.

48. Un convoy minero está compuesto de  $n$  vagonetas cargadas con distinta carga y totalizando masas  $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ . Las ruedas están agarrotadas, de modo que no pueden girar, y cuando el sistema se mueve desliza a lo largo del carril; el coeficiente dinámico de rozamiento entre las ruedas y los carriles es  $\mu$ . 1) Determinar la fuerza capaz de mover el sistema con movimiento uniforme y hallar la expresión general de la tensión de los enganches para cualquier vagón. 2) Si tiramos con una fuerza dada,  $T_1$ , mayor que la anteriormente calculada, determinar la aceleración del sistema y la expresión general de la tensión de los enganches para cualquier vagón.



Problema IV-48.

49. Tres cuerpos de masa  $M = 5$  kg están unidos entre sí por dos cuerdas que pueden soportar una tensión máxima  $T = 20$  N. Los cuerpos se encuentran sobre una superficie horizontal y los coeficientes de rozamiento son:  $\mu_1 = 0,3$ ,  $\mu_2 = 0,2$ ,  $\mu_3 = 0,1$ . 1) Si aplicamos al cuerpo tres una fuerza  $F$  que aumentamos lentamente, ¿qué cuerda se rompe y con qué fuerza mínima ocurrirá? 2) ¿Cuál es la respuesta si se aplica  $F$  al cuerpo uno?

50. Sobre un plano inclinado  $30^\circ$  con respecto a la horizontal se coloca un cuerpo de 100 g de masa cuyo coeficiente dinámico de rozamiento con el plano es 0,4, calcular: 1) La fuerza que provoca el deslizamiento. 2) La aceleración del cuerpo. 3) La velocidad a los 5 s de iniciado el movimiento. 4) El espacio recorrido en tal tiempo.

51. Tenemos un plano inclinado  $40^\circ$  sobre la horizontal cuya longitud es 1 m. En la parte más alta abandonamos un objeto prismático para que baje deslizándose. 1) Dibújense en un diagrama claramente todas las fuerzas que actúan sobre el bloque que se desliza. 2) Sabiendo que el coeficiente de rozamiento es 0,5, indíquese si deslizará. 3) Supuesto el deslizamiento, calcúlese para el bloque la aceleración de bajada, el tiempo que invertirá en la misma y la velocidad con que llega al final del plano inclinado.

52. Colocamos una moneda sobre una regla y levantamos esta última gradualmente. Cuando el ángulo de inclinación es  $25^\circ$  la moneda comienza a deslizar, observando que recorre la regla (80 cm) en 1,4 s. Calcular los coeficientes estático y dinámico de rozamiento entre la moneda y la regla.

53. Un coche que pesa 1 500 kg desciende una pendiente del 5% sin que funcione el motor. El conjunto de las resistencias pasivas que se oponen al movimiento viene dado por la fórmula  $R = 0,6v^2$  en el si,

siendo  $v$  la velocidad. Demostrar que alcanza una velocidad límite y calcular su valor.

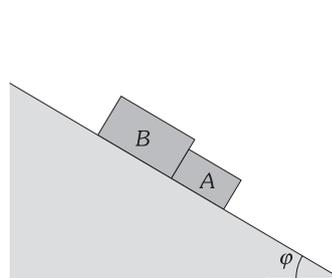
54. En el sistema representado en la figura los cuerpos  $M_1$  y  $M_2$  están unidos por una cuerda  $C$ , y los coeficientes de rozamiento entre éstos y el plano inclinado son  $\mu_1$  y  $\mu_2$ . Determinar la condición que tiene que cumplir el ángulo del plano inclinado para que los dos bajen con una aceleración  $a$  y calcular ésta.

55. Sobre un tablero de madera horizontal se colocan dos cuerpos  $A$  y  $B$  de masas  $M_1$  y  $M_2$  y cuyos coeficientes de rozamiento con la madera son  $\mu_1$  y  $\mu_2$ . Vamos levantando el tablero poco a poco, de forma que  $\varphi$  crece como se indica en la figura. Si consideramos iguales los coeficientes de rozamiento estático y dinámico, calcular: 1) La condición necesaria para que el cuerpo  $A$  se mueva antes que el  $B$ . 2) La condición necesaria para que los cuerpos deslicen, a la vez, juntos. 3) Si se cumple la segunda condición, ¿qué valor debe tener  $\varphi$  para que el sistema  $AB$  deslice con movimiento uniforme? 4) ¿Cuál será el valor de la aceleración del movimiento cuando se incline el plano con un ángulo  $\varphi'$ , mayor que el  $\varphi$  del apartado anterior?

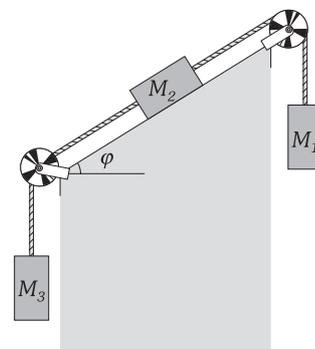
56. 1) Por la pendiente de una montaña nevada que forma un ángulo  $\varphi = 30^\circ$  con la horizontal, se desliza un hombre sobre su trineo. Si el coeficiente de rozamiento entre el trineo y la nieve es  $\mu = 0,4$ , determinar el movimiento del hombre sobre el trineo para que éste último deslice con movimiento uniforme. 2) ¿Cómo varían los resultados del apartado anterior si el ángulo de la pendiente es  $15^\circ$ ? La masa del hombre es  $M_1 = 80$  kg y la del trineo  $M_2 = 40$  kg.

57. En el extremo superior de un plano inclinado  $30^\circ$  sobre la horizontal hay una polea (que supondremos de masa y rozamiento despreciables), por cuya garganta pasa un cordón. Uno de los ramales del cordón sostiene un peso de 10 kg, el otro se mantiene paralelo al plano inclinado y tiene atado en su extremo un cuerpo que pesa 10 kg; el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano es 0,5. Calcular: 1) La aceleración del sistema. 2) La tensión de la cuerda.

58. En el sistema representado en la figura las masas de los cables y poleas son despreciables. Si el coeficiente de rozamiento entre la superficie inclinada y el cuerpo  $M_2$  es  $\mu$ : 1) Determinar las condiciones de movimiento en uno u otro sentido. 2) En el caso en que el sistema se mueva con aceleración, calcular ésta.

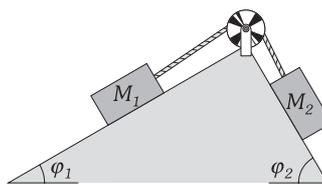


Problema VI-55.

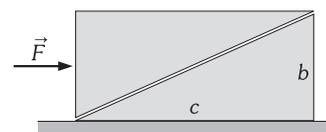


Problema VI-58.

59. Sobre un plano inclinado cuyo ángulo es  $30^\circ$  se tiene un peso de 500 g que está unido por una cuerda que pasa por una polea (sin inercia ni rozamiento) con otro cuerpo de 200 g en un plano de  $60^\circ$  (ver Fig.). El coeficiente de rozamiento en ambos planos es de 0,2. Calcular: 1) Aceleración del conjunto. 2) Tensión de la cuerda. 3) Espacio recorrido por cada peso en 1 s y velocidad adquirida.



Problema VI-59.

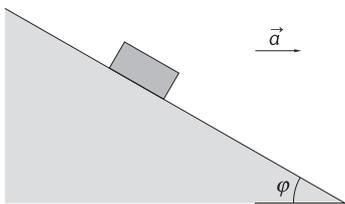


Problema VI-61.

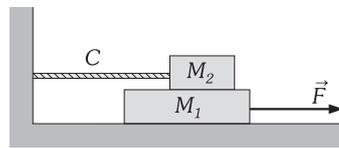
60. Un hombre que pesa 70 kg se lanza encima de una báscula por un plano inclinado un ángulo de  $60^\circ$ . Sabiendo que el coeficiente de rozamiento dinámico entre la báscula y el plano es 0,3, calcular: 1) La aceleración de bajada. 2) Lo que marca la báscula.

**61.** Un bloque de forma de paralelepípedo de masa  $2M$  se secciona en dos mitades a lo largo de la diagonal de una de las caras y de sección triangular de catetos  $b$  y  $c$  (ver Fig.). 1) Si no hay rozamiento entre las dos mitades ni con el suelo, calcular la fuerza horizontal que hay que aplicar al de arriba para que el conjunto se mueva sin resbalar una mitad sobre la otra, la aceleración del conjunto y la fuerza que ejerce una mitad sobre la otra. Lo mismo si la fuerza se aplica al de abajo y dirigida hacia la izquierda. 2) Si hay un rozamiento de coeficiente estático  $\mu_1$  entre las dos mitades pero no en el suelo, calcular la fuerza máxima y mínima que se puede aplicar, para que una mitad no resbale sobre la otra. 3) Lo mismo si hay un rozamiento de coeficiente estático  $\mu_2$  con el suelo pero no entre las dos mitades.

**62.** Sobre un plano inclinado, que se mueve con una aceleración  $a > 0$ , como indica la figura, se encuentra un objeto prismático. Hallar: 1) A partir de qué valor del ángulo del plano el cuerpo no sube por la línea de máxima pendiente si no existe rozamiento. 2) A partir de qué valor del ángulo del plano el cuerpo no baja por la línea de máxima pendiente si no existe rozamiento. 3) Cómo se modifican estos resultados si el coeficiente de rozamiento es  $\mu$ .



Problema VI-62.

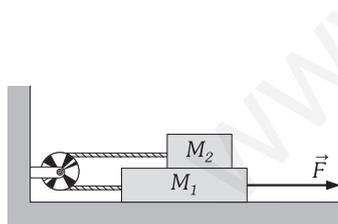


Problema VI-63.

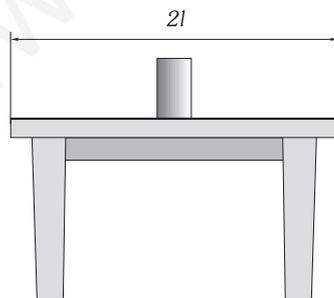
**63.** En el sistema representado en la figura el cable  $C$  es de masa despreciable. El coeficiente de rozamiento entre  $M_1$  y el plano es  $\mu_1$  y entre  $M_1$  y  $M_2$  es  $\mu_2$ . Considérense iguales los coeficientes estático y dinámico. 1) Determinar la fuerza mínima que aplicada a  $M_1$  lo saca del equilibrio. 2) Si con una fuerza dada  $F$  producimos a  $M_1$  una aceleración  $a$ , calcular ésta. 3) Calcular la tensión de la cuerda.

**64.** En el sistema representado en la figura las masas del cable y de la polea son despreciables. Si el coeficiente de rozamiento entre el plano y el cuerpo  $M_1$  es  $\mu_1$ , y entre  $M_1$  y  $M_2$  es  $\mu_2$  (consideramos iguales el coeficiente estático y dinámico): 1) Determinar la  $F$  mínima aplicada a  $M_1$  capaz de sacar al sistema del equilibrio. 2) Calcular la aceleración del sistema para una fuerza mayor que la mínima.

**65.** Una mesa de longitud  $2l$  está cubierta por un mantel que enrasa con ella en el borde izquierdo (ver Fig.). Sobre ambos y en el centro de la mesa hay un vaso que presenta con el mantel un coeficiente de rozamiento dinámico  $\mu_1$  y con la mesa  $\mu_2$ . Calcular la mínima velocidad a la que se debe desplazar el mantel para que el vaso no caiga al suelo.



Problema VI-64.

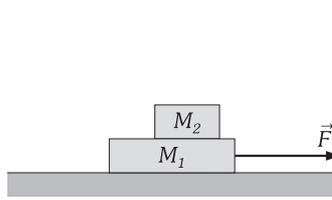


Problema VI-65.

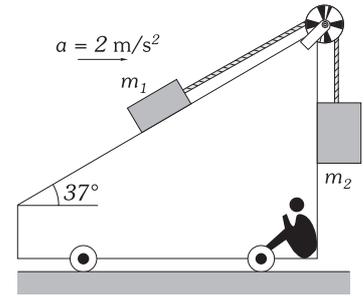
**66.** Sobre un cuerpo de masa  $M_1$  se encuentra otro de masa  $M_2$ , como se indica en la figura. Si sobre  $M_1$  actuamos con una fuerza  $F$  y el coeficiente de rozamiento entre las superficies es  $\mu$ , calcular: 1) La condición que tiene que cumplir  $F$  para que no exista movimiento. 2) La condición para que el cuerpo de masa  $M_2$  no deslice por el de masa  $M_1$  y todo el sistema se mueva con movimiento uniformemente acelerado, calculando esta aceleración. 3) La condición para que el cuerpo de masa  $M_2$  deslice sobre el de masa  $M_1$ , calculando las aceleraciones de ambos.

**67.** Los bloques del problema anterior tienen ahora masas  $M_1 = 10$  kg y  $M_2 = 2$  kg, sus coeficientes de rozamiento entre ellos y con la

superficie horizontal son  $\mu_e = 0,40$  y  $\mu_d = 0,25$ , la fuerza  $F$  varía de la forma  $F = 0,4t$  N con  $t$  en segundos. Calcular la distancia existente entre la posición inicial de ambos y el punto en que  $M_2$  se para.



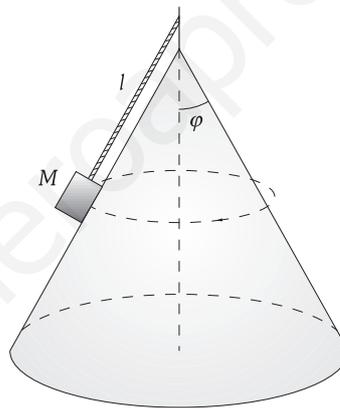
Problema VI-66.



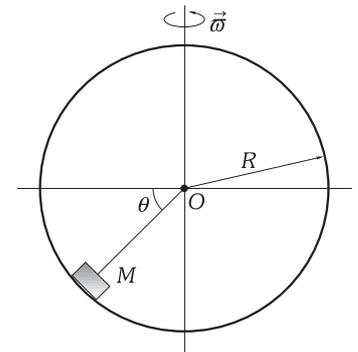
Problema VI-68.

**68.** El carrito de la figura es acelerado hacia la derecha a  $2 \text{ m/s}^2$  respecto del suelo. Los bloques, de masas  $m_1 = 5$  kg y  $m_2 = 10$  kg, tienen un coeficiente de rozamiento con el carrito de  $0,2$ . Calcular la aceleración de los bloques respecto del suelo.

**69.** Un cuerpo muy pequeño comienza a deslizar por un plano inclinado un ángulo  $\varphi$  con la horizontal. El coeficiente de rozamiento depende del camino recorrido según la ecuación  $\mu = kx$ , donde  $k$  es una constante. Determinar: 1) El camino recorrido hasta que se para. 2) La velocidad máxima alcanzada.



Problema VI-71.



Problema VI-72.

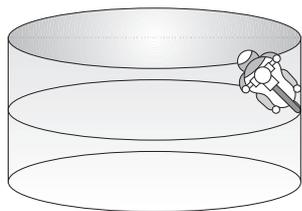
**70.** Se lanza un cuerpo de masa  $m$  por un plano horizontal en un medio resistente. El coeficiente dinámico de rozamiento con el plano es  $0,01$  y la velocidad inicial  $2 \text{ m/s}$ . Si el rozamiento con el medio queda caracterizado por la expresión  $F = -kmv$ , con  $k = 0,01$  (s), determinar: 1) El tiempo que el cuerpo tarda en pararse. 2) La distancia que recorre hasta ese momento.

**71.** Un cuerpo de  $116$  g de masa gira alrededor del eje de un cono de ángulo  $\varphi = 30^\circ$ , con una velocidad angular de  $6 \text{ rpm}$ , como se indica en la figura, en la que  $l = 1$  m. Si no existe rozamiento, calcular: 1) Tensión de la cuerda. 2) La velocidad angular necesaria para que la reacción del plano sea nula.

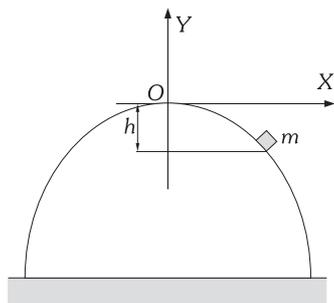
**72.** En el interior de una esfera hueca de radio  $R$ , que gira con una velocidad constante de  $v$  (rev/s), se halla una anilla muy pequeña como se indica en la figura; si el coeficiente de rozamiento estático entre ella y la esfera es  $\mu$  y el ángulo  $\theta$  es también conocido, determinar los valores máximo y mínimo de  $v$  para que la anilla no se mueva respecto de la esfera.

**73.** Una plataforma gira alrededor de un eje a razón de una vuelta por segundo. Colocamos sobre ella un objeto prismático, siendo el coeficiente estático de rozamiento entre la plataforma y el cuerpo  $0,8$ . Calcular la distancia máxima al eje de giro para la cual el cuerpo gira con la plataforma y no es lanzado al exterior.

**74.** Calcular la velocidad mínima que tiene que tener el motorista que trabaja en el «tubo de la muerte» (aparato de atracción de feria que representamos en la figura), para que no se caiga. Diámetro del tubo:  $10$  m. Coeficiente estático de rozamiento en las ruedas de la motocicleta y la pared:  $0,5$ .



Problema VI-74.



Problema VI-76.

**75.** Un motorista toma una curva a 108 km/h. Sabiendo que el coeficiente estático de rozamiento entre los neumáticos y la carretera es 0,3, calcular: 1) Radio mínimo de la curva que pudiera tomar sin peraltar y sin derrapar. 2) Peralte necesario para que no derrape en una curva de 100 m de radio.

**76.** Un esquiador se entretiene colocando pequeños objetos sobre la superficie de un iglú. Suponiendo que la sección longitudinal de dicha superficie puede escribirse como una parábola de la forma  $y = -kx^2$  respecto a los ejes indicados en la figura y que el coeficiente de rozamiento estático es  $\mu_e$ , ¿cuál es la distancia vertical  $h$  máxima respecto de la parte superior a los que la puede colocar de modo que éstos no deslicen?

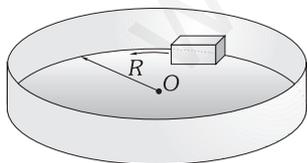
**77.** Un pequeño objeto descansa apoyado en el borde vertical y en el suelo horizontal de un cuenco cilíndrico de radio 1 m como se indica en la figura. En  $t = 0$  se le comunica un impulso tal que le comunica una velocidad  $v_0$  en la dirección tangente al borde. Si los coeficientes de rozamiento entre el objeto, el borde y el suelo son iguales a  $\mu$ , calcular el número de vueltas que da el objeto hasta que se para.

**C) DINÁMICA DE LAS OSCILACIONES**

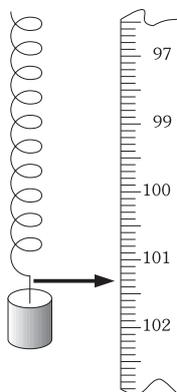
**78.** En el extremo de un resorte colgamos diversos pesos y medimos la longitud del mismo (ver figura), obteniéndose los siguientes valores:

Peso en gf	0	5	10	15	20	25
Longitud en mm	100	106	112	118	124	130

- 1) Representar gráficamente estos valores y escribir la fórmula que relaciona los pesos con las longitudes del resorte. 2) Escribir la fórmula que relaciona los pesos con las deformaciones del resorte (Ley de Hooke).
- 3) Averiguar la longitud del resorte cuando colgamos un peso de 12 g.
- 4) ¿Qué peso tendremos colgado del resorte cuando su deformación sea de 15 mm?



Problema VI-77.



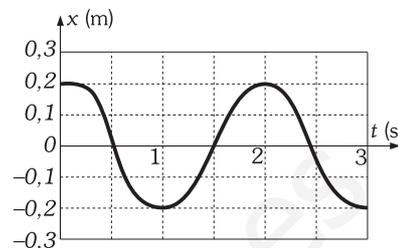
Problema IV-78.

**79.** Un punto material de 40 g de masa realiza un movimiento armónico simple, en el extremo de un muelle, de período  $T = 0,32$  s. Calcular el valor de la amplitud y la constante de recuperación del resorte, sabiendo que el valor máximo de la fuerza responsable del movimiento vale 10 N.

**80.** Un cuerpo cuya masa es de 100 g posee un movimiento armónico simple a lo largo de una línea recta AB de 10 cm de longitud, con

un período de 2 s. Calcular: 1) La velocidad y aceleración en el punto medio de la recta AB. 2) La velocidad y aceleración en el extremo B. 3) La fuerza recuperadora en el punto B.

**81.** En la Figura se representa la posición en función del tiempo de un cuerpo de masa  $m = 0,5$  kg, que realiza una oscilación armónica en torno al origen de coordenadas. 1) Escribe la ecuación de la velocidad de  $m$  en función del tiempo y represéntala gráficamente. 2) Explica qué fuerza debe estar actuando sobre  $m$  para producirle este movimiento: ¿cómo depende del tiempo? ¿Y de la posición de  $m$ ?



Problema VI-81.

**82.** Colgamos de dos muelles ideales y verticales dos masas iguales y de valor 10 g, la constante de los muelles es de 100 N/m. Separamos de su posición de equilibrio al primero 10 cm y al segundo 20 cm. Determinar a partir del instante en que las soltamos en el mismo momento, las ecuaciones de la fuerza que actúa sobre las dos masas en cualquier instante  $[F = F(t)]$ , y el tiempo que tardan en pasar ambos por la posición de equilibrio.

**83.** A un muelle helicoidal se le cuelga un cuerpo de 10 kg y se alarga 2 cm. Después se le añaden otros 10 kg y se le da un tirón hacia abajo, de modo que el sistema comienza a oscilar con una amplitud de 3 cm. Se desea saber: 1) La frecuencia del movimiento. 2) La velocidad, la aceleración y la fuerza recuperadora a los 2 s de haber empezado a oscilar.

**84.** Sabiendo que los cuerpos caen sobre la tierra con movimiento uniformemente acelerado (considerando pequeñas variaciones de altura), determinar la indicación de una balanza de resorte (graduada en la superficie de la Tierra) que dejamos caer desde un globo, llevando pendiente un cuerpo de 10 kg.

**85.** Un muelle ideal de constante  $k = 500$  N/m se encuentra colgado del techo de la cabina de un ascensor, que posee una velocidad de régimen, tanto en el ascenso como en el descenso de 4 m/s, tardando 1 s en adquirirla para arrancar o en detenerse del todo en las paradas. Al muelle le colgamos un cuerpo de 10 kg de masa. Calcular: 1) El alargamiento del muelle durante el arranque para ascender, contado desde la posición de equilibrio. 2) Id. id. en el momento de detenerse. 3) Id. id. en el momento en que inicia el descenso.

**86.** Sobre un plano inclinado liso que forma un ángulo  $\varphi$  con la horizontal se tiene un muelle ideal sujeto por un extremo al plano y que soporta en el otro extremo un cuerpo de masa  $m$ . La longitud natural del muelle es  $l_0$  y su constante recuperadora  $K$ . Si todo el sistema se introduce en un ascensor, calcular la longitud que tiene el muelle si el ascensor: 1) Sube con velocidad constante. 2) Sube con aceleración  $a$ . 3) Baja con aceleración  $a$ .

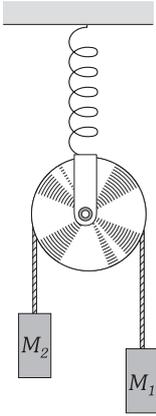
**87.** En el sistema representado en la Figura  $M_1 = 2$  kg,  $M_2 = 1$  kg, la constante del resorte vale 500 N/m y su longitud natural es  $l_0 = 20$  cm. Determinar la longitud  $l$  del resorte cuando el sistema se encuentra en movimiento. (La masa de cable y polea es despreciable).

**88.** En el sistema de  $n$  poleas de la Figura suponemos que éstas, las cuerdas y el muelle son de masa despreciable frente a  $M$ , y que el rozamiento entre poleas y cuerdas también es inapreciable. El muelle tiene de constante elástica  $K$ . Determinar la frecuencia angular de la masa  $M$  (frecuencia propia del oscilador) cuando se le da un tirón a partir de su posición de equilibrio.

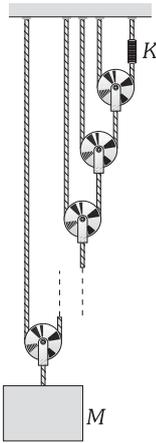
**89.** El coeficiente de rozamiento estático entre la taza de masa  $M_2$  de la Figura y el soporte de masa  $M_1$ , es  $\mu_e$ . Entre  $M_1$  y la superficie horizontal no hay rozamiento. Si la constante elástica del resorte es  $K$ , calcular la máxima amplitud que se puede dar al movimiento vibratorio del sistema sin que caiga la taza.

**90.** Un muelle vertical de constante  $K$  soporta un platillo metálico, de masa  $M_1$ , sobre el que apoyamos la estructura de masa  $M_2$  de la Figura, que consta de base metálica, bombilla, pila y cables. Calcular, en

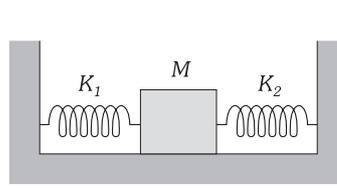
función de  $K$ ,  $M_1$  y  $M_2$ , la máxima amplitud que se puede dar al movimiento vibratorio del sistema sin que la bombilla se apague en ningún instante.



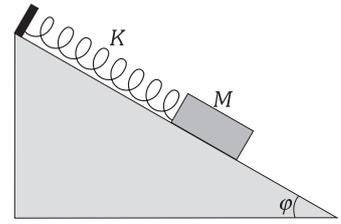
Problema VI-87.



Problema VI-88.

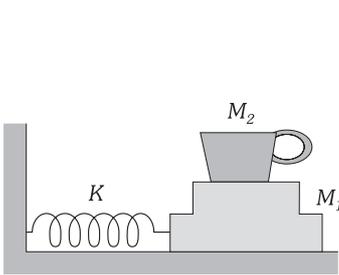


Problema VI-95.

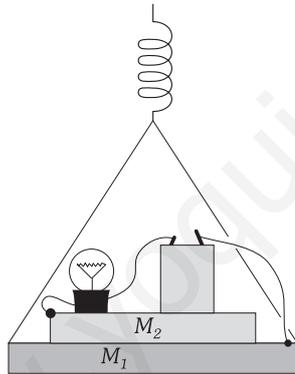


Problema VI-96.

91. A un muelle vertical que soporta un platillo metálico, igual que en el problema anterior pero sin el montaje, se encuentra oscilando con la frecuencia propia de  $16 \text{ rad/s}$  y su aceleración máxima es de  $51,2 \text{ m/s}^2$ . Cuando el platillo se encuentra en el punto más bajo de su trayectoria, se coloca un cuerpo pequeño sobre él. Determinar: 1) La posición, medida desde la situación de equilibrio del platillo, en el que el cuerpo dejará de estar en contacto con él. 2) La velocidad con la que el cuerpo abandona el platillo.



Problema VI-89.



Problema VI-90.

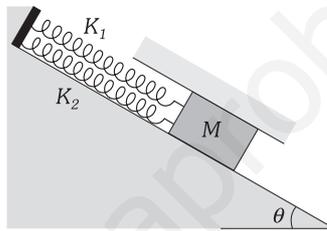
92. Una partícula de  $3 \text{ kg}$  de masa se mueve en el eje  $Ox$  por la acción de una fuerza que en el sistema internacional viene dada por la ecuación:  $F = -\pi^2 x / 27$ . En  $t = 1 \text{ s}$  entonces  $x = 0$ , y para  $t = 3 \text{ s}$ ,  $v = 1 \text{ m/s}$ . Determinar la ecuación del desplazamiento  $x = x(t)$ .

93. Un pequeño cuerpo de masa  $m$  se encuentra en el centro de una cuerda tensa con una fuerza  $T_0$  y de longitud  $l$ . Determinar la frecuencia de las vibraciones que realiza el cuerpo al separarlo una pequeña distancia en la dirección perpendicular a la cuerda y soltarlo. Se desprecia la masa de la cuerda y suponemos el campo gravitatorio nulo.

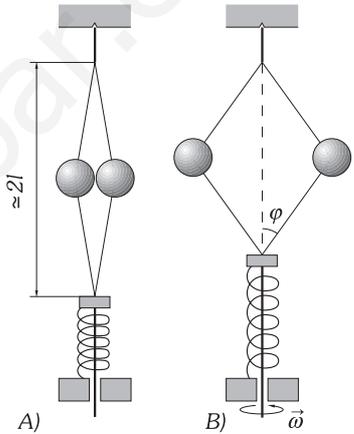
94. Calcular la relación existente entre los períodos de oscilación de un mismo cuerpo que apartamos de la posición de equilibrio al colgarlo de: 1) Dos muelles iguales de constante de recuperación  $K$ , al colocar éstos en serie y en paralelo, como se indica en la Figura. 2) Dos muelles de igual longitud natural y constante  $K_1$  y  $K_2$ , al colocarlos en serie y paralelo (en este último caso se tiene que poner una guía vertical no representada en la Figura y suponer insignificante la fuerza de rozamiento entre ella y el cuerpo).

95. Calcular el período del movimiento para el sistema de la figura.  $M = 250 \text{ g}$ ,  $K_1 = 30 \text{ N/m}$ ,  $K_2 = 20 \text{ N/m}$  y no existe rozamiento.

96. A un muelle ideal de longitud natural  $l_0$  y constante de recuperación  $K$ , lo montamos como indica la figura. Siendo la masa  $m$  del bloque conocida, determinar la frecuencia propia del oscilador. (El rozamiento entre el bloque y el plano es despreciable).



Problema VI-97.

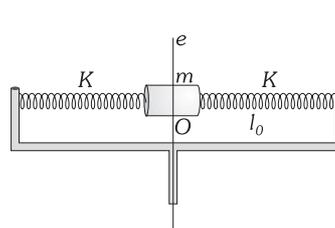


Problema VI-99.

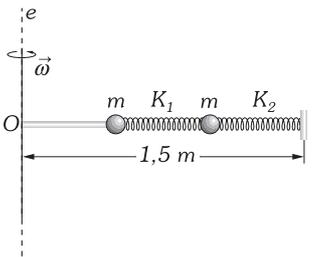
98. Enganchamos una partícula de  $1 \text{ kg}$  a un resorte espiral de masa despreciable, cuya longitud natural es de  $48 \text{ cm}$  y de constante recuperadora  $1 \text{ kp/cm}$ . Lo hacemos girar como un péndulo cónico con una velocidad angular constante de  $60 \text{ rpm}$ . Calcular: 1) El alargamiento del resorte. 2) El ángulo que forma la altura del cono con su generatriz.

99. El sistema de la figura adopta en reposo la posición A. En ella el muelle, de constante  $K = 3750 \text{ N/m}$  está con su longitud natural, y las esferas, iguales y masa  $m = 5 \text{ kg}$ , se articulan mediante varillas de masa despreciable y longitud  $l = 0,5 \text{ m}$  (incluido el radio de las esferas). Obtener el valor del ángulo que forman las varillas con eje cuando se hace girar el sistema con velocidad angular  $\omega = 20 \text{ rad/s}$ .

100. Considérese el sistema de la figura, en el que insertada en una barra tenemos una masa,  $m = 0,2 \text{ kg}$ , fija entre dos resortes iguales, de constante  $K = 20 \text{ N/m}$ , y longitud natural correspondiente a estar la masa colocada en el centro. La masa puede deslizarse sin rozamiento por la barra. El sistema gira con una velocidad angular  $\omega_0 = 4,4 \text{ rad/s}$ , alrededor de un eje vertical que pasa por el centro de la barra. Hallar el período de oscilación. ¿Con qué valor de  $\omega_0$  dejaron de producirse oscilaciones?



Problema VI-100.



Problema VI-101.

101. Una varilla de  $1,5 \text{ m}$  de longitud ensarta a dos bolitas pequeñas de masa  $10 \text{ g}$  sobre la que pueden deslizarse sin rozamiento. Los

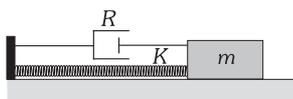
muelles de constantes  $K_1 = 6 \text{ N/m}$  y  $K_2 = 9 \text{ N/m}$  y longitud natural  $0,5 \text{ m}$ , están sujetos por sus extremos a las bolitas y a su vez a uno de los extremos de la varilla, tal y como se indica en la Fig. Hacemos girar a la varilla alrededor del eje  $e$  que es perpendicular a ella, y pasa por el otro extremo, con velocidad angular de  $10 \text{ rad/s}$ . Hallar la posición de equilibrio de las bolitas, contada a partir de  $O$ .

**102.** Las ecuaciones paramétricas del movimiento de una partícula de masa  $m$  en un plano son:  $x = x_0 + v_0 t$  e  $y = y_0 + A \sin \omega t$ , en las que  $x_0$ ,  $v_0$ ,  $y_0$  y  $A$  son constantes. Determinar: 1) La fuerza que produce el movimiento. 2) Representar la trayectoria de la partícula [ $y = f(x)$ ].

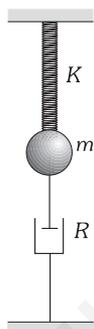
**103.** Un cuerpo de masa  $m$  se encuentra inicialmente en el punto  $(x_0, 0)$  de un sistema de coordenadas. Está sujeto al extremo de un muelle ideal, de constante  $K$  y longitud natural nula, cuyo otro extremo se encuentra constantemente en el origen de coordenadas. Si se lanza al cuerpo con una velocidad inicial  $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{j}$ , y la única fuerza que actúa sobre él es la del muelle, obtener: 1) La velocidad areolar del cuerpo. 2) Su velocidad en cualquier punto de su trayectoria. 3) La ecuación de la trayectoria.

**104.** Un oscilador lineal amortiguado tiene de período de oscilación:  $T = 0,30 \text{ s}$  y la masa que oscila es de  $2 \text{ kg}$ . Si la constante de rigidez del resorte es  $K = 900 \text{ N/m}$ , determinar el coeficiente de amortiguamiento del sistema  $R$  y el índice de amortiguamiento  $k$ .

**105.** Un oscilador lineal amortiguado a un cuerpo de masa  $m$  y tiene una frecuencia angular  $N$  veces la propia del oscilador  $\omega_0$ . Determinar, en función de los datos mencionados, el tiempo de relajación  $\tau$ , el coeficiente de amortiguamiento  $R$  y el decremento logarítmico  $\delta$ .



Problema VI-107.



Problema VI-110.

**106.** En un movimiento vibratorio subamortiguado y lineal, para  $t = 0$  entonces  $A = A_0$ . Determinar: 1) La variación de la amplitud cuando ha transcurrido un tiempo  $\tau$  (tiempo de relajación). 2) El tiempo que tarda la amplitud en reducirse a la mitad de su valor inicial, en función de  $\tau$ . 3) Los valores de la amplitud a medida que el tiempo se va haciendo  $2\tau, 3\tau, \dots$

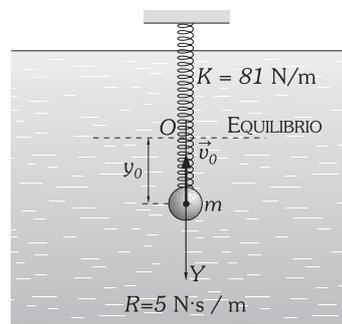
**107.** Un cuerpo de  $6 \text{ kg}$  de masa está unido a un muelle de constante  $K = 20 \text{ N/m}$  y a un amortiguador viscoso de coeficiente de amortiguamiento  $R = 20 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ , como se muestra en la figura; se desplaza de la posición de equilibrio  $15 \text{ cm}$  y se suelta. Determinar: 1) La frecuencia angular propia y la frecuencia angular del oscilador, indicando el tipo de amortiguamiento del sistema. 2) El valor de la elongación en el instante  $t = 1 \text{ s}$ .

**108.** El período del cuerpo de masa  $1 \text{ kg}$  del movimiento subamortiguado del sistema representado en la figura es  $T = 1 \text{ s}$  y las amplitudes sucesivas de una oscilación completa pasan de  $A_1 = 2 \text{ cm}$  a  $A_2 = 1,80 \text{ cm}$ , determinar el índice de amortiguamiento del amortiguador viscoso, y la constante elástica del muelle.

**109.** La amplitud del quinto ciclo de una vibración lineal amortiguada de un cuerpo de  $200 \text{ kg}$ , es  $20$  veces menor que la amplitud de la decimotercera oscilación, siendo el período de la oscilación amortiguada  $0,5 \text{ s}$ . Calcular el coeficiente de amortiguamiento  $R$  y la constante del muelle que hacen posible el enunciado del problema.

**110.** En el sistema representado en la figura la constante del resorte vale  $K = 20 \text{ kN/m}$  y la masa a amortiguar  $50 \text{ kg}$ . ¿Qué valor tiene que tener el coeficiente de amortiguamiento  $R$  para que el sistema esté en amortiguamiento crítico?

**111.** Una esferita de  $9 \text{ kg}$  de masa enganchada a un muelle de constante  $81 \text{ N/m}$  se encuentra sumergida en un líquido a la suficiente profundidad para que no escape de su seno en las condiciones del problema, y como se muestra en la figura; la fuerza que se opone al movimiento de la esferita en el interior del líquido es proporcional a la velocidad, siendo la constante de proporcionalidad  $72 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ . Desplazamos hacia abajo  $5 \text{ cm}$  a la bolita, contados a partir de su posición de equilibrio estable, comunicándole una velocidad hacia arriba de  $2,5 \text{ m/s}$  en el instante  $t = 0$ . Determinar: 1) La ecuación horaria del movimiento de la esferita [ $y = y(t)$ ] y su representación gráfica. 2) Valor que debe tener la constante de proporcionalidad entre la fuerza y la velocidad de la esferita para que el amortiguamiento sea crítico, determinando el factor de amortiguamiento.



Problema VI-111.

# CAPÍTULO VII

## TRABAJO Y ENERGÍA. TEORÍA DE CAMPOS. PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

### A) TRABAJO, POTENCIA, ENERGÍA

#### VII - 1. Trabajo. Unidades

En nuestro lenguaje diario llamamos «trabajo» a la realización de un esfuerzo físico o intelectual que efectúa el obrero, médico, estudiante, ... etc. En Física el concepto de trabajo es algo diferente, será una magnitud para cuya medición utilizamos determinadas unidades, y lo denominamos TRABAJO MECÁNICO. Decimos que se realiza un trabajo mecánico si al aplicar una fuerza a un cuerpo éste se mueve recorriendo una distancia, el trabajo efectuado será mayor cuanto mayor sea la fuerza aplicada y el camino recorrido. Así por ejemplo, al elevar una piedra con las manos, el trabajo mecánico es realizado por la fuerza muscular de los brazos y será mayor cuanto mayor sea el peso de la piedra y más alto la levantemos; para el caso de una máquina que desplaza objetos, necesitará más combustible cuanto más grande sea la fuerza que aplique a estos y mayor sea el desplazamiento en el transporte. Éstos y muchos otros ejemplos, sugieren la generación de una magnitud (*definir*) que nos relacione la fuerza que aplicamos a un cuerpo y la distancia que éste recorre. Si al aplicar una fuerza no hay movimiento, no se realiza trabajo mecánico (Ej. al sujetar un cuerpo con las manos, aunque realizamos una fuerza muscular, si no lo movemos no realizamos trabajo mecánico). En adelante y para simplificar, al hablar de trabajo mecánico, lo denominaremos simplemente trabajo.

Esta magnitud, que vamos a cuantificar por definición, es de gran importancia en toda la Física y en principio nos va a resolver numerosos problemas que nos plantea la Dinámica. Consideremos una partícula  $P$  que se mueve por su trayectoria curva  $C$  bajo la acción de una fuerza  $\mathbf{F}$  (Fig. VII-1); en un tiempo elemental  $dt$  la posición de la partícula pasa de  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ , donde  $d\mathbf{r}$  es el vector desplazamiento.

«Llamaremos TRABAJO elemental  $dW$  realizado por la fuerza  $\mathbf{F}$  en un desplazamiento  $d\mathbf{r}$ , al producto escalar de la fuerza por el desplazamiento».

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F dr \cos \varphi$$

en la que  $\varphi$  es el ángulo entre la dirección de  $\mathbf{F}$  y el desplazamiento  $d\mathbf{r}$ . El trabajo es una magnitud escalar (determinada por el número que expresa su medida), por lo que podemos obtener el trabajo realizado en una sucesión de desplazamientos infinitesimales mediante la suma algebraica de los trabajos elementales; así, si la partícula  $P$  se desplaza de la posición 1 a la 2 de la Fig. VII-1, el trabajo realizado por  $\mathbf{F}$  en un desplazamiento finito es:

$$W = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

para realizar esta integral, tendremos que conocer el valor de  $\mathbf{F}$  en cada punto de su trayectoria, es decir  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  o  $\mathbf{F}(x, y, z)$ , así como la ecuación de la trayectoria seguida por la partícula. La integral se llama curvilínea ya que la integración se lleva a cabo a lo largo de la trayectoria curva  $C$ , limitada por dos puntos sobre ella ( $1 \rightarrow 2$ ), en los distintos puntos de ésta los desplazamientos elementales tangenciales  $d\mathbf{r}$  son diferentes en su sentido. La notación que empleamos es:

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Al representar gráficamente la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento,  $F \cos \varphi$ , frente al propio desplazamiento, obtenemos una curva, como por ejemplo la 1, 2 de la Fig. VII-2. Tomemos espacios tan pequeños,  $\Delta r_1, \Delta r_2, \Delta r_3$ , etc., que en ellos el producto  $F \cos \varphi$ , se pueda suponer constante. Las áreas de los pequeños rectángulos de la figura equivalen a los trabajos a lo largo de  $\Delta r_1, \Delta r_2$ , etc.; si hacemos tender  $\Delta r_1, \Delta r_2$ , hacia cero, las áreas de los rectángulos tienden a las de los trapecios (con un lado curvilíneo) cuyos lados son las ordenadas, el incremento de  $r$  ( $\Delta r_i$ ) y el trocito de curva ( $1 - 1'$ ). En el límite tales áreas (rectángulos y trapecios) se identifican; el área encerrada por la curva, las ordenadas extremas y el eje de abscisas, repre-

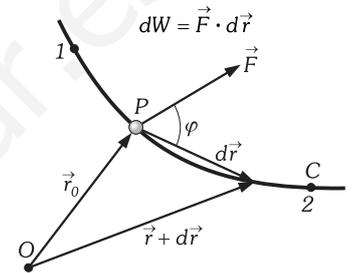


Fig. VII-1.- Definición de Trabajo.

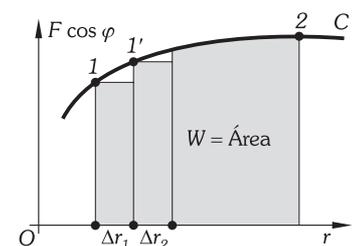


Fig. VII-2.- Representación gráfica del trabajo.

senta, por tanto, la suma de los infinitos trabajos elementales a lo largo del trayecto y en definitiva el trabajo total. (Concepto de integral definida).

Si las componentes de la fuerza  $\mathbf{F}$  que realiza un trabajo y del desplazamiento  $d\mathbf{r}$  son  $F_x, F_y, F_z, dx, dy, dz$ , es decir:  $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$ ,  $d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$ , la expresión del trabajo es:

$$dW = (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}) \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

de acuerdo con las propiedades del producto escalar. El trabajo total sobre la partícula cuando ésta se mueve de 1 a 2, será:

$$W = \int_1^2 (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz$$

y como:  $dx = \dot{x} dt, dy = \dot{y} dt$  y  $dz = \dot{z} dt$ , ésta última expresión se puede escribir:

$$W = \int_{t_0}^{t_1} (F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}) dt = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt$$

«Si sobre una partícula actúan varias fuerzas, el trabajo de la resultante es igual a la suma de los trabajos de cada una de ellas».

En efecto:  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 \dots$ , el trabajo realizado por  $\mathbf{F}$  al recorrer el camino  $d\mathbf{r}$  es:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots) \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r} + \dots$$

igualdad que nos demuestra el teorema.

Salta a la vista, de este teorema, y es importante remarcarlo, que para definir correctamente un trabajo es necesario especificar cuál es la fuerza que lo realiza. Distintas fuerzas aplicadas a una partícula en un mismo desplazamiento pueden realizar trabajos distintos.

La fuerza  $\mathbf{F}$  que hace que una partícula se mueva, como ya hemos visto, es la suma de una tangencial y una normal:  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_n$ , entonces:

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{r} + \int_C \mathbf{F}_n \cdot d\mathbf{r}$$

siendo que  $\mathbf{F}_t$  forma cero grados con  $d\mathbf{r}$  y  $\mathbf{F}_n$  forma  $\pi/2$  rad, tendremos:

$$W = \int_C F_t dr$$

«Solo la componente tangencial de la fuerza que actúa sobre una partícula en movimiento produce trabajo».

Veamos ahora algunos de los casos particulares frecuentes:

A) Si la fuerza  $\mathbf{F}$  es constante y la trayectoria seguida por la partícula es recta (Fig. VII-3), entonces:

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = F s \cos \varphi \tag{1}$$

en la que hemos llamado  $\mathbf{s}$  a la magnitud desplazamiento (camino recorrido); y si la dirección de la fuerza y el espacio ( $\mathbf{s}$ ) es la misma, entonces:  $W = F s$ .

B) ¿Cuándo el trabajo de una fuerza es nulo? Evidentemente, si la fuerza es nula; pero también si no hay desplazamiento (caso de la fuerza de rozamiento estático de un cuerpo apoyado en una superficie o de un sólido que rueda sin deslizar), o bien si, siendo  $\mathbf{F}$  y  $d\mathbf{r}$  no nulos, forman un ángulo de  $\pi/2$  rad, como es por ejemplo el caso del peso en un desplazamiento horizontal o el de la fuerza centrípeta en un movimiento circular.

C) El trabajo de una fuerza determinada, ¿tiene siempre el mismo signo? El signo depende de la dirección y sentido del desplazamiento (Fig. VII-4). Si el ángulo entre  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{v}$  es  $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ , el trabajo será positivo, pero si se verifica  $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$ , será negativo. La fuerza de rozamiento dinámico realiza siempre un trabajo negativo, por ser siempre de sentido contrario a  $\mathbf{v}$ .

D) El trabajo realizado sobre una partícula, cuando actúa una fuerza constante  $\mathbf{F}$ , en toda su trayectoria (1  $\rightarrow$  2 en la Fig. VII-5), es igual al producto escalar de dicha fuerza por el vector desplazamiento  $\Delta \mathbf{r}$ .

En efecto:

$$W_1^2 = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \int_{r_1}^{r_2} d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} \tag{c.q.d.}$$

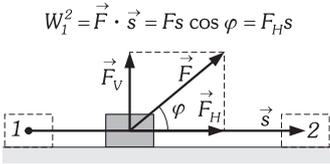
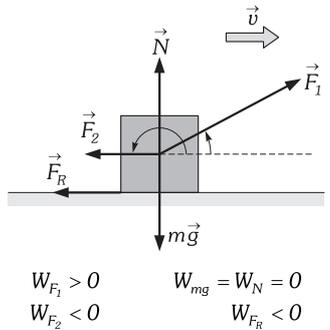
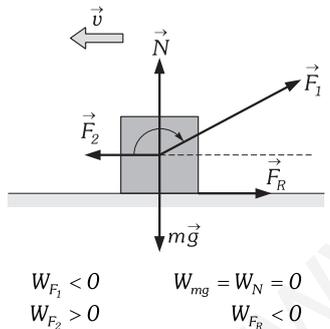


Fig. VII-3.- Si la fuerza es constante en módulo y dirección y la trayectoria de la partícula es recta, el trabajo resulta solo de la componente en la dirección del desplazamiento.



$$\begin{aligned} W_{F_1} &> 0 & W_{mg} &= W_N = 0 \\ W_{F_2} &< 0 & W_{F_R} &< 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} W_{F_1} &< 0 & W_{mg} &= W_N = 0 \\ W_{F_2} &> 0 & W_{F_R} &< 0 \end{aligned}$$

Fig. VII-4.- El trabajo puede ser tanto positivo como negativo.

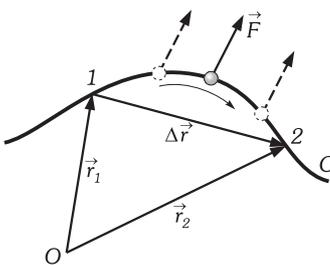


Fig. VII-5.- El trabajo que realiza una fuerza constante  $\mathbf{F}$  es igual al producto escalar de dicha fuerza por el vector desplazamiento  $\Delta \mathbf{r}$ .

E) El trabajo realizado sobre una partícula por una fuerza  $\mathbf{F}$  constante en módulo  $F$  y siempre dirigida hacia un punto  $O$  (es una fuerza central de módulo constante), es igual al producto de  $F$  veces la reducción de la distancia al punto  $O$ .

En efecto (Fig. VII-6): si los cosenos directores de  $\mathbf{r}$  ( $x, y, z$ ) son  $\cos \alpha, \cos \beta$  y  $\cos \gamma$ , entonces  $x = r \cos \alpha, y = r \cos \beta$  y  $z = r \cos \gamma$ , y la fuerza  $\mathbf{F}$  ( $F_x, F_y, F_z$ ) verificará:  $F_x = -F \cos \alpha, F_y = -F \cos \beta$  y  $F_z = -F \cos \gamma$ ; y como  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow r dr = x dx + y dy + z dz$ ; de todo ello obtenemos:

$$W_1^2 = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_1}^{r_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = -F \int_{r_1}^{r_2} \frac{x dx + y dy + z dz}{r} = -F \int_{r_1}^{r_2} dr = F(r_1 - r_2) \quad \text{c.q.d.}$$

Si la partícula se mueve alejándose de  $O$  entonces el trabajo realizado es negativo, y al contrario.

Hechas las anteriores consideraciones, es muy importante, cuando tratamos con el trabajo mecánico, especificar si nos referimos al trabajo realizado por un cuerpo determinado o al realizado sobre dicho cuerpo y precisar si el trabajo realizado se debe a una fuerza en particular o a la fuerza total sobre el cuerpo. Así por ejemplo: supongamos que levantamos un objeto con movimiento lento y rapidez constante desde el suelo hasta una altura  $h$ , sobre él se ejercen dos fuerzas, las que hacemos nosotros hacia arriba y la de la gravedad (su peso  $mg$ ) que actúa hacia abajo, siendo las dos iguales. Considerando la dirección hacia arriba como positiva, entonces el trabajo realizado por nosotros será  $mgh$  y el realizado por el peso  $-mgh$  (puesto que en (1)  $\varphi = 180^\circ \Rightarrow \cos \varphi = -1$ ) y el trabajo total realizado sobre el cuerpo es nulo; esto no quita en absoluto que nosotros hemos realizado un trabajo sobre el cuerpo igual a  $mgh$ .

La ecuación de dimensiones del trabajo es en los sistemas CGS y SI:  $[W] = [F] [s] = MLT^{-2}L = ML^{-2}T^{-2}$ , y en el TÉCNICO:  $[W] = [F] [s] = FL$ . El trabajo tiene que ser medido por el producto de una fuerza por una distancia. Si en la ecuación (1) hacemos:

$$\begin{aligned} F = 1 \text{ dyn} & \quad s = 1 \text{ cm} & \quad y & \quad \cos \varphi = 1 & \Rightarrow & \quad W = 1 \text{ ergio (CGS)} \\ F = 1 \text{ N} & \quad s = 1 \text{ m} & \quad y & \quad \cos \varphi = 1 & \Rightarrow & \quad W = 1 \text{ julio (SI)} \\ F = 1 \text{ kp} & \quad s = 1 \text{ m} & \quad y & \quad \cos \varphi = 1 & \Rightarrow & \quad W = 1 \text{ kilográmetro (ST)} \end{aligned}$$

"El  $\left. \begin{array}{l} \text{ERGIO (erg)} \\ \text{JULIO (J)} \\ \text{KILOGRÁMETRO (kgm)} \end{array} \right\}$  es el trabajo que realiza la fuerza de una  $\left. \begin{array}{l} \text{dina (dyn)} \\ \text{newton (N)} \\ \text{kilopeso (kp)} \end{array} \right\}$  al desplazar

su punto de aplicación un  $\left. \begin{array}{l} \text{cm} \\ \text{m} \\ \text{m} \end{array} \right\}$  en su misma dirección y sentido».

$$\begin{aligned} 1 \text{ J} &= 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} = 10^5 \text{ dyn} \cdot 100 \text{ cm} &= 10^7 \text{ erg} \\ 1 \text{ kgm} &= 1 \text{ kp} \cdot 1 \text{ m} = 9,8 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} &= 9,8 \text{ J} \\ 1 \text{ kgm} &= 1 \text{ kp} \cdot 1 \text{ m} = 9,8 \cdot 10^5 \text{ dyn} \cdot 100 \text{ cm} &= 9,8 \times 10^7 \text{ erg} \end{aligned}$$

Una unidad muy utilizada es la que denominamos CALORÍA (cal), que equivale a 4,18 J; en la Termodinámica veremos que esta cantidad expresada en J/cal, la llamamos *equivalente mecánico del calor*.

**PROBLEMAS: 1 al 10.**

### VII - 2. Potencia mecánica. Unidades

Para efectuar un trabajo, diferentes «motores» necesitan distinto tiempo. Así por ejemplo una grúa eleva, en una obra en construcción, varias centenas de ladrillos al piso más alto en pocos minutos, mientras que un obrero necesita para ello muchas horas de trabajo. Esta rapidez de realización de un trabajo se caracteriza en tecnología por la magnitud POTENCIA. Así se define POTENCIA MECÁNICA MEDIA, como el trabajo realizado en la unidad de tiempo.

$$P_m = \frac{W}{t}$$

La POTENCIA MECÁNICA en un instante dado es:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Teniendo en cuenta que  $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  podemos poner:

$$P = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

fórmula que nos relaciona la potencia con la velocidad instantánea del móvil.

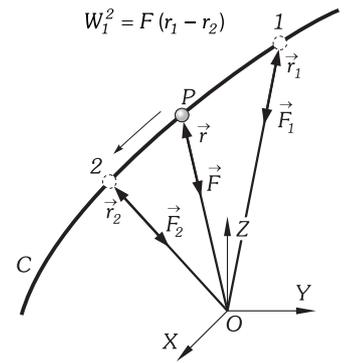


Fig. VII-6.- Sobre la partícula y de 1 a 2, actúa una fuerza  $\mathbf{F}$  constante en módulo ( $F = F_1 = F_2 \dots$ ) y dirigida siempre hacia  $O$ ;  $\mathbf{F}$  es por ésta última causa una fuerza central.

La ecuación de dimensiones de la potencia mecánica es en los sistemas CGS y SI:  $[P] = [W] / [t] = ML^2 T^{-2} / T = ML^2 T^{-3}$ . En el sistema TÉCNICO:  $[P] = FL / T = FLT^{-1}$ .

La potencia tiene que ser medida por el cociente entre la unidad de trabajo y la unidad de tiempo; luego, en el CGS la unidad es el erg/s, en el SI el J/s = VATIO (W) y en el ST el kgm/s; estas unidades son relativamente pequeñas por lo que se emplean el KILOVATIO (kW) y el CABALLO DE VA-POR (CV). La equivalencia entre el CV y el kW es:

$$1 \text{ CV} = 75 \text{ kgm/s} = \frac{75 \times 9,8}{1\,000} \text{ kW} = 0,735 \text{ kW} \quad 1 \text{ kW} = 1\,000 \text{ J/s} = \frac{1\,000}{9,8 \times 75} \text{ CV} = 1,36 \text{ CV}$$

El KILOVATIO-HORA es una unidad de trabajo equivalente al trabajo realizado durante una hora por un agente que desarrolla una potencia de un kilovatio:  $1 \text{ kW} \cdot \text{h} = 3\,600\,000 \text{ J}$ .

**PROBLEMAS: 11 al 15.**

**VII – 3. Energía**

Uno de los conceptos más importantes que interesan a toda la humanidad es la energía. No tenemos una definición simple, precisa y a la vez general de esta magnitud, si que pueden definirse de forma precisa los diferentes tipos de energía que se utilizan. En este capítulo definiremos la energía cinética (de movimiento) y la energía potencial (de posición) y posteriormente se irán viendo los conceptos de energía calorífica, eléctrica, química, atómica, etc. y las interconexiones entre todas ellas. Cualquiera que sea el tipo de energía a considerar tendrán en común que las medimos en las mismas unidades que el trabajo mecánico.

Para los objetivos que nos planteamos en este capítulo podemos decir que: «Un cuerpo tiene ENERGÍA cuando tiene una capacidad para realizar un trabajo». (Un objeto en movimiento puede realizar un trabajo sobre otro al golpearlo. Un cuerpo a una altura  $h$ , al dejarlo caer, desarrolla un trabajo, un resorte con una partícula en su extremo al soltarlo realiza trabajo). Esta definición no es válida, por ejemplo, para la energía asociada con el calor, pues como se verá no siempre está disponible para realizar un trabajo.

Para el estudio de la mecánica hemos enunciado las leyes de Newton y se han desarrollado las técnicas para resolver las ecuaciones a las que ellas nos conducían; con las leyes de Newton se puede analizar el movimiento de casi cualquier sistema mecánico. En la práctica, muchas veces, es más fácil analizar el movimiento de los sistemas mecánicos aplicando otras relaciones, las que tienen máximo interés son las ecuaciones energéticas; como veremos, el empleo de estas ecuaciones constituye una forma indirecta de aplicar las leyes de Newton por estar relacionadas entre sí; en concreto, en ciertos problemas dinámicos, el análisis con el trabajo y la energía nos conduce a ecuaciones algebraicas en vez de ecuaciones diferenciales.

En éste y sucesivos capítulos veremos las leyes de conservación que nos serán particularmente valiosas cuando se trata de sistemas de muchas partículas, en los que nos es difícil hacer una consideración en detalle de todas las fuerzas que intervienen y hacer aplicación de las leyes de Newton.

**B) TEORÍA DE CAMPOS**

**VII – 4. Introducción**

El estudio de la teoría de campos es esencialmente matemático al igual que el cálculo diferencial o el cálculo vectorial; en todos estos análisis se manejan magnitudes que no tienen en principio ningún sentido físico inmediato, pero son aplicables a multitud de situaciones que se dan en la naturaleza. Con la «teoría de campos» ocurre lo mismo que cuando en matemáticas se maneja el «álgebra estructural» (estructura de anillo, de cuerpo, de álgebra de Boole...), así por ejemplo se estudia una vez la estructura de álgebra de Boole y es aplicable a teorías tan diferentes como son el álgebra proposicional, teoría de circuitos, probabilidades...

Algunos de los ejemplos de aplicación que vamos a exponer en esta teoría, aunque no se hallan explicado en lo anteriormente visto, forman parte de los primeros conocimientos de la Física y consideramos al lector en su posesión.

Supongamos que a la derecha de una lámina de vidrio opaca se ha practicado el vacío (Fig. VII-7), no conociendo lo que hay al otro lado de la lámina. En un punto  $P$ , a la derecha de la lámina de vidrio colocamos una carga puntual  $q$  y observamos que sobre esta carga testigo (de prueba) fija actúa una fuerza  $F$ . Deducimos que en la «zona no visible» existe alguna carga que ha interactuado con la muestra.

¿Pero cómo se «ha enterado» nuestra carga de prueba de la existencia de la otra? El único razonamiento físicamente lógico es el siguiente: La carga «oculta» ha creado en el espacio una situación especial, lo ha «perturbado» de tal manera que al colocar una carga  $q$  en un punto cualquiera, ese «enrarecimiento» del espacio interacciona con nuestra carga; resumiendo, la carga oculta ha creado un «campo eléctrico», y este campo ha interactuado con la carga de prueba.

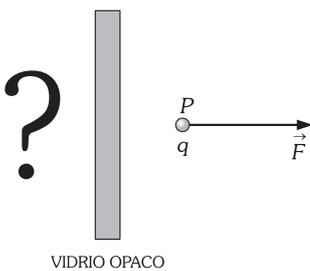


Fig. VII-7.- Una distribución de carga perturba el espacio vacío creando lo que llamamos un «Campo eléctrico».

Este sencillo ejemplo es extensible a gravitación y a otros diversos estudios de variada complicación; sugiere dividir la teoría de campos en dos partes, una nos lleva a analizar qué produce el campo y nos hace estudiar las leyes que determinan la «intensidad» del campo y cómo se crea; la segunda nos dice que algo es influenciado por el campo, así por ejemplo la presencia de una masa en el interior de un campo gravitacional nos conducen a las ecuaciones del movimiento de tal masa.

**VII – 5. Campos escalares. Representación**

«Si en cada uno de los puntos de una región del espacio una magnitud física de carácter escalar presenta diversos valores, diremos que en esa región existe un CAMPO ESCALAR».

La magnitud escalar (a) en un punto, tendrá un valor función de las coordenadas de este y del tiempo:

$$a = a(x, y, z, t)$$

Si la magnitud escalar es constante con el tiempo el campo escalar se llama ESTACIONARIO; y por tanto:

$$a = a(x, y, z)$$

Un campo escalar, puede representarse de forma intuitiva por las SUPERFICIES DE NIVEL: superficies que son el lugar geométrico de los puntos en los cuales el escalar a, tiene un valor constante:  $a = a(x, y, z) = cte$ . La mayor o menor proximidad de las superficies de nivel da una idea de las variaciones de la magnitud campo.

La representación gráfica de los campos escalares se realiza utilizando el método de los planos acotados o LÍNEAS DE NIVEL. Los puntos del plano de referencia en que la función escalar tiene un valor constante se unen mediante una línea continua. El resultado es un haz de líneas de nivel (o curvas de nivel) (Fig. VII-8). Estas líneas se representan generalmente para una sucesión de valores discretos de la función escalar. Cada uno de esos valores se llama COTA.

Así por ejemplo, en los mapas de estudio del tiempo, las líneas isobaras (presión constante), intersección de las superficies isobaras con la superficie del mar, se trazan con intervalos de 4 mb.

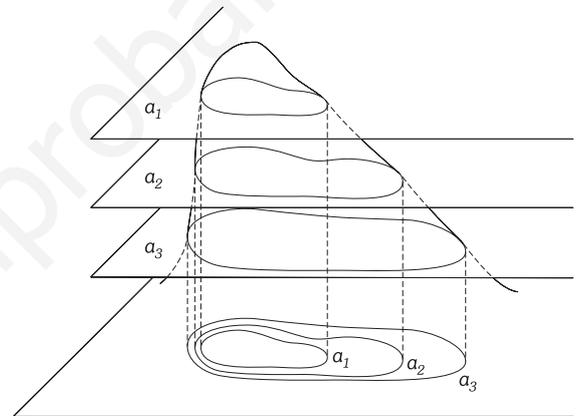


Fig. VII-8.- Una magnitud a viene representada por el haz de curvas de nivel  $a_1, a_2, \dots$

**VII – 6. Vector gradiente. Propiedades**

Debemos definir con precisión y en términos analíticos las variaciones que sufre la magnitud campo escalar estacionario al desplazarnos de un punto P de coordenadas (x, y, z) a otro P' infinitamente próximo de coordenadas (x + dx, y + dy, z + dz) (Fig. VII-9); la expresión matemática de esta variación viene dada por:

$$da = \frac{\partial a}{\partial x} dx + \frac{\partial a}{\partial y} dy + \frac{\partial a}{\partial z} dz \tag{2}$$

en la que se ha introducido el concepto de DERIVADA PARCIAL ( $\partial a/\partial t$ ). Cuya definición es:

«Sea la función escalar dependiente de las coordenadas del punto:  $a = a(x, y, z)$  (campo escalar estacionario); llamaremos DERIVADA PARCIAL de a con respecto a una de las tres variables, al resultado de derivar la función a con respecto a esta variable considerando las otras dos como constantes».

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \left( \frac{da}{dx} \right)_{y, z = cte.}$$

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \left( \frac{da}{dy} \right)_{x, z = cte.}$$

$$\frac{\partial a}{\partial z} = \left( \frac{da}{dz} \right)_{x, y = cte.}$$

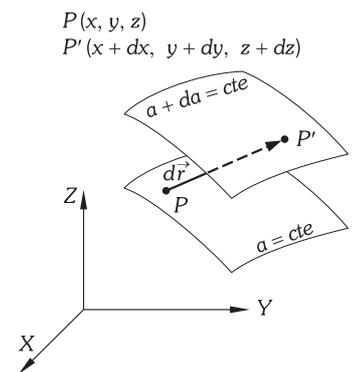


Fig. VII-9.- Variación de la magnitud campo escalar.

La expresión (2) la podemos escribir de otra forma si definimos el VECTOR GRADIENTE como:

$$\mathbf{grad} a = \frac{\partial a}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial a}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial a}{\partial z} \mathbf{k}$$

vector cuyos componentes son las respectivas derivadas parciales del campo escalar:  $\mathbf{grad}_x a = \partial a/\partial x$ ,  $\mathbf{grad}_y a = \partial a/\partial y$ ,  $\mathbf{grad}_z a = \partial a/\partial z$ .

Llamando  $d\mathbf{r}$  al vector que une los puntos P y P', cuya expresión es  $d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$ , y proyectando el gradiente en esa dirección, obtenemos:

$$\mathbf{grad} a \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial a}{\partial x} dx + \frac{\partial a}{\partial y} dy + \frac{\partial a}{\partial z} dz \Rightarrow da = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{grad} a \tag{3}$$

con lo que «la variación del campo en una dirección cualquiera viene caracterizada por la componente del gradiente en esa dirección», o dicho de otra forma, «en un punto, la componente del gradiente en una dirección es igual a la DERIVADA DIRECCIONAL correspondiente del campo escalar».

La expresión:

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

se simplifica mediante el símbolo  $\nabla$ , y se llama «OPERADOR\* NABLA». Así, la aplicación del operador nabla a un campo escalar nos da el gradiente de dicho campo:

$$\nabla a = \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) a = \frac{\partial a}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial a}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial a}{\partial z} \mathbf{k} \equiv \mathbf{grad} a$$

PROPIEDADES:

Si nos movemos en una *superficie de nivel*, al ser  $da = 0$ , la (3) nos determina:  $d\mathbf{r} \cdot \mathbf{grad} a = 0$ , y para que esta expresión se cumpla siempre, es necesario que  $d\mathbf{r}$  y  $\mathbf{grad} a$ , sean perpendiculares y como  $d\mathbf{r}$  está situado sobre una superficie de nivel:

«El vector gradiente es perpendicular a las superficies de nivel».

La expresión (3) nos indica también que para que exista una máxima variación del campo, para un valor fijo de  $|d\mathbf{r}|$ , el coseno del ángulo formado por  $d\mathbf{r}$  y  $\mathbf{grad} a$ , debe ser 1 y el ángulo que forman dichos vectores nulo:

«El gradiente tiene la dirección de la máxima variación del campo y va en sentido de los valores crecientes de  $a$ ».

### VII – 7. Campos vectoriales. Potencial de un campo vectorial. Intensidad del campo

«Si en cada uno de los puntos de una región del espacio, una magnitud física de carácter vectorial presenta diversos valores, diremos que en esa región existe un CAMPO VECTORIAL».

La magnitud vectorial  $\mathbf{E}$  en un punto, tendrá un valor función de las coordenadas de éste y del tiempo:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

Las tres componentes del vector campo serán funciones de las coordenadas del punto considerando y del tiempo:  $E_x = E_x(x, y, z, t)$ ,  $E_y = E_y(x, y, z, t)$ ,  $E_z = E_z(x, y, z, t)$ .

Si el vector campo no varía con el tiempo diremos que se trata de un campo ESTACIONARIO, en cuyo caso  $\mathbf{E}$  es sólo función de las coordenadas del punto:  $\mathbf{E}(x, y, z)$ .

Según lo visto anteriormente, a cada punto de un campo escalar le podemos asociar un vector gradiente del campo en ese punto; es decir, el campo escalar tiene asociado un campo vectorial. Al primero lo llamaremos «POTENCIAL» ( $V$ ) de este último.

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad} V = -\nabla V$$

Se puede dar una idea del campo vectorial por las LÍNEAS DE CAMPO: *curvas tangentes al vector campo en todos sus puntos*. En consecuencia: Si  $d\mathbf{r}$  es un elemento de línea de campo, entonces:

$$\mathbf{E} \times d\mathbf{r} = \mathbf{0}$$

Si la propiedad del campo vectorial que se manifiesta en cada uno de sus puntos, es una fuerza que actúa sobre un determinado sistema físico, existe en el espacio que consideramos un CAMPO DE FUERZAS. A las líneas de campo se les denomina LÍNEAS DE FUERZA.

En los campos de fuerzas ocurre que al colocar un cuerpo en una determinada región del espacio, sobre él actúa una fuerza debida a una propiedad inherente que lo caracteriza, siendo esta propiedad de la misma naturaleza que el cuerpo o cuerpos que crean el campo. El valor de la fuerza en cada punto dependerá de las coordenadas del punto (distancia al agente) y de la MAGNITUD ESCALAR TESTIGO (o MAGNITUD ESCALAR ACTIVA); por consiguiente:

$$\mathbf{F} = e \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{e}$$

siendo  $\mathbf{F}$  la fuerza que actúa sobre la cantidad  $e$  de magnitud escalar testigo, entonces  $\mathbf{E}$  es lo que llamaremos INTENSIDAD DEL CAMPO, es decir: «la fuerza por unidad de magnitud escalar testigo». (Por ejemplo: la Tierra crea un campo de fuerzas a su alrededor; colocando una masa  $m$  en un punto de ese espacio experimenta una fuerza  $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ , donde  $\mathbf{g}$  es la intensidad del campo gravitatorio en el punto en que se encuentre  $m$ ).

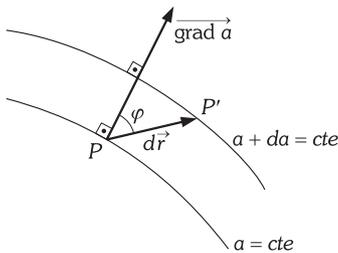


Fig. VII-10.- El vector gradiente del campo escalar  $a(x, y, z)$  es siempre perpendicular a las superficies de nivel e indica la dirección según la cual dicha magnitud varía con la máxima rapidez.

\* Se llama operador a todo ente físico o matemático capaz de realizar una transformación. Por ejemplo: +, ×, ln, √, d/dx, ∇, ...

**VII – 8. Circulación**

Consideremos un campo vectorial definido por  $\mathbf{E}$ , y sea  $d\mathbf{r}$  una trayectoria elemental o elemento de línea; llamaremos CIRCULACIÓN  $d\Gamma$  a lo largo del elemento  $d\mathbf{r}$  a:

$$d\Gamma = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

Si  $C$  es una curva entre dos puntos  $M$  y  $N$ , con todos sus puntos contenidos en el campo (Fig. VII-11), el valor de la circulación a lo largo de esta trayectoria finita será:

$$\Gamma = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (E_x dx + E_y dy + E_z dz)$$

En el caso de que se trate de un campo de fuerzas, es decir,  $\mathbf{E}$  es una fuerza, el sentido físico de la circulación es el de trabajo realizado por  $\mathbf{E}$  a lo largo de  $C$ .

**VII – 9. Flujo**

Si consideramos en un campo vectorial  $\mathbf{E}$ , una superficie infinitesimal  $d\mathbf{A}$ , el FLUJO ELEMENTAL DEL CAMPO a través de la superficie es:

$$d\phi = E dA \cos \varphi$$

siendo  $\varphi$  el ángulo formado por  $\mathbf{E}$  y la normal a la superficie (Fig. VII-12).

Si, como es costumbre, representamos a  $d\mathbf{A}$  por un vector normal a la superficie, y con su sentido como indica la figura, el flujo infinitesimal del vector  $\mathbf{E}$  a través de  $d\mathbf{A}$  es:

$$d\phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

Si la superficie es finita, se obtiene el flujo sumando la contribución de cada uno de los infinitos elementos diferenciales de superficie; es decir:

$$\phi = \int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

**VII – 10. Divergencia**

Consideremos un pequeño volumen  $\tau$  en el espacio ocupado por el campo vectorial y sea  $A$  la superficie que lo envuelve; dentro del volumen  $\tau$  imaginemos un punto  $P$ . Llamaremos DIVERGENCIA DEL CAMPO EN UN PUNTO al flujo que por unidad de volumen atraviesa a la superficie de un elemento infinitesimal de volumen que rodee a un punto ( $P$ ):

$$\text{div} \mathbf{E} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

Los conceptos de flujo y divergencia pueden comprenderse fácilmente con ayuda de un símil hidrodinámico. Imaginemos un fluido perfecto que circule por una conducción (una tubería) con velocidad uniforme. En el espacio ocupado por el fluido existe un campo uniforme de vectores, el constituido por los vectores velocidad de los diversos elementos del líquido. Puede entonces verse que la cantidad de líquido que atraviesa una superficie normal ideal situada en el seno del líquido en la unidad de tiempo, es decir el flujo de líquido a través de esa superficie, coincide con nuestra definición de flujo del vector campo (velocidad, en este caso). Para aclarar la idea física de divergencia consideremos un pequeño cilindro ideal colocado en el seno del líquido con sus generatrices paralelas a la dirección de la velocidad del fluido. En nuestro caso notaremos que como la velocidad del líquido es constante, la misma cantidad de líquido que entra normalmente al cilindro por una de sus bases, saldrá por la otra; concluiríamos que el flujo total a través de él es cero. Hagamos ahora tender a cero el volumen del cilindro, hasta reducirlo a un punto y a un pequeño volumen diferencial alrededor de él, la situación sería la misma y el flujo total seguiría siendo cero. También lo sería el flujo total por unidad de volumen alrededor del punto considerado. Esta magnitud es la *divergencia*. En definitiva, en nuestro punto el campo vectorial tendría divergencia nula. La situación sería muy distinta si en el punto considerado existiera un *manantial* de líquido. Al calcular el flujo total producido por unidad de volumen alrededor del punto nos encontraríamos que no es cero puesto que en él está *manando* líquido. En este punto el campo tendría divergencia positiva. Si en vez de un manantial, existiera un desagüe, nuestro punto tendría divergencia negativa.

Hemos visto de esta manera que el *escalar* DIVERGENCIA nos permite caracterizar aquellos puntos del campo vectorial en que éste, valga la expresión, *se crea o se destruye*; es decir clasifica los MANANTIALES y los SUMIDEROS del campo.

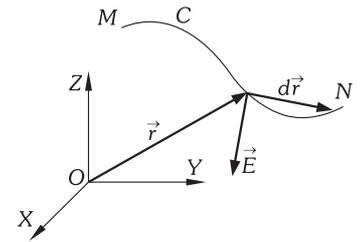


Fig. VII-11.- Circulación del vector  $\mathbf{E}$  a lo largo de la trayectoria  $C$  (de  $M$  a  $N$ ).

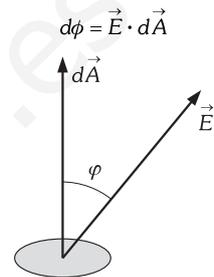


Fig. VII-12.- Flujo del vector campo  $\mathbf{E}$  a través del elemento del área  $d\mathbf{A}$ .

Finalmente, si el vector campo está dado por la expresión:

$$\mathbf{E} = E_x(x, y, z) \mathbf{i} + E_y(x, y, z) \mathbf{j} + E_z(x, y, z) \mathbf{k}$$

el valor del escalar divergencia viene dado por:

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{E}$$

propiedad cuya demostración omitimos por salirse de los límites de esta exposición elemental.

**VI – 11. Teorema de Ostrogradsky-Gauss**

Si suponemos, en la región ocupada por el campo, una superficie cerrada A, el flujo que atraviesa dicha superficie será indudablemente función de los manantiales o sumideros que existan en su interior, en definitiva, de los valores que la divergencia del campo presente dentro del volumen V encerrado por A. La relación entre ambas viene dada por la siguiente expresión dada por Gauss:

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \text{div } \mathbf{E} \, d\tau = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, d\tau$$

Esta fórmula transforma una integral de volumen en otra de superficie.

Aunque enunciada sin demostración, y continuando nuestro símil hidrodinámico, es fácil darse cuenta de que  $\text{div } \mathbf{E} \, d\tau$  representa el flujo que ha *manado* en la unidad de tiempo fuera del volumen  $d\tau$ ; la integral del segundo miembro representa la suma de los flujos producidos dentro del volumen V, y esto debe corresponder al flujo total que ha atravesado la superficie que figura en el primer miembro.

Cuando la divergencia es nula en todos los puntos del campo, a éste se le llama CAMPO SOLENOIDAL.

**VII – 12. Rotacional de una función vectorial**

Consideremos una línea cerrada C en el espacio ocupado por un campo vectorial, llamamos A a una superficie cualquiera limitada por la curva C y que por tanto está contenida en ella; hemos definido circulación del campo  $\mathbf{E}$  a lo largo de la línea C por:

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

y para este caso en que la línea es cerrada elegimos un sentido de integración a lo largo de ella. Si a la superficie A la dividimos en dos partes,  $A_1$  y  $A_2$ , estarán limitadas por dos curvas  $C_1$  y  $C_2$ , entonces se verifica que:

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \Gamma_1 - \Gamma_2$$

ya que la línea común a ambas curvas está atravesada en sentidos contrarios en las dos integraciones y sólo nos queda la contribución de las líneas de la circulación original (Fig. VII-13). Subdividiendo esta superficie tantas veces como queramos, subsistirá esta propiedad. Procedemos de esta forma hasta llegar a entornos infinitamente pequeños (sólo contienen un punto).

En la subdivisión la circulación para cada pedazo se va haciendo cada vez más pequeña, y el área disminuye con ella. En el límite, cuando el área tienda a cero, del cociente de la circulación al área nos da una característica de un punto del campo que será una magnitud vectorial a la que llamamos ROTACIONAL, cuya proyección sobre el vector área toma el valor:

$$\text{rot } \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

Desarrollamos el concepto del escalar divergencia, que también nos caracterizaba cada punto del campo vectorial, como el límite de una integral de superficie cerrada, al volumen infinitesimal que rodea al punto y limitado por tal superficie; parece evidente la definición dada, que nos relaciona la integral de línea con la integral de superficie (ver párrafo siguiente).

En el símil hidrodinámico dado para explicar el concepto físico de divergencia, veíamos que ésta no se anulaba en puntos del campo de velocidades en que existía un manantial o un sumidero; si por ejemplo visualizamos con una mota de polvo un punto de un fluido próximo a un sumidero, ésta generalmente «gira» y se «traslada»; en puntos en que debido a la turbulencia del fluido ocurra esto, el vector rotacional es no nulo, y nos caracteriza el sentido de giro y avance del fluido en su seno.

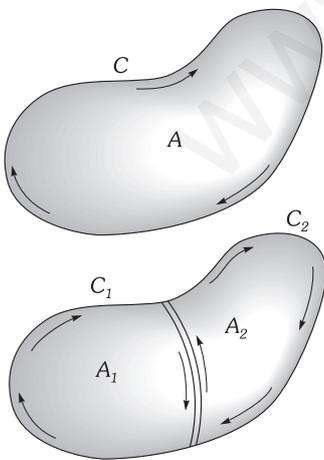


Fig. VII-13.- La circulación a lo largo de la línea C es igual a la suma de las circulaciones a lo largo de  $C_1$  y  $C_2$ , ya que la línea común a ambas está atravesada en sentidos contrarios.

Hemos visto de esta manera que el vector ROTACIONAL nos permite caracterizar aquellos puntos del campo vectorial en que éste «gira» y se «traslada» en un desplazamiento infinitesimal; nos da el valor de lo que llamaremos «FUENTES VECTORIALES» del campo en dicho punto.

El valor analítico del vector rotacional viene dado por:

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Una de las propiedades de este operador es que «El rotacional del gradiente de un campo escalar es siempre cero».

$$\mathbf{rot}(\mathbf{grad} a) = 0$$

En efecto

$$\mathbf{rot}(\mathbf{grad} a) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial a}{\partial z} \end{vmatrix} = \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial a}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial a}{\partial y} \right) \right] \mathbf{i} + \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial a}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial a}{\partial z} \right) \right] \mathbf{j} + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial a}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial a}{\partial x} \right) \right] \mathbf{k}$$

pero:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial a}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial a}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial a}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial a}{\partial z} \right) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial a}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial a}{\partial x} \right)$$

ya que la derivación parcial respecto de una variable deja inalterada la forma de la dependencia funcional del campo con las otras variables. Según esto, las tres componentes anteriores son nulas, quedando demostrada la propiedad enunciada.

Si una función vectorial tiene rotacional nulo, se dice que es IRROTACIONAL. El gradiente de un campo escalar es un campo vectorial irrotacional.

### VII – 13. Teorema de Stokes

El teorema matemático que nos relaciona la integral de línea con la integral de superficie que contiene a dicha línea es:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_A \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

«La integral a lo largo de una línea cerrada de un vector, es igual a la integral de superficie del producto escalar del rotacional del vector por la superficie limitada por la curva»; o dicho de otra forma: «La circulación de un vector a lo largo de una curva cerrada es igual al flujo de su rotacional a través de cualquier superficie limitada por la curva».

La deducción de este teorema, que se hace a partir de la definición dada para el operador rotacional, se sale de los límites de esta exposición elemental.

### VII – 14. Campos conservativos (o campos de potencial)

«Un campo vectorial es conservativo cuando el vector que lo caracteriza  $\mathbf{E}(x, y, z)$  puede ser obtenido por el gradiente de una magnitud escalar  $a(x, y, z)$ ».

Por lo tanto, si  $\mathbf{E}$  es conservativo:

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{rot}(\mathbf{grad} a) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{rot} \mathbf{E} = 0$$

«Un campo conservativo es irrotacional».

Vamos a obtener otras expresiones que nos permiten reconocer a los campos conservativos.

Supongamos que en una región del espacio existe un campo escalar; si calculamos en cada punto el vector  $\mathbf{grad} a$ , que lo hemos llamado *intensidad* del campo y *a* el *potencial*, obtenemos un campo vectorial:

$$\mathbf{E} = \mathbf{grad} a$$

La circulación del vector  $\mathbf{E}$  a lo largo de una curva  $C$  vendrá dada por:

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{grad} a \cdot d\mathbf{r}$$

y haciendo uso de la expresión (3) obtenemos:

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_C da = a_2 - a_1$$

en que  $a_1$  y  $a_2$  son los valores de  $a$  correspondientes a los puntos inicial y final de la curva. Se obtiene, pues, que:

«Un campo vectorial es conservativo cuando la circulación del vector campo en una trayectoria abierta depende exclusivamente de las posiciones inicial y final, pero no de las posiciones intermedias».

Es decir:

$$\Gamma = \int_{1M}^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{1N}^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{1P}^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

Otra conclusión inmediata es que: «si la curva es cerrada, el punto inicial y el final coinciden y la circulación es nula» (propiedad que caracteriza a los CAMPOS CONSERVATIVOS).

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Pudiéndose enunciar:

«Diremos que un campo vectorial es conservativo cuando la circulación del vector campo a lo largo de una trayectoria cerrada es nula».

«Cuando, recíprocamente, se cumple la condición de ser nula la circulación a lo largo de una curva cerrada es que el vector campo  $\mathbf{E}$  puede ser obtenido como el gradiente de un escalar  $a(x, y, z)$ ».

La demostración de este último teorema es consecuencia inmediata del estudio de la energía potencial de los párrafos que viene a continuación.

Si no verifica el campo las condiciones dadas decimos de él lo contrario a conservativo, es decir que es DISIPATIVO.

**VII – 15. Energía potencial de una partícula en un campo de fuerzas conservativo. Relación entre la fuerza y la energía potencial**

Según hemos dicho la ecuación integral que nos caracteriza un campo de fuerzas conservativo es:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

si  $C$  es una línea cerrada. Supongamos que una partícula pasa desde el punto 1 al punto 2, recorriendo un camino  $M$  (Fig. VII-14) y luego volvemos al 1 por otro camino diferente  $N$ ; en este caso:

$$\int_{1M}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{2N}^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_1^2 = \int_{1M}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{2N}^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{1N}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

si en vez de volver por  $N$  lo hubiéramos hecho por  $P$  nos quedaría:

$$W_1^2 = \int_{1M}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{1P}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

y generalizando:

$$W_1^2 = \int_{1M}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{1P}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{1N}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

expresión que en palabras nos dice:

«Si una partícula se mueve de un estado inicial 1 a un estado final 2, por efecto de una fuerza  $F$  conservativa (variable o no) el trabajo realizado es independiente de los caminos intermedios, dependiendo única y exclusivamente del punto inicial y final».

Podemos, por tanto, expresar el trabajo como la diferencia de valores entre los dos puntos de una determinada magnitud física que será función de la posición, y que llamaremos ENERGÍA POTENCIAL de la partícula.

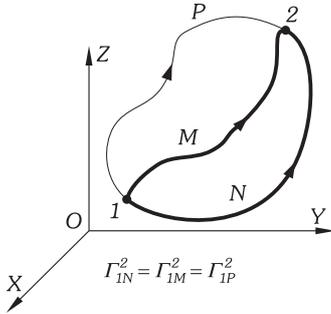


Fig. VII-14.- La circulación del vector campo conservativo no depende de los caminos intermedios.

$$W_1^2 = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(x_1, y_1, z_1) - U(x_2, y_2, z_2) = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_2)$$

Obsérvese que escribimos  $U_1 - U_2$  y no  $U_2 - U_1$ , es decir:

«La energía potencial es una función de punto tal que la diferencia entre sus valores en las posiciones inicial y final es igual al trabajo realizado sobre la partícula, por la fuerza conservativa del campo, para moverla de su posición inicial a la final»; o lo que es lo mismo: «En un desplazamiento de la partícula entre dos posiciones, el incremento de su energía potencial es igual a menos el trabajo realizado por la fuerza conservativa».

La expresión diferencial de la anterior es:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dU$$

que aplicada a una dimensión se escribirá:

$$dU = -F dx \quad \Rightarrow \quad F = -\frac{dU}{dx}$$

fórmula que nos da la variación de energía potencial por unidad de longitud. Si queremos escribir esta ecuación en tres dimensiones, tenemos que recurrir a la notación de derivadas parciales y será:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} = -\text{grad } U$$

Es de resaltar que hemos definido la energía potencial a partir de su incremento entre dos posiciones. Si queremos asignarle un valor específico a la energía potencial de una partícula en un punto determinado, deberemos fijar un punto de referencia, al que asignaremos el valor cero de energía potencial, y referir la de los demás puntos a éste.

La elección práctica más cómoda del punto de referencia depende de la expresión analítica de la fuerza conservativa de que se trate en cada caso.

### VII - 16. Potencial en un punto de un campo conservativo. Relación entre el potencial y la intensidad de campo

Una característica importante de la energía potencial es que, en cada punto, depende de la partícula a la que se la medimos. Dos partículas con distinta cantidad de magnitud escalar,  $e$  y  $e'$  (masa en los campos gravitatorios o carga en los eléctricos), requieren trabajos distintos para ser transportadas entre las mismas posiciones inicial y final.

La energía potencial no tiene un valor único en un punto, y no nos sirve por tanto para caracterizar unívocamente el campo conservativo. Este hecho se solventa con la introducción de una nueva magnitud física:

«El POTENCIAL ( $V$ ) en cada punto de un campo conservativo es, por definición, la energía potencial de la unidad de magnitud escalar».

$$V(x, y, z) = \frac{U(x, y, z)}{e}$$

con lo que cada punto  $P(x, y, z)$  posee un único valor del potencial.

Esta magnitud verifica una importante relación: por ser  $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$  y  $\mathbf{F} = -\text{grad } U$  tendremos:

$$\frac{\mathbf{F}}{e} = \frac{-\text{grad } U}{e} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\text{grad } V$$

«La intensidad de campo es, con signo cambiado, igual al gradiente de potencial».

### VII - 17. Campos de fuerzas centrales

Un caso particularmente importante de fuerzas conservativas es el de las fuerzas centrales cuyos módulos son los mismos si están aplicadas en puntos equidistantes del centro. Vamos a demostrar que, con esta condición, un campo de fuerzas centrales es conservativo.

Supongamos que movemos una partícula del punto 1 al 2, a lo largo de un camino  $M$  (Fig. VII-15), y luego volvemos a 1 por una trayectoria diferente  $N$ , en el interior de un campo de fuerzas centrales; al recorrer la partícula el camino intermedio  $dr_1$ , comprendido entre dos arcos de circunferencia centrados en  $O$  y de radios  $r$  y  $r + dr$ , cuando pasa de 1 a 2 por  $M$ , el trabajo realizado será:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 = F \text{ proy}_F dr_1 = F dr$$

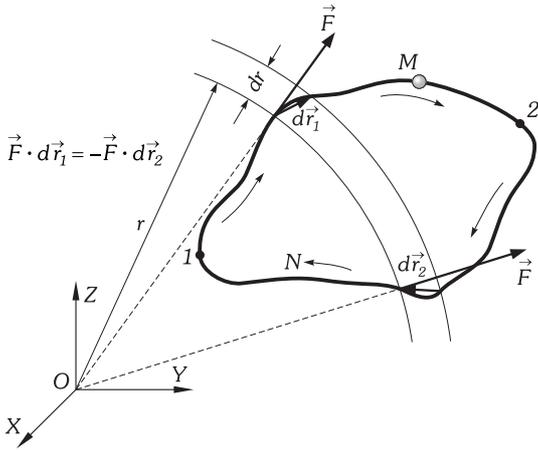


Fig. VII-15.- Un campo de fuerzas centrales con simetría esférica para los módulos de las fuerzas es conservativo.

En la vuelta, por el camino N, se realiza un trabajo de signo contrario al anterior, cuyo valor será:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2 = -F \text{ proy}_F dr_2 = -F dr$$

Sumando todos los trabajos elementales en toda la vuelta obtenemos:

$$W_{1M}^2 + W_{2N}^1 = \int_{1M}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{2N}^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

al verificarse esta ecuación, queda demostrado el teorema enunciado. Consecuencia de esto es que podemos aplicar a estos campos de fuerzas centrales las fórmulas y conceptos del párrafo anterior. En este caso de fuerzas centrales se incluyen las fuerzas gravitatorias, electrostáticas y de recuperación elástica.

**VII - 18. Expresión del teorema de Gauss para campos centrales newtonianos**

«Llamamos CAMPOS CENTRALES NEWTONIANOS a los campos centrales cuya intensidad varía con la inversa del cuadrado de la distancia al centro ( $1/r^2$ )».

Es decir, tienen la forma:

$$\mathbf{E} = \frac{C}{r^3} \mathbf{r}$$

En cada caso particular quedarán explicitadas en C las «FUENTES DEL CAMPO» (masas en el campo gravitatorio o cargas en el eléctrico).

Para formular el teorema de Gauss en estos casos recordaremos, en principio, el concepto de **ÁNGULO SÓLIDO\***: si tenemos un elemento de superficie,  $dA$ , y un punto P a distancia r de ella, como en la Fig. VII-16, se llama **ángulo sólido elemental**,  $d\omega$ , a la abertura espacial delimitada por los rayos que partiendo de P contornean  $dA$ , y se expresa como el cociente del área normal a r dividida por el cuadrado de la distancia, es decir:

$$d\omega = \frac{dA \cos \varphi}{r^2}$$

Si  $dA$  pertenece a una esfera, A, de radio R, centrada en P (Fig. VII-17), el ángulo  $\varphi$  es cero y el ángulo sólido abarcado por toda la esfera es:

$$\omega = \frac{1}{R^2} \oint_A dA = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi$$

Este valor es el máximo posible para un ángulo sólido y coincide con el subtendido por cualquier superficie cerrada  $A'$  que contenga al punto P, pues, como se aprecia en la Fig. VII-17, el ángulo sólido abarcado por  $dA$  es el mismo que el abarcado por  $dA'$ .

Calculemos en primer lugar el flujo a través de una superficie cerrada del vector campo creado por una fuente puntual exterior a dicha superficie. Si tenemos una fuente puntual e (Fig. VII-18) cualquier «pincel» de rayos de ángulo sólido  $d\omega$  que corte a A lo hará un número par de veces. El flujo a través de  $dA$  es entrante, negativo por ser  $\cos \varphi < 0$ , y a través de  $dA'$  saliente, positivo por ser  $\cos \varphi' > 0$ . La relación entre las áreas enfrentadas a e es:

$$\frac{dA' \cos \varphi'}{dA \cos \varphi} = \frac{r'^2}{r^2}$$

por ser dichas áreas proporcionales al cuadrado de su distancia a e. La relación entre las correspondientes intensidades de campo es:

$$\frac{E'}{E} = \frac{C/r'^2}{C/r^2} = \frac{r^2}{r'^2}$$

y la relación entre los valores absolutos de ambos flujos:

\* Capítulo I párrafos 10 y 14.

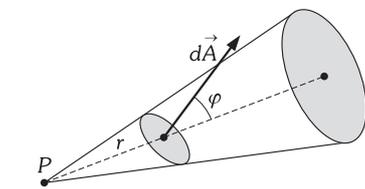


Fig. VII-16.- Concepto de ángulo sólido.

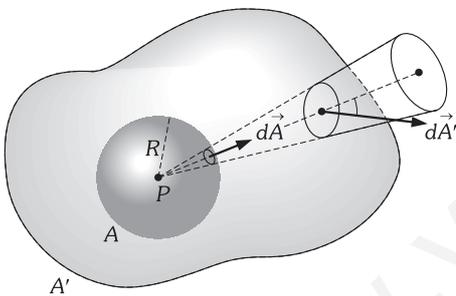


Fig. VII-17.- El ángulo sólido abarcado por toda la esfera A es  $4\pi$ , valor que es el máximo posible para un ángulo sólido, y coincide con el subtendido por cualquier superficie cerrada  $A'$  que contenga al punto P.

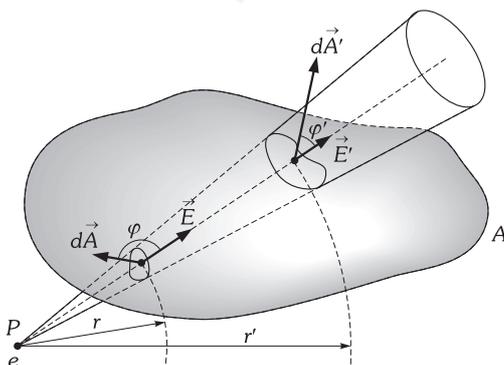


Fig. VII-18.- El flujo total del vector campo creado por una «fuente» exterior puntual e a través de la superficie cerrada A es nulo.

$$\frac{d\phi'}{d\phi} = \frac{E' dA' \cos \phi'}{E dA \cos \phi} = \frac{r^2}{r'^2} \frac{r'^2}{r^2} = 1$$

Con esto, el flujo neto a través de toda la superficie cerrada A del campo originado desde e será nulo por ser la suma de parejas del mismo valor absoluto y de signo opuesto.

Supongamos ahora que en el punto P, interior a la superficie cerrada A (Fig. VII-19) existe una fuente de campo e. El flujo de campo a través de A es:

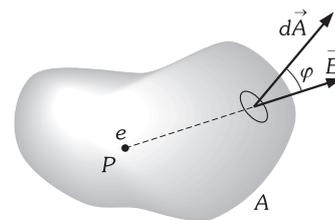


Fig. VII-19.- Si e es interior a A, el flujo a través de ella no es nulo.

$$\phi = \oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint_A E dA \cos \phi$$

y si el campo es newtoniano:

$$\phi = \oint_A \frac{C}{r^2} dA \cos \phi = C \oint_A d\omega = 4\pi C$$

Por otra parte, si la superficie A encierra n fuentes de campo, puesto que cada fuente subtien- de un ángulo sólido completo (4π), el flujo total será:

$$\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i = \sum_{i=1}^n \oint_A \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{A} = 4\pi \sum_{i=1}^n C_i \quad \wedge \quad \mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i$$

Podemos expresar en definitiva el teorema de Gauss para campos centrales newtonianos de la forma:

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 4\pi \sum_{i=1}^n C_i$$

Es importante remarcar que el valor de E en un punto de la superficie es producido por todas las fuentes de campo existentes, tanto interiores como exteriores a A, sin embargo el flujo depende exclusivamente de las fuentes encerradas en dicha superficie.

PROBLEMAS: 16 al 24.

### C) ENERGÍAS CINÉTICA Y POTENCIAL GRAVITATORIA. PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

#### VII - 19. Energía cinética de una partícula. Teorema de la energía cinética (o Teorema de las fuerzas vivas\*)

ENERGÍA CINÉTICA es una magnitud escalar que para una partícula de masa m que en un instante determinado posee una velocidad v toma el valor:

$$T = \frac{1}{2} mv^2$$

teniendo en cuenta que el producto escalar de un vector por sí mismo es igual al cuadrado de su módulo, podemos escribir el valor de T de la siguiente forma:

$$T = \frac{1}{2} m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

Su ecuación de dimensiones es: [T] = [m] [v<sup>2</sup>] = ML<sup>2</sup>T<sup>-2</sup>, que coincide con la ecuación de dimensiones de W, por lo que la energía cinética se mide en las mismas unidades que el trabajo.

Mediante una fuerza cualquiera, hacemos pasar a una partícula de la posición 1 a la posición 2, cambiándole su velocidad de v<sub>1</sub> a v<sub>2</sub>. Durante un tiempo elemental dt, el trabajo realizado para recorrer un camino elemental dr será: dW = F · dr, integrando a lo largo de todo el camino recorrido obtenemos:

$$W_1^2 = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \int_1^2 d\left(\frac{1}{2} mv^2\right)$$

ya que:

\* El concepto de energía comienza a tomar forma con Cristian Huygens (1629-1695), atribuyéndosele a Wilhem Leibniz (1646-1716) la expresión «fuerza viva» («vis viva»), cuyo valor mv<sup>2</sup> tiene las dimensiones de un trabajo, por tanto no es específicamente una fuerza, es exactamente el doble de lo que hoy llamamos energía cinética. Fue James V. Joule (1818-1886) el que logró establecer relaciones entre distintos tipos de energía profundizando en su significado.

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}md(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{2}m2\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$$

luego:

$$W_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = T_2 - T_1$$

«El trabajo realizado por la fuerza (variable o no) que produce o modifica el movimiento de una partícula, es igual a la variación de la energía cinética de ésta».

Puede ocurrir que las energías inicial y final coincidan, ello significa que las fuerzas han realizado un trabajo total nulo; teniendo en cuenta que  $dW$  puede ser positivo o negativo, la anulación de  $W$  no siempre exige que se anule  $dW$  en todos los puntos. Consideremos por ejemplo el trabajo realizado por un «Fórmula» en un circuito cerrado cuando éste, después de una vuelta, pasa por la meta con la misma velocidad con que ha salido de ella.

**PROBLEMAS: 25 al 34.**

**VII - 20. Trabajo realizado por el peso en puntos próximos a la superficie terrestre. Energía potencial gravitatoria en tales puntos**

El trabajo realizado por el peso  $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$  de una partícula que se desplaza sobre una trayectoria como indicamos en la Fig. VII-20, desde un punto  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  hasta el punto  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  de ella, con la condición de ser próximos a la superficie terrestre y para los que  $\mathbf{g}$  prácticamente no varía; se calcula teniendo en cuenta que en un punto intermedio  $P$ , el desplazamiento es  $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$  y como  $\mathbf{P} = -m\mathbf{g}\mathbf{k}$ , obtenemos:

$$W_1^2 = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_1}^{r_2} (-m\mathbf{g}\mathbf{k}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) = -mg \int_{z_1}^{z_2} dz = -mg \Delta z$$

En el caso de la Fig. VII-20 la partícula se mueve de abajo arriba y el trabajo resulta negativo; sin embargo si el movimiento lo hiciera de arriba abajo el trabajo del peso sería positivo ( $\Delta z$  para un cuerpo extenso es el cambio de altura de su centro de gravedad).

El vector intensidad del campo gravitatorio producido por la Tierra en un punto exterior a ella definido por el vector  $\mathbf{r}$  es  $\mathbf{g} = -GM_0\mathbf{r}/r^3$  (párrafo VI-1) y en puntos próximos a su superficie  $g = GM_0/R_0^2 = 9,8 \text{ m/s}^2$ ; en cualquier caso se trata de un campo central newtoniano conservativo luego:

$$U_1 - U_2 = \int_{r_1}^{r_2} m\mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = -mg \Delta z = mg(z_1 - z_2)$$

Tomando la energía potencial cero en el plano  $OXY$  y llamando  $h$  a la coordenada  $z$ , para cualquiera que sea el punto en donde situamos la partícula podemos decir que LA ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA que posee es:

$$U = mgh$$

**PROBLEMAS: 35 al 39.**

**VII - 21. Teorema de conservación de la energía mecánica total de una partícula en un campo de fuerzas conservativo**

El trabajo realizado sobre una partícula por una fuerza  $\mathbf{F}$  cuando se traslada del punto 1 al 2 es por definición:

$$W_1^2 = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

y por transformaciones ya conocidas, obtenemos:

$$W_1^2 = T_2 - T_1 \quad (\text{TEOREMA DE LAS FUERZAS VIVAS}) \quad (4)$$

Si  $\mathbf{F}$  es una fuerza conservativa, entonces el trabajo realizado para el transporte de una partícula de 1 a 2 es:

$$W_1^2 = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U_1 - U_2$$

independiente de los caminos intermedios. Si igualamos con (4) nos quedará:

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2 \Rightarrow T_1 + U_1 = T_2 + U_2$$

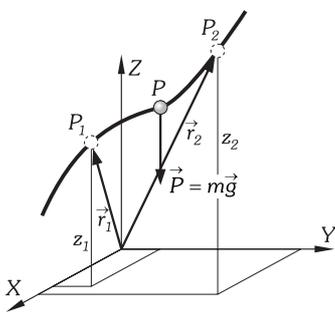


Fig. VII-20.- El trabajo realizado por el peso sobre una partícula que se desplaza sobre una trayectoria es igual al peso por la variación de altura, que será positiva cuando el cuerpo baja hacia la superficie de la Tierra y negativa cuando sube, que es el caso de esta figura.

expresión que podemos generalizar poniendo:

$$E = T + U = cte \tag{5}$$

que expresa la LEY DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA DE UNA PARTÍCULA EN UN CAMPO CONSERVATIVO. La magnitud  $E$ , suma de la energía cinética más la potencial la llamaremos ENERGÍA MECÁNICA TOTAL DE LA PARTÍCULA en un campo conservativo.

Para una partícula en su «vuelo» en el campo gravitatorio terrestre (Fig. VII-21), en puntos próximos a su superficie ( $h \ll R_0$ ), la cual tomamos de energía potencial nula pudiendo considerarla como plana, se conservará la energía mecánica total de la partícula, pudiéndose escribir:

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2$$

Para el caso del lanzamiento vertical y hacia arriba de una partícula de masa  $m$  con velocidad  $v_0$ , los valores de su energía cinética y potencial en función del tiempo, serán:

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}M(v_0 - gt)^2 \qquad U = Mgh = Mg\left(h_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2\right)$$

y su energía mecánica total:  $E = T + U$ . El diagrama de estas energías en función del tiempo es el representado en la Fig. VII-22 en la que observamos que: 1) Cuando el cuerpo está subiendo, su velocidad disminuye y también su energía cinética; simultáneamente aumenta su energía potencial. La energía cinética se hace cero en la cúspide de la trayectoria; en tal momento la energía potencial es máxima. 2) La energía potencial no es cero al principio porque se ha tomado el punto de lanzamiento a determinada altura ( $h_0$ ) sobre el nivel que arbitrariamente tomamos como cero. 3) Cuando el cuerpo cae, su energía potencial para un determinado instante, se anula y, a partir de él, se hace negativa, mientras que la energía cinética aumenta por encima de la energía total.

Este teorema de conservación de la energía mecánica es un caso particular del que llamaremos PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA que enunciaremos en párrafos siguientes, y como tal principio, sólo es verificable por la experiencia, siendo éste uno de los hechos más notables de la Física.

**PROBLEMAS: 40 al 53.**

**VII - 22. Gráficas de energía potencial**

El conocimiento de la energía potencial de un cuerpo en un campo de fuerzas conservativo, nos permite en muchos casos obtener de forma sencilla la ecuación de movimiento del cuerpo y, en consecuencia, toda la información dinámica que nos pueda interesar. Efectivamente; supongamos una partícula de masa  $m$  con una trayectoria que, por simplificar, consideraremos recta (movimiento unidimensional). La energía potencial será una función del tipo  $U(x)$ , y si la única fuerza que actúa sobre  $m$  es la del campo, llamando  $E$  a la energía total de la partícula, tendremos:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) = cte \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]} \tag{6}$$

Separando variables e integrando:

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}} = \int_0^t dt = t$$

de donde podemos obtener  $x(t)$  y tener resuelto el problema.

Existen, sin embargo, casos en que la integral del primer miembro es difícil de resolver. Entonces, aún es posible obtener información abundante del movimiento de la partícula, a partir de la gráfica de la energía potencial\*. Representemos en un sistema de coordenadas la posición en el eje de abscisas y la energía en el de ordenadas, y supongamos que la gráfica de  $U(x)$  es la de la Fig. VII-23.

Podemos en primer lugar averiguar en qué zonas, la partícula, tendrá aceleración positiva (sentido de  $x$  crecientes), negativa o nula. En efecto: la relación  $F = -\nabla U$ , en el caso unidimensional se escribe:

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

es decir:

$$T + U = cte \Leftrightarrow T_1 + U_1 = T_2 + U_2 = \dots$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \qquad U = mgh$$

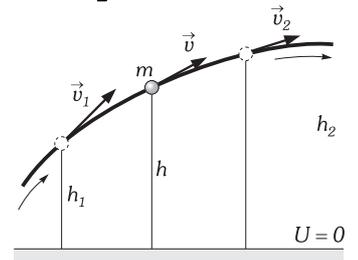


Fig. VII-21.- Movimiento de una partícula de masa  $m$  en el interior del campo gravitatorio terrestre y en puntos próximos a su superficie, que tomamos de energía potencial cero pudiendo considerarla como plana.

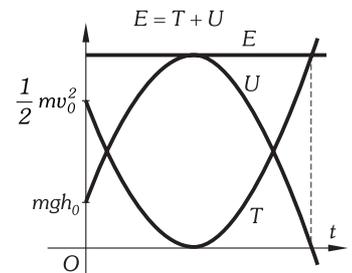


Fig. VII-22.- Diagrama en función del tiempo de las energías cinética, potencial y total del lanzamiento vertical y hacia arriba de una partícula con velocidad inicial  $v_0$ .

\* Y aunque se pueda hacer la integral, el diagrama  $U(x)$  es siempre de gran utilidad en el estudio dinámico de la partícula.

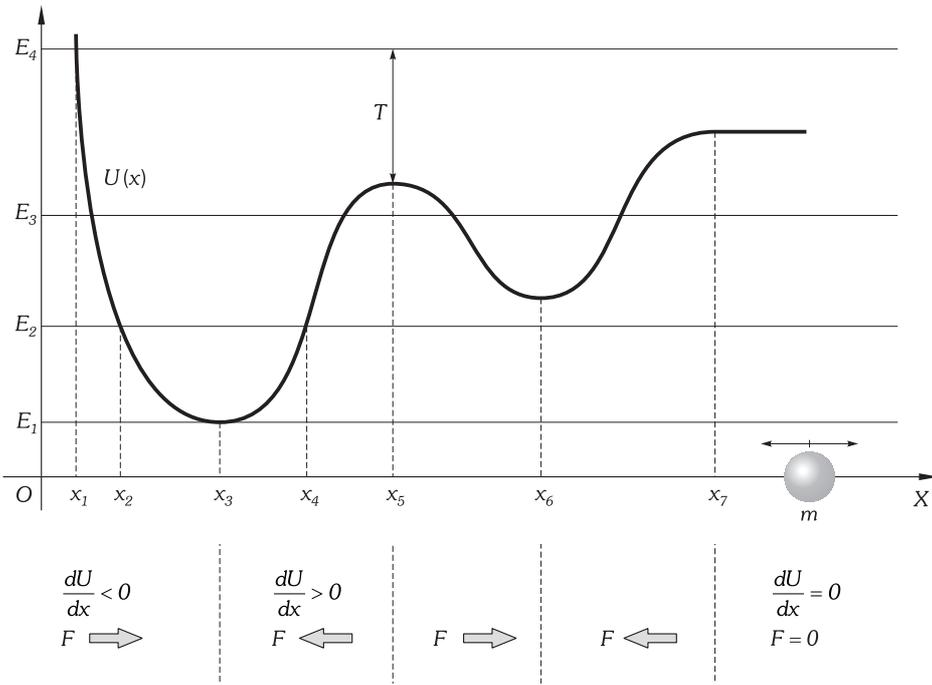


Fig. VII-23.- Las líneas horizontales representan la energía total  $E$  que es constante; se representan cuatro valores diferentes  $E_1, E_2, E_3$  y  $E_4$ , dependiendo éstos de las condiciones iniciales en el movimiento de la partícula. En cualquier caso tiene que verificarse que  $E \geq U(x)$ , si esto no fuera cierto, en la ecuación (6) la velocidad sería imaginaria, lo que no tiene sentido físico.

«La fuerza que actúa sobre la partícula en un punto es igual a menos la pendiente de la curva de energía potencial».

En las zonas en que  $U(x)$  es creciente su primera derivada es positiva y, por tanto  $F$  negativa (hacia la izquierda); es el caso de posiciones tales que  $x_3 < x < x_5$  ó  $x_6 < x < x_7$  de la figura. Si la función  $U(x)$  es decreciente,  $F$  resulta positiva, como en  $x < x_3$  ó  $x_5 < x < x_6$ . En puntos tales como  $x_3, x_5, x_6$ , ó  $x \geq x_7$ , la pendiente de  $U(x)$  es cero, y por tanto en ellos la fuerza que actúa sobre la partícula es nula, son puntos de EQUILIBRIO; si colocamos  $m$  en  $x_3$  con velocidad nula se queda allí sin moverse. Este equilibrio es de tres tipos, que llamaremos: EQUILIBRIO ESTABLE, cuando al desplazar la partícula a izquierda o derecha, la fuerza que el campo ejerce sobre ella tiende a volverla a la posición de equilibrio original (es el caso de  $x = x_3$  y  $x = x_6$ ); EQUILIBRIO INESTABLE, cuando al producir el mencionado desplazamiento la fuerza del campo aleja a la partícula de la posición de equilibrio (caso  $x = x_5$ ), y EQUILIBRIO INDIFFERENTE cuando el resultado de un pequeño desplazamiento es una nueva posición de equilibrio (caso  $x > x_7$ ).

Como se aprecia en la figura, los tres equilibrios mencionados corresponden a mínimos, máximos o zonas de valor constante, respectivamente, de la energía potencial. Y podemos enunciar que:

«La fuerza que el campo ejerce sobre una partícula en un punto va dirigida siempre hacia posiciones de menor energía potencial».

Analicemos ahora las zonas en que puede moverse la partícula en función de su energía total. Supongamos que colocamos a  $m$  en la posición  $x_5$  y le damos una velocidad hacia la izquierda tal que su energía total es  $E_4$ , es decir, tal que  $T = E_4 - U(x_5)$ . La partícula será acelerada desde  $x_5$  hasta  $x_3$  y se verá frenada de  $x_3$  hacia la izquierda. Al llegar a  $x_1$  sus energías potencial y total son iguales, con lo que posee  $T = 0$ , o sea, se para en  $x_1$  y el campo la devuelve hacia la derecha, sentido en el que seguirá indefinidamente. El punto  $x_1$ , con energía  $E_4$ , es un PUNTO DE RETROCESO que la partícula no puede superar; continuar a la izquierda de  $x_1$  supondría tener  $U > E$  y por tanto  $T < 0$ , lo que no tiene sentido físico por corresponder a una velocidad imaginaria.

Si la energía total de  $m$  es  $E_3$  tiene dos posibles zonas donde moverse, y el que lo haga en una o en otra depende de la posición inicial en que la coloquemos; pero una vez colocada en una de ellas no podrá pasar a la otra, ya que entre ambas existe una BARRERA DE POTENCIAL, que corresponde a un salto de energía  $U(x_5) - E_3$ , inaccesible para  $m$  si no recibe acciones exteriores ajenas al campo.

Cuando la energía total de la partícula es  $E_2$  su movimiento está restringido a valores de  $x$  tales que  $x_2 \leq x \leq x_4$ . Las posiciones  $x_2$  y  $x_4$  son puntos de retroceso, de velocidad nula, y posee velocidad máxima en  $x_3$  donde  $U$  es mínima.

Con energía total  $E_1$  sólo puede estar en  $x_3$  y en reposo, y con  $E < E_1$  no puede existir la partícula en el campo descrito por  $U(x)$ .

**PROBLEMAS: 54 al 58.**

**VII - 23. Las leyes de conservación. Principio de conservación de la energía**

Las leyes que en Física tienen máximo interés son las LEYES DE CONSERVACIÓN, que enuncian las condiciones en las que una determinada magnitud física (masa, carga, ...) permanece constante en el transcurso de un fenómeno. Entre ellas están las referidas a la conservación de la masa y de la energía, que fueron agrupadas por Einstein en una sola que se refiere a la conservación, en un sistema aislado, del conjunto de ambas magnitudes, y las que se refieren a la conservación del momento lineal y angular. Estas dos últimas han sido ya enunciadas, para la partícula en temas anteriores y serán enunciadas para los sistemas de partículas en forma de teoremas de conservación obtenidos como consecuencia del segundo principio de Newton; sin embargo, en situaciones en

las que las leyes de Newton no son aplicables (como son los fenómenos a escala atómica), tanto ellas como las de la energía o la carga eléctrica se verifican en todas las experiencias realizadas. Son, según parece, las que gobiernan todos los procesos del Universo, por este motivo se las considera más básicas que las leyes de Newton.

Hablaremos de SISTEMAS AISLADOS, entendiendo como tales una cantidad de materia definida, limitada por una superficie real (las paredes de una habitación) o imaginaria (porción de líquido de un depósito que en Física llamaremos «parcialmente solidificado») y con la condición de que no esté sometido a fuerzas exteriores ni exista flujo neto de materia o energía a través de la superficie límite.

Antoine Lavoisier (1743-1794) después de numerosos experimentos realizados con «sistemas aislados» poniendo gran cuidado de que no existiera intercambios hacia el sistema o desde el sistema hacia el exterior, y produciendo en el interior de ellos reacciones químicas (transformaciones de la materia, combustiones, etc.) enunció EL PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA MASA que tiene su nombre (LEY DE LAVOISIER) y que dice: «En una reacción química cualquiera, la suma total de las masas de las sustancias que intervienen en ella permanece siempre constante»; enunciado con otras palabras:

«La masa total de un sistema aislado es constante independientemente del tiempo».

Tomando como axioma que «El Universo es un sistema aislado», podemos generalizar este principio diciendo: «la masa total del Universo es constante independientemente del tiempo».

El principio de conservación de la energía se enuncia:

«La energía de un sistema aislado es constante con el tiempo».

Este principio es verificable por la experiencia en infinidad de casos, cualesquiera que sean las fuerzas que actúen en su interior, y sean o no conservativas, en las transformaciones de energía de una forma en otra la cantidad total permanece constante. Considerando que el Universo es un sistema aislado, se puede afirmar que: «La energía total del Universo se mantiene constante».

Einstein, con su ecuación  $E = mc^2$ , redujo los dos principios enunciados a uno sólo, el de «CONSERVACIÓN DE LA MASA-ENERGÍA» (capítulo XXVII), que se puede expresar de la forma:

«En un sistema aislado la suma de la masa y la energía permanece constante en el tiempo».

## VII – 24. Fuerzas disipativas (no conservativas). Energía no mecánica

Como ya se ha dicho una fuerza es conservativa si:

$$\oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

En la naturaleza existen fuerzas que no cumplen con esta condición, o lo que es lo mismo, el trabajo realizado por ellas depende de la trayectoria seguida; a tales fuerzas se les llaman DISIPATIVAS o no conservativas, para ellas escribiremos:

$$\oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$$

«Si partimos de un estado inicial y llegamos al mismo estado final, el trabajo de las fuerzas disipativas que actúan sobre el sistema no es nulo».

Vimos en el párrafo VII-20 que el trabajo total de todo tipo de fuerzas que actúan sobre un sistema de partículas se emplea en la variación de su energía cinética; entonces clasificábamos las fuerzas actuantes en conservativas y no conservativas. Llamando  $W_c$  y  $W_{nc}$  a los trabajos realizados por las fuerzas conservativas y no conservativas podemos escribir el teorema de las fuerzas vivas para la partícula:

$$W = W_c + W_{nc} = \Delta T$$

Al trabajo de las fuerzas conservativas le podemos asociar la correspondiente energía potencial mediante la expresión:  $W_c = -\Delta U$

Si llamamos ENERGÍA MECÁNICA TOTAL DE LA PARTÍCULA,  $E$ , a la suma de sus energías cinética y potenciales:

$$E = T + U$$

de las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\begin{array}{l} W_c + W_{nc} = \Delta T \\ W_c = -\Delta U \end{array} \quad \left| \quad -\Delta U + W_{nc} = \Delta T \quad \Rightarrow \quad W_{nc} = \Delta T + \Delta U = \Delta(T + U) \quad \Rightarrow \quad W_{nc} = \Delta E \right.$$

«El trabajo de las fuerzas no conservativas es igual al incremento de la energía mecánica total de la partícula».

La fuerza de rozamiento siempre se opone a la velocidad y en los fluidos depende de ella, por tanto su trabajo depende de la trayectoria seguida y aunque ésta sea cerrada, el trabajo no es nulo. Si la única fuerza no conservativa que actúa es la de rozamiento, se verifica:

$$W_R = (T + U) - (T_0 + U_0) \quad \text{con } W_R < 0$$

Considerando solamente el valor absoluto del trabajo de la fuerza de rozamiento, podemos poner:

$$T_0 + U_0 = T + U + |W_R|$$

El trabajo de la fuerza de rozamiento existente en una situación dinámica, disminuye siempre la energía mecánica total y aparece siempre calor; más adelante veremos que este calor es también una forma de energía y que éste no es totalmente recuperable en cualquiera de las formas de energía mecánica (lo que determina el segundo principio de la Termodinámica).

A un generador de electricidad hay que comunicarle energía mecánica, la cual no se almacena en forma de energía potencial, en vez de ello el generador suministra corriente eléctrica a un circuito, decimos que aparece una cantidad de energía eléctrica.

Un tercer ejemplo de desaparición de energía mecánica, es cuando chocan con gran velocidad (alta energía) dos protones, produciéndose una nueva partícula, el mesón  $\pi$ , disminuyendo la energía cinética total del sistema.

En los tres ejemplos vistos no se conserva la energía mecánica total, pero medida en el primero la energía calorífica, en el segundo la energía eléctrica y en el tercero la masa  $m$  de la nueva partícula, equivalente a una energía  $E = mc^2$  (ecuación de Einstein), coinciden siempre con la cantidad de energía mecánica desaparecida en los tres procesos que hemos planteado.

**PROBLEMAS: 59 al 78.**

## VII – 25. Rendimiento de una máquina

Para que una máquina funcione es necesario comunicarle energía (eléctrica, térmica, atómica...); por efecto del rozamiento, parte de esa energía comunicada se transforma en calor aumentando la energía térmica de sus componentes y del ambiente, decimos que «parte de la energía comunicada se ha disipado». Como veremos más adelante es imposible la *máquina ideal* en que toda la energía comunicada se transforme íntegramente en energía realizada y siempre ocurren las pérdidas antes dichas.

Llamaremos:

«RENDIMIENTO ( $\eta$ ) de una máquina al cociente entre el trabajo que realiza (o útil:  $W_u$ ) en un intervalo de tiempo determinado y el trabajo consumido (o motor:  $W_m$ ) durante el mismo intervalo de tiempo».

y teniendo en cuenta la definición dada de potencia de una máquina podemos poner:

$$\eta = \frac{W_u}{W_m} = \frac{P_u}{P_m} \quad (0 < \eta < 1)$$

que es siempre menor que la unidad debido a que las pérdidas de energía ya indicadas implican:  $W_u < W_m$ . Si multiplicamos por 100 el rendimiento  $\eta$  obtenemos el «tanto por ciento» de la energía utilizada respecto a la comunicada a la máquina.

**PROBLEMAS: 79 al 83.**

## D) ENERGÍA EN LOS OSCILADORES. RESONANCIA

### VII – 26. Trabajo efectuado por una fuerza elástica. Energía potencial del sistema masa-muelle

Hemos visto que la fuerza que actúa sobre una partícula que oscila con un MAS en el extremo de un resorte es proporcional al desplazamiento y opuesta a él (Ley de Hooke:  $F = -Kx$ ) y está dirigida hacia la posición de equilibrio  $O$  (origen de elongaciones Fig. VII-24), es, por tanto un CAMPO UNIDIMENSIONAL DE FUERZAS CENTRALES en el que el módulo de las fuerzas (dos) en puntos equidistantes a  $O$  son iguales, luego es CONSERVATIVO.

Para hacer recorrer a una partícula enganchada al extremo libre un camino infinitesimal  $dx$  (Fig. VII-24) tendrá que hacerse una fuerza  $F = Kx$  (igual y de sentido contrario a la reacción del resorte  $-Kx$ ); el trabajo realizado por esta fuerza será:

$$dW = F dx = Kx dx$$

El trabajo realizado para estirar el extremo libre desde la posición inicial  $x_i$ , hasta una posición final  $x_f$  (siempre que no se produzca una deformación permanente del muelle) es la suma (integral) de todos los trabajos elementales realizados en tal proceso:

$$W_{x_i}^{x_f} = \int_{x_i}^{x_f} F dx = \int_{x_i}^{x_f} Kx dx = \frac{1}{2} Kx_f^2 - \frac{1}{2} Kx_i^2$$

En el caso de que llevemos al extremo libre desde su posición natural  $x_i = 0$ , hasta una posición final  $x_f = x$ , el trabajo realizado por la fuerza aplicada valdrá:

$$W_0^x = \frac{1}{2} Kx^2$$

La fuerza elástica que el muelle ejerce sobre la partícula  $F_m$  es igual que la que hemos empleado pero de signo contrario, en consecuencia

$$W_m = \int_0^x F_m dx = - \int_0^x Kx dx = - \frac{1}{2} Kx^2$$

siendo ésta conservativa, y tomando en la posición de equilibrio la energía potencial nula  $U(0) = 0$ , en la posición  $x$ , la partícula tendrá una energía potencial:

$$W_m = U(0) - U(x) = - \frac{1}{2} Kx^2 \Rightarrow U(x) = \frac{1}{2} Kx^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

Teniendo en cuenta el valor de  $x$  para un MAS, la variación de la energía potencial en función del tiempo será:

$$U(t) = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \text{sen}^2(\omega t + \varphi)$$

En la Fig. VI-13 del oscilador masa-muelle vertical, si se toma como energía potencial cero en el punto  $O$  (a) entonces  $U_m(O) = 0$  e  $y = 0$  y en una posición de oscilación (c) la energía potencial será  $Ky^2/2$ . Hacemos el mismo cambio de sistema de referencia que hacíamos en el párrafo VI-8 referente a tal figura, es decir: tomamos el referencial de energía potencial cero en la posición de equilibrio  $O'$  (b), en este caso la energía potencial del muelle toma el valor:

$$U_m = \frac{1}{2} K(y' + y_0)^2 - \frac{1}{2} Ky_0^2 \quad \left| \begin{array}{l} k = \frac{mg}{y_0} \Rightarrow ky_0 = mg \\ \Rightarrow U_m = \frac{1}{2} Ky'^2 + mgy' \end{array} \right.$$

siendo la energía potencial gravitatoria respecto a  $O'$ :  $U_g = -mgy'$ , nos queda para la energía potencial total del sistema masa-muelle:

$$U = U_m + U_g = \frac{1}{2} ky'^2$$

«En un sistema masa-muelle vertical, para la medida de su energía potencial, se prescinde de la influencia gravitatoria si tomamos energía potencial cero en su posición de equilibrio».

**VII - 27. Energía mecánica de una partícula que posee movimiento vibratorio armónico simple. Intensidad**

LA ENERGÍA CINÉTICA de un punto material de masa  $m$  que oscila con MAS es:

$$T(x) = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2) \Leftrightarrow T(x) = \frac{1}{2} K(A^2 - x^2) \quad (7)$$

La energía cinética es máxima cuando la velocidad es máxima  $[\cos(\omega t + \varphi) = 1]$  es decir, cuando el móvil pasa por su posición de equilibrio; su valor es, entonces:

$$T = \frac{1}{2} mA^2\omega^2$$

Como:  $x = A \text{sen}(\omega t + \varphi)$ , LA ENERGÍA POTENCIAL de la partícula de masa  $m$  que oscila con un MAS es:

$$U(x) = \frac{1}{2} Kx^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \text{sen}^2(\omega t + \varphi) \quad (8)$$

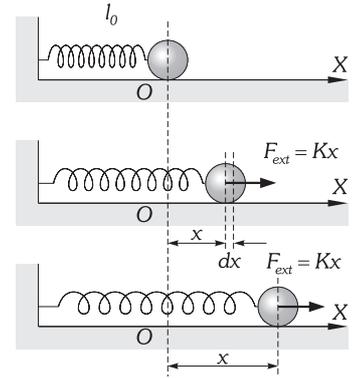


Fig. VII-24.- Trabajo realizado por una fuerza externa que estira a un muelle.

$$T = \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 \cos^2 (\omega t + \varphi)$$

$$U = \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 \sin^2 (\omega t + \varphi)$$

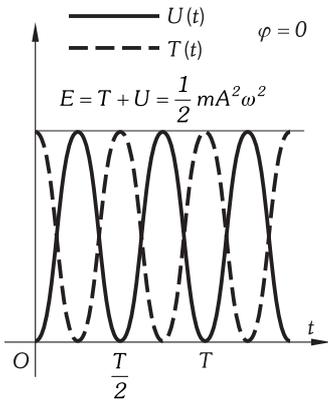


Fig. VII-25.- Representación gráfica de las energías cinética y potencial con el tiempo para un MAS.

Siendo la fuerza que actúa sobre la partícula en un MAS conservativa  $T + U = cte$ ; para este caso y empleando (7) y (8) se llega a la misma conclusión, en efecto.

LA ENERGÍA TOTAL, suma de la cinética y la potencial es, en cualquier punto del trayecto:

$$E = T + U = \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 \cos^2 (\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 \sin^2 (\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \boxed{E = \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 = cte} \quad \text{c.q.d.}$$

En la Fig. VII-25 representamos las energías cinética y potencial (en ordenadas) con el tiempo (en abscisas), en donde se ha tomado  $\varphi = 0$ . Obsérvese que tanto  $T$  como  $U$  son positivos, su suma en cualquier instante es constante igual a  $\frac{1}{2} mA^2 \omega^2$ , y varían periódicamente con doble frecuencia que la elongación, es decir, en cada período hay dos transformaciones completas de energía cinética en potencial y viceversa.

En la Fig. VII-26 representamos la función energía potencial  $U$  y cinética  $T$  en función de la elongación, para una partícula de masa  $m$  que posee un MAS. La energía total  $E$  la representamos por una línea horizontal. En los puntos de retorno  $x = A$  y  $x = -A$ , la partícula se detiene e invierte su movimiento.

Se llama INTENSIDAD del MAS a la energía cinética media en un período.

$$I = \langle E_c \rangle$$

(en la que  $E_c$  es la energía cinética, a la que no llamamos  $T$  en esta ocasión para no confundirla con el período). Se calcula mediante la expresión:

$$I = \langle E_c \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E_c dt$$

o más sencillamente, de la Fig. VII-26, teniendo en cuenta que los valores medios de  $E_c$  y  $U$  son iguales y su suma igual a la energía total  $E = cte$ :

$$\langle E_c \rangle = \langle U \rangle = \frac{1}{2} \langle E \rangle \Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{4} mA^2 \omega^2}$$

y resulta proporcional a  $\omega^2$  y  $A^2$ . Estos valores promedios de las energías resultan de gran interés, puesto que en los fenómenos físicos atómicos las frecuencias son tan altas que el tiempo que invertimos en una medida es muchas veces mayor que el período  $T$ .

**PROBLEMAS: 84 al 92.**

**VII - 28. Péndulo matemático o simple**

PÉNDULO MATEMÁTICO es un punto material que oscila suspendido en un hilo inextensible y sin peso.

El péndulo matemático o simple es puramente ideal, por no poderse cumplir exactamente las condiciones de su definición.

Apartamos la partícula  $m$  de su posición de equilibrio (Fig. VII-27) y vuelve a ella, por la tendencia de los cuerpos a adquirir la mínima energía potencial. Rebasa la posición  $A$ , por inercia (tendencia a seguir con el movimiento adquirido), y llega a una posición  $C$ , a la misma altura que la  $B$ , de la que partió, puesto que la energía potencial en  $B$  con respecto a un plano horizontal que pasa por  $A$  ( $mgh$ ), se ha transformado en cinética en  $A$  ( $mv^2/2$ ), y ésta, a su vez, en potencial en  $C$  ( $mgh'$ ); siendo las tres iguales ( $T_A + U_A = T_B + U_B = T_C + U_C \wedge T_B = T_C = U_A = 0$ ) se verifica:

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 = mgh' \Rightarrow h = h'$$

Por las mismas causas, de  $C$  pasa a  $A$  y luego a  $B$ . Si no existiera rozamiento, el movimiento oscilatorio continuaría indefinidamente.

La fuerza que actúa sobre la partícula es su peso, al que podemos considerar descompuesto en dos fuerzas: una  $F'$  en la dirección del hilo, al que mantiene tirante y que es anulada por la reacción del punto fijo; y la  $F$ , tangente a la trayectoria, productora del movimiento, y cuyo valor es:  $F = -mg \sin \theta$ , siendo  $\theta$  igual al ángulo que forma el hilo con la vertical. El signo menos indica que la fuerza es de sentido contrario al desplazamiento angular. La fuerza  $F$  es, pues, variable, dependiendo de los diversos valores de  $\theta$ , el movimiento, en consecuencia, es de aceleración variable con el tiempo.

Considerando ángulos pequeños, podemos escribir la fórmula de la fuerza productora del movimiento:  $F = -mg \theta$ , confundiendo el seno con el ángulo expresado en radianes. Pero siendo:  $\theta = x/l$  obtenemos por sustitución:

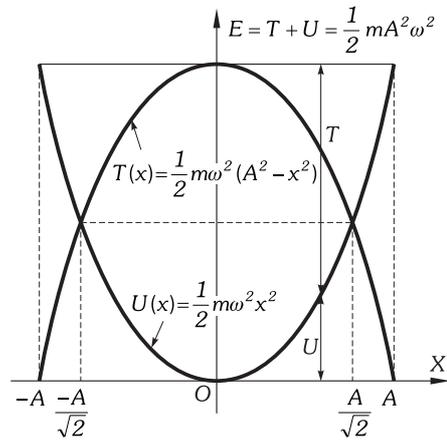


Fig. VII-26.- Representación gráfica de la energía potencial  $U$  y cinética  $T$  en función de la elongación  $x$ , para una partícula de masa  $m$  que tiene un MAS.

$$F = ma \Rightarrow -\frac{mg}{l}x = m\ddot{x} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0$$

el movimiento es por consiguiente un MAS, en el que:

$$\omega^2 = \frac{g}{l} = \frac{4\pi^2}{T^2} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Este valor del período obtenido confundiendo el seno con el ángulo, difiere en menos de un 0,5% del valor correcto, cuando el ángulo, a un lado y otro de la posición de equilibrio, no rebasa los 15°, es del 0,8% para 20° y aumenta rápidamente a partir de estos valores.

Si A es la amplitud del movimiento (máximo arco, contado a partir de la posición de equilibrio), la ecuación del movimiento es:

$$x(t) = A \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{g}{l}} t + \varphi \right)$$

PROBLEMAS: 93 al 99.

### VII - 29. Vibraciones forzadas

Hemos analizado, hasta ahora, las oscilaciones naturales (propias) de un cuerpo, o lo que es lo mismo, aquellas que se producen cuando el cuerpo es sacado de su posición de equilibrio y se suelta, produciéndose oscilaciones libres (en condiciones ideales), y oscilaciones amortiguadas en presencia de las fuerzas de fricción proporcionales a su velocidad. Nos proponemos ahora estudiar el caso en que el oscilador está sometido, además, a una fuerza periódica externa; el trabajo que realiza dicha fuerza externa sobre el sistema aporta una energía desde el exterior, impidiendo que las oscilaciones se amortigüen a pesar de las fuerzas de rozamiento. A las oscilaciones resultantes las llamaremos OSCILACIONES FORZADAS. (Así por ejemplo: un niño en un columpio es un péndulo que posee una determinada frecuencia propia, si es empujado a intervalos de tiempo adecuados, puede hacerse que el columpio se mueva con gran amplitud. También son ejemplo, las vibraciones de un puente por la influencia de los soldados que marchan por él al ser golpeado por sus botas al unísono, y las vibraciones del chasis de un motor debidas a los impulsos periódicos de una irregularidad en su eje).

Supongamos un cuerpo al que apartamos de su posición de equilibrio y está sometido a las siguientes fuerzas dirigidas sobre el eje OX: Fuerza recuperadora = -Kx. Fuerza de rozamiento de tipo viscoso = -Rv. Fuerza exterior periódica y variable armónicamente, según la ecuación:  $F = F_0 \cos \omega t$  en la que  $F_0$  es el máximo valor de la fuerza y  $\omega = 2\pi/T = 2\pi \nu$ ; siendo T y  $\nu$  el período y la frecuencia de variación de tal fuerza. La ecuación fundamental de la dinámica nos determina:

$$-Kx - Rv + F_0 \cos \omega t = ma \Rightarrow F_0 \cos \omega t = m \frac{d^2x}{dt^2} + R \frac{dx}{dt} + Kx \Leftrightarrow F_0 \cos \omega t = m\ddot{x} + R\dot{x} + Kx \quad (9)$$

El primer miembro de esta ecuación diferencial es una función armónica del tiempo, cada uno de los términos del segundo habrá de serlo y como m, R y K son constantes, la solución es del tipo\*:

$$x = A \cos(\omega t - \varphi) \quad (10)$$

en la que A y  $\varphi$  son constantes a determinar en función de las características del problema (K, R,  $F_0$  y  $\omega$ ). Comparando esta última expresión con la ecuación de la fuerza impulsora, vemos que tanto x como F oscilan con la misma frecuencia  $\omega$  pero con diferencia de fase  $\varphi$ . Hallemos la primera y segunda derivada de x con respecto a t:

$$v = \dot{x} = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) = A\omega \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad a = \ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t - \varphi)$$

Sustituyendo el valor de x y sus derivadas en la ecuación diferencial (9) obtenemos:

$$F_0 \cos \omega t = A(K - m\omega^2) \cos(\omega t - \varphi) + A R \omega \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Realicemos con esta expresión la construcción de Fresnel. Las proyecciones sobre el eje X de los dos vectores componentes nos determinan los dos términos del último miembro de la ecuación anterior, la proyección de la resultante es el primer miembro de tal ecuación. De la Fig. VII-29 obtenemos:

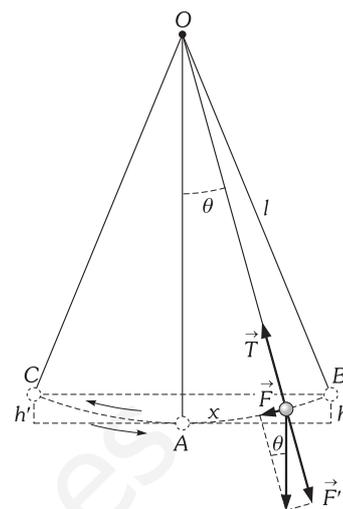


Fig. VII-27.- El péndulo simple oscila con MAS en torno a la posición de equilibrio para pequeñas oscilaciones. La tensión T y el peso mg son las fuerzas que actúan sobre la partícula, la T no realiza trabajo puesto que es perpendicular a la trayectoria A → B → A → C → A ..., luego la única que realiza trabajo es mg, que es conservativa, verificándose en cualquiera que sean los puntos de la trayectoria que T + U = cte.

\* Las funciones armónicas que podríamos escoger libremente son:  $x = A \operatorname{sen}(\omega t \pm \varphi)$ .

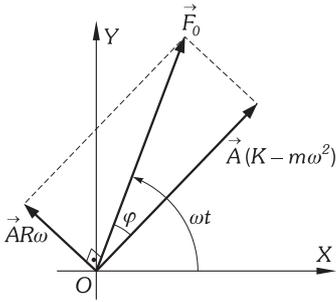


Fig. VII-28.- Construcción de Fresnel.

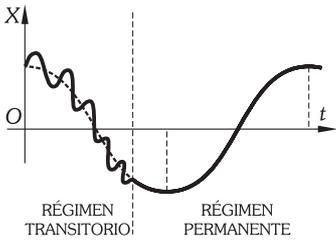


Fig. VII-29.- Variación de x con t en un movimiento vibratorio forzado y con amortiguamiento.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R\omega}{K - m\omega^2} = \frac{R\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$F_0^2 = A^2 [(R\omega)^2 + (K - m\omega^2)^2] \Rightarrow A = \frac{F_0}{\sqrt{(R\omega)^2 + (K - m\omega^2)^2}} = \frac{F_0}{\sqrt{R^2\omega^2 + m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \quad (11)$$

en las que  $\omega_0 = \sqrt{K/m}$  es la FRECUENCIA PROPIA o NATURAL del oscilador libre (sin fuerza externa). El término  $z = \sqrt{R^2 + (K/\omega - m\omega)^2}$  se denomina IMPEDANCIA MECÁNICA del oscilador. Estas ecuaciones nos resuelven el problema de determinar el desfase y la amplitud de las vibraciones forzadas en función de las características del oscilador y de la fuerza periódica aplicada. Obsérvese que el sistema vibra con la frecuencia de la fuerza impulsora y no con la frecuencia propia del oscilador, resultando un movimiento en el que la amplitud de la oscilación no disminuye.

El movimiento en realidad consta de dos fases (Fig. VII-29), en la primera, (régimen transitorio), el efecto del amortiguamiento es apreciable, pero por decaer este con el tiempo, se pasa a una segunda fase (régimen permanente), que es la analizada hasta aquí y a la que nos referiremos en adelante.

### VII - 30. Fenómenos de resonancia

La expresión (11), indica que la amplitud del oscilador amortiguado y forzado, para un valor dado de  $F_0$ , depende de la frecuencia de la fuerza impulsora externa. Cuando el valor de la amplitud sea máximo diremos que existe resonancia en la amplitud.

«Un sistema entra en RESONANCIA EN LA AMPLITUD cuando para un determinado valor de la frecuencia, la amplitud de las oscilaciones forzadas se hace máxima».

Obtenemos el valor de la frecuencia de resonancia en la amplitud haciendo mínimo el denominador de (11): considerando como única variable la pulsación de la fuerza periódica, la derivada del radicando con respecto a  $\omega$  debe ser nula, es decir:

$$R^2 2\omega - 2(K - m\omega^2)2m\omega = 0$$

de donde obtenemos para la pulsación en esta resonancia:

$$\omega_A = \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{R^2}{2m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{2m^2}}$$

y para la frecuencia:

$$\nu_A = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{R^2}{2m^2}} = \sqrt{\nu_0^2 - \frac{R^2}{8\pi^2 m^2}}$$

donde  $\omega_0$  y  $\nu_0$  son, respectivamente la frecuencia angular y la frecuencia propias del oscilador.

Es evidente en estas expresiones, que la frecuencia de resonancia en la amplitud tiende al valor de la frecuencia propia del oscilador conforme el coeficiente de amortiguamiento  $R$  se hace más pequeño. En el límite  $R=0$  (oscilador sin amortiguar) se obtiene  $\omega_A = \omega_0$ , y la amplitud adopta la expresión:

$$A = \frac{F_0}{K - m\omega^2} = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{F_0}{4\pi^2 m(\nu_0^2 - \nu^2)}$$

que nos indica que la amplitud es tanto más pequeña cuanto más diferentes son la frecuencia propia del sistema no amortiguado ( $\nu_0$ ) y la de la fuerza externa ( $\nu$ ).

Representamos en la Fig. VII-30 las curvas de la amplitud en función de la relación entre las frecuencias de la fuerza externa y la propia del oscilador. En la curva (1), en la que  $R=0$ , la amplitud se hace infinita cuando  $\omega = \omega_0$  puesto que la fuerza periódica externa aplicada suministra continuamente energía al oscilador y ésta no se disipa; no siendo real este caso, puesto que siempre existe algo de amortiguamiento, la amplitud nunca se hace infinita pero

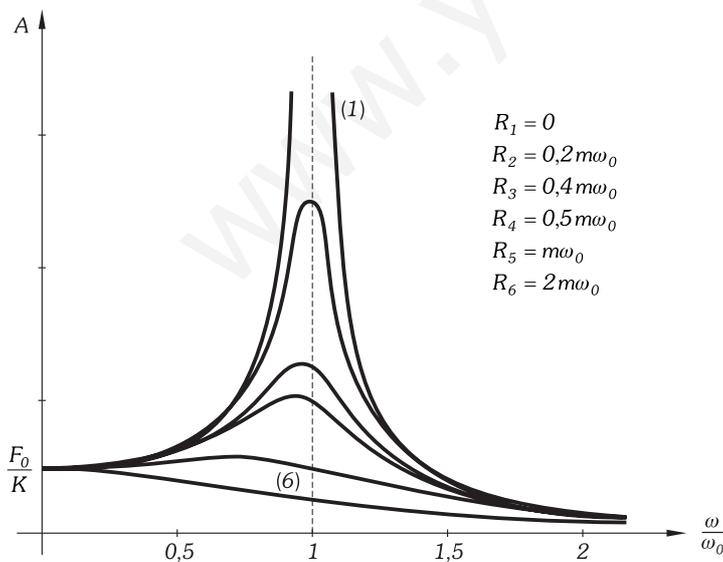


Fig. VII-30.- Representación gráfica de la amplitud de un oscilador armónico forzado y amortiguado en función de la relación entre las frecuencias impulsora y propia no amortiguada. Las seis curvas que aparecen corresponden a seis valores diferentes de amortiguamiento, desde cero (curva 1) a un valor muy alto (curva 6). Obsérvese que el pico de resonancia en la amplitud se aproxima a  $\omega / \omega_0 = 1$  a medida que  $R$  disminuye.

puede llegar a valores muy grandes. Las curvas restantes corresponden a amplitudes de vibraciones forzadas en casos de amortiguamiento creciente.

Un aspecto más interesante de los fenómenos de resonancia (y al que se hace referencia cuando se dice resonancia simplemente sin especificar más) es la resonancia en la velocidad o en la energía, que se refiere a la energía que la fuerza impulsora externa transfiere al oscilador.

«Un sistema entra en RESONANCIA EN LA ENERGÍA (o EN LA VELOCIDAD) cuando para un determinado valor de la frecuencia la transferencia de energía de la fuerza externa al oscilador es máxima».

Calculamos la energía absorbida por el oscilador a través de la potencia, que se puede obtener como el producto de la fuerza periódica impulsora por la velocidad de oscilador; su valor varía de un instante a otro, de forma que a efectos prácticos solamente interesa su valor medio. Lo calculamos en un período:

$$\left. \begin{aligned} F &= F_0 \cos \omega t \\ x &= A \cos(\omega t - \varphi) \\ v &= -A\omega \sin(\omega t - \varphi) \end{aligned} \right\} P = Fv = -F_0 A \omega \cos \omega t \sin(\omega t - \varphi) \Rightarrow P = -\frac{F_0 A \omega \cos \varphi}{2} \sin 2\omega t + F_0 A \omega \sin \varphi \cos^2 \omega t$$

Teniendo en cuenta que en un período:

$$\left. \begin{aligned} \langle \sin 2\omega t \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \sin 2\omega t \, dt = 0 \\ \langle \cos^2 \omega t \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t \, dt = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \langle P \rangle = \frac{1}{2} F_0 A \omega \sin \varphi$$

Para obtener el valor máximo de  $\langle P \rangle$  cuando varía  $\omega$ , derivamos  $\langle P \rangle$  respecto de  $\omega$  e igualamos a cero la derivada; sustituyendo  $A$  por su valor y  $\sin \varphi$  por su expresión en función de  $\text{tg } \varphi$ . Se llega a:  $(\omega_0^2 - \omega^2)(2\omega^2 + 1) = 0$ , cuya solución válida es:  $\omega = \omega_0$ . En consecuencia:

«Existe resonancia en la energía cuando la frecuencia de la fuerza periódica externa coincide con la frecuencia del oscilador libre».

En tales circunstancias el ángulo  $\varphi$  en la expresión de  $v$  vale:

$$\text{tg } \varphi = \frac{R\omega_0}{K - m\omega_0^2} = +\infty \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

y la expresión de la velocidad queda:  $v = -A\omega \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = A\omega \cos \omega t$

es decir, la fuerza y la velocidad están en fase; además:  $A\omega = \frac{\omega F_0}{\sqrt{(R\omega)^2 + (K - m\omega^2)^2}}$

y la velocidad se hace máxima, RESONANCIA EN LA VELOCIDAD, cuando  $K - m\omega^2 = 0$ , es decir:

$$\omega = \sqrt{K/m} = \omega_0$$

Hay casos en los que hay que tomar medidas para impedir que se produzca la resonancia, así por ejemplo, en los cuerpos elásticos tales como puentes, chasis de motores, cascos de embarcaciones... que son sistemas oscilantes y tienen frecuencias propias de oscilación. Un conjunto de soldados, que marchan llevando el paso sobre un puente, pueden hacer que éste vibre con una amplitud muy grande cuando la frecuencia de sus pasos coincida con la propia de la estructura del puente, sobrepasado el límite elástico puede ocurrir que éste se derrumbe. Cuando un motor está funcionando, puede ocurrir que aparezcan esfuerzos periódicos debidos al movimiento de las partes del motor (émbolos, ejes defectuosos, centrados defectuosos de alguna de sus piezas giratorias), pudiéndose producir resonancia cuando la frecuencia de estos esfuerzos coincida con la frecuencia propia de su chasis o alguna de sus partes, y la amplitud de las oscilaciones pueden crecer tanto que ocasionen la ruptura de la máquina.

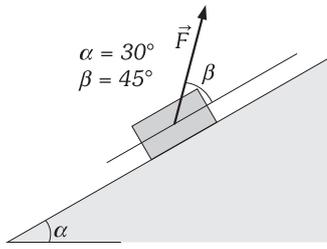
Existen otros casos en los que se busca la resonancia, así por ejemplo, cuando es aprovechado este fenómeno por todas las estaciones radioemisoras que producen oscilaciones forzadas en el circuito receptor, en el que a cada posición del sintonizador le corresponde una frecuencia propia. Cuando la frecuencia propia del circuito receptor coincide con la frecuencia de la radioemisora, la energía absorbida es máxima y por ello es la única estación que podemos oír.

**PROBLEMAS: 100 al 105.**

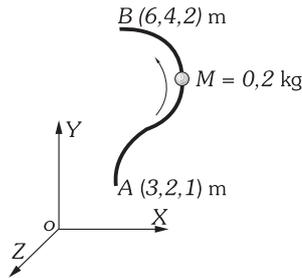
PROBLEMAS

A) TRABAJO Y POTENCIA

1. Demostrar que el trabajo para elevar un cuerpo una altura  $h$  utilizando un plano inclinado sin rozamiento es el mismo que al elevarlo verticalmente a esa altura.
2. Calcular el trabajo que hay que realizar al estirar un resorte una longitud  $a$ . La constante recuperadora es  $K$ .
3. Determinar el trabajo que realiza cada una de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo de  $100$  kg que se desplaza  $10$  m sobre un plano inclinado  $30^\circ$  con la horizontal por el efecto de la fuerza  $F = 800$  N que forma un ángulo de  $45^\circ$  con la dirección ascendente del plano (ver Fig.). El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y la superficie del plano es  $0,1$ . ¿Cuál es el trabajo total realizado sobre el cuerpo?

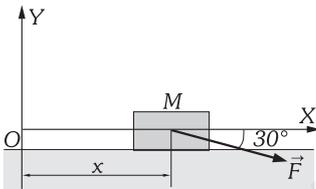


Problema VII-3.

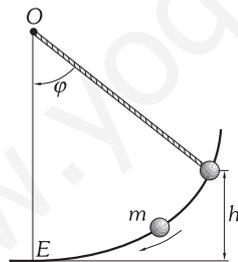


Problema VII-4.

4. Calcular el trabajo realizado sobre una partícula de  $0,2$  kg de peso (tomar  $g = 10$  N/kg), ensartada en un alambre rígido (Fig.) al pasar del punto  $A(3, 2, 1)$  m al  $B(6, 4, 2)$  m, en los casos siguientes: 1) Cuando sobre ella actúa una fuerza constante  $F_1 = i + 3j + 2k$  N. 2) Cuando sobre ella actúa una fuerza  $F = 5$  N constante en módulo, pero siempre dirigida hacia el origen  $O$  del sistema a que se refieren las magnitudes dadas (fuerza central).
5. La ecuación de la fuerza que actúa sobre el bloque de  $1$  kg de masa de la figura escrita en el SI es:  $F = 3x^2 + 5$ ; si el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el suelo es  $0,2$ , determinar el trabajo efectuado por cada una de las fuerzas que actúan sobre el bloque y el trabajo total efectuado al moverse desde  $x_1 = 2$  m a  $x_2 = 5$  m contados a partir de  $O$ .



Problema VII-5.



Problema VII-6.

6. Un péndulo matemático (o ideal) consiste en una partícula de masa  $m$  enganchada en un extremo de un hilo inextensible y sin peso; y el otro extremo unido a un punto fijo  $O$ . Separamos un ángulo  $\varphi$  de su posición de equilibrio  $E$ , tomando el sentido positivo de éste el indicado en la figura;  $h$  es el desplazamiento vertical respecto de su posición de equilibrio. Determinar la suma de los trabajos de las fuerzas aplicadas a la partícula desde que soltamos la partícula hasta que pasa por la posición de equilibrio.
7. El vector de posición de una partícula de  $5$  kg de masa, expresado en el SI, es:  $r = (t^3 - 2) i + (1 - t) j + (3t^2 - 6) k$ , calcular: 1) El momento lineal de la partícula en el instante  $t = 2$  s. 2) El momento angular en el mismo instante. 3) El trabajo desarrollado en el tercer segundo.
8. Una partícula se mueve sobre una trayectoria dada por su ecuación vectorial horaria escrita en el SI:  $r = (2t + 1) i + (t^2 + 1) j + t^3 k$ . La fuerza de resistencia que se opone al movimiento viene dada, también en el SI, por la ecuación:  $R = -kv$  con  $k = 1$  N · s/m. Calcular el trabajo de dicha fuerza resistente en el intervalo de tiempo de  $t = 1$  s a  $t = 3$  s.
9. Una partícula está sometida a una fuerza que, expresada en el SI, tiene por ecuación:  $F = xy i$ , en la que  $x$  e  $y$  son las coordenadas del punto del plano en las que se encuentra la partícula en cada instante.

Calcular el trabajo realizado por tal fuerza al desplazar la partícula del punto  $A(0, 3)$  al  $B(3, 0)$ , estando expresadas estas coordenadas en metros, a lo largo de los siguientes caminos: 1) A lo largo de la recta que los une. 2) A lo largo de un arco de circunferencia de centro el origen de coordenadas y de extremos  $A$  y  $B$ .

10. Una partícula está sometida a una fuerza que expresada en el SI tiene por ecuación:  $F = 6xy i + (3x^2 - 3y^2) j$ . Calcular el trabajo realizado por tal fuerza al desplazar la partícula del punto  $O(0, 0)$  al  $A(1, 1)$ , estando expresadas estas coordenadas en metros, a lo largo de cada uno de los siguientes caminos: 1) De  $O$  a  $B(1, 0)$  m y de  $B$  a  $A$ . 2) De  $O$  a  $A$  a lo largo de la recta  $y = x$ . 3) De  $O$  a  $A$  a lo largo de la parábola  $y = x^2$ .
11. Para arrastrar un cuerpo de  $100$  kg por un terreno horizontal se emplea una fuerza constante igual a la décima parte de su peso y formando un ángulo de  $45^\circ$  con la horizontal, calcular: 1) El trabajo realizado por tal fuerza en un recorrido de  $100$  m. 2) Si este trabajo se ha realizado en  $11$  min  $49$  s, ¿qué potencia se habrá desarrollado?

12. Calcular la fuerza que se opone al movimiento de un coche que desarrolla una potencia de  $20$  CV cuando va a  $72$  km/h en carretera horizontal.

13. Suponiendo que un automóvil de  $750$  kg de peso necesite una potencia de  $20$  CV para mantener una velocidad constante de  $60$  km/h por una carretera horizontal, calcular: 1) El valor de la suma de todas las resistencias que se oponen al movimiento. 2) La potencia necesaria para que el automóvil suba a  $60$  km/h una pendiente del  $10\%$ , es decir  $10$  m de ascenso por cada  $100$  m de recorrido. Se supone que las resistencias por rozamiento son las mismas que en 1). 3) La potencia necesaria para que baje una pendiente del  $5\%$  a igual velocidad ( $60$  km/h). 4) La pendiente que permitirá bajar a la velocidad de  $60$  km/h al mismo coche sin que funcione el motor.

14. Un ciclista que pesa junto con su bicicleta  $90$  kg, corre por una carretera. El conjunto de las resistencias pasivas que se oponen a su movimiento viene dado por la fórmula  $R = 0,4 v^2$  en el SI, siendo  $v$  la velocidad. 1) Calcular la potencia que debe desarrollar el ciclista para mantener la velocidad de  $27$  km/h sobre una carretera horizontal. 2) Este ciclista desciende, sin pedalear, una pendiente del  $5\%$  (por cada  $100$  m de carretera hay un desnivel de  $5$  m). Demostrar que alcanza una velocidad límite y calcular su valor. 3) Si el ciclista desciende por una pendiente del  $8\%$  a  $27$  km/h, determinar la energía en calorías que es disipada por los frenos en un recorrido de  $100$  m.

15. Un automóvil de masa  $M$  arranca en una pista horizontal y desarrolla una potencia  $P$  constante. Despreciando la resistencia del aire, obtener las expresiones de la aceleración, velocidad y posición, en función del tiempo.

B) TEORÍA DE CAMPOS

16. Dado el vector:  $E = 2x^2y i + 3xz^2 j - xz k$  y la magnitud escalar:  $a = x^2y + 3xyz - 3z^2 + 1$ , calcular el valor de las siguientes expresiones en el punto  $A(1, 0, 2)$ : 1)  $\text{grad } a$ . 2)  $\text{div } E$ . 3)  $\text{rot } E$ . 4)  $\Delta a$ . 5)  $\Delta E$ .
17. Dado el vector  $E = x^2 i - 2yz j + xz^2 k$  y el escalar  $a = 2x^2y - 3z$ , calcular en el punto  $A(1, 0, 2)$  las siguientes expresiones: 1)  $\text{div}(aE)$ . 2)  $E \cdot \text{grad } a$ . 3)  $E \times \text{rot } E$ . 4)  $E \times \text{grad } a$ . 5)  $\text{rot}(aE)$ .
18. La función potencial de un campo vectorial viene dada por la expresión:  $V = z^2x + 2y - (x/3) + 5$ . 1) Calcular el vector que define dicho campo. 2) Comprobar que el campo es irrotacional.
19. Obtener la expresión de la intensidad del campo de fuerzas definido por el potencial  $V = k/r$ .
20. Demostrar que el vector  $E = 6xy i + (3x^2 - 3y^2) j + 7k$  representa a un campo conservativo o, lo que es lo mismo, admite un potencial.
21. Dado el campo plano de fuerzas de intensidad  $E = a i - b j$ , con  $a$  y  $b$  constantes: 1) Comprobar que es conservativo. 2) Obtener la expresión del potencial  $V(x, y)$  tal que sea  $V(0, 0) = 0$ . 3) Verificar que las líneas equipotenciales y las de campo son perpendiculares.
22. Hállese la circulación del vector  $E = (x + y^2) i - 3xy j + (x + z)^2 k$  a lo largo de la parábola  $x = y^2, z = 0$  desde el punto  $A(1, 1, 0)$  al  $B(2, 4, 0)$ .
23. En un campo de fuerzas conservativo la energía potencial de determinada partícula viene dada por la expresión:  $U = 3x + (y^2/x) -$

$-3yz + 35$  expresada en el SI. Calcular: 1) La fuerza que actúa sobre la partícula colocada en el punto A (1, 2, 1) m. 2) El trabajo realizado por el campo cuando la partícula se desplaza del punto A al B (-1, 3, 2) m.

24. Dado el campo de fuerzas  $E = 2xy \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j}$  N/kg: 1) Comprobar que es conservativo. 2) Si un cuerpo de  $M = 4$  kg pasa por los puntos O (0, 0, 0) y A (2, 2, 4) m, sin experimentar otra fuerza que la del campo, calcular el incremento de su energía entre ambos puntos. 3) Obtener la expresión del potencial  $V(x, y, z)$  de forma que sea  $V(0, 0, 0) = 0$ . 4) Con la elección del nivel de referencia de la cuestión anterior, ¿cuál es la energía potencial de M en A?

**C) ENERGÍAS CINÉTICA Y POTENCIAL GRAVITATORIA. PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA**

25. Calcular la velocidad que sería necesario comunicar a un proyectil de 340 kg para que adquiriera una energía cinética igual a la cuarta parte de la que posee un acorazado de 10 000 t que marcha con una velocidad de 18 nudos. Expresar la velocidad del proyectil en el SI, sabiendo que la milla marina corresponde a 1,852 km, y que un nudo es 1 mile/h.

26. Efectuamos un disparo sobre una pared que ofrece una resistencia constante de 500 kp. La bala, que tiene una masa de 30 g, llega a la pared con una velocidad de 600 m/s y sale de ella con 400 m/s. Calcular el espesor de la pared.

27. Un proyectil de 10 g de masa sale del cañón de un arma a una velocidad de 500 m/s. Siendo la longitud del cañón de 100 cm, calcular la fuerza producida por la expansión de los gases originados en la explosión de la pólvora y la energía cinética de la bala. (Se supone la fuerza constante mientras dura el recorrido de la bala en el interior del cañón).

28. Una fuerza de 14 dyn actuando sobre un punto material en reposo le comunica una velocidad de 20 cm/s después de un recorrido de 50 cm. Calcular el tiempo invertido en dicho recorrido, la masa del punto material y la aceleración adquirida.

29. Sobre un punto material de 5 g actúa una fuerza constante que después de 5 s le comunica una energía cinética de 2 250 erg. Determinar la intensidad de la fuerza y la aceleración, así como el espacio recorrido hasta adquirir dicha energía.

30. El vector de posición de una partícula que se mueve en el espacio viene dado por  $r = 3t^3 \mathbf{i} + (t^2 + t + 1) \mathbf{j} + (2t + 3) \mathbf{k}$ , expresado en el SI. Hállese el trabajo desarrollado en el quinto segundo. La masa de la partícula es 2 kg.

31. Una fuerza de dirección y sentido constantes y cuyo valor expresado en el SI es:  $F = 6t + 3$ , actúa sobre una masa de 3 kg inicialmente en reposo. ¿Qué trabajo ha realizado la fuerza al cabo de 2 segundos?

32. Un coche de masa  $m$  parte del reposo en trayectoria recta y horizontal y su velocidad varía según la ley  $v = k \sqrt{x}$ , en la que  $k$  es constante y  $x$  es la distancia al origen. Determinar el trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre el coche en los  $t$  primeros segundos.

33. El cañón de una escopeta tiene una longitud de 1 m y la fuerza que impulsa al proyectil viene dada por la expresión  $F = 0,1 (200 - x)$ , viniendo medida  $F$  en newtones cuando  $x$  se expresa en centímetros. La masa del proyectil es de 5 g. Determinar: 1) El trabajo de la fuerza en el interior del cañón. 2) La velocidad del proyectil en el momento de salir del cañón. 3) La energía cinética del proyectil en este momento expresada en calorías.

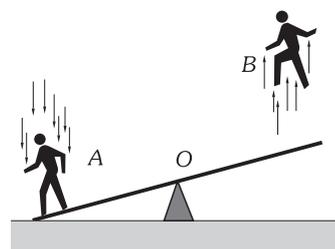
34. Colocamos una cuerda flexible de 1 m de longitud sobre una mesa de tal forma que parte de ella cuelgue por un extremo; se deja caer desde una posición en la que se equilibran el peso del trozo de cuerda que cuelga y el rozamiento dinámico. Calcular la velocidad de la cuerda cuando el extremo que está sobre la mesa llega al borde de la misma. Coeficiente dinámico de rozamiento  $\mu = 0,5$ .

35. Queremos elevar a 90 m de altura un caudal de agua de 500 l/s. Calcular la potencia que precisa tener el motor que realiza esta operación.

36. El calor de combustión del carbón vegetal es, aproximadamente, 8 000 cal/g. Calcular la masa de carbón que habría que quemar para elevar un bloque de piedra de una tonelada a una altura de 341,6 m si el calor se transformase íntegramente en energía mecánica.

37. Desde qué altura tendría que caer un coche para equiparar su energía cinética final con la energía que posee cuando marcha a 100 km/h.

38. Un atleta A, de 70 kg de masa, se lanza contra el extremo de un tablón apoyado en un punto, desde una altura de 3 m como se indica en la figura. En el otro extremo del tablón se encuentra un chico B, de 35 kg. Suponiendo que las 2/3 partes de la energía cinética de A se transmiten al chico B, calcular la altura a que éste ascenderá.



Problema VII-38.

39. Un depósito de forma semiesférica, de un metro de radio, está lleno de agua ( $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ ). Calcular el trabajo necesario para vaciarlo mediante una bomba.

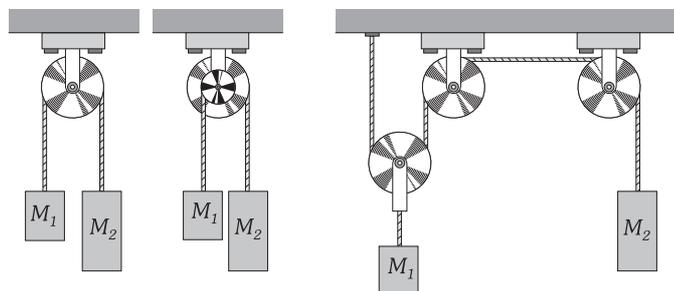
40. Desde una cierta altura dejamos caer un cuerpo y llega al suelo con velocidad  $v_1$ ; si en vez de abandonarlo lo lanzamos verticalmente hacia abajo con velocidad  $v_2$ , ¿con qué velocidad llega al suelo?

41. Desde una torre de 30 m de altura se lanza un objeto de masa 0,10 kg con una velocidad de 16 m/s en una dirección que forma un ángulo de 45° con la horizontal. ¿Cuál es la energía total después del lanzamiento? ¿Cuál es su velocidad cuando se encuentra a 10 m sobre el suelo? No tomar en consideración la resistencia del aire.

42. Un cañón de 30 cm de diámetro y 15 m de longitud lanza un proyectil de 350 kg comunicándole una velocidad inicial de 150 m/s y llega al blanco con una velocidad de 100 m/s. Se supone que el movimiento del proyectil dentro del tubo del cañón es uniformemente acelerado, debido a la fuerza constante de los gases de combustión de la pólvora. Se desea saber: 1) Aceleración del proyectil dentro del tubo del cañón. 2) Tiempo invertido en recorrer la longitud del tubo del cañón. 3) Fuerza ejercida por los gases de la pólvora sobre el proyectil. 4) Presión de estos gases sobre la base del proyectil. 5) Energía cinética del proyectil a la salida del cañón y a su llegada al blanco. 6) ¿A qué altura se encuentra el blanco?

43. Se dispara un proyectil de 300 gramos con velocidad inicial de 400 m/s, formando un ángulo de 60° con la horizontal. Calcular: 1) Alcance. 2) Energías cinética y potencial: a) al salir, b) a los 5 s, c) en el punto más elevado.

44. En los sistemas representados en la figura los pesos de los cables y poleas son despreciables. Determinar la velocidad  $v_2$  de la masa  $M_2$  cuando se ha movido  $h_2$  a partir de la posición de reposo.  $M_1 = 100 \text{ kg}$ ;  $M_2 = 1 000 \text{ kg}$ ;  $h_2 = 2 \text{ m}$ ;  $r_2 = 2r_1$ .



Problema VII-44.

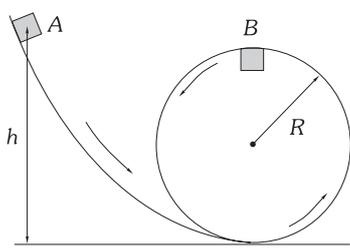
45. Una cuerda de longitud  $l$  cuelga suspendida por su centro de una pequeña polea de masa despreciable. Si se le comunica una pequeña velocidad en un sentido, ¿qué velocidad tendrá la cuerda al empezar a caer libremente?

46. Desde el punto más alto de una esfera de radio  $R$  se desliza libremente sin rozamiento ni velocidad inicial un cuerpo de masa  $M$ . 1) Determinar el punto en que abandona la superficie esférica. 2) Calcular la energía cinética con que llegará al suelo. (Se considera que la esfera está en reposo sobre un suelo horizontal.)

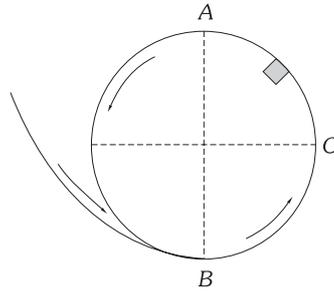
47. El pequeño cuerpo A, de masa 1 kg, «riza el rizo» en una pista circular vertical de 1 m de radio, como se indica en la figura. Calcular la

**162 TRABAJO Y ENERGÍA. TEORÍA DE CAMPOS. PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA**

mínima energía cinética que debe tener en el punto más alto (B) del trayecto circular y la altura mínima desde la que se debe dejar caer para que describa el rizo. (Se suponen nulos los rozamientos y que el cuerpo no está enganchado a la pista.)



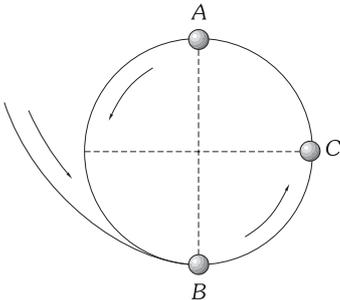
Problema VII-47.



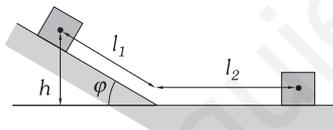
Problema VII-48.

**48.** Lanzamos un cuerpo de 100 g de masa por el aparato de «rizar el rizo», cuya pista circular tiene 10 cm de radio; suponemos que el cuerpo no se encuentra enganchado a la pista y que desliza por ella sin rozamiento. Tomando  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , calcular: 1) La velocidad crítica en A para que dé vueltas. 2) La velocidad crítica en B para que dé vueltas. 3) La velocidad crítica en C para que dé vueltas. 4) La fuerza que la pista ejerce sobre el cuerpo en los tres puntos citados.

**49.** Lanzamos un cuerpo de 100 g de masa enganchado a la pista por el aparato de «rizar el rizo», que tiene 0,1 m de radio, y desliza por ella sin rozamiento. (Por ejemplo, una bolita ensartada a un alambre por el que puede deslizar, como se indica en la figura) Calcular: 1) La velocidad crítica en A para que dé vueltas. 2) La velocidad crítica en B para que dé vueltas. 3) La velocidad crítica en C para que dé vueltas. 4) La fuerza que la pista ejerce sobre el cuerpo en los tres puntos citados.



Problema VII-49.



Problema VII-69.

**50.** Damos vueltas a una piedra atada a una cuerda en una circunferencia vertical de radio R, y cuando ha adquirido una gran velocidad de rotación cesamos nuestros impulsos, girando así sin impulso alguno. Calcular la tensión de la cuerda en cualquier punto y el exceso de tensión sobre la posición más alta. Suponemos conocida la velocidad en el punto más alto.

**51.** Colgamos una partícula de un hilo inextensible y sin peso. Apartamos 90° de la posición de equilibrio la partícula, de forma que el hilo queda horizontal; soltamos la partícula. Determinése el ángulo que ha recorrido cuando la tensión del hilo es igual en magnitud al peso de ella.

**52.** Colgamos una partícula de un hilo inextensible y sin peso apreciable de 2 m de largo. Apartamos 90° de la posición de equilibrio la partícula, de forma que el hilo queda horizontal; soltamos la partícula y al pasar por la vertical encuentra un clavo O'. ¿Cuál debe ser la mínima distancia entre el punto de suspensión O y el clavo O' para que la partícula describa giros completos en torno a O'?

**53.** Colgamos una partícula de un hilo inextensible y sin peso apreciable de 2 m de largo. Apartamos 90° de la posición de equilibrio la partícula, de forma que el hilo queda horizontal; soltamos la partícula y al pasar por la posición vertical encuentra un clavo O' colocado en el punto medio de la longitud del hilo. Determinar las coordenadas del punto en que la partícula dejará de tener trayectoria circular alrededor de O' y determinar la ecuación de su nueva trayectoria.

**54.** Una partícula de masa m se mueve a lo largo del eje OX bajo la acción de una fuerza que deriva de un potencial dado por:

$U(x) = -U_0 / \sqrt{a^2 + x^2}$ , con  $U_0$  y a constantes conocidas. 1) Representar gráficamente  $V(x)$  y determinar las posiciones de equilibrio estable. 2) Si la partícula se abandona sin velocidad inicial en el punto de coordenada  $x = a/2$ , ¿qué tipo de movimiento realizará?, ¿cuál será la velocidad de la partícula en el punto  $x = 0$ ?

**55.** La energía potencial de un campo de fuerzas centrales viene expresada por  $U(r) = a/r^2 - b/r$ , en la que a y b son constantes positivas y r es la distancia al centro. 1) Calcular el valor de  $r_0$  correspondiente a la posición de equilibrio, indicando su naturaleza. 2) Representar gráficamente  $U(r)$ . 3) Determinar el valor máximo de la fuerza de atracción dirigida hacia O que actúa sobre la partícula.

**56.** La energía potencial de interacción entre dos átomos neutros puede aproximarse en algunos casos por un potencial de la forma:

$$U(r) = V_0 \left[ \left( \frac{a}{r} \right)^{12} - 2 \left( \frac{a}{r} \right)^6 \right]$$

donde r es la separación entre los centros de los átomos y  $V_0$  y a son constantes. 1) Construir la gráfica de esta función entre  $0,24 \text{ nm} \leq r \leq 0,36 \text{ nm}$ , dando los siguientes valores a las constantes:  $a = 0,30 \text{ nm}$  y  $V_0 = 3,2 \times 10^{-21} \text{ J}$ . 2) Determinar a partir de la gráfica la separación de equilibrio entre los átomos cuando  $F_r = 0$ . Comprobar este valor utilizando la relación  $F = -dU/dr$ . 3) Imaginar que uno de los puntos de máximo desplazamiento ocurre en  $r = 0,28 \text{ nm}$ ; determinar el otro punto de máximo desplazamiento. 4) Determinar la energía mecánica del movimiento entre esas dos posiciones.

**57.** Una partícula de 2 kg de masa se mueve sobre el eje OX por la acción de una fuerza conservativa que escrita en el SI viene dada por la ecuación:  $F = 2x - 4x^3$ . Sabemos que en el origen de coordenadas la energía potencial es cero. 1) Representar la función energía potencial  $U = U(x)$ . 2) Determinar los puntos de equilibrio, indicando su naturaleza. 3) Describir el movimiento de la partícula si en el punto  $x = 0$  se abandona con una velocidad de 4 m/s en el sentido positivo del eje OX. 4) Trabajo realizado por la fuerza cuando la partícula pasa de  $x = 1 \text{ m}$  a  $x = -2 \text{ m}$ .

**58.** Una partícula de 2 kg de masa se mueve sobre el eje OX por la acción de una fuerza conservativa que escrita en el SI viene dada por la ecuación:  $F = -3x^2 + 9$ . Sabemos que en el origen de coordenadas la energía potencial es cero. 1) Representar la función energía potencial  $U = U(x)$ . 2) Determinar los puntos de equilibrio, indicando su naturaleza. 3) Describir el movimiento de la partícula si en el punto  $x = 1 \text{ m}$  se abandona con una velocidad de 6 m/s en el sentido positivo del eje OX. 4) Trabajo realizado por la fuerza cuando la partícula pasa de  $x = 2 \text{ m}$  a  $x = -4 \text{ m}$ .

**59.** Un camión cuya masa es de 10 t marcha a una velocidad de 60 km/h. Determinar: 1) Su energía cinética. 2) Cantidad de calor que se produce en sus frenos cuando se detiene por su acción.

**60.** Una bola de acero, cuya masa es de 500 g, cae sin velocidad inicial desde una altura desconocida sobre un plano horizontal. La velocidad en el momento del choque es de 44,25 m/s. 1) ¿Desde qué altura cae la bola? 2) Si después del choque la bola asciende hasta una altura de 15 m, ¿qué cantidad de calor se desprendió en el choque?

**61.** Una pelota se deja caer al suelo desde 2 m de altura. Suponiendo que en cada choque contra el suelo se pierde en forma de calor el 10 % de la energía cinética, calcular la velocidad de la pelota a la salida del segundo choque y la altura a que llega después de realizado éste.

**62.** Un ciclista con su bici pesa 80 kp. Partiendo del reposo y sobre un camino horizontal, tarda un minuto en alcanzar la velocidad de 18 km/h ejerciendo una fuerza que supondremos constante. Los rozamientos equivalen en total a una fuerza constante de 15 kp. 1) Calcular la fuerza motriz ejercida por el ciclista. 2) Calcular el trabajo realizado por el ciclista durante el primer minuto y la potencia media que ha desarrollado. 3) Si una vez alcanzada la velocidad de 18 km/h deja de pedaleo, ¿qué distancia recorrerá en esas condiciones? El camino es horizontal.

**63.** Un automóvil de 1 425 kg de masa parte del reposo sobre una pista horizontal. Suponiendo que la resistencia al avance es constante y vale 15 kp, calcular: 1) La aceleración que es preciso comunicar al auto para alcanzar la velocidad de 120 km/h en 800 m. 2) El trabajo que habrá realizado el motor desde el momento de partir hasta que alcanza la velocidad de 120 km/h. 3) La potencia que desarrolla el motor en el momento en que ha alcanzado los 120 km/h. 4) En el preciso instante en que se alcanza la velocidad de 120 km/h desconectamos el motor de

la transmisión, ¿qué trayecto recorrerá aún el auto hasta pararse?, ¿cuánto tiempo tardará en pararse?

**64.** Una locomotora arrastra un tren de 500 t. Sabiendo que en conjunto las resistencias equivalen a 5 kg por tonelada, calcular: 1) El esfuerzo de tracción, a velocidad constante en horizontal. 2) Si alcanza 72 km/h en 100 m, ¿cuál será el esfuerzo durante este período de aceleración constante? 3) Calcular también el esfuerzo de tracción subiendo una cuesta de 10 milésimas (se eleva 10 m por kilómetro) a 72 km/h.

**65.** Se ha de arrastrar por el suelo un fardo de 100 kg aplicando una fuerza de 50 kp (coeficiente de rozamiento  $\mu = 0,3$ ). ¿En cuál de las siguientes direcciones nos convendrá aplicarla para conseguir mayor efecto? 1) Tirando horizontalmente. 2) Tirando hacia arriba en dirección que forme un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal. 3) Empujando hacia abajo también en dirección  $30^\circ$  con la horizontal. Calcular en uno cualquiera de los casos anteriores la producción de calor por rozamiento si el fardo se arrastra 10 m. 4) ¿En qué dirección conviene aplicar la fuerza para conseguir el efecto máximo?

**66.** Desde lo alto de un plano inclinado  $30^\circ$  sobre la horizontal se deja caer un cuerpo de masa 1 kg que desliza sobre el plano, siendo el coeficiente de rozamiento 0,2. Determinar: 1) Aceleración de bajada. 2) Tiempo que tarda en recorrer 10 m en el plano. 3) Velocidad final recorridos los 10 metros.

**67.** Para descargar de un camión un fardo de 100 kg de peso es necesario inclinar el suelo del camión un ángulo de  $60^\circ$ , calcular: 1) El coeficiente de rozamiento entre el fardo y el suelo del camión. 2) El calor que produce el rozamiento del fardo durante la descarga y en un recorrido de 2 m. (Se suponen iguales los coeficientes de rozamiento estático y dinámico.)

**68.** En lo alto de un plano inclinado cuya longitud es de 20 m y cuya inclinación es  $30^\circ$  abandonamos un cuerpo, dejándolo en reposo, para que deslice libremente. El cuerpo pesa 10 kg y el coeficiente de rozamiento vale 0,2, calcular: 1) La aceleración de caída del cuerpo a lo largo del plano. 2) El tiempo que tardará en llegar al suelo. 3) La energía cinética con que llegará al suelo. 4) El calor producido por el rozamiento hasta llegar al suelo.

**69.** Un cuerpo de masa 10 kg se desliza bajando por un plano inclinado  $30^\circ$  sobre la horizontal. El plano tiene una longitud de 5 m y a continuación de él hay un plano horizontal, como se indica en la figura. El coeficiente de rozamiento del cuerpo con el plano inclinado es de 0,25 y con el plano horizontal de 0,3. El cuerpo empieza a moverse desde la parte superior del plano inclinado. Determinar: 1) Velocidad del cuerpo al llegar al plano horizontal. 2) Espacio recorrido en el plano horizontal hasta que se para. 3) Cantidad de calor desarrollado como consecuencia del rozamiento.

**70.** Se tiene un plano inclinado sobre la horizontal  $30^\circ$  y de longitud 10 m. ¿Qué velocidad paralela al plano debe comunicarse a un cuerpo que pesa 1 kg para que al llegar al final del plano su velocidad sea cero? El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano vale 0,1. ¿Qué tiempo ha tardado el cuerpo en recorrer el plano? El cuerpo, una vez que se ha parado, inicia el descenso por la acción de su propio peso. ¿Qué velocidad tendrá al llegar al punto de donde partió?

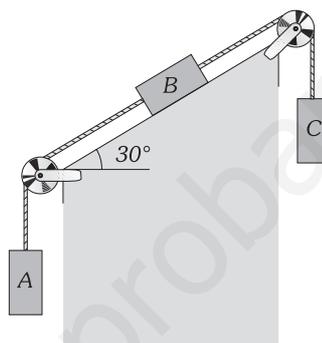
**71.** Sobre un plano inclinado un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal se lanza hacia arriba y por la línea de máxima pendiente un cuerpo de masa 100 g y velocidad inicial de 10 m/s. Siendo el coeficiente de rozamiento del cuerpo con el plano de 0,2, determinar: 1) Espacio que recorre el cuerpo sobre el plano hasta que se para. 2) Incremento de la energía potencial del cuerpo en ese momento. 3) Calor desprendido por efecto del rozamiento. 4) Alcanzada la máxima altura el cuerpo desciende; ¿cuál es su velocidad al pasar por la posición inicial?

**72.** A lo largo de un plano inclinado un ángulo  $\varphi$ , cuya  $\text{tg } \varphi = 0,3$ , y de coeficiente dinámico de rozamiento entre la superficie del plano y el móvil  $\mu = 0,3$ , se desplaza un cuerpo que pesa 100 kp. La altura del plano es de 50 m, calcular: 1) Fuerza mínima horizontal necesaria para subirlo con movimiento uniforme. 2) Fuerza paralela al plano para subir el mismo en 10 s con movimiento uniformemente acelerado. 3) Trabajo desarrollado y en qué se ha invertido. 4) Potencia media desarrollada.

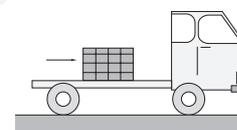
**73.** Un bloque de 5 kg se lanza hacia arriba, por la línea de máxima pendiente, sobre un plano inclinado  $37^\circ$ , con una velocidad inicial de 9,8 m/s. Se observa que recorre una distancia de 6 m y después desliza hacia abajo hasta el punto de partida. Calcular la fuerza de rozamiento que actúa sobre el bloque y la velocidad de éste cuando vuelve a su posición inicial.

**74.** Un cuerpo A de 10 kg reposa sobre una mesa horizontal, y está unido mediante un hilo que pasa por la garganta de una polea, situada en el borde de la mesa, a un cuerpo B, de 5 kg, que pende libremente como una plomada. Al dejar en libertad este sistema se pone espontáneamente en movimiento: el cuerpo B cae verticalmente, arrastrando en su caída al cuerpo A, que se deslizará horizontalmente sobre la mesa. Si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo A y la mesa es 0,2 y los pesos de la polea y del cable son despreciables, calcular: 1) Velocidad del sistema después de un recorrido de los cuerpos de 50 cm. 2) Tensión del hilo durante la caída. 3) El calor desarrollado por el rozamiento en ese tiempo.

**75.** En el sistema de la figura las masas de los cuerpos A, B y C son, respectivamente, 5, 5 y 10 kg, y el coeficiente de rozamiento de B con el plano inclinado 0,2. Si el sistema se abandona partiendo del reposo, calcular su velocidad cuando C haya descendido 50 cm. Las masas de cuerdas y poleas son despreciables.



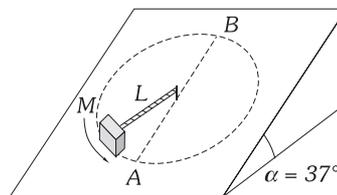
Problema VII-75.



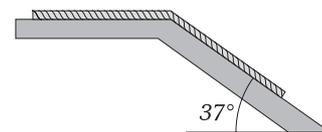
Problema VII-76.

**76.** 1) Cuando un camión está cargado con un embalaje de  $m = 10^3$  kg sobre su plataforma como se indica en la figura, es indudable que la energía que le proporciona el motor para alcanzar la velocidad de crucero  $v = 108$  km/h, recorriendo la misma distancia en vacío o cargado, será mayor cuando está cargado; en el caso en que la carga no desliza por la plataforma, calcular la energía extra que proporciona el motor al conjunto. (Suponer que el trabajo de resistencia  $W_R$  al movimiento del camión en el recorrido para alcanzar la velocidad de crucero es el mismo con carga que sin ella). 2) Si la caja se encuentra en el caso anterior a punto de deslizar por la plataforma del camión, y el camino recorrido por él es de  $s = 150$  m, determinar el coeficiente estático de rozamiento  $\mu_e$  entre la plataforma y el embalaje. 3) Si el coeficiente dinámico de rozamiento es  $\mu_d = 0,25$  y la carga desliza por la plataforma, siendo ésta lo suficientemente larga para que no caiga en el recorrido citado, determinar la energía extra que proporciona el motor al conjunto para este caso.

**77.** El cuerpo de masa M sujeto por la cuerda de longitud L, gira en el plano inclinado de la figura, con el que tiene un coeficiente de rozamiento  $\mu$ . Calcular: 1) La velocidad mínima que debe tener en A para que pase por B. 2) La velocidad, en ese caso, con que pasará de nuevo por A. DATOS:  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>,  $M = 4$  kg,  $L = 2$  m,  $m = 0,25$ .



Problema VII-77.



Problema VII-78.

**78.** Una cuerda homogénea de 2 m de longitud descansa en dos planos como en la Figura. Los coeficientes estático y dinámico de rozamiento con ellos son, respectivamente,  $\mu_e = 0,4$  y  $\mu_d = 0,2$ . Calcular: 1) Máxima longitud de cuerda sobre el plano inclinado compatible con el reposo. 2) Si empieza a moverse desde la posición de la cuestión anterior, sin velocidad inicial, ¿con qué velocidad empezará a moverse toda ella por el plano inclinado?

**79.** Un avión se desplaza con una velocidad de 1 200 km/h y sus motores a esa velocidad desarrollan 3 000 kW; si la potencia eficaz es el

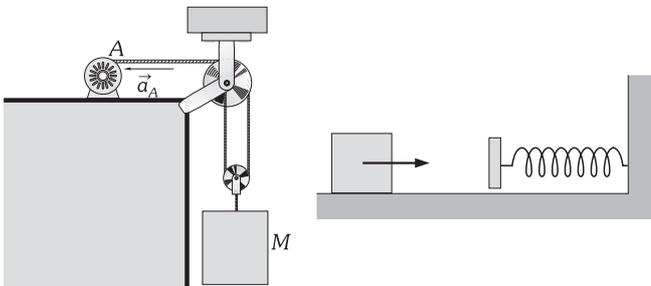
**164 TRABAJO Y ENERGÍA. TEORÍA DE CAMPOS. PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA**

70 %, determinar la fuerza de resistencia debida al viento que se opone al movimiento del avión.

**80.** Una motobomba eleva 500 m<sup>3</sup> de agua a un depósito situado a 50 m de altura en 1 h. Si el rendimiento de la motobomba es del 80 %, calcular: 1) El trabajo realizado por la motobomba. 2) El costo de la operación si el kW · h cuesta 0,08 euros. 3) La potencia útil y motor del aparato.

**81.** Un motor eléctrico cuyo rendimiento es del 85 % tiene que accionar un montacargas que pesa vacío 437 kg y que puede cargarse con 1 537 kg más. El montacargas tiene que elevarse hasta 24,6 m de altura, tardando en ello 35 s. ¿Cuál ha de ser la potencia media del motor? Si el arranque, tiempo que tarda en adquirir la velocidad de ascensión, dura 2,1 s, ¿qué potencia precisa tener el motor durante este período? ¿Y cuál es la potencia que necesita tener en el descenso del montacargas en vacío y a la misma velocidad?

**82.** El rendimiento del motor de la figura es del 90% y eleva a un cuerpo de 100 kg mediante el juego de poleas indicado en la figura. Si el cable es recogido por el motor con una aceleración  $a_A = 10 \text{ cm/s}^2$  (aceleración del punto A del cable) y en un determinado instante la velocidad del cable es  $v_A = 1 \text{ m/s}$ , determinar la potencia que se le suministra al motor en ese momento. No es considerable las masas de las poleas y del cable.



Problema VII-82.

Problema VII-86 y 87.

**83.** Los aerogeneradores de un parque de energía eólica tienen hélices con un diámetro de 30 m. Suponiendo que son capaces de convertir en electricidad el 5 % de la energía cinética de la masa de aire (densidad: 1,29 kg/m<sup>3</sup>) que circula por una sección circular de diámetro igual a la de la hélice. 1) Demostrar que la producción de potencia eléctrica depende de la tercera potencia de la velocidad del viento. 2) Calcular la potencia producida por un aerogenerador cuando la velocidad del viento es de 100 km/h.

**D) ENERGÍA EN LOS OSCILADORES. RESONANCIA**

**84.** Un punto móvil de 0,5 kg de masa está animado de un movimiento vibratorio armónico de 10 cm de amplitud, realizando 2 oscilaciones cada segundo. Calcúlese: 1) La elongación de dicho punto, 1/6 s después de alcanzar su máxima separación positiva. 2) La constante de recuperación del movimiento. 3) La energía cinética que poseerá el punto móvil al pasar por su posición de equilibrio.

**85.** Demostrar que la energía total (cinética más potencial) en cualquier punto del trayecto de una partícula de masa M que tiene MAS de amplitud A y frecuencia  $\nu$  es:  $E = 2\pi^2 M A^2 \nu^2$ .

**86.** Una masa de 5 kg se mueve en una superficie horizontal sin rozamiento, como se indica en la figura, con la velocidad de 4 m/s, y choca frontalmente con un muelle elástico de masa despreciable y de constante recuperadora 1 kp/cm. Determinar: 1) La energía cinética del sistema en el momento en que la masa alcanza el muelle. 2) La compresión máxima del muelle. 3) Velocidad de la masa cuando el muelle se ha comprimido 10 cm.

**87.** En el problema anterior, calcular la compresión máxima del muelle en el caso de que entre la masa M y el suelo haya rozamiento, de coeficiente 0,25.

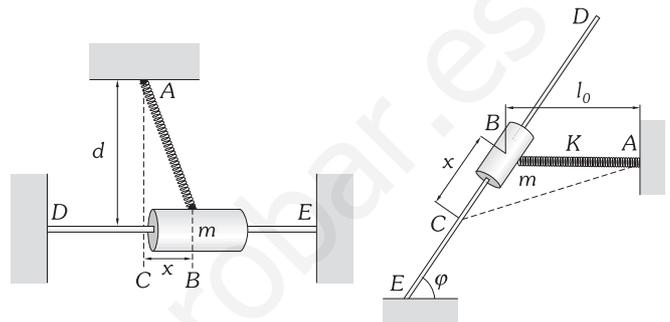
**88.** Una masa de 5 kg cae desde 5 m de altura respecto del extremo de un muelle vertical, de constante  $K = 980 \text{ N/m}$ . Calcular la máxima compresión del muelle. (Considerar que no existe disipación de energía en el proceso.)

**89.** Un resorte espiral tiene una longitud de 15 cm. Cuando de él pende una masa de 50 g queda en reposo con una longitud de 17 cm. Calcular: 1) La constante de recuperación del resorte, en unidades del

sistema CGS. 2) La frecuencia de las oscilaciones verticales que realiza cuando se le cuelga una masa de 90 g. 3) El trabajo realizado por el resorte para elevar la anterior masa desde el punto más bajo al más alto de su recorrido total de 6 cm.

**90.** Una masa de 500 g está suspendida en equilibrio de un muelle de constante 200 N/m. Se estira de la masa 2 cm hacia abajo y se le da una velocidad de 100 cm/s hacia arriba. Obtener la ecuación de su movimiento.

**91.** En la figura el resorte ideal es de constante K y de longitud natural  $l_0$ ; el punto A es fijo, la distancia AC es  $d > l_0$  y el cuerpo B de masa m puede moverse sin rozamiento a lo largo de la varilla horizontal DE. 1) Dejamos el cuerpo en libertad a partir del reposo en el punto B a una distancia  $x = a$  de C; determinar la velocidad de un m cuando pasa por C. 2) Demostrar que el movimiento para pequeños desplazamientos es armónico simple y obtener su frecuencia.



Problema VII-91.

Problema VII-92.

**92.** En la figura el resorte es de constante K y longitud natural  $l_0$ ; el punto A es fijo y el cuerpo de masa m puede deslizar a lo largo de la varilla DE sin rozamiento y forma un ángulo  $\phi$  con la horizontal. Soltamos m desde el reposo en la posición B; calcular la velocidad de m cuando pasa por C a distancia x de B, contada sobre la varilla.

**93.** Tenemos un péndulo simple, formado por una esfera de 100 g suspendida de un hilo de un metro de longitud. Separamos la esfera de su posición de equilibrio hasta formar un ángulo de 10° y luego la soltamos para que oscile libremente. Se pide: 1) La energía potencial cuando la elongación es máxima. 2) La velocidad máxima que alcanzará. 3) La energía cinética máxima que adquirirá. 4) El tiempo que empleará en 10 oscilaciones completas. (Se supone que los rozamientos son despreciables.)

**94.** Un péndulo que base segundos (semiperíodo = 1 s) tiene de longitud 1 m. Calcular la longitud del péndulo que en el mismo lugar de la Tierra tiene un período de oscilación de 10 s.

**95.** De un fino cordel pendiente del techo de una habitación (ver Fig.) colgamos una masa de plomo, siendo la distancia entre su centro de gravedad y el suelo 14,2 cm. La hacemos oscilar y observamos que 50 oscilaciones completas se realizan en 5 minutos 45,4 segundos. Hacemos que el centro de gravedad de la bola de plomo esté a 2,20 m del suelo, observando que otras 50 oscilaciones completas se realizan en 5 minutos 14 segundos. Calcular la altura del techo y la aceleración de la gravedad del lugar.

**96.** Un reloj de péndulo compensado que bate segundos en el ecuador se traslada al polo. Calcular el retraso o adelanto del reloj en un día. (El valor de g en el ecuador es 978 cm/s<sup>2</sup> y en el polo 983 cm/s<sup>2</sup>. En los péndulos compensados la temperatura no ejerce influencia sobre la longitud del péndulo.)

**97.** Un ascensor funciona de manera que un cable le imprime un movimiento uniformemente acelerado con una aceleración 20 veces menor que la de gravedad. Al cabo de 29 segundos el movimiento se hace uniformemente retardado, con una aceleración diez veces menor que la de la gravedad, llegando así sin velocidad al lugar de su destino. Dentro del ascensor se dispone de un dinamómetro (un resorte) del que pende una masa de 1 kg, y que ha sido graduado en el sitio del que parte el ascensor. También se dispone de un péndulo de 1 m de longitud. Calcular: 1) Las indicaciones del dinamómetro en las dos fases del movimiento. 2) Los períodos batidos por el péndulo en las mismas dos fases.

**98.** Un péndulo está constituido por una pequeña esfera, de dimensiones que consideramos despreciables, cuya masa es  $M = 200 \text{ g}$ ,

suspendida en un hilo inextensible y sin peso apreciable, de 2 m de largo. 1) Calcular el período para pequeñas amplitudes. 2) Supongamos que en el momento de su máxima elongación la esfera se ha elevado 20 cm por encima del plano horizontal que pasa por la posición de equilibrio. Calcular su velocidad y su energía cinética cuando pase por la vertical. 3) Supongamos que al pasar por la vertical el hilo encuentra un clavo  $O'$  situado 1 m por debajo del punto de suspensión  $O$  y normal al plano de oscilación. Describir el movimiento ulterior de la esfera. Calcular la relación de las tensiones del hilo cuando el péndulo alcanza sus posiciones extremas. 4) Calcular el período de este péndulo, tal como se describe en el apartado 3, para pequeñas amplitudes.

**99.** Cada vez que la partícula oscilante de un péndulo simple de longitud  $l$  y masa  $m$  pasa por su posición de equilibrio actúa sobre él, durante un pequeño intervalo de tiempo  $t$ , una fuerza  $F$  dirigida paralelamente a su velocidad. Determinar el número de oscilaciones que habrá efectuado cuando el ángulo formado por el hilo y la vertical sea de  $90^\circ$ .

**100.** Las características de un oscilador amortiguado son: Su masa  $2 \times 10^{-2}$  kg, su constante elástica  $K = 0,50$  N/m y su constante de amortiguamiento  $R = 4 \times 10^{-2}$  N/m. Se le aplica una fuerza impulsora tal que su expresión en función del tiempo, escrita en el SI es:  $F = 2 \times 10^{-2} \cos 4\pi t$ . Determinar: 1) La impedancia del oscilador a la frecuencia impuesta y el desfase angular entre la velocidad y la fuerza aplicada. 2) Las amplitudes de la elongación y de la velocidad.

**101.** Se somete a una partícula de 10 g de masa, capaz de vibrar sin rozamiento apreciable con una frecuencia de 43,2 Hz, a una fuerza externa que expresada en el SI viene dada por la ecuación:  $F = 2 \cos 100\pi t$ . 1) Determinar la amplitud de las oscilaciones forzadas que realizará la partícula. 2) ¿Qué otra frecuencia podría tener la fuerza externa para producir la misma amplitud de las oscilaciones para la partícula?

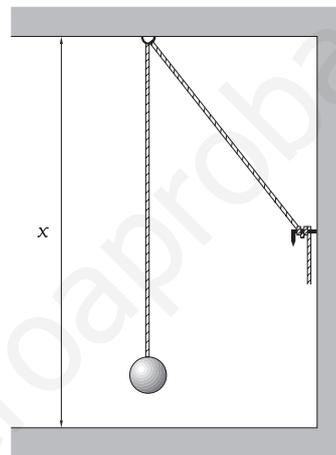
**102.** Un oscilador amortiguado de 10 g de masa y coeficiente de amortiguamiento  $R = 3,2 \times 10^{-2}$  N · s/m, oscila con fase inicial nula y con una amplitud máxima de 7 cm. Se aplica al oscilador una fuerza impulsora periódica que hace que las oscilaciones resultantes respondan a la ecuación  $x = 5 \sin(10\pi t - 0,75\pi t)$ , escrita esta última ecuación en el SI. Determinar las ecuaciones de las oscilaciones amortiguadas propias y de la fuerza periódica externa.

**103.** Las características de un oscilador amortiguado son: su masa  $m = 1$  kg, su constante elástica  $K = 5$  N/m y su constante de amortigua-

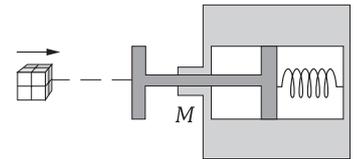
miento  $R = 2 \times 10^{-2}$  N · s/m. Se somete el oscilador a una fuerza exterior que expresada en el SI viene dada por la ecuación:  $F = 2 \cos \omega t$ . Calcular la frecuencia en la resonancia y la amplitud correspondiente.

**104.** Una masa de 250 g oscila en el extremo de un muelle de constante  $K = 1\,000$  N/m. Si experimentalmente se comprueba que en cada ciclo se disipa el 5 % de la energía del sistema, calcular: 1) El decremento logarítmico. 2) El coeficiente de amortiguamiento. 3) La frecuencia del sistema.

**105.** El dispositivo de frenado de la figura recibe desde la izquierda impactos sucesivos que lo comprimen. Se precisa que los impactos los reciba siempre en la posición inicial. Si la constante del muelle es de 100 N/m y el coeficiente de amortiguamiento de  $20$  N · s/m: 1) Calcular el valor que ha de tener la masa  $M$  del émbolo para que la frecuencia de los impactos pueda ser máxima. 2) Calcular el valor de  $M$  para que, además, reciba los impactos estando en reposo. 3) Si actuamos sobre el émbolo con una fuerza  $F = 40 \cos 2\pi t$  N, calcular el valor de  $M$  para que su velocidad al pasar por la posición de equilibrio sea máxima, y obtener el valor de dicha velocidad.



Problema VII-95.



Problema VII-105.

DINÁMICA DE LOS SISTEMAS DE PARTÍCULAS DISCRETOS

A) SISTEMAS DE PARTÍCULAS DISCRETOS

En lo que sigue, entenderemos por «SISTEMA DE PARTÍCULAS» un conjunto de ellas limitado por una superficie cerrada (real o imaginaria) que lo separa del «medio», es decir, del resto del Universo. Como ejemplos de sistemas discretos podemos pensar en el gas contenido en un recipiente, el sistema solar...

En la primera parte del tema, estudiaremos la dinámica de los «sistemas cerrados», que no intercambian masa con el medio, para concluir en la segunda parte con una referencia a los «sistemas abiertos», en los que la masa es variable; siempre dentro de la mecánica newtoniana y sin considerar efectos relativistas. En el capítulo siguiente se estudiará el «sólido rígido» como sistema continuo.

VIII - 1. Segunda ley de Newton para un sistema de partículas. Momento lineal del sistema: teorema de conservación

Supongamos un sistema de  $n$  partículas de masas  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , cuyas posiciones respecto del origen  $O$  de un sistema de referencia inercial, están definidas por los vectores de posición  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ , como en la Fig. VIII-1.

Sobre estas partículas actúan fuerzas que se pueden clasificar en dos grupos: 1) FUERZAS EXTERIORES que obran sobre cada partícula como resultado de su interacción con otras partículas no pertenecientes al sistema. Las designaremos mediante los vectores  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ . 2) FUERZAS INTERIORES, que son consecuencia de la interacción de cada partícula con el resto de las que constituyen el sistema. A la fuerza que la partícula  $m_j$  ejerce sobre la de masa  $m_i$  la designaremos  $\mathbf{F}_{ij}$ . Es evidente que en esta notación se verifica  $\mathbf{F}_{ii} = \mathbf{0}$ , para cualquier  $i$  desde 1 hasta  $n$ .

Las fuerzas interiores, en particular, verifican el principio de acción y reacción, con lo que para cualquier pareja de partículas del sistema podemos escribir:  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ .

El estudio dinámico completo del sistema requiere la determinación de la ecuación de movimiento de cada partícula. Para realizarlo consideremos una de las partículas, la de masa  $m_i$ ; aplicándole la 2ª ley de Newton se obtiene:

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i1} + \mathbf{F}_{i2} + \dots + \mathbf{F}_{in} = \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \dot{\mathbf{p}}_i = m_i \mathbf{a}_i \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ij} = \dot{\mathbf{p}}_i = m_i \mathbf{a}_i$$

Conocida la expresión de las fuerzas que actúan sobre  $m_i$ , obtendremos mediante esta ecuación la de la aceleración, e integrando respecto del tiempo, las de la velocidad y vector de posición. Por lo tanto resolviendo  $n$  ecuaciones como la anterior tendremos una información exhaustiva sobre la evolución del sistema.

Sin embargo, este modo de descripción del sistema presenta, como es obvio, varias dificultades. La primera de ellas radica en el número de partículas, que puede ser muy elevado (piénsese la tarea que supone describir el movimiento de las moléculas que existen en un recipiente de 1 l de volumen y que estando en condiciones normales contiene aproximadamente  $2,7 \times 10^{22}$ , necesitándose otras tantas ecuaciones para su explicación). Otra dificultad importante proviene de que de esta forma se necesita la expresión de las fuerzas interiores que, cuando son conocidas, son de difícil descripción.

Para solucionar esta situación se recurre a la introducción de nuevas variables, referidas al sistema en conjunto, que permiten obtener la información suficiente para afrontar cualquier problema de la dinámica newtoniana. La primera de ellas es el MOMENTO LINEAL DEL SISTEMA DE PARTÍCULAS.

Sumando las ecuaciones del movimiento de las  $n$  partículas obtenemos:

$$\sum_i \mathbf{F}_i + \sum_i \left( \sum_j \mathbf{F}_{ij} \right) = \sum_i \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_i m_i \mathbf{a}_i$$

en el segundo sumando están contenidas todas las parejas de acción y reacción entre las partículas del sistema y por tanto será nulo. Por otra parte  $\sum \mathbf{F}_i$  es la fuerza externa total, o lo que es lo mismo, la resultante de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema. Si la llamamos  $\mathbf{F}_{ex}$ , la ecuación anterior quedará:

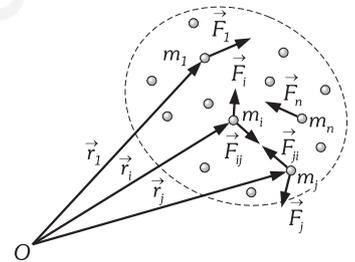


Fig. VIII-1.- Se han dibujado únicamente las fuerzas que se ejercen sobre  $m_1, m_i, m_j$  y  $m_n$  desde el exterior del sistema y solamente las interiores de interacción entre las  $m_i$  y  $m_j$ .

$$\mathbf{F}_{ext} = \sum m_i \mathbf{a}_i = \sum \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \frac{d(\sum \mathbf{p}_i)}{dt}$$

«Definimos el MOMENTO LINEAL DEL SISTEMA DE PARTÍCULAS ( $\mathbf{p}$ ) como la suma vectorial de los momentos lineales de cada una.»

$$\mathbf{p} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \dots + m_n \mathbf{v}_n = \sum m_i \mathbf{v}_i = \sum \mathbf{p}_i$$

con esto y la definición cuantitativa de fuerza como la variación temporal del momento lineal obtenemos la SEGUNDA LEY DE NEWTON para el sistema:

$$\mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \dot{\mathbf{p}} \tag{1}$$

«La fuerza total exterior que actúa sobre el sistema es igual a la variación de su momento lineal.»

Lo anteriormente dicho nos permite enunciar el TEOREMA DE CONSERVACIÓN DEL MOMENTO LINEAL PARA UN SISTEMA DE PARTÍCULAS:

«Si la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre un sistema es nula, su momento lineal se mantiene constante».

En efecto, si se verifica  $\mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0}$ , se tiene  $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{0}$ , lo que implica  $\mathbf{p} = \mathbf{cte}$ , independientemente de  $t$ .

**PROBLEMAS: 1 al 5.**

**VIII – 2. Centro de masas de un sistema de partículas. Características de su movimiento. Primera ley de Newton para un sistema de partículas**

La expresión (1) obtenida para un sistema de partículas, es idéntica a la que podríamos escribir para una sola partícula de momento lineal  $\mathbf{p} = \sum m_i \mathbf{v}_i$ , sometida a la fuerza total  $\mathbf{F}_{ext}$ . Estas ecuaciones nos hacen pensar que podemos simplificar el estudio dinámico del sistema asociándolo al de una partícula de masa  $M = \sum m_i$  y velocidad  $\mathbf{v}$ , tales que  $\mathbf{p} = M\mathbf{v}$ . Ello es posible si definimos la velocidad  $\mathbf{v}$  de la forma:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{M} = \frac{\sum m_i \mathbf{v}_i}{\sum m_i} = \dot{\mathbf{R}}$$

La posición en que debemos colocar esta hipotética partícula se obtiene integrando su velocidad respecto del tiempo:

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_i \int \mathbf{v}_i dt}{M} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sum m_i x_i}{M} \\ y = \frac{\sum m_i y_i}{M} \\ z = \frac{\sum m_i z_i}{M} \end{cases}$$

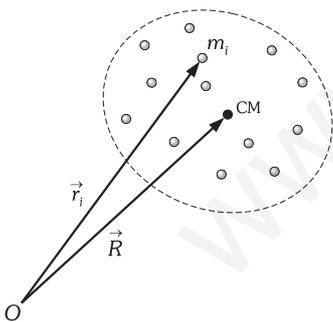


Fig. VIII-2.- Vector de posición del centro de masa de un sistema de partículas.

tal punto se denomina CENTRO DE MASAS DEL SISTEMA (CM) (Fig. VIII-2) y tiene propiedades tan importantes como las siguientes: en primer lugar, por ser:

$$\mathbf{p} = M\mathbf{v} = \sum m_i \mathbf{v}_i$$

«El momento lineal del sistema y el del centro de masas, como partícula de masa  $M$ , coinciden».

Además, por ser:

$$\mathbf{F}_{ext} = \dot{\mathbf{p}} = \frac{d(M\mathbf{v})}{dt}$$

«Si la fuerza exterior sobre el sistema es nula,  $\mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0}$ , el momento lineal del centro de masas permanece constante,  $\mathbf{p} = M\mathbf{v} = \mathbf{cte}$ ».

En función de estas nuevas variables, la SEGUNDA LEY DE NEWTON para el sistema de partículas, puede escribirse:

$$\mathbf{F}_{ext} = M \ddot{\mathbf{R}} = M \dot{\mathbf{v}} = M \mathbf{a}$$

(PRIMERA ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO PARA UN SISTEMA DE PARTÍCULAS)

donde  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{a}$  son la posición, velocidad y aceleración del CM del sistema. Dicho de otra forma:

«El centro de masa de un sistema de partículas se mueve como si la masa de todo el sistema estuviese concentrada en él y la resultante de todas las fuerzas exteriores estuviera aplicada en dicho punto».

Y puesto que en la expresión anterior sólo aparecen las fuerzas exteriores al sistema:

«Las fuerzas interiores no afectan al movimiento del centro de masas».

Esta descripción del sistema como si se tratase de una partícula situada en el CM, nos da información suficiente sobre el movimiento del sistema como un todo, pero no proporciona ningún dato de los movimientos relativos de las partículas, ni de posibles rotaciones del sistema.

Para el caso en que el sistema de partículas sea aislado, es decir, si no actúa sobre él ninguna fuerza externa ( $\mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0}$ ) entonces  $\mathbf{p} = M\mathbf{v} = \mathbf{cte}$  y como  $M = \sum m_i$  es en cualquier circunstancia un invariante del sistema aislado, podemos enunciar:

«El centro de masa de un sistema aislado tiene un movimiento de velocidad constante (posee un movimiento rectilíneo y uniforme) respecto de cualquier sistema inercial».

Esta última consecuencia la consideramos como la generalización de la PRIMERA LEY DE NEWTON para un sistema de partículas.

**PROBLEMAS: 6 al 28.**

### VIII – 3. Impulso lineal para un sistema de partículas

Análogamente a la definición dada en el párrafo V-11 se define IMPULSO LINEAL para un sistema de partículas en un intervalo de tiempo  $dt$ , como:

$$d\mathbf{I} = \mathbf{F}_{ext} dt$$

que integrada entre dos instantes, y teniendo en cuenta (1), obtenemos:

$$\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{ex} dt = \int_{\mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}_2} d\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \Delta\mathbf{p}$$

que nos expresa que el impulso lineal del sistema en un intervalo de tiempo  $\Delta t = t_2 - t_1$ , es igual a la variación del momento lineal.

El PROMEDIO TEMPORAL DE LA FUERZA EXTERNA que actúa sobre el sistema (suma de las fuerzas externas que actúan sobre cada partícula del sistema), lo definimos:

$$\langle \mathbf{F}_{ext} \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{ext} dt = \frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t}$$

**PROBLEMAS: 29 al 31.**

### VIII – 4. Sistema de referencia centro de masas (o sistema de momento lineal nulo)

Es muy útil, en muchas ocasiones, observar la evolución del sistema de partículas desde el propio centro de masas, considerando un sistema de referencia centrado en él. Una de las razones por la que procedemos de esta forma reside en el hecho de que magnitudes físicas tales como el momento angular y la energía cinética, se expresan como suma de dos sumandos, uno el que se obtiene identificando al sistema con el movimiento de una partícula única de masa  $M = \sum m_i$  situada en el CM y el segundo función solamente del movimiento relativo de las distintas partes del sistema con respecto al CM.

El sistema así elegido para completar la información del movimiento del sistema de partículas suele denominarse SISTEMA DE REFERENCIA CENTRO DE MASAS y es en general *no inercial*.

En la Fig. VIII-3, O es el origen de un sistema inercial respecto del cual  $n$  partículas de masas  $m_1, m_2, \dots, m_n$  se encuentran, en un instante, en posiciones determinadas por sus radios vectores  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$  y en dicho momento sus velocidades son  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ ; la expresión de  $\mathbf{R}$ , vector de posición del centro de masas del sistema en ese instante, será:

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M}$$

Si nos referimos al centro de masa como origen y llamaremos  $\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \dots, \mathbf{r}'_n$ ; a los vectores de posición de las  $n$  partículas, entonces:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{0} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}'_i}{M} \Rightarrow \sum m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{0}$$

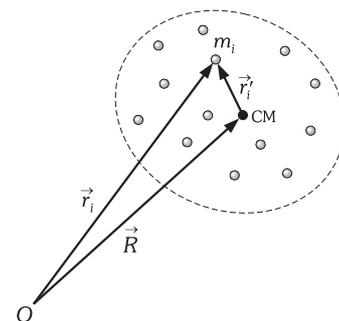


Fig. VIII-3.- Sistema de referencia CM.

De la figura deducimos:  $\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i$ , y derivando con respecto al tiempo:  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v} + \mathbf{v}'_i$ , en la que  $\mathbf{v}_i$  es la velocidad de la partícula  $m_i$  referida a  $O$ ,  $\mathbf{v}$  es la velocidad del centro de masas referida a  $O$ , y  $\mathbf{v}'_i$  es la velocidad de la partícula  $m_i$  referida al centro de masas como origen (o lo que es lo mismo, la velocidad de la partícula tal como la mediría un observador montado en el centro de masas).

Característica importante de este sistema de referencia es que respecto de él, el momento lineal es nulo; en efecto:

$$\mathbf{p}' = \sum m_i \mathbf{v}'_i = \sum m_i \mathbf{v}_i - \sum m_i \left( \frac{\sum m_i \mathbf{v}_i}{M} \right) = \mathbf{0}$$

y en consecuencia, por ser  $\mathbf{R}' = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{p}' = \mathbf{0}$ , el estudio del movimiento de las partículas que realice el observador ligado al CM no se verá afectado por sus propias velocidad y posición.

Resumiendo lo anteriormente expuesto, diremos que el estudio dinámico de un sistema de partículas lo podemos dividir en dos partes: la primera constará de la información que dé un observador ligado a un sistema de referencia inercial y que vea el sistema de partículas como una partícula única situada en el CM, y la segunda, de la que dé un observador ligado al CM y que se mueva con él.

### VIII – 5. Principio de conservación del momento lineal

Al igual que para la energía, uno de los principios más fundamentales y universales de la Física es el PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DEL MOMENTO LINEAL para un sistema de partículas aislado, es decir, cuando solamente existen interacciones entre ellas, no existiendo interacción alguna con el exterior del sistema, entonces se cumple:

*«El momento lineal total de un sistema de partículas aislado, referido a un sistema inercial cualquiera, permanece constante con el tiempo.»*

De forma inmediata deducimos de este principio la primera ley de Newton, puesto que para la partícula libre (sin interacciones externas sobre ella o si la suma de éstas es nula) se verificará  $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \mathbf{cte} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{cte}$ , puesto que la masa  $m$  es siempre la misma en cualquiera que sea la situación en que la medimos; demostrando de esta forma la primera ley de Newton.

De la aplicación del principio de conservación del momento lineal a dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  que interaccionan entre sí, si inicialmente el momento lineal que poseen es  $\mathbf{p}_1 = m_1 \mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{p}_2 = m_2 \mathbf{v}_2$ , y después de la interacción su momento lineal es  $\mathbf{p}'_1 = m_1 \mathbf{v}'_1$  y  $\mathbf{p}'_2 = m_2 \mathbf{v}'_2$ , obtenemos:

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 \Rightarrow m_1 \mathbf{v}'_1 - m_1 \mathbf{v}_1 = -(m_2 \mathbf{v}'_2 - m_2 \mathbf{v}_2) \Rightarrow \Delta \mathbf{p}_1 = -\Delta \mathbf{p}_2$$

que nos relaciona los cambios de momento lineal de las partículas. Si el tiempo transcurrido en tal intercambio es  $\Delta t = t' - t$ , dividiendo ambos miembros de la ecuación obtenida por  $\Delta t$  nos queda:

$$\frac{\Delta \mathbf{p}_1}{\Delta t} = - \frac{\Delta \mathbf{p}_2}{\Delta t}$$

y para un instante determinado, haciendo tender  $\Delta t$  a cero, y pasando al límite, obtenemos:

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = - \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{p}}_1 = -\dot{\mathbf{p}}_2$$

aplicando a esta última la definición de fuerza como la variación temporal del momento lineal y llamamos  $\mathbf{F}_{12} = d\mathbf{p}_1/dt$  a la fuerza ejercida sobre la partícula 1 por estar en presencia de la 2, y  $\mathbf{F}_{21} = d\mathbf{p}_2/dt$  a la ejercida sobre la partícula 2 por estar en presencia de la 1, escribiremos:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

que constituye la tercera ley de Newton para dos partículas, tal y como se enunció en el párrafo V-9.

Supongamos ahora dos sistemas de partículas  $S$  y  $S'$  aislados del resto del universo pero que interaccionan entre ellos; si  $S$  tiene  $n$  partículas de masas  $m_1, m_2, \dots, m_n$  que en un instante determinado poseen las velocidades  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ , y  $S'$  tiene  $m$  partículas de masas  $m'_1, m'_2, \dots, m'_m$  con velocidades  $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_m$ , al evolucionar como si fueran un sistema aislado único, compuesto por ambos, el principio de conservación del momento lineal de este sistema compuesto y aislado nos conduce a que sea constante con el tiempo, es decir:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^m m'_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{p}_S + \mathbf{p}_{S'} = \mathbf{cte}$$

al interaccionar entre ellos y para que ésta ecuación se verifique, para cualquier cambio en el momento lineal de  $S$  tiene que producirse en  $S'$  un cambio igual y de signo contrario, es decir:  $\Delta \mathbf{p}_S = \Delta \mathbf{p}_{S'}$ , describiéndose por esta causa la interacción entre  $S$  y  $S'$  como un intercambio de momento lineal.

Para un determinado instante, dividimos los dos miembros de la ecuación anterior por  $\Delta t$  (tiempo de duración de la interacción), haciéndolo tender a cero y pasando al límite nos queda:  $d\mathbf{p}_S/dt = d\mathbf{p}_{S'}/dt$ , y la definición de fuerza nos conduce a:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

siendo  $\mathbf{F}_{12}$  la fuerza total que el sistema  $S'$  ejerce sobre el  $S$ , y  $\mathbf{F}_{21}$  la que ejerce sobre  $S'$  el sistema  $S$ . Queda así demostrada la tercera ley de Newton para dos sistemas de partículas. De los resultados obtenidos deducimos que los sistemas de partículas en interacción pueden ser tratados como si fueran partículas.

En resumen, partiendo del principio de conservación del momento lineal de un sistema de partículas aislado, hemos deducido la primera y tercera leyes de Newton, siendo por lo tanto estos dos teoremas; la segunda ley de Newton es un principio definitorio que nos cuantifica la interacción entre partículas o sistemas, tomando el valor de la variación temporal del momento lineal.

### VIII - 6. Sistemas con masa variable

Supongamos un cuerpo en movimiento que absorbe una corriente de materia (Fig. VIII-4). Si en un instante determinado  $t$ , la masa del cuerpo es  $M$  y su velocidad  $\mathbf{v}$ , moviéndose la corriente de materia con la velocidad  $\mathbf{u} > \mathbf{v}$ , dando alcance al cuerpo e incrustándose en él, entonces es el instante  $t + dt$  la masa del cuerpo habrá aumentado en  $dm$  y su velocidad pasará de  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ . El momento lineal del sistema cuerpo y  $dm$  captada, será en el instante  $t$ :  $M\mathbf{v} + \mathbf{u}dm$ ; y en el  $t + dt$ :  $(M + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v})$ ; la variación total de momento lineal será:

$$d\mathbf{p} = (M + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) - (M\mathbf{v} + \mathbf{u}dm) = M d\mathbf{v} + [(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) - \mathbf{u}] dm$$

la cantidad  $\mathbf{u} - (\mathbf{v} + d\mathbf{v}) = \mathbf{v}_{rel}$  es la velocidad relativa de la corriente de materia respecto del cuerpo; dividiendo por  $dt$  y teniendo en cuenta la primera ecuación del movimiento, nos queda:

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_{ext} = M \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{v}_{rel} \frac{dm}{dt} \Rightarrow \boxed{M \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} + \mathbf{v}_{rel} \dot{m}} \quad (2)$$

el último término de esta ecuación es el ritmo con que se transmite «impulso» hacia el cuerpo (o fuera de él, entonces el signo de  $\mathbf{v}_{rel} \dot{m}$  sería negativo) por efecto de la masa que adquiere (o emite). Puede interpretarse como la fuerza ejercida sobre el sistema por la masa que se une a él (o lo abandona).  $\mathbf{F}$  es la resultante de todas las fuerzas exteriores aplicadas al cuerpo, en la que naturalmente no entra la que sobre él ejerce el chorro de materia.

### VIII - 7. Cohetes y motores a reacción

La aplicación más importante del problema de los sistemas de masa variable, son los COHETES Y MOTORES A REACCIÓN entendiéndose como tales aquellos en los que su propulsión se realiza por la reacción mecánica de un chorro de gas, produciéndose un movimiento del sistema solidario al motor de sentido contrario al de los gases.

Existen dos tipos de motores a reacción o termopropulsores. Los PROPULSORES AUTÓNOMOS llevan en sí el combustible y el comburente necesarios para provocar el chorro de gas saliente a la velocidad adecuada. El avance de estos cohetes (con combustible y comburente sólidos) o reactores (con combustible líquido y comburente líquido o gaseoso) no está supeditado a la existencia de aire exterior; pueden avanzar, por tanto, fuera de la atmósfera.

Consideremos el caso más sencillo de propulsor autónomo, en él, al propulsarse existe una disminución de masa en el tiempo  $dt$ , pasando de  $M$  a  $M - dM$ , aumentando su velocidad, con lo que la ecuación (2) del cohete será:

$$\boxed{M \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} - \mathbf{v}_{rel} \dot{M} = \mathbf{F} - \mathbf{F}_p}$$

el último término de esta ecuación recibe el nombre de FUERZA PROPULSORA ( $\mathbf{F}_p$ ) que compuesta con las fuerzas externas, es decir con la atracción gravitatoria, con la resistencia del aire al avance y la provocada por la disminución de presión en la parte superior del reactor que avanza (estudios de Aerodinámica), da una resultante que produce el movimiento adecuado.

Si volamos en el espacio vacío y libre de fuerzas externas la ecuación anterior nos queda:

$$M \frac{dv}{dt} = -v_{rel} \frac{dM}{dt} \Rightarrow dv = -v_{rel} \frac{dM}{M}$$

Si en el instante inicial el cohete tiene una masa  $M_0$  y una velocidad  $v_0$  y para alcanzar una velocidad  $v$  gasta una masa  $m$  de combustible y comburente, la masa del cohete en este tiempo habrá disminuido a  $M_0 - m$ ; la integración de la última expresión nos conduce a:

$$\int_{v_0}^v dv = -v_{rel} \int_{M_0}^{M_0 - m} \frac{dM}{M} \Rightarrow v - v_0 = v_{rel} \ln \frac{M_0}{M_0 - m}$$

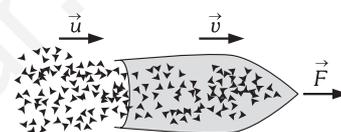


Fig. VIII-4.- La corriente de materia con velocidad  $u > v$  da alcance al cuerpo y se incrusta en él.

en la que se ha supuesto que la VELOCIDAD DE EXPULSIÓN DE LOS GASES ( $\mu = dM/dt = m/t$ ) es constante en todo el tiempo ( $t$ ) que ha durado la propulsión. Por tanto, el cambio de velocidad del cohete dependerá de la velocidad de expulsión (que tiene un sentido opuesto) y de la fracción de masa emitida en ese tiempo. La expresión anterior la podemos escribir:

$$\frac{M_0}{M_0 - m} = e^{(v - v_0)/v_{rel}}$$

si la propulsión se efectúa a velocidad nula ( $v_0 = 0$ ) la ecuación del cohete se escribirá:

$$\frac{M_0}{M_0 - \mu t} = e^{v/v_{rel}}$$

en la que  $\mu$  (como se ha dicho) es la masa de gas lanzada por segundo.

LOS PROPULSORES NO AUTÓNOMOS han de captar como comburente aire atmosférico; no son aptos para viajar fuera de la atmósfera. Una de las modalidades de los propulsores no autónomos o de propulsión ligada son los TURBO-REACTORES en los que el aire captado por el motor es sometido a un compresor antes de intervenir en la combustión.

Supongamos que el turbo-reactor capta una masa de aire  $dm$  en el tiempo  $dt$  lo suficientemente pequeño como para poder considerar como constantes la velocidad  $v$  con que es captada la masa  $dm$  de aire y la  $v_{rel}$  de salida de los gases con respecto al aparato. Si  $dm'$  es la masa de combustible gastada en el tiempo  $dt$ , el impulso que recibe el turbo-reactor es:

$$F_p dt = (dm + dm') v_{rel} - v dm$$

y la fuerza propulsora será:

$$F_p = \frac{d(m + m')}{dt} v_{rel} - v \frac{dm}{dt}$$

$d(m + m')/dt$  es la masa de gases de combustión lanzada en un segundo a la velocidad  $v'$  con respecto al turbo-reactor;  $dm/dt$  es la masa de aire captada por segundo a la velocidad  $v_{rel}$ .

Al igual que en el caso de los propulsores autónomos la fuerza  $F_p$  compuesta con las demás que actúan sobre el aparato (atracción gravitatoria, resistencias, etc.) determinan el movimiento del turbo-reactor.

**PROBLEMAS: 32 al 36.**

## B) MAGNITUDES DINÁMICAS ANGULARES DE LOS SISTEMAS DE PARTÍCULAS

### VIII – 8. Segunda ecuación del movimiento para un sistema de partículas. Momento angular del sistema. Principio de conservación del momento angular

Supongamos que tenemos un sistema de  $n$  partículas de masas  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ ; cuyos vectores de posición con respecto a un punto  $O$ , en un instante determinado son:  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$  y sus velocidades con respecto a  $O$  son:  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ .

Definimos MOMENTO ANGULAR DEL SISTEMA CON RESPECTO AL PUNTO  $O$  como: «El vector ( $J$ ) resultado de la suma de los productos vectores del vector de posición de cada partícula, por su momento lineal.»

$$J = r_1 \times p_1 + r_2 \times p_2 + \dots + r_n \times p_n = \sum r_i \times p_i$$

Estudiemos la variación de  $J$  con el tiempo. Derivando respecto de  $t$  obtenemos:

$$j = \frac{d}{dt} \left( \sum r_i \times p_i \right) = \sum \frac{d(r_i \times p_i)}{dt} = \sum \dot{r}_i \times p_i + \sum r_i \times \dot{p}_i$$

el primer sumando es:

$$\sum \dot{r}_i \times p_i = \sum v_i \times m_i v_i = 0$$

puesto que los dos vectores son paralelos. En el segundo sumando:

$$\dot{p}_i = F_i + \sum F_{ij}$$

es decir, la suma de las fuerzas externas e internas que actúan sobre la partícula  $i$ -ésima; luego:

$$j = \sum r_i \times \left( F_i + \sum F_{ij} \right) = \sum r_i \times F_i + \sum r_i \times \left( \sum F_{ij} \right) \tag{3}$$

el primer sumando es la resultante de todos los momentos de las fuerzas exteriores respecto de  $O$ , El segundo sumando es la resultante de los momentos de todas las fuerzas interiores respecto de  $O$ , y resultar ser nulo; en efecto: centremos el problema en el estudio de dos partículas cualesquiera del sistema, la  $m_i$  y la  $m_j$ , (Fig. VIII-5), como  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ , la suma de los momentos respecto a  $O$  de estas fuerzas interiores es:

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} - \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0}$$

por ser estos dos últimos vectores paralelos; y puesto que en el sistema, todas las fuerzas interiores aparecen por parejas, el momento total interno será nulo, es decir:

$$\sum_i \mathbf{N}_{int} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \sum_j \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0}$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior y llamando  $\mathbf{N}_{ext}$  a la suma de los momentos de las fuerzas exteriores respecto de  $O$ , la expresión (3) resulta:

$$\mathbf{N}_{ext} = \frac{d\mathbf{J}}{dt} = \dot{\mathbf{J}} \tag{4}$$

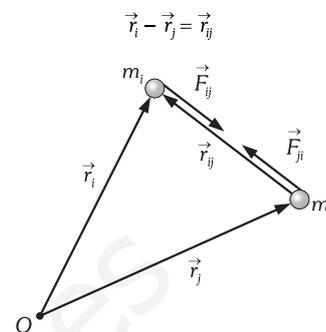


Fig. VIII-5.- Dibujamos solamente las fuerzas de interacción entre las partículas  $m_i$  y  $m_j$ .

que es la SEGUNDA ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO para un sistema de partículas y que podemos expresar de la forma:

«La variación temporal del momento angular de un sistema de partículas respecto a un punto origen de un sistema inercial, es igual al momento total de las fuerzas exteriores aplicadas al sistema, referido al mismo punto que el momento angular».

Según todo lo anterior:

«Las fuerzas interiores no pueden modificar el momento angular de un sistema de partículas».

Si el momento total de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema es nulo, entonces:

$$\mathbf{N}_{ext} = \mathbf{0} \Rightarrow \dot{\mathbf{J}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{J} = cte$$

pudiéndose enunciar el correspondiente TEOREMA DE CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR:

«Si el momento total de las fuerzas exteriores, que actúan sobre un sistema de partículas, respecto de un punto  $O$  es nulo, entonces el momento angular del sistema es constante con el tiempo respecto de  $O$ ».

Obsérvese que este teorema no exige necesariamente que se mantengan constantes los momentos angulares de las distintas partículas que componen el sistema; sin embargo sus variaciones no pueden ser arbitrarias, no son independientes unas de otras, puesto que su suma total tiene que ser cero.

Para un sistema aislado el anterior teorema puede enunciarse como el PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR:

«El momento angular de un sistema aislado permanece constante en el tiempo».

Este principio, los de conservación de la energía y del momento lineal y el de la conservación de la carga eléctrica, que enunciaremos en los capítulos de Electromagnetismo, son universales y se verifican en todos los procesos que ocurren en el Universo, por este motivo se les considera más básicos que las leyes de Newton.

### VIII - 9. Momentos angulares orbital e interno (spin)

Vamos a determinar la relación que existe entre el momento angular de un sistema de partículas, con el momento angular de una partícula de masa  $M = \sum m_i$  situada en el CM y el momento angular de las partículas medido desde el sistema CM. Para lo cual, teniendo en cuenta la formulación obtenida en el párrafo VIII-4, tendremos:

$$\mathbf{J} = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times m_i (\mathbf{v} + \mathbf{v}'_i)$$

y aplicando la propiedad distributiva del producto vectorial nos queda:

$$\mathbf{J} = \sum \mathbf{R} \times m_i \mathbf{v} + \sum \mathbf{R} \times m_i \mathbf{v}'_i + \sum \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v} + \sum \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i$$

operando en el segundo y tercer sumando de la ecuación anterior, nos dan cero; en efecto:

$$\sum \mathbf{R} \times m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{R} \times \sum m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{0} \quad \text{por ser} \quad \sum m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{p}' = \mathbf{0}$$

$$\sum \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v} = \sum m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v} = M \mathbf{R}' \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{por ser} \quad \mathbf{R}' = \mathbf{0}$$

con lo que obtenemos:

$$\mathbf{J} = \sum \mathbf{R} \times m_i \mathbf{v} + \sum \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{R} \times (\sum m_i) \mathbf{v} + \sum \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{J} = \mathbf{R} \times M \mathbf{v} + \sum \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i} \quad (5)$$

Llamando al primer sumando MOMENTO ANGULAR ORBITAL ( $\mathbf{L}$ ) y al segundo sumando MOMENTO ANGULAR INTERNO ( $\mathbf{S}$ ), o SPIN, pondremos:

$$\boxed{\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}}$$

«El momento angular de un sistema de partículas con respecto a un punto  $O$ , es igual al momento angular de una partícula de masa igual a la suma de todas ellas, concentrada en el centro de masas, más el momento angular debido al movimiento de las partículas alrededor de (referido a) su centro de masas.»

El momento angular interno es nulo cuando:

1)  $\mathbf{r}'_i$  y  $\mathbf{v}'_i$  son paralelos, es decir, si todas las partículas se mueven hacia o alejándose del CM radialmente.

2)  $\mathbf{v}'_i = \mathbf{0}$ , es decir:  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}$  y todas las partículas poseen la misma velocidad que el CM por lo tanto el sistema se mueve con traslación pura (sin giro).

Si el único movimiento del sistema es el de rotación alrededor de un eje que pasa por el CM, entonces  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  y todo el momento angular del sistema se reduce a su momento angular interno.

**PROBLEMAS: 37 al 40.**

### VIII – 10. Momento de las fuerzas exteriores respecto del centro de masas

En la cuestión VIII-4 se obtenía la relación entre vectores de posición:  $\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i$ , que sustituida en la expresión del momento total de las fuerzas exteriores para un sistema de partículas, conduce a:

$$\mathbf{N}_{ext} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{R} \times \sum \mathbf{F}_i + \sum \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{R} \times \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{N}_{CM} \quad (6)$$

donde hemos llamado  $\mathbf{N}_{CM}$ , al momento de las fuerzas externas respecto al CM. Por otro lado derivando la expresión (5) con respecto al tiempo, resulta:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} \times M\mathbf{v} + \mathbf{R} \times M \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{S}}{dt}$$

en la que el primer miembro no es otra cosa que  $\mathbf{N}_{ext}$ ; el primer sumando del segundo miembro es nulo, ya que  $\mathbf{v} \times M\mathbf{v} = \mathbf{0}$  por ser los dos vectores paralelos; y en el segundo sumando nos queda:

$$\mathbf{R} \times M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}_{ext}$$

resultando, por tanto, la expresión:

$$\mathbf{N}_{ext} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}_{ext} + \frac{d\mathbf{S}}{dt}$$

que comparada con (6) nos determina:

$$\boxed{\mathbf{N}_{CM} = \frac{d\mathbf{S}}{dt} = \dot{\mathbf{S}}}$$

esta ecuación se diferencia de la (4) en que el momento angular y el momento externo en ella se miden con relación al CM, y es válida aun no siendo éste origen de un sistema de referencia inercial. La expresión anterior es de gran utilidad en el estudio de la dinámica del sólido rígido.

### VIII – 11. El problema de los dos cuerpos. Masa reducida

Se llama PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS al estudio del movimiento de dos partículas aisladas, es decir, que sobre ellas no actúan fuerzas externas y únicamente se ejercen sobre ellas las fuerzas internas de interacción entre ambas; conocidas éstas, las ecuaciones del movimiento de ambas partículas serán:

$$\mathbf{F}_{12} = m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_1} = \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \quad \mathbf{F}_{21} = m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_2} = \frac{d\mathbf{v}_2}{dt}$$

teniendo en cuenta que  $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{12}$  es la velocidad de  $m_1$  relativa a  $m_2$  (velocidad dada por un observador montado en  $m_2$ ) y que  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ , restando las dos ecuaciones anteriores nos queda:

$$\frac{d(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{dt} = \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_2} \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{v}_{12}}{dt} = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{F}_{12} \Leftrightarrow \mathbf{a}_{12} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \mathbf{F}_{12}$$

Se llama MASA REDUCIDA a la cantidad:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

con lo que el valor de la aceleración relativa en función de esta cantidad será:

$$\mathbf{a}_{12} = \frac{\mathbf{F}_{12}}{\mu} \Leftrightarrow \mathbf{F}_{12} = \mu \mathbf{a}_{12}$$

expresión de la que deducimos el teorema siguiente:

«El movimiento relativo de dos partículas sujetas a su interacción mutua es equivalente al movimiento, respecto a un observador inercial, de una partícula de masa igual a la masa reducida sometida a una fuerza igual a la de interacción entre ambas».

La introducción del sistema de referencia de centro de masas nos ha permitido separar el estudio dinámico de un sistema de  $n$  partículas en dos partes, el movimiento del CM con masa  $M = \sum m_i$  respecto de un sistema de referencia inercial y el movimiento de las partículas respecto del CM. Lógicamente, este proceso se puede seguir de la misma forma expuesta hasta ahora para dos partículas no sometidas a fuerzas exteriores.

Las expresiones de los momentos lineal y angular de este sistema respecto del CM, adoptan una forma especialmente útil. En efecto: las posiciones de las partículas respecto del CM son:

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 \mathbf{r}_{12}}{m_1 + m_2}$$

$$\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R} = \frac{m_1 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{m_1 + m_2} = - \frac{m_1 \mathbf{r}_{12}}{m_1 + m_2}$$

las respectivas velocidades son:

$$\mathbf{v}'_1 = \frac{d\mathbf{r}'_1}{dt} = \frac{m_2 \mathbf{v}_{12}}{m_1 + m_2} \quad \mathbf{v}'_2 = \frac{d\mathbf{r}'_2}{dt} = - \frac{m_1 \mathbf{v}_{12}}{m_1 + m_2}$$

con lo que los momentos lineales resultan:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'_1 = m_1 \mathbf{v}'_1 &\Rightarrow \mathbf{p}'_1 = \mu \mathbf{v}_{12} \\ \mathbf{p}'_2 = m_2 \mathbf{v}'_2 &\Rightarrow \mathbf{p}'_2 = -\mu \mathbf{v}_{12} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mathbf{0}$$

es decir, el momento lineal interno de las dos partículas es nulo.

Y para el momento angular interno:

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{p}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}_{12} \times \mu \mathbf{v}_{12}$$

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{r}'_2 \times \mathbf{p}'_2 = - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}_{12} \times (-\mu \mathbf{v}_{12})$$

con lo que:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) \mathbf{r}_{12} \times \mu \mathbf{v}_{12} \Rightarrow \mathbf{S} = \mathbf{r}_{12} \times \mu \mathbf{v}_{12}$$

Estas expresiones nos indican que podemos reducir el problema de dos cuerpos con interacción mutua a un problema de un solo cuerpo de masa  $\mu$ , velocidad  $\mathbf{v}_{12}$  y vector de posición respecto del centro de masas  $\mathbf{r}_{12}$ , lo cual constituye una gran simplificación. Podemos de esta forma estudiar el movimiento de un electrón respecto del núcleo considerando ambos reducidos a una partícula de masa  $\mu$  sometida a la fuerza de interacción eléctrica entre ellos; o el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra como un cuerpo, de masa la reducida del sistema, bajo la acción de una fuerza igual a la atracción gravitatoria entre ambos cuerpos.

PROBLEMAS: 41 y 42.

### C) ENERGÍA EN LOS SISTEMAS DE PARTÍCULAS

#### VIII - 12. Energía cinética de un sistema de partículas. Energía cinética interna del sistema

Si  $n$  partículas de masas  $m_1, m_2, \dots, m_n$  se encuentran, en un instante, en posiciones referidas a un sistema inercial de origen  $O$  y determinadas por los vectores  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$  y en dicho momento

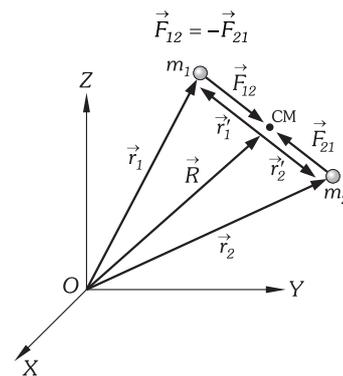


Fig. VIII-6.- Sobre las partículas  $m_1$  y  $m_2$  solamente actúan las fuerzas de interacción entre ellas. La ausencia de fuerzas externas hace que  $\dot{\mathbf{v}}_{CM} = cte.$

## 176 DINÁMICA DE LOS SISTEMAS DE PARTÍCULAS DISCRETOS

sus velocidades son  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ . La energía cinética del sistema será la suma de las energías cinéticas de cada una de ellas.

$$T = \sum T_i = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i$$

En la cuestión del sistema de referencia de centro de masas, se obtenía:  $\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i \Rightarrow \mathbf{v}_i = \mathbf{v} + \mathbf{v}'_i$ , en la que  $\mathbf{v}_i$  es la velocidad de la partícula  $m_i$  referida a  $O$ ,  $\mathbf{v}$  es la velocidad del CM referida a  $O$  y  $\mathbf{v}'_i$  es la velocidad de la partícula  $m_i$  referida al CM como origen (o lo que es lo mismo, la velocidad de la partícula tal como la mediría un observador montado en el centro de masa). Si sustituimos en la anterior, nos queda:

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v} + \mathbf{v}'_i) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{v}'_i)$$

y aplicando la propiedad distributiva del producto escalar obtenemos:

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v^2 + \sum m_i (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_i) + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

y teniendo en cuenta que en el sistema de referencia CM el momento lineal total es nulo, el segundo sumatorio se anula:  $\sum m_i (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_i) = \mathbf{v} \cdot \sum m_i \mathbf{v}'_i = 0$ , entonces, la expresión de la energía cinética, llamando  $M = \sum m_i$ , nos queda:

$$T = \frac{1}{2} M v^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \quad (7)$$

«La energía cinética de un sistema de partículas es la suma de la de una partícula de masa  $M = \sum m_i$  que se mueve con la velocidad del centro de masas y la energía cinética del sistema debida a su movimiento respecto del centro de masas».

Llamaremos ENERGÍA CINÉTICA INTERNA del sistema a la energía referida al centro de masa:

$$T_{int} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

Si el sistema posee movimiento de traslación, entonces todas las partículas tienen la misma velocidad que el centro de masa y por tanto todas las  $v'_i$  son cero y el primer término de la (7) expresa la energía cinética total. Pero si además del movimiento del centro de masa, existe «movimiento interno» en el que las partículas tienen movimiento respecto a dicho punto, entonces la energía cinética del sistema aumenta en el valor dado por la ecuación anterior.

En el caso particular de un sistema de dos partículas (problema de dos cuerpos), la energía cinética interna adopta una forma muy simplificada. Su expresión es:

$$T_{int} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

y como  $\mathbf{v}'_1 = m_2 \mathbf{v}_{12} / (m_1 + m_2)$  y  $\mathbf{v}'_2 = -m_1 \mathbf{v}_{12} / (m_1 + m_2)$ , sustituyendo se obtiene:

$$T_{int} = \frac{1}{2} m_1 \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \mathbf{v}_{12} \cdot \mathbf{v}_{12} + \frac{1}{2} m_2 \left( -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \mathbf{v}_{12} \cdot \mathbf{v}_{12} = \frac{1}{2} \mu v_{12}^2$$

y la energía cinética del sistema de dos partículas se escribirá:

$$T = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} \mu v_{12}^2$$

### VIII - 13. Relación entre la variación de la energía cinética de un sistema y el trabajo de las fuerzas aplicadas. Trabajo de las fuerzas interiores

Supongamos que tenemos dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  sobre las que en un instante determinado actúan las fuerzas externas  $\mathbf{F}_1$  y  $\mathbf{F}_2$  y las internas  $\mathbf{F}_{12}$  y  $\mathbf{F}_{21}$ ; en ese mismo instante las partículas se mueven con velocidad  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  estando sobre sus trayectorias  $C_1$  y  $C_2$  en las posiciones referidas a  $OXYZ$  definidas por  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  (Fig. VIII-7). Las ecuaciones del movimiento para ambas serán:

$$m_1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12}$$

$$m_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21}$$

en un tiempo  $dt$ , las partículas se desplazarán  $d\mathbf{r}_1$  y  $d\mathbf{r}_2$ ; multiplicando escalarmente estas ecuaciones por  $d\mathbf{r}_1$  y  $d\mathbf{r}_2$  respectivamente, nos queda:

$$m_1 \mathbf{a}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 = \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_1$$

$$m_2 \mathbf{a}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 = \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 + \mathbf{F}_{21} \cdot d\mathbf{r}_2$$

sumando estas dos ecuaciones, teniendo en cuenta que  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$  y que  $d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{r}_2 = d(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = d\mathbf{r}_{12}$ , obtenemos:

$$m_1 \mathbf{a}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 = \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 + \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12}$$

Integrando desde un tiempo  $t_0$  (en que la posición de ambas partículas la llamaremos A y a la energía cinética de ambas  $T_0$ ) hasta un tiempo  $t$  (en que la posición de ambas partículas la llamaremos B y a la energía cinética de ambas  $T$ ), en el que la partícula  $m_1$  pasa de  $\mathbf{v}_{10}$  a  $\mathbf{v}_1$  y la  $m_2$  de  $\mathbf{v}_{20}$  a  $\mathbf{v}_2$ ; y teniendo en cuenta las operaciones hechas en la demostración del teorema de las fuerzas vivas para una partícula, nos quedará:

$$\left( \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 \right) + \left( \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 \right) = \int_A^B (\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2) + \int_A^B \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12}$$

o lo que es lo mismo:

$$T - T_0 = W_{ext} + W_{int} \tag{8}$$

en la que como ya hemos dicho:

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \tag{9}$$

$$T_0 = \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 \tag{10}$$

son las energías cinéticas totales del sistema de las dos partículas en los instantes  $t$  y  $t_0$ .

Hemos llamado:

$$W_{ext} = \int_A^B (\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2) \tag{11}$$

que nos mide el trabajo total hecho por las fuerzas exteriores en el mismo intervalo de tiempo. Y por último:

$$W_{int} = \int_A^B \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12} \tag{12}$$

nos mide el trabajo hecho, entre  $t_0$  y  $t$ , por las fuerzas interiores.

Este desarrollo hecho para dos partículas es válido para un sistema compuesto por cualquier número de ellas. Las expresiones (9), (10), (11) y (12) para un sistema de  $n$  partículas serán:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \qquad T_0 = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i0}^2$$

$$W_{ext} = \sum_i \int_A^B \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i \qquad W_{int} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \int_A^B \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij}$$

obsérvese que las tres primeras tienen un término para cada partícula, mientras que el trabajo para las fuerzas interiores sólo tiene un término para cada par.

Por tanto, se expresará el TEOREMA DE LAS FUERZAS VIVAS PARA UN SISTEMA DE PARTÍCULAS diciendo:

«El trabajo total de todo tipo de fuerzas que actúan sobre un sistema de partículas, es igual a la variación de la energía cinética que experimenta el sistema».

Llamando  $W$  al trabajo total, expresamos matemáticamente este teorema:

$$W = \Delta T = T - T_0$$

Evidentemente, si  $W = 0$ , la energía cinética del sistema permanece constante con el tiempo.

### VIII - 14. Teorema de conservación de la energía mecánica total de un sistema

En el párrafo anterior hemos visto que el trabajo total de todo tipo de fuerzas que actúan sobre un sistema de partículas se emplea en la variación de su energía cinética; clasificábase las fuerzas actuantes en interiores y exteriores, también se pueden clasificar en conservativas y no conservativas. Llamando  $W_c$  y  $W_{nc}$  a los trabajos realizados por las fuerzas conservativas y no conservativas podemos escribir el teorema de las fuerzas vivas para el sistema:

$$W = W_{int} + W_{ext} = W_c + W_{nc} = \Delta T \tag{13}$$

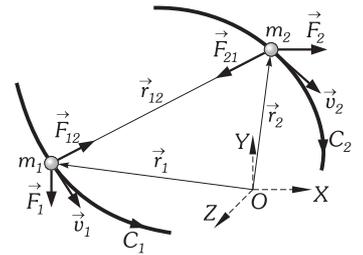


Fig. VIII-7.- Sobre las partículas  $m_1$  y  $m_2$ , actúan las fuerzas externas  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$  y las de interacción mutua  $\vec{F}_{12}$  y  $\vec{F}_{21}$ .

Al trabajo de las fuerzas conservativas le podemos asociar la correspondiente energía potencial mediante la expresión:  $W_c = -\Delta U$

Si llamamos ENERGÍA MECÁNICA TOTAL DEL SISTEMA,  $E$ , a la suma de sus energías cinética y potenciales:

$$E = T + U$$

de las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} W_c + W_{nc} &= \Delta T \\ W_c &= -\Delta T \end{aligned} \right| -\Delta U + W_{nc} = \Delta T \Rightarrow W_{nc} = \Delta T + \Delta U = \Delta(T + U) \Rightarrow W_{nc} = \Delta E$$

«El trabajo de las fuerzas no conservativas es igual al incremento de la energía mecánica total del sistema».

El TEOREMA DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA TOTAL es inmediato:

«La energía mecánica total de un sistema se conserva en el transcurso de un fenómeno si es nulo el trabajo de las fuerzas no conservativas que actúan sobre él».

En efecto:

$$W_{nc} = 0 \Leftrightarrow \Delta E = 0 \Leftrightarrow \Delta(T + U) = 0 \Leftrightarrow T + U = cte$$

Téngase en cuenta que la energía potencial total es la suma de la interior y exterior ( $U = U_{int} + U_{ext}$ ), con lo que el teorema de conservación de la energía mecánica total se puede escribir:

$$W_{nc} = 0 \Leftrightarrow E = T + U_{int} + U_{ext} = cte$$

Considerando que la expresión (13) se puede escribir:  $W = W_{ext, c} + W_{ext, nc} + W_{int, c} + W_{int, nc}$ , y que en esta expresión podemos hacer nulos uno, dos, tres, cuatro y todas las combinaciones posibles en los sumandos del segundo miembro, resultan una gran variedad de casos particulares.

### VIII – 15. Energía propia e interna de un sistema

Si todas las fuerzas internas en un sistema son conservativas, entonces:  $W_{int} = -\Delta U_{int}$ . Por otra parte, el teorema de las fuerzas vivas nos permite escribir:  $W = W_{ext} + W_{int} = \Delta T$ , y de ambas expresiones:

$$W_{ext} = \Delta T - W_{int} = \Delta T + \Delta U_{int} \Rightarrow W_{ext} = \Delta(T + U_{int})$$

A la suma de la energía cinética y de la potencial interna se le llama ENERGÍA PROPIA del sistema.

Con esto la ecuación anterior se enuncia:

«Si las fuerzas interiores son conservativas, la variación de la energía propia de un sistema de partículas es igual al trabajo efectuado sobre ellas por las fuerzas exteriores».

El correspondiente teorema de conservación se enunciará:

«En un sistema aislado ( $W_{ext} = 0$ ) en que las fuerzas interiores son conservativas, la energía propia del sistema permanece constante con el tiempo».

En efecto:

$$\left. \begin{aligned} F_{int} &= \text{conservativas} \\ W_{ext} &= 0 \end{aligned} \right| \Rightarrow \Delta(T + U_{int}) = 0 \Rightarrow T + U_{int} = cte \tag{14}$$

Llamaremos ENERGÍA INTERNA a la suma de la energía cinética interna (energía cinética referida al centro de masas como origen) y la energía potencia interna.

$$\bar{U} = T_{int} + U_{int} \tag{15}$$

obsérvese que la  $U_{int}$  depende de las fuerzas interiores y éstas son una función exclusiva de la distancia que une a las dos partículas, luego la  $U_{int}$  dependerá únicamente de esta distancia y por tanto tiene el mismo valor cualquiera que sea el sistema de referencia elegido para el estudio del movimiento; luego la energía interna del sistema la mediremos siempre tomando al centro de masas como origen. Lo anteriormente expuesto no se cumple para la energía cinética del sistema, puesto que al depender de la velocidad, su valor dependerá del sistema referencial elegido.

Por otro lado, la ecuación (14) referente a un sistema aislado la podemos escribir teniendo en cuenta (15):

$$T_{CM} = T_{int} + U_{int} = cte \Rightarrow \frac{1}{2} MV^2 + U = cte$$

Como  $V$  es la velocidad del centro de masas y ésta es constante en un sistema aislado, enunciaremos:

«En un sistema aislado la energía interna permanece constante».

**PROBLEMAS: 43 al 48.**

### D) CHOQUES ENTRE PAREJAS DE PARTÍCULAS

#### VIII – 16. Choque

Se produce un CHOQUE entre dos partículas o sistemas cuando, al acercarse entre sí, su interacción mutua provoca una perturbación en sus movimientos con intercambio de momento y energía.

Hablaremos de choque tanto si los sistemas han estado en contacto en sentido macroscópico (bala que rebota en una pared) como si hay entre ellos una cierta distancia (electrón dispersado por otro electrón). Si las partículas que emergen de la colisión son las mismas que las que inciden, diremos que se trata de una DISPERSIÓN, en caso contrario hablaremos de una REACCIÓN.

El problema que normalmente se plantea en los choques es el averiguar cuáles serán las velocidades finales de las partículas para unas velocidades iniciales prefijadas. El paso de unas a otras viene determinado por el tipo e intensidad de las fuerzas que actúan durante la colisión; sin embargo éstas suelen ser de difícil descripción, cuando no imposible, y de hecho la principal aplicación de los choques en Física es la investigación de esas fuerzas.

Para relacionar las velocidades iniciales y finales consideraremos las partículas que colisionan como un sistema sometido únicamente a fuerzas interiores. La no actuación de fuerzas exteriores tiene una importante consecuencia:

«El momento lineal del sistema se conserva»; o lo que es lo mismo: «La velocidad del centro de masas permanece constante en el choque».

Así: si  $\mathbf{p}_1$  y  $\mathbf{p}_2$  son los momentos lineales de dos partículas inmediatamente antes del choque y  $\mathbf{p}'_1$  y  $\mathbf{p}'_2$  inmediatamente después, se verifica:

$$\boxed{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2} \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{V}_{CM} = \mathbf{V}'_{CM}}$$

por tanto, la parte de energía cinética asociada con el movimiento del centro de masas es también constante:  $MV^2/2 = cte$ . Sin embargo, la parte correspondiente al movimiento respecto del centro de masas,  $T_{int}$ , puede variar por la actuación de fuerzas interiores no conservativas, en cuyo caso la energía cinética total del sistema variará en el choque y hablaremos de CHOQUE INELÁSTICO. Si también  $T_{int}$  permanece constante, el choque se denomina ELÁSTICO.

Para hablar de la variación de la energía cinética nos referiremos a su incremento, al que denominaremos  $Q$ , es decir:

$$\boxed{Q = \Delta T = T' - T} \tag{16}$$

Si son  $M_1$  y  $M_2$  las masas de los cuerpos que chocan,  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  las velocidades inmediatamente antes del choque y  $\mathbf{v}'_1$  y  $\mathbf{v}'_2$  inmediatamente después, el valor de  $Q$  es:

$$Q = \frac{1}{2} M_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2'^2 - \frac{1}{2} M_1 v_1^2 - \frac{1}{2} M_2 v_2^2 \tag{17}$$

#### VIII – 17. Choque frontal elástico (una dimensión)

Diremos que un choque es elástico cuando  $Q = 0$ , es decir:

«La energía cinética del sistema se conserva».

Esto supone que en el choque elástico no haya modificación final de la forma o volumen de los sistemas que chocan, que pudiera variar su energía potencial interna, ni transformación de la energía inicial en calor.

Supongamos que dos cuerpos de masas  $M_1$  y  $M_2$  que se mueven con velocidades  $v_1$  y  $v_2$  chocan frontalmente (en una dimensión); el problema que queremos resolver es el cálculo de las velocidades  $v'_1$  y  $v'_2$  después del choque. Por conservarse el momento lineal y la energía podemos poner:

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2 \Rightarrow M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 v'_1 + M_2 v'_2$$

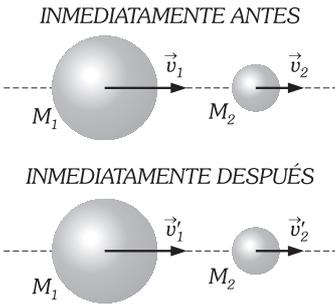


Fig. VIII-8.- Choque elástico en una dimensión.

$$\frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 = \frac{1}{2} M_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2'^2$$

Tenemos así, dos ecuaciones que nos permiten determinar las dos incógnitas:  $v_1'$  y  $v_2'$ . Agrupando términos y simplificando:

$$M_1 (v_1 - v_1') = M_2 (v_2' - v_2) \tag{18}$$

$$M_1 (v_1^2 - v_1'^2) = M_2 (v_2'^2 - v_2^2)$$

por división, y considerando que la diferencia de cuadrados es suma por diferencia obtenemos:

$$\boxed{v_1 + v_1' = v_2 + v_2'} \tag{19}$$

o bien:  $v_1' - v_2' = -(v_1 - v_2)$ , es decir, la velocidad relativa de alejamiento de ambas partículas después del choque, es la misma que la relativa de acercamiento antes de él.

De (19) tenemos:  $v_1' = v_2 + v_2' - v_1$ ,  $v_2' = v_1 + v_1' - v_2$ , valores que sustituidos en (18) nos dan:

$$M_1 (v_1 - v_2 - v_2' + v_1) = M_2 (v_2' - v_2)$$

$$M_1 (v_1 - v_1') = M_2 (v_1 + v_1' - v_2 - v_2)$$

desarrollando, agrupando términos y despejando, las incógnitas  $v_1'$  y  $v_2'$ , obtenemos:

$$\boxed{v_1' = v_1 \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} + 2 \frac{M_2 v_2}{M_1 + M_2}} \quad \boxed{v_2' = 2 \frac{M_1 v_1}{M_1 + M_2} - v_2 \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}} \tag{20}$$

de las que podemos obtener una expresión más simplificada de la forma siguiente: puesto que la velocidad del CM es

$$V = \frac{M_1 v_1 + M_2 v_2}{M_1 + M_2} \tag{21}$$

operando en (20) se obtiene:

$$v_1' = \frac{M_1 v_1 - M_2 v_1 + 2 M_2 v_2}{M_1 + M_2} = \frac{2 M_1 v_1 - 2 M_2 v_2 - (M_1 + M_2) v_1}{M_1 + M_2} \Rightarrow \boxed{v_1' = 2V - v_1}$$

$$v_2' = \frac{2 M_1 v_1 - M_1 v_2 + M_2 v_2}{M_1 + M_2} = \frac{2 M_1 v_1 + 2 M_2 v_2 - (M_1 + M_2) v_2}{M_1 + M_2} \Rightarrow \boxed{v_2' = 2V - v_2} \tag{22}$$

Desde el sistema de referencia CM, el momento lineal tanto antes como después del choque es nulo. Si llamamos  $u_1$  y  $u_1'$ ,  $u_2$  y  $u_2'$  a las velocidades de  $m_1$  y  $m_2$  antes y después del choque respectivamente, referidas a dicho sistema CM, se verifica que:

$$\begin{aligned} v_1 &= V + u_1 & v_1' &= V + u_1' \\ v_2 &= V + u_2 & v_2' &= V + u_2' \end{aligned} \tag{23}$$

y sustituidas en (22), queda:

$$\begin{aligned} V + u_1' &= 2V - V - u_1 & \Rightarrow & \boxed{u_1' = -u_1} \\ V + u_2' &= 2V - V - u_2 & \Rightarrow & \boxed{u_2' = -u_2} \end{aligned}$$

lo que indica que en un choque elástico, respecto del CM las partículas cambian exclusivamente el sentido del movimiento.

Como casos particulares del choque perfectamente elástico pueden citarse:

A) Si  $M_1 = M_2$ , en (21) se tiene  $V = (v_1 + v_2)/2$  y en consecuencia  $v_1' = v_2$  y  $v_2' = v_1$ , con lo que en una colisión elástica frontal entre dos cuerpos iguales, éstos intercambian sus velocidades.

B) Si  $M_2 \gg M_1$  el valor de la velocidad del CM será:

$$V = \frac{M_1 v_1 + M_2 v_2}{M_1 + M_2} = \frac{M_1 v_1 + v_2}{\frac{M_1}{M_2} + 1} \approx v_2$$

y si además  $v_2 = 0$ , se cumple  $V \approx 0$  y  $v_1' = -v_1$ ,  $v_2' = 0$ , es decir, si un cuerpo choca elásticamente con otro en reposo y de masa mucho mayor que la suya, sale rebotado con la misma velocidad pero de sentido contrario.

C) Si  $v_2 = 0$  y  $M_1 \ll M_2$ , en (21)  $V = v_1$  y  $v'_1 = v_1$ ,  $v'_2 = 2v_1$ , con lo que si un cuerpo en reposo es alcanzado por otro de masa mucho mayor que la suya, sale lanzado con el doble de la velocidad del cuerpo que le golpea.

**PROBLEMAS: 49 al 53.**

**VIII – 18. Choque frontal perfectamente inelástico**

Diremos que ocurre un CHOQUE PERFECTAMENTE INELÁSTICO (o totalmente inelástico), cuando los dos cuerpos que chocan salen de la colisión unidos con una velocidad común, que es la del centro de masas antes y después del choque.

La conservación del momento lineal en el choque exige que:

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = (M_1 + M_2) V \Rightarrow v'_1 = v'_2 = V = \frac{M_1 v_1 + M_2 v_2}{M_1 + M_2}$$

Puesto que no existe movimiento relativo entre los cuerpos después del choque, en él se pierde toda la energía cinética interna.

«La energía cinética antes del choque es mayor que la de después del choque, transformándose su diferencia en energía de deformación y calor».

La variación de energía es:

$$Q = \Delta T = \frac{1}{2} (M_1 + M_2) V^2 - \frac{1}{2} M_1 v_1^2 - \frac{1}{2} M_2 v_2^2 = -T_{int}$$

**PROBLEMAS: 54 al 60.**

**VIII – 19. Choques frontales parcialmente elásticos**

Los choques PARCIALMENTE ELÁSTICOS O PARCIALMENTE INELÁSTICOS constituyen todos los casos intermedios entre los dos que hemos estudiado antes. En ellos los cuerpos emergen separados pero la energía cinética no se conserva.

Para caracterizar el grado de elasticidad de estos choques, se emplean, principalmente, el factor Q (fórmula (17)) y el «coeficiente de restitución».

Se define el COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN como el cociente, con signo negativo, de las velocidades relativas de los cuerpos después y antes del choque.

$$e = - \frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2} \quad (0 \leq e \leq 1)$$

y por ser el choque en una dimensión:  $e = -v'_{12}/v_{12}$ .

Conocido el coeficiente de restitución, las ecuaciones que resuelven el problema de determinar las velocidades después del choque, dadas las de antes de él y las masas de los cuerpos, son:

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 v'_1 + M_2 v'_2 \quad v'_1 - v'_2 = e (v_2 - v_1)$$

eliminando  $v'_2$ , de las anteriores ecuaciones, obtenemos:

$$v'_1 = v_1 \frac{M_1 - eM_2}{M_1 + M_2} + \frac{M_2 v_2 (e + 1)}{M_1 + M_2}$$

y por eliminación de  $v'_1$ , se tiene:

$$v'_2 = v_2 \frac{M_2 - eM_1}{M_1 + M_2} + \frac{M_1 v_1 (e + 1)}{M_1 + M_2}$$

Estas dos últimas ecuaciones pueden escribirse en función de la velocidad V del CM del sistema haciendo unas operaciones muy sencillas, obteniéndose:

$$v'_1 = (1 + e)V - ev_1 \quad v'_2 = (1 + e)V - ev_2 \quad (24)$$

Desde el sistema de referencia CM, respecto del cual el momento lineal tanto antes como después del choque es nulo, utilizando la misma notación que para el choque elástico y teniendo en cuenta (23), que sustituiremos en (24), se obtiene:

$$u'_1 = -eu_1 \quad u'_2 = -eu_2$$

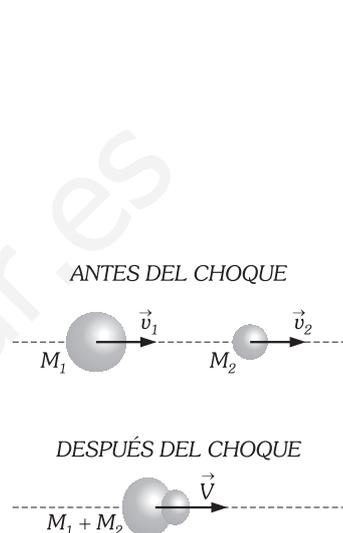


Fig. VIII-9.- Choque perfectamente inelástico.

La velocidad final de cada cuerpo en el sistema CM es igual a la inicial multiplicada por el coeficiente de restitución y de sentido contrario.

Si tenemos en cuenta la expresión para la energía cinética obtenida en el párrafo VIII-12, el factor Q toma el valor:

$$Q = T' - T = \left( \frac{1}{2} M V^2 + T'_{int} \right) - \left( \frac{1}{2} M V^2 + T_{int} \right) = T'_{int} - T_{int}$$

siendo  $M = M_1 + M_2$ ; que expresada en función de la masa reducida:

$$Q = \frac{1}{2} \mu v_{12}'^2 - \frac{1}{2} \mu v_{12}^2 \quad \left| \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{1}{2} \mu (e^2 v_{12}^2 - v_{12}^2) = \frac{1}{2} \mu v_{12}^2 (e^2 - 1) \right.$$

$$v_{12}' = -e v_{12}$$

y en definitiva:

$$Q = \Delta T = \frac{e^2 - 1}{2} \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (v_1 - v_2)^2$$

En el caso particular de choque parcialmente inelástico en el que  $M_2$  es enormemente mayor que  $M_1$  ( $M_2 \gg M_1$ ), el valor de la velocidad del CM será:  $V = v_2$ , que sustituida en (24) nos queda:

$$v_1' \approx (1 + e) v_2 - e v_1 \quad v_2' \approx v_2$$

y si  $v_2 = 0$  (pelota rebotando en el suelo):

$$v_1' = -e v_1 \quad v_2' = 0$$

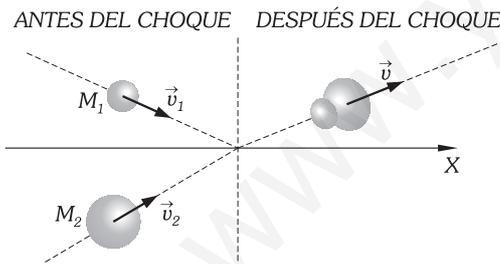
El choque elástico y el perfectamente inelástico son los casos extremos del parcialmente inelástico; ya que para obtener todas las fórmulas que caracterizan al primero no hay más que hacer  $e = 1$ , y para el segundo  $e = 0$ .

**PROBLEMAS: 61 al 66.**

**VIII - 20. Choques en dos dimensiones**

Si el choque no es frontal, es decir las direcciones de las velocidades no están contenidas en la misma recta, plantearemos el problema en dos dimensiones (en el plano que contiene a los vectores velocidad de las partículas o cuerpos) eligiendo un sistema de referencia inercial cualquiera OXY.

En el caso más sencillo, que como en los choques frontales es el choque totalmente inelástico, basta calcular la velocidad del centro de masas del sistema antes del choque, para saber cómo se moverán los dos cuerpos unidos después de realizarlo (Fig. VIII-10) o lo que es lo mismo: conociendo las condiciones iniciales [el cuerpo de masa  $M_1$  posee una velocidad  $\mathbf{v}_1 (v_{1x}, v_{1y})$  y el de masa  $M_2, \mathbf{v}_2 (v_{2x}, v_{2y})$ ], la aplicación del teorema de conservación del momento lineal nos resuelve el problema del cálculo de la velocidad final de ambos. En efecto:



$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_1 v_{1x} + M_2 v_{2x} = (M_1 + M_2) v_x \\ M_1 v_{1y} + M_2 v_{2y} = (M_1 + M_2) v_y \end{cases}$$

de las que deducimos  $v_x$  y  $v_y$ , y por tanto, queda resuelto el problema.

En todos los demás casos (Fig. VIII-11), no es suficiente con el conocimiento de las condiciones iniciales para resolver el problema, puesto que para obtener  $\mathbf{v}'_1 (v'_{1x}, v'_{1y})$  y  $\mathbf{v}'_2 (v'_{2x}, v'_{2y})$ , cuatro incógnitas, contamos con las ecuaciones:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 \quad \left| \quad \begin{cases} M_1 v_{1x} + M_2 v_{2x} = M_1 v'_{1x} + M_2 v'_{2x} \\ M_1 v_{1y} + M_2 v_{2y} = M_1 v'_{1y} + M_2 v'_{2y} \end{cases} \right.$$

y una tercera que será el valor de  $Q^*$  en el choque parcialmente elástico o la conservación de la energía cinética ( $Q = 0$ ) en el caso de choque elástico. Para poder resolver el problema se tiene que medir una de las incógnitas después de la colisión, o alguna otra magnitud que nos conduzca a su conocimiento.

En el caso de la Fig. VIII-12 los ángulos  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  después de la colisión dependen del «PARÁMETRO DE IMPACTO» ( $b$ ), que es la distancia del centro de  $M_2$  a la dirección de  $v_1$ . Para obtener:  $\mathbf{v}'_1 (v'_1 \cos \varphi_1, v'_1 \sin \varphi_1)$  y  $\mathbf{v}'_2 (v'_2 \cos \varphi_2, -v'_2 \sin \varphi_2)$ , contamos con las ecuaciones:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 \quad \left| \quad \begin{cases} M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 v'_1 \cos \varphi_1 + M_2 v'_2 \cos \varphi_2 \\ 0 = M_1 v'_1 \sin \varphi_1 - M_2 v'_2 \sin \varphi_2 \end{cases} \right.$$

Fig. VIII-10.- Choque perfectamente inelástico en dos dimensiones.

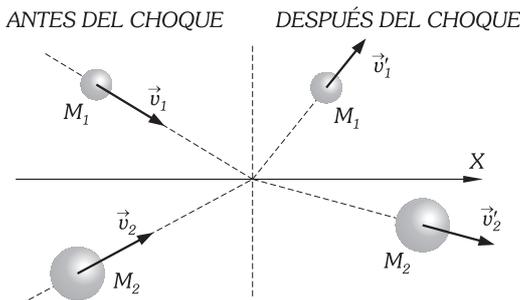


Fig. VIII-11.- Choque en dos dimensiones.

que junto con el valor de  $Q$  si el choque es parcialmente elástico, o la conservación de la energía cinética en el caso del choque elástico, no nos permiten conocer las cuatro incógnitas que nos aparecen en el problema; para resolverlo mediremos una de las incógnitas, por ejemplo  $\varphi_1$ .\*

Otro caso de particular interés, es el clásico problema de la bola de billar cuando choca oblicuamente en la banda de la mesa. Supondremos el choque perfectamente elástico. Si la velocidad antes del choque es  $\mathbf{v}_1$  y después del choque es  $\mathbf{v}_2$  (Fig. VIII-13), podemos poner:

$$\mathbf{v}_1 = v_1 \cos \varphi_1 \mathbf{i} - v_1 \sin \varphi_1 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{v}_2 = v_2 \cos \varphi_2 \mathbf{i} + v_2 \sin \varphi_2 \mathbf{j}$$

la conservación de  $\mathbf{p}$  implica la constancia de la componente  $X$  de la velocidad; y de lo visto en el apartado B del párrafo VIII-17, se deduce que la componente  $Y$  de la velocidad invierte su sentido, permaneciendo constante su módulo, es decir:

$$\left. \begin{aligned} v_{1x} &= v_{2x} \\ v_{1y} &= -v_{2y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} v_1 \cos \varphi_1 &= v_2 \cos \varphi_2 \\ v_1 \sin \varphi_1 &= v_2 \sin \varphi_2 \end{aligned} \right.$$

y por ser  $v_1 = v_2$ , se verifica que  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son iguales en «valor absoluto», y de la Fig. VIII-13 se obtiene:  $\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{r}}$

«Cuando un cuerpo choca elástica y oblicuamente con otro, en reposo y de masa mucho mayor que la suya, sale con la misma velocidad que tenía antes del choque, cumpliéndose que el ángulo de incidencia y el de reflexión son iguales».

**PROBLEMAS: 67 al 72.**

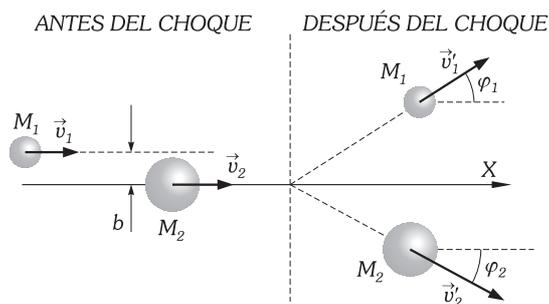


Fig. VIII-12.- Choque en dos dimensiones.

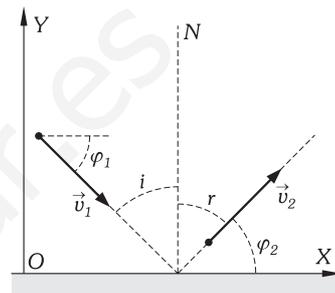


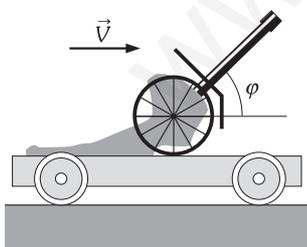
Fig. VIII-13.- Choque elástico oblicuo. La masa de la mesa se supone enormemente mayor que la masa de la bola

\* En dos dimensiones, el coeficiente de restitución se define de forma análoga a la vista, pero considerando las componentes de las velocidades paralelas a la línea de choque, siendo ésta la normal común a las superficies de los cuerpos en el punto de contacto.

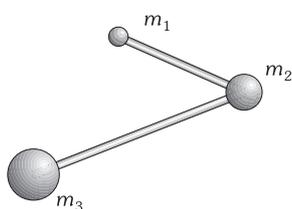
**PROBLEMAS**

**A) LAS LEYES DE NEWTON EN LOS SISTEMAS DE PARTÍCULAS**

1. En el cañón sin retroceso de 70 mm la masa del proyectil con su espoleta es de 7 kg y la velocidad del mismo a la salida del cañón es 200 m/s. Calcular la masa de los gases producidos en la combustión de la carga de proyección, teniendo en cuenta que la velocidad de salida de los mismos es de 700 m/s.
2. Un cañón de masa  $M$  apoyado en una superficie horizontal dispara proyectiles de masa  $m$  con velocidad  $v$ . Determinar la velocidad de retroceso del cañón inmediatamente después del disparo: 1) Cuando efectúa un tiro horizontal. 2) Cuando efectúa un disparo con un ángulo de inclinación  $\varphi$  con la horizontal.



Problema VIII-3.



Problema VIII-10.

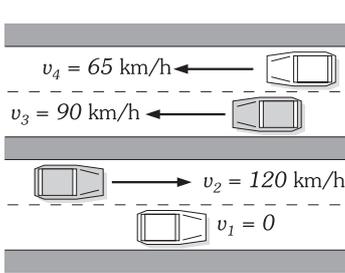
3. Un cañón está montado sobre una plataforma y unido a ella como se indica en la figura; toda la carga del conjunto, incluida la plataforma, es de 5 t y se mueve a lo largo de unos raíles a una velocidad de 54 km/h. El cañón, cuya ánima forma un ángulo de 60° con la horizontal, dispara un proyectil de 100 kg con una velocidad de 300 m/s con respecto a un observador que se mueve con él, y en la misma dirección y sentido del movimiento del conjunto. Calcúlese: 1) Velocidad del conjunto inmediatamente después del disparo. 2) Velocidad que tendría que llevar el conjunto para que se pare inmediatamente después del disparo.

4. Un avión que con su carga pesa 4 t vuela horizontalmente a la velocidad de 300 m/s y lanza horizontalmente un cohete de 100 kg a una velocidad de 800 m/s medidos por el piloto. ¿Cuál es su velocidad inmediatamente después del lanzamiento?
5. Un nadador de 80 kg se lanza horizontalmente a un embalse de agua en reposo, con una velocidad de 15 m/s desde una barca parada que pesa 150 kg. La resistencia al avance de la barca que ofrece el agua es directamente proporcional a su velocidad en cada instante. Calcúlese la velocidad de la barca 15 s después de lanzarse el nadador. La constante de proporcionalidad vale 5 kg/s.
6. Determinar la posición del CM de tres partículas de masas  $m$ ,  $2m$  y  $3m$  que se encuentran en los vértices de un triángulo equilátero de lado  $l$ .
7. La masa de la Luna es 0,012 la masa de la Tierra; el radio de la Luna es 0,27 el radio de la Tierra; y la distancia media entre sus centros es 60,3 radios terrestres. Calcular: 1) La situación del centro de masas del sistema Tierra-Luna. 2) El valor de la gravedad en la superficie lunar.
8. El centro de masas del sistema formado por la Tierra y la Luna dista 379 440 km del centro de la Luna. Sabiendo que la distancia Luna-Tierra es de 384 000 km calcular a partir de estos datos cuántas veces mayor es la masa de la Tierra que la de la Luna.
9. Consideremos tres partículas de masas  $m_1 = 2$  kg,  $m_2 = 4$  kg y  $m_3 = 6$  kg, que se encuentran en un momento determinado en los puntos  $A(1, 2, 3)$  m,  $B(2, -1, -4)$  m y  $C(0, 3, 1)$  m respectivamente; si sobre cada una de ellas actúan las fuerzas externas:  $\mathbf{F}_1 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$  N,  $\mathbf{F}_2 = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$  N y  $\mathbf{F}_3 = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$  N; determinar: 1) La posición del centro de masas en el instante considerado. 2) La aceleración en ese instante del centro de masas.
10. Un sistema está formado por 3 esferas de 1 kg, 2 kg y 3 kg de masa, unidas por medio de barras rígidas de masa despreciable tal y como se indica en la figura. En el momento  $t = 0$  el sistema está en reposo y comienzan a actuar dos fuerzas que respecto de un sistema inercial de referencia toman el valor  $\mathbf{F}_1 = 10\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$  N y  $\mathbf{F}_2 = -5\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$  N sobre las bolas de 1 kg y 2 kg. Calcular la velocidad de CM del sistema en el instante  $t = 3$  s.

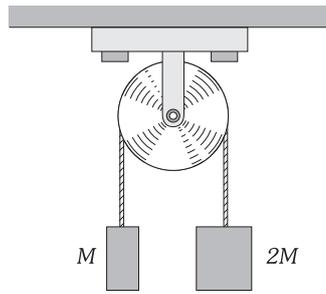
184 DINÁMICA DE LOS SISTEMAS DE PARTÍCULAS DISCRETOS

11. Dos partículas de masa 2 y 3 kg se encuentran situadas en los puntos (3, -1, 2) m y (4, 0, 1) m respectivamente y están unidas por una barra rígida de masa despreciable, encontrándose el sistema inicialmente en reposo. Sobre la primera partícula actúa una fuerza  $F_1 = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$  N y sobre la segunda  $F_2 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$  N; determinar: 1) La posición del centro de masas del sistema a los 3 s de iniciado el movimiento. 2) El momento lineal del conjunto transcurridos dichos 3 s.

12. En una fotografía aérea de una autopista aparecen cuatro automóviles. Las velocidades de cada uno de ellos, en el instante de la fotografía, se encuentran indicadas en la figura. Si las masas de los vehículos son:  $m_1 = 500$  kg,  $m_2 = 4m_1$ ,  $m_3 = 3m_1$  y  $m_4 = 2m_1$ ; calcular: 1) La velocidad del CM del sistema formado por los cuatro automóviles. 2) La velocidad de cada coche respecto al sistema de referencia CM.



Problema VIII-12.



Problema VIII-15.

13. Consideremos un sistema compuesto por cuatro partículas de masas 1, 2, 3 y 4 kg; en un instante determinado y respecto de un observador inercial, la primera tiene una velocidad  $v_1 = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$  m/s, la segunda  $v_2 = -4\mathbf{k}$  m/s y la tercera  $v_3 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$  m/s. Hallar la velocidad de la cuarta partícula de forma que el CM permanezca en reposo con relación al observador.

14. En un instante determinado tres partículas de 2, 3 y 1 kg de masa poseen las velocidades  $v_1 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$  m/s,  $v_2 = 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$  m/s y  $v_3 = \mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$  m/s respectivamente. Calcular: 1) La velocidad del centro de masas en ese momento. 2) El momento lineal del sistema. 3) Las velocidades de las partículas referidas a su CM como origen.

15. En el dispositivo de la figura las masas del cable y de la polea son inapreciables al igual que los rozamientos entre ellos, los dos cuerpos están inicialmente en reposo y tomamos  $g = 9,80$  m/s<sup>2</sup>. Determinar: 1) La aceleración de las masas. 2) La aceleración y velocidad del CM del sistema. 3) La tensión de las cuerdas.

16. Una partícula de masa  $m$  se mueve con una velocidad constante  $v = v_0\mathbf{i}$ . En un cierto instante la partícula se fracciona dando lugar a dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  ( $m_1 = 9m_2$ ). La partícula de masa  $m_2$  adquiere una velocidad  $v_2 = 10v_0\mathbf{i}$ . 1) Calcular la velocidad del centro de masas del sistema formado por las dos partículas. 2) Determinar la velocidad de la partícula de masa  $m_1$ .

17. Una explosión interna rompe una roca en tres trozos; dos de ellos, de 1 kg y 2 kg, salen despedidos en ángulo recto con velocidades de 12 m/s y 8 m/s respectivamente. El tercero sale con una velocidad de 40 m/s. 1) Dibuja un diagrama que muestre la dirección y sentido del tercer trozo. 2) ¿Cuál era la masa de la roca?

18. Dos cuerpos de masas  $M_1$  y  $M_2$  están unidos por un resorte espiral y les suponemos situados en el espacio intergaláctico (fuera de toda influencia externa). Estiramos el resorte y a continuación lo soltamos (ver figura). Determinar la relación que existe entre las velocidades de ambas masas en cualquier instante, después de que se han soltado.

19. Sobre las aguas tranquilas de un estanque flota una tabla rectangular y homogénea de masa  $M_1$  y longitud  $l$ ; sobre uno de sus extremos descansa un gato de masa  $M_2$ ; cuidadosamente el animal pasa de uno al otro extremo de la tabla. ¿Cuánto ha avanzado el gato con relación al agua? ¿Qué retroceso ha sufrido el extremo de la tabla? Se desprecia todo rozamiento y se considera al gato como una masa puntual.

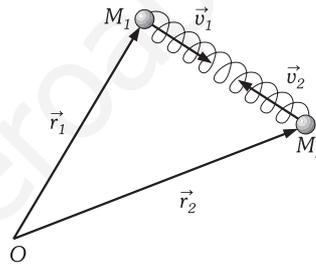
20. Un atleta de 100 kg de peso se cuelga de una cuerda que pende de un globo que con todos sus accesorios pesa 500 kg; en estas condiciones el centro de masa del globo se encuentra en reposo y a 30 m del centro de masa del atleta. El atleta trepa por la cuerda hasta llegar a la barquilla, situándose su centro de masa a 6 m por debajo del centro de masa del globo. Determinar: 1) La altura sobre el suelo que ha subido el atleta. 2) La velocidad con que se moverá el globo respecto del suelo en un instante en que el atleta asciende a 0,4 m/s.

21. Un proyectil de 30 kg de masa es lanzado por un cañón con una velocidad de 200 m/s y formando un ángulo con la horizontal de 30°; a los 10 s del disparo explota y se parte en dos trozos; uno de ellos, de 20 kg de masa, cae verticalmente, llegando al suelo 5 s después de la explosión. ¿Dónde se encuentra el segundo trozo respecto al punto de lanzamiento? (se desprecia la masa del explosivo).

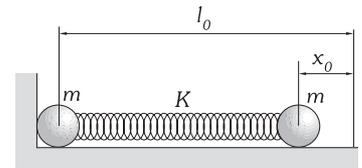
22. Una rana de masa  $m$  está situada en el extremo de una tabla recta de masa  $M$  y longitud  $l$ ; la tabla se encuentra en reposo y flotando sobre las aguas tranquilas de un estanque. La rana da un salto a lo largo de la tabla con un ángulo de elevación  $\varphi$  sobre la horizontal. Calcular la velocidad inicial  $v_0$  de ésta para que al dar el salto caiga en el otro extremo de la tabla. Se desprecia el rozamiento entre la tabla y el agua, y se considera a la rana como una masa puntual.

23. Dos cuerpos de masas  $M_1 = 400$  g y  $M_2 = 600$  g de dimensiones despreciables, se unen con un muelle de constante  $K = 1$  kp/m y masa despreciable, y se colocan en una superficie horizontal sin rozamiento. Los cuerpos los acercamos entre sí y después se sueltan. Determinar el período de oscilación de los cuerpos.

24. Dos esferas de igual masa  $m$ , de dimensiones que consideramos despreciables, están unidas por un resorte de constante elástica  $K$  de masa despreciable y longitud natural  $l_0$ . El sistema se encuentra sobre una superficie horizontal sin rozamiento, apoyándose una de ellas sobre una pared vertical de tal modo que inicialmente el resorte está comprimido  $x_0$  con respecto a su longitud natural como se indica en la figura. El sistema se libera dejándolo evolucionar libremente y desde el reposo. 1) Determinar la velocidad de CM del sistema una vez que la masa apoyada en la pared deja de estar en contacto con ella. 2) Una vez separado de la pared las dos masas oscilan; determinar la amplitud y la frecuencia de tales oscilaciones.



Problema VIII-18 y 48.



Problema VIII-24.

25. Dos hombres de 100 kg están sobre una plataforma de 1000 kg, en reposo sobre una vía horizontal sin rozamiento. Empiezan a correr y saltan con una velocidad horizontal de 8 m/s respecto del suelo. Calcular la velocidad de la plataforma si: 1) Saltan los dos a la vez. 2) Saltan uno a continuación del otro.

26. En el problema anterior, la velocidad de salida de los saltadores, de 8 m/s, es ahora respecto de la plataforma. Responder a las mismas cuestiones.

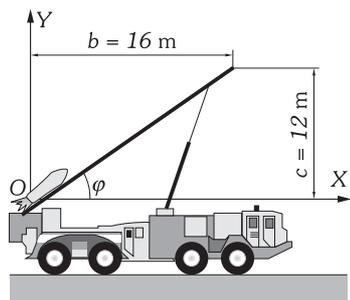
27. El carretón del problema VI-68 tiene una masa de 85 kg y desliza sobre el suelo sin rozamiento. Si la aceleración de 2 m/s<sup>2</sup> se la proporciona una fuerza  $F$  horizontal, calcular: 1) El valor de  $F$ . 2) La reacción del suelo sobre él.

28. El proyectil de 200 kg de la figura recorre la rampa de lanzamiento con una aceleración de 10g. Inicialmente su centro de masas coincide con el origen de coordenadas dibujado. El centro de masas del transporte, de 10t y que se encuentra frenado, está en el punto (12, 0) m del sistema representado. Calcular, durante el lanzamiento: 1) Posiciones inicial y final del CM del sistema. 2) Aceleración de dicho CM. 3) Reacción normal del suelo sobre el camión. 4) Fuerza que desarrollan los frenos para mantenerlo fijo.

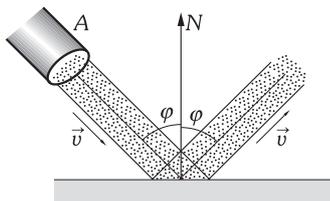
29. Un hombre de 80 kg que se encuentra de pie sobre una superficie helada arroja horizontalmente una pelota de 100 g con una velocidad de 25 m/s. 1) ¿En qué dirección y con qué velocidad comenzará a moverse el hombre? 2) Si el hombre arroja 4 de esas pelotas cada 3 s, ¿cuál es el impulso lineal que experimenta en ese tiempo? 3) ¿Cuál es la fuerza media que actúa sobre él? (Se supone nulo el rozamiento del hombre con el hielo).

30. Un chorro de partículas de sección  $A$ , contiene  $n$  de ellas por unidad de volumen, cada una de masa  $m$  y velocidad  $v$ ; chocan contra una pared sin cambiar el módulo de su velocidad y de tal forma que el ángulo de incidencia  $\varphi$  es idéntico al de reflexión de éstas (ver figura).

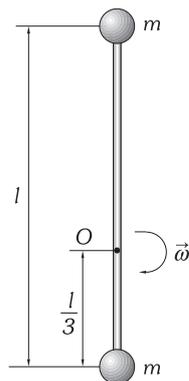
Determinar el impulso lineal que experimentan en el choque con la pared dichas partículas en un tiempo  $\Delta t$  y la fuerza ejercida sobre la pared.



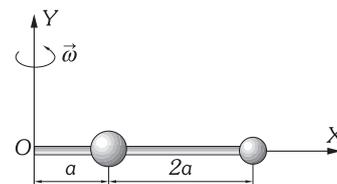
Problema VIII-28.



Problema VIII-30.



Problema VIII-37.



Problema VIII-38.

**31.** En la última etapa de un cohete espacial que vuela con una velocidad  $v$  y que está formado por dos masas unidas entre sí, que son la cámara del combustible vacío de masa  $M_1$  y la cápsula espacial de masa  $M_2$ , se desprende  $M_1$  con una velocidad relativa a  $M_2$ , igual a  $v_{21}$ , por la acción de un resorte comprimido, tardándose en la separación un tiempo  $\Delta t$ . Calcular: 1) Las velocidades de ambas partes después de su separación. 2) El impulso lineal experimentado por la cápsula espacial. 3) El empuje promedio que se produce sobre la cápsula espacial.

**32.** La masa inicial de un cohete incluido su combustible es de 15 t; una vez disparado y cuando se ha consumido todo el combustible, su masa se ha reducido a 5 t. Los gases son emitidos con velocidad constante de 1500 m/s respecto del cohete, y con un gasto de 80 kg/s, que también supondremos constante, mientras el combustible se quema. Calcular: 1) La fuerza propulsora. 2) La velocidad del cohete cuando se ha agotado todo el combustible, suponiendo que el lanzamiento se efectúa en el espacio intergaláctico (en el vacío y fuera de toda influencia de cuerpos celestes).

**33.** Queremos lanzar un cohete de 8 t de masa verticalmente hacia arriba. Si la velocidad de expulsión de los gases de combustión es de 2000 m/s y queremos que la aceleración inicial sea de  $8 \text{ m/s}^2$ , calcular la masa de gas expulsada por segundo que impulsa al cohete.

**34.** Se quiere mantener en el aire a un hombre que pesa 65 kg que tiene atado un tanque de aire comprimido de masa despreciable, que a través de una tobera expulsa aire a razón de 30 g/s. ¿A qué velocidad debe salir el aire por la tobera?

**35.** Un avión a reacción tiene una velocidad de 900 km/h en vuelo horizontal. El motor hace entrar cada segundo 80 kg de aire, que quema 1 kg de combustible cada segundo. Los gases son expulsados por la tobera a la velocidad relativa de 700 m/s. Calcular la fuerza propulsora que vence la resistencia al avance del avión y la potencia del motor.

**36.** Una lancha que se traslada a la velocidad de 7 m/s posee un motor a reacción de agua que penetra por unos orificios situados en la proa y es expulsada a través de un tubo horizontal por la popa con una velocidad relativa respecto de la embarcación de 16 m/s y con un caudal de  $10 \text{ m}^3/\text{min}$ . Determinar la potencia del motor de la lancha.

**B) MAGNITUDES DINÁMICAS ANGULARES DE LOS SISTEMAS DE PARTÍCULAS**

**37.** Dos partículas de masa  $m$  se encuentran en los extremos de una varilla de longitud  $l$  y masa despreciable. El sistema está girando con una velocidad angular constante  $\omega$  en torno a un eje fijo, perpendicular a la varilla en el punto  $O$  (ver figura). Calcular: 1) Velocidad del CM del sistema. 2) Momento angular respecto a  $O$ .

**38.** Dos partículas de masas  $m_1 = m$  y  $m_2 = m/9$ , están ensartadas en un alambre rígido de masa despreciable, como se muestra en la figura. El sistema gira con una velocidad angular constante,  $\omega$ , en torno a un eje fijo que pasa por  $O$  y es perpendicular al alambre. Calcular el momento angular del sistema respecto al punto  $O$ , y respecto al centro de masas del sistema formado por las dos partículas.

**39.** En un instante determinado dos partículas de masas 2 y 3 kg, tienen respecto de un observador los siguientes vectores de posición y velocidades: la de 2 kg,  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$  m y  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$  m/s, y la de 3 kg  $\mathbf{r}_2 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$  m y  $\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$  m/s. Determinar el momento angular del sistema en ese mismo instante, respecto a su CM.

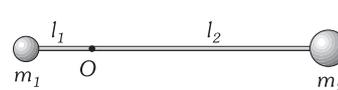
**40.** Tres partículas de 5, 2 y 3 kg de masa se mueven con velocidades  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$  m/s,  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$  m/s y  $\mathbf{v}_3 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$  m/s; encontrándose en ese instante en los puntos  $A(1, 0, 1)$ ,  $B(-2, 1, 1)$  y  $C(0, 1, 1)$ , expresadas estas coordenadas en metros. Determinar el momento lineal interno, el momento angular orbital y el momento angular interno del sistema en dicho instante.

**41.** Dos partículas de masas 3 y 5 kg se encuentran inicialmente en  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{i} - \mathbf{j}$  m y  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{k}$  m, y se mueven con las velocidades:  $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$  m/s y  $\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$  m/s respecto a un observador inercial. Calcular: 1) La velocidad del CM. 2) La velocidad de cada partícula respecto al CM. 3) El momento lineal de cada partícula respecto al CM. 4) La velocidad relativa de las partículas. 5) La masa reducida del sistema. 6) El momento angular orbital de ambas partículas respecto del observador. 7) El momento angular interno de las dos partículas.

**42.** Demostrar que el estudio del movimiento sobre una superficie horizontal sin rozamiento de dos cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$ , unidos por un resorte espiral de constante recuperadora  $K$ , de longitud natural  $l_0$  y de masa despreciable, se reduce al estudio del movimiento de un solo cuerpo de masa  $\mu$  (masa reducida) conectada a una pared rígida por un resorte idéntico.

**C) ENERGÍA EN LOS SISTEMAS DE PARTÍCULAS**

**43.** Dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  están ensartadas en los extremos de un alambre rígido de masa despreciable pudiendo girar alrededor del punto fijo  $O$  como se indica en la figura. Si inicialmente el sistema se encuentra en la posición horizontal, ¿qué velocidad poseen las masas al alcanzar la posición vertical?



Problema VIII-43.



Problema VIII-44.

**44.** Un cuerpo de masa  $m_1 = 1$  kg desliza sobre un plano horizontal con velocidad  $v_1 = 8$  m/s y sin rozamiento apreciable, dirigiéndose hacia un segundo cuerpo de masa  $m_2 = 3$  kg que se encuentra en reposo, y que tiene acoplado por el lado en que se aproxima  $m_1$  un resorte de constante elástica  $K = 10^3$  N/m, como indicamos en la figura. Determinar: 1) La máxima compresión del resorte cuando se produce la interacción de los dos cuerpos. 2) Las velocidades finales de ambos cuerpos después de que el primero pierde el contacto con el muelle.

**45.** Un sistema está formado por tres partículas de masas  $m_1 = 2$  kg,  $m_2 = 3$  kg y  $m_3 = 5$  kg, que en un instante determinado tienen por velocidades:  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} - \mathbf{j}$  m/s,  $\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$  m/s y  $\mathbf{v}_3 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$  m/s, calcular: 1) La energía cinética del sistema. 2) La energía cinética referida al CM como origen (energía cinética interna). 3) Comprobar que:

$$T = \frac{1}{2} M v^2 + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

**46.** En un instante determinado dos partículas de masas  $m_1 = 1$  kg y  $m_2 = 2$  kg se encuentran en  $\mathbf{r}_1(1, -1, 2)$  m y  $\mathbf{r}_2(2, 2, 0)$  m y tienen velocidades  $\mathbf{v}_1(0, 1, -1)$  m/s y  $\mathbf{v}_2(1, 2, 0)$  m/s respecto de un sistema de referencia OXYZ. Determinar: 1) El momento angular total del sistema respecto de  $O$ , el momento angular orbital y el momento angular inter-

**186** DINÁMICA DE LOS SISTEMAS DE PARTÍCULAS DISCRETOS

no, y verificar la relación entre ellos. 2) La energía cinética total respecto de  $O$ , la energía cinética de una partícula de masa  $M = m_1 + m_2$  que se mueve con la velocidad del CM respecto de  $O$ , la energía cinética interna, y verificar la relación entre ellas.

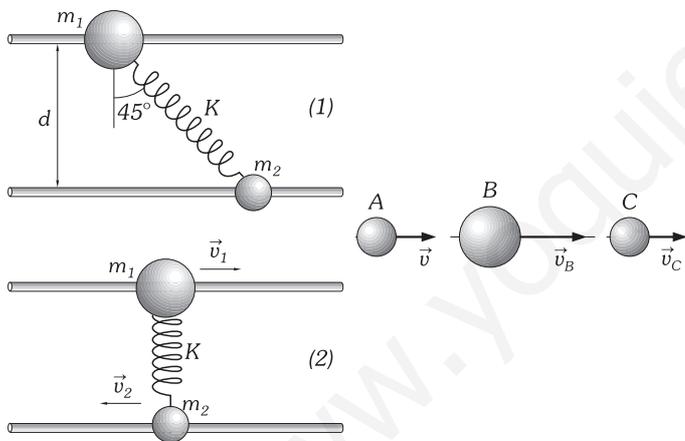
**47.** Dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  ( $m_1 = 2m_2$ ) están ensartadas en dos alambres rígidos y paralelos, separados a una distancia  $d$ , pudiendo deslizar por ellos sin rozamiento. Ambas partículas están unidas mediante un muelle de constante  $K$  y longitud natural despreciable. Las partículas se abandonan a sí mismas como se indica en la figura 1 con  $\alpha = 45^\circ$ . Cuando las partículas se encuentren en el estado representado en la figura 2, calcular: 1) Las velocidades de las partículas. 2) Momento angular respecto al CM.

**48.** Dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  están unidas por un resorte de constante  $K$  y longitud natural nula. Su posición en función del tiempo, respecto de un sistema en reposo, está dada por  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ , cuyas expresiones suponemos conocidas. Obtener las expresiones de sus energías potencial, cinética, interna, propia y total.

**D) CHOQUES**

**49.** Desde una torre de 95 m de altura se deja caer una piedra y un segundo después se lanza otra idéntica desde el suelo hacia arriba, en la misma vertical, chocando ambas en el punto medio de la altura de la torre. Si el choque es elástico, ¿cuáles son las nuevas velocidades de ambas piedras después del choque? ¿Hasta qué nueva altura asciende la primera piedra? Si no hubiesen chocado, ¿hasta qué altura hubiese subido la segunda piedra?

**50.** Una esfera A se mueve con velocidad  $v$ ; choca contra otra esfera B quieta, y ésta, al salir despedida, choca, a su vez, con una tercera esfera C, también inmóvil, como se indica en la figura. La relación de masas de las tres esferas:  $M_A : M_B : M_C$  como 3 : 6 : 2) Calcular la velocidad con que sale despedida la bola C. El choque se supone central y perfectamente elástico.

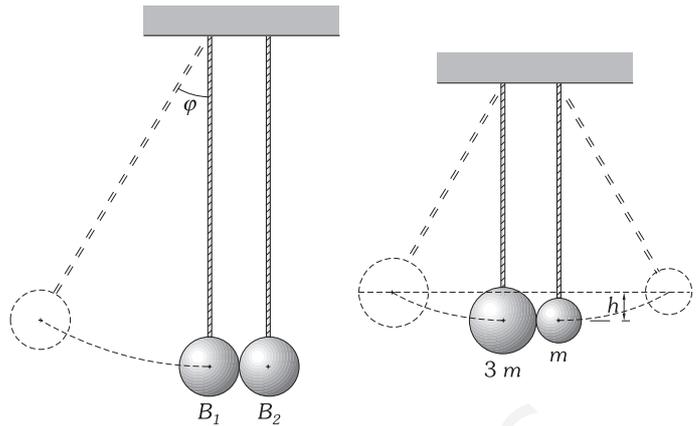


Problema VIII-47.

Problema VIII-50.

**51.** Dos bolas de marfil  $B_1$  y  $B_2$ , de masas  $M_1$  y  $M_2$ , están suspendidas de dos hilos inextensibles de longitud  $l$  m. Las bolas se tocan, sin presión, cuando los hilos están verticales. Separamos  $B_1$  de su posición de equilibrio en un ángulo de  $60^\circ$ , manteniendo el hilo extendido y en el mismo plano vertical que el otro hilo; soltamos  $B_1$  y entonces viene a chocar contra la bola  $B_2$ , que estaba inmóvil. Se pide calcular en los tres casos siguientes: a)  $M_2 = 2M_1$ , b)  $M_2 = M_1/2$ , c)  $M_2 = M_1$ . 1) La velocidad  $v_1$  de  $B_1$  cuando ésta choca con  $B_2$ . 2) Las velocidades de ambas bolas después del choque, supuesto perfectamente elástico. 3) Las alturas a las que ascenderán después del choque en el tercer caso.

**52.** Dos esferas perfectamente elásticas de masas  $3m$  y  $m$ , respectivamente, están pendientes de unos hilos de la misma longitud, de forma que en la posición de equilibrio quedan las esferas en contacto, los hilos paralelos y la línea que une los centros de aquéllas horizontal, como se indica en la figura. Apartamos las esferas de su posición de equilibrio de manera que sus centros asciendan una altura vertical  $h$  y las soltamos. Al chocar, la mayor queda quieta y la pequeña asciende a una altura 4 veces mayor de la que partió. Al chocar de nuevo vuelven las dos a adquirir la altura  $h$  y vuelven a reproducir constantemente el fenómeno. Demostrar tales hechos.



Problema VIII-51.

Problema VIII-52.

**53.** Partiendo del principio de relatividad de Galileo y de las leyes de conservación de la masa y de la energía, deducir la ley de conservación del momento lineal en un choque entre dos partículas.

**54.** Sobre un trozo de madera cuya masa es 20 kg hacemos un disparo de fusil. Teniendo en cuenta que en el momento del impacto el proyectil (masa = 40 g) lleva una velocidad de 300 m/s y suponiendo que el proyectil quede incrustado en la madera, calcular la velocidad que adquiere el conjunto madera-proyectil y la distancia que recorre el sistema hasta pararse si el coeficiente de rozamiento entre la madera y la superficie horizontal en que se apoya es 0,1.

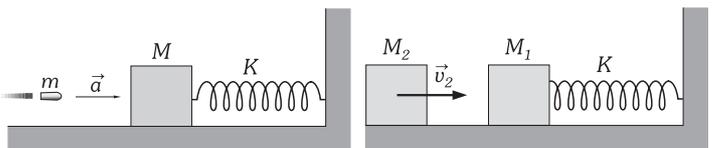
**55.** Tenemos dos bloques de masas 5 y 15 g que se mueven en la misma dirección con las velocidades de 10 y 5 cm/s, respectivamente, calcular: 1) Sus velocidades después del choque, en el caso de que sus movimientos sean de sentidos opuestos. 2) En el caso de que lleven el mismo sentido, y el más rápido alcance al más lento. (En ambos casos se consideran los choques perfectamente elásticos) 3) Si en el primer caso fuera el choque perfectamente inelástico, calcular: a) La velocidad común del conjunto de ambos. b) La pérdida de energía cinética. c) Indicar en qué se transforma esta energía aparentemente perdida.

**56.** Una bala de masa  $m = 20$  g se lanza horizontalmente dirigida al centro de gravedad de un bloque de madera de masa  $M = 2$  kg, suspendido de un hilo inextensible, quedando empotrada en él. Después del impacto el bloque oscila, experimentando un desplazamiento vertical de 10 cm. Calcular la velocidad que lleva la bala en el momento del impacto.

**57.** Sobre un saquito de arena de 4 kg de masa pendiente de un hilo se dispara un fusil cuya bala tiene una masa de 40 g. La bala atraviesa el saquito y recorre una distancia de 20 m antes de pegar en el suelo que se encuentra a 1,5 m por debajo del impacto en el saquito. El saquito oscila experimentando un desplazamiento vertical de 30 cm. Calcular la velocidad de la bala en el momento del impacto.

**58.** Un cuerpo de 1 kg de masa se halla pendiente de un hilo sin masa de 1 m de longitud y sujeto por su otro extremo. Lanzamos horizontalmente un proyectil de 20 g de masa que realiza un choque frontal con el cuerpo de 1 kg, quedando empotrado en él. Calcular la mínima velocidad del proyectil para que, realizado el choque, ambas masas describan una circunferencia completa en el plano vertical.

**59.** Una bala de masa  $m$  se introduce en un bloque de madera de masa  $M$  que está unido a un resorte espiral de constante de recuperación  $K$ ; por el impacto se comprime el resorte una longitud  $x$ . Sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el suelo es  $\mu$ , calcular en función de estos datos la velocidad de la bala antes del choque.



Problema VIII-59.

Problema VIII-62.

**60.** Un resorte vertical de constante  $K = 1000$  N/m sostiene un plato de 2 kg de masa. Desde 5 m de altura respecto del plato se deja caer un cuerpo de 4 kg que se adhiere a él. Calcular la máxima compresión del resorte.

61. Resolver el problema anterior en el caso de que el choque no sea totalmente inelástico, sino que tenga un coeficiente de restitución  $e = 0,5$ .

62. Una masa  $M_1 = 0,5$  kg, en reposo sobre una superficie horizontal lisa, está unida a un extremo de un muelle de constante  $K = 1250$  N/m, que se apoya por su otro extremo en una pared vertical, como se indica en la figura.  $M_1$  recibe el impacto frontal, en la dirección del muelle, de otra masa  $M_2 = 0,25$  kg que llega con una velocidad  $v_2 = 20$  m/s. El choque se realiza con un coeficiente de restitución  $e = 0,2$ . Calcular la máxima compresión del muelle.

63. Una pelota cae desde una altura de 2 m y al botar contra el suelo asciende a 0,5 m. Calcular el coeficiente de restitución entre la pelota y el suelo.

64. Desde la azotea de un alto edificio de 64 m de altura dejamos caer una pelota cuyo coeficiente de restitución con el pavimento de la calle es  $e = 1/2$ . Averiguar la altura a que asciende después de botar 3 veces contra el suelo.

65. En el problema anterior se dedujo que la altura a que llega una pelota que choca contra el suelo, dejándola caer desde una altura  $h$  y después de botar  $n$  veces, es  $h_n = e^{2n} h$ , siendo  $e$  el coeficiente de restitución. Hallar una fórmula general del tiempo que transcurre entre dos choques consecutivos. Aplicarla para  $h = 64$  m y  $e = 1/2$  y considerar los choques primero y segundo.

66. Una pequeña esfera de masa 100 g se halla pendiente de un hilo inextensible y sin masa, de longitud 2 m y sujeto por su otro extremo a un punto fijo. Lanzamos horizontalmente otra pequeña esfera para que realice un choque frontal con la primera. Calcular la mínima velocidad de la esfera que lanzamos y su masa en tal caso para que, realizado el choque, la esfera pendiente del hilo describa una circunferencia completa en el plano vertical y la bola lanzada caiga verticalmente. Coeficiente de restitución:  $e = 1/4$ . Las esferas se consideran como masas puntuales.

67. Demostrar que cuando un cuerpo choca oblicuamente con otro, de forma totalmente elástica, estando este último en reposo y de masa mucho mayor que la suya, sale con la misma velocidad que tenía antes del choque, cumpliéndose que el ángulo de incidencia y el de reflexión son iguales.

68. Dejamos caer sin velocidad inicial una pelota desde una altura  $h$  sobre un plano inclinado un ángulo  $\varphi$  con la horizontal como se indica en la figura. Los sucesivos choques que tiene la pelota sobre el plano

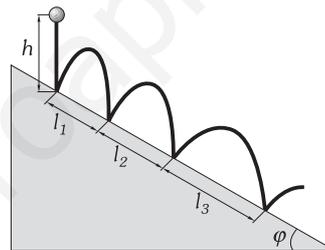
son perfectamente elásticos. ¿Qué relación existe entre las distancias  $l_1, l_2, l_3, \dots$  de los puntos de contacto en los que la pelota toca al plano inclinado?

69. Dos partículas que tienen la misma masa y se mueven con la misma velocidad  $v$ , después de chocar se mueven juntas (choque perfectamente inelástico) con una velocidad  $2v/3$ . Determinar el ángulo que formaban sus direcciones antes del choque.

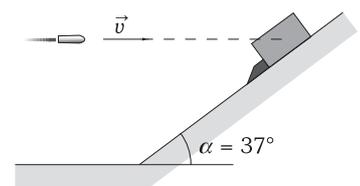
70. Un cuerpo de 5 kg de masa se mueve sobre una mesa lisa con velocidad 10 m/s y choca con otro de 10 kg de masa que se desplaza en dirección perpendicular a la anterior con velocidad de 5 m/s. Ambos bloques, después del choque, quedan unidos y deslizan juntos. Calcular la velocidad de ambos después del choque, la dirección de ésta y la pérdida de energía cinética en el choque.

71. Una bola de billar en reposo es golpeada por otra idéntica que se mueve con una velocidad  $v$ , y esta última es desviada  $\varphi_1$  de su dirección inicial. La bola que estaba en reposo adquiere una velocidad que forma un ángulo  $\varphi_2$  con la dirección de la velocidad  $v$ . Hallar la velocidad de cada bola después del choque. Aplicación:  $v = 2$  m/s,  $\varphi_1 = 30^\circ$ ,  $\varphi_2 = -45^\circ$ . Determinar si este choque es perfectamente elástico.

72. El bloque de masa  $M = 480$  g se mantiene en reposo merced a un pequeño resalte del plano inclinado. La inclinación es de  $\alpha = 37^\circ$  y el coeficiente de rozamiento entre ambos es  $\mu = 0,2$ . En estas condiciones recibe el impacto de una bala de masa  $m = 20$  g y velocidad  $v = 200$  m/s, horizontal y en el plano de la figura. Si la bala queda incrustada en el bloque: 1) Calcular la reacción del plano sobre el bloque si el choque dura  $10^{-2}$  s. 2) Suponiendo el choque instantáneo, calcular la distancia que ambos recorren por el plano hasta pararse.



Problema VIII-68.



Problema VIII-72.

# CAPÍTULO IX

## CINEMÁTICA Y ESTÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

### A) CINEMÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

#### IX - 1. Campo de velocidades de un sólido rígido en movimiento

Se define el SÓLIDO RÍGIDO como «un sistema de partículas en el que la distancia relativa entre ellas permanece constante con el tiempo». Un sólido rígido por tanto no cambia ni su forma ni su volumen durante su movimiento.

Supongamos dos partículas cualesquiera, invariablemente unidas al sólido rígido en movimiento, situadas en un instante  $t$  en puntos  $O(x_o, y_o, z_o)$  y  $P(x_p, y_p, z_p)$  referidos a un triedro que consideramos fijo (Fig. IX-1), sus vectores de posición serán:

$$\mathbf{r}_o = x_o \mathbf{i} + y_o \mathbf{j} + z_o \mathbf{k} \quad \mathbf{r}_p = x_p \mathbf{i} + y_p \mathbf{j} + z_p \mathbf{k}$$

y sus velocidades en el instante considerado:

$$\mathbf{v}_o = \frac{d\mathbf{r}_o}{dt} = \frac{dx_o}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy_o}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz_o}{dt} \mathbf{k} \quad \mathbf{v}_p = \frac{d\mathbf{r}_p}{dt} = \frac{dx_p}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy_p}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz_p}{dt} \mathbf{k}$$

Se trata de encontrar una expresión que nos relacione estas velocidades instantáneas.

De la Fig. IX-1 obtenemos:  $\mathbf{OP} = \mathbf{d} = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_o$ , y el módulo del vector  $\mathbf{d}$ , invariante con el tiempo, lo podemos escribir:  $d^2 = (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_o) \cdot (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_o) = cte$ , derivando con respecto al tiempo:

$$(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_o) \cdot \left( \frac{d\mathbf{r}_p}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_o}{dt} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{OP} \cdot (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_o) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{OP} = \mathbf{v}_o \cdot \mathbf{OP}}$$

lo que equivale a decir:

«Para dos partículas cualesquiera pertenecientes a un sólido rígido en movimiento, las proyecciones de sus vectores velocidad sobre la recta que las une son iguales en magnitud y signo».

Se dice de un campo vectorial que verifica esta propiedad que es EQUIPROYECTIVO, y el campo de velocidades de un sólido rígido lo es.

En el apartado de teoría de momentos, en el capítulo II, veíamos que un sistema de vectores deslizantes se podía describir en función de su resultante general,  $\mathbf{R}$ , y del momento resultante  $\mathbf{N}$ . La resultante  $\mathbf{R}$  es invariante respecto del centro de reducción elegido (punto respecto del que se toman los momentos), no así  $\mathbf{N}$  puesto que su valor varía al cambiar dicho centro. Vamos a demostrar que:

«El campo vectorial que resulta de tomar momentos de un sistema de vectores deslizantes respecto a los distintos puntos del espacio, es un campo vectorial equiproyectivo».

En efecto: Si  $\mathbf{N}_o$  es el momento resultante respecto a un punto  $O$  cualquiera del espacio, y  $\mathbf{N}_p$  el momento resultante respecto a otro  $P$ , entonces la relación entre ellos, según vimos en la expresión (17) del capítulo II párrafo 23, es:

$$\mathbf{N}_p = \mathbf{N}_o + \mathbf{PO} \times \mathbf{R} = \mathbf{N}_o + \mathbf{R} \times \mathbf{OP} \quad (1)$$

multiplicando escalarmente los dos miembros de esta igualdad por  $\mathbf{OP}$  y teniendo en cuenta que:  $(\mathbf{R} \times \mathbf{OP}) \cdot \mathbf{OP} = 0$  puesto que los dos vectores del producto escalar son perpendiculares entre sí, nos queda:  $\mathbf{N}_p \cdot \mathbf{OP} = \mathbf{N}_o \cdot \mathbf{OP}$ , quedando así demostrado el teorema.

Siendo cierto el recíproco y aplicándolo a nuestro caso, podemos decir: si  $\mathbf{v}$  es el vector que define el campo de velocidades para cualquier punto:  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ , y siendo éste equiproyectivo, existe un sistema de vectores deslizantes cuyos momentos:  $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\mathbf{r})$ , verifican para todos los puntos del espacio que:  $\mathbf{N} = \mathbf{v}$ .

Por analogía con (1) podemos poner:

$$\boxed{\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OP}} \quad (2)$$

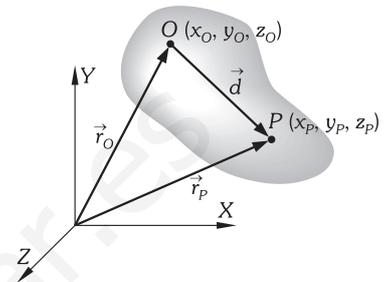


Fig. IX-1.- En un sólido rígido el módulo del vector  $\mathbf{d}$ , permanece invariante en el tiempo.

en la que hemos llamado  $\omega$  al vector resultante del sistema, que es un vector libre (no depende de  $O$ ) sino únicamente del tiempo. Esta expresión nos da la velocidad de una partícula cualquiera ( $P$ ) del cuerpo conocida la de otra ( $O$ ) y el vector  $\omega$ .

Prescindiremos de aquí en adelante del sistema de vectores del que  $\omega$  es resultante, este sistema nos ha servido como un elemento auxiliar para obtener (2). Estudiamos a continuación unos movimientos del sólido rígido que nos permitirán interpretar  $\omega$ .

**IX – 2. Casos particulares del movimiento de un sólido rígido**

En el movimiento de un sólido rígido distinguimos tres casos particulares:

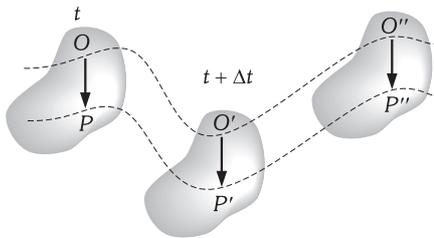


Fig. IX-2.- Movimiento de traslación del sólido.

1) MOVIMIENTO DE TRASLACIÓN. Se dice que un sólido posee un movimiento de traslación si los segmentos que unen dos puntos cualesquiera del cuerpo permanecen paralelos a sí mismos durante el movimiento. Las trayectorias de los distintos puntos del sólido pueden tener cualquier forma, recta, circular, etc.

Comparemos las velocidades de los puntos  $O$  y  $P$  del sólido, (Fig. IX-2). Si en el instante  $t + \Delta t$  la nueva posición de ambos es  $O'$  y  $P'$ , por ser equipolentes  $OP$  y  $O'P'$ , también lo serán  $OO'$  y  $PP'$ . Dividiendo estos dos últimos vectores (vectores desplazamiento) entre el incremento de tiempo, y haciendo el paso al límite, tendremos:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{PP'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{OO'}{\Delta t} \Leftrightarrow \frac{dPP'}{dt} = \frac{dOO'}{dt} \Leftrightarrow \boxed{v_p = v_o}$$

que por verificarse para dos puntos cualesquiera del sólido nos indica que las velocidades de todas las partículas del cuerpo son iguales en cada instante. Conocido el movimiento de una de ellas se conoce el de todas las demás.

Comparando esta última expresión con la (2) vemos que para el sólido rígido en traslación:  $\omega = 0$ .

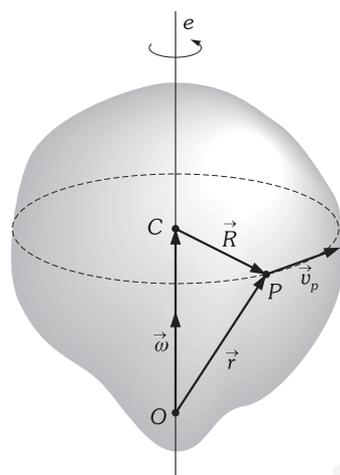


Fig. IX-3.- Movimiento de rotación del sólido en torno a un eje fijo.

2) MOVIMIENTO DE ROTACIÓN EN TORNO A UN EJE FIJO: el único movimiento permitido a un sólido con un eje fijo es una rotación en torno a él con una cierta velocidad angular; todos los puntos del sólido describirán circunferencias con centro en el eje, siendo nula la velocidad de todos los puntos de dicha recta. La velocidad de cualquier punto vendrá dada por la expresión:  $v = \omega \times R$ , vista anteriormente (Fórmula 4 del párrafo IV-2) y que podemos escribir de la forma  $v = \omega \times r$ , puesto que  $R = r - OC$ , siendo  $OC$  y  $\omega$  paralelos.

Veamos la forma que adopta en este caso la expresión (2). Si tomamos el centro de reducción en  $O$  sobre el eje, se tendrá  $v_o = 0$  y dicha expresión (2) se transforma en:

$$\boxed{v_p = \omega \times OP} \tag{3}$$

Si este vector libre  $\omega$ , lo situamos sobre el eje de giro en el sentido de avance de un sacacorchos que gira como lo hace el sólido, y comparamos la expresión (3) con  $v = \omega \times R$ , sacamos en consecuencia que  $\omega$  es el vector velocidad angular de la partícula  $P$ , que, por ser el eje fijo, es un vector de dirección constante.

Transformamos (3) de la forma:  $v_p = -OP \times \omega = PO \times \omega$  para enunciar: «la velocidad en un instante dado, de un punto cualquiera  $P$  de un sólido en rotación alrededor de un eje fijo, es el momento de la velocidad angular respecto de dicho punto», y por tanto, «el campo de velocidades de los puntos de un sólido en rotación alrededor de un eje fijo coincide con el campo de momentos del vector velocidad angular  $\omega$ ».

Resumiendo: un cuerpo rígido tiene un movimiento de rotación cuando todos sus puntos describen circunferencias cuyo centro está en la misma recta, llamada EJE DE ROTACIÓN.

Los ángulos descritos en los mismos tiempos, por las diversas partículas del cuerpo son los mismos y sus velocidades angulares instantáneas son iguales.

Conocido el movimiento de uno de los puntos del cuerpo, queda determinado el de los demás en cuanto se conozcan las distancias al eje de giro, puesto que las magnitudes lineales (espacios y velocidades) son iguales a las angulares (las mismas para todos los puntos) multiplicadas por el radio.

3) MOVIMIENTO DEL SÓLIDO CON UN PUNTO FIJO: si el sólido tiene un punto fijo, de velocidad nula, su movimiento en un instante determinado será una rotación en torno a un eje que pase por ese punto.

Eligiendo el punto  $O$  como fijo, la expresión (2) queda:

$$\boxed{v_p = \omega \times OP}$$

que tiene la misma forma que la (3), pero en este caso el vector  $\omega = \omega(t)$  no tiene necesariamente una dirección constante. Resumiendo:

En cada instante el campo de velocidades del sólido es el mismo que el de rotación alrededor de un eje (variable con el tiempo) paralelo al vector  $\omega = \omega(t)$  y con velocidad angular igual a este

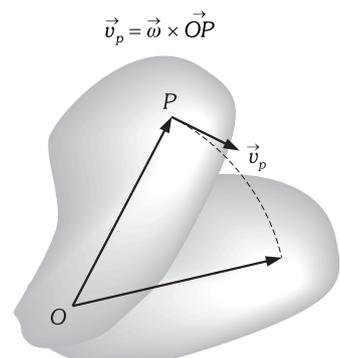


Fig. IX-4.- Movimiento del sólido con un punto fijo.

vector. Por variar el eje y el vector  $\omega$  con el tiempo se les llama EJE INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN Y VELOCIDAD ANGULAR INSTANTÁNEA DE ROTACIÓN.

**IX – 3. Movimiento general de un sólido rígido. Ecuación del eje central**

De la ecuación (2) y teniendo en cuenta los casos 1) y 3) del párrafo anterior, podemos considerar el movimiento general de una partícula  $P$  del sólido como la superposición de dos:

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_O \\ \mathbf{v}_2 = \omega \times \mathbf{OP} \end{array} \right.$$

el primero corresponde a un movimiento de traslación con velocidad igual a la de cualquier partícula  $O$  del sólido a la que llamaremos VELOCIDAD DE DESLIZAMIENTO y el segundo corresponde a un movimiento de rotación alrededor de un eje instantáneo, y cuya velocidad angular en ese instante coincide con la dirección de dicho eje.

Para analizar algunas características del movimiento, es preciso demostrar en primer lugar que  $\omega$  es independiente del punto  $O$  elegido. En efecto: las velocidades de dos puntos  $P$  y  $M$  serán:  $\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_o + \omega \times \mathbf{OP}$  y  $\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_o + \omega \times \mathbf{OM}$ .

Restando ambas expresiones tenemos:  $\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_M = \omega \times (\mathbf{OP} - \mathbf{OM}) = \omega \times \mathbf{MP}$ , es decir,  $\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_M + \omega \times \mathbf{MP}$ , que nos da la velocidad de  $P$  con centro de reducción en  $M$  y la misma  $\omega$ . El vector  $\omega$  es una invariante del movimiento.

La invarianza de  $\omega$  permite considerar el campo de velocidades de los puntos del sólido, también en el caso general de movimiento, como el campo de momentos de un sistema de vectores de resultante general  $\omega$  y de momento resultante en  $P$  igual a  $\mathbf{v}_p$ . Todas las propiedades del campo de momentos vistas en el tema II son de aplicación aquí.

Una de ellas, «el lugar geométrico de los puntos que tienen la misma velocidad (momento) que un dado  $P$  es una recta que pasa por  $P$  y es paralela a  $\omega$  (resultante)»: llamando  $M$  a uno de esos puntos, por ser  $\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_M$ , tendremos:  $\omega \times \mathbf{OP} = \omega \times \mathbf{OM} \Rightarrow \omega \times (\mathbf{OP} - \mathbf{OM}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \omega \times \mathbf{MP} = \mathbf{0}$ , relación que se ha de verificar para todos  $M$  y  $P$ , y que por tanto equivale a decir que  $\omega$  y  $\mathbf{MP}$  son paralelos.

Otra propiedad interesante, «el producto escalar de la velocidad angular  $\omega$  (resultante) por la velocidad de un punto (momento) es un invariante escalar»: multiplicando  $\omega$  por la velocidad de un punto cualquiera, tenemos:  $\omega \cdot \mathbf{v}_p = \omega \cdot (\mathbf{v}_o + \omega \times \mathbf{OP}) = \omega \cdot \mathbf{v}_o + \omega \cdot (\omega \times \mathbf{OP})$ , el último sumando es nulo por ser sus dos factores perpendiculares, luego  $\omega \cdot \mathbf{v}_p = \omega \cdot \mathbf{v}_o$ , para todo par de puntos  $P$  y  $O$ .

Y de las dos propiedades citadas obtenemos la más interesante de las que nos proporciona la igualdad de campos mencionada, la existencia del EJE CENTRAL o el lugar geométrico de los puntos de velocidad mínima, que para el sólido será el eje instantáneo de rotación y de deslizamiento. Por ser  $\omega \cdot \mathbf{v} = cte$ , la velocidad mínima será paralela a  $\omega$ . Sea  $P$  un punto del eje central y  $O$  un centro de reducción cualquiera, si llamamos  $(x, y, z)$  a las componentes del vector  $\mathbf{OP}$ , de  $\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_o + \omega \times \mathbf{OP}$ , tendremos:

$$\mathbf{v}_p = (v_{ox} + \omega_y z - \omega_z y) \mathbf{i} + (v_{oy} + \omega_z x - \omega_x z) \mathbf{j} + (v_{oz} + \omega_x y - \omega_y x) \mathbf{k}$$

La condición de paralelismo de dos vectores equivale a la proporcionalidad de sus componentes, con lo que:

$$\frac{v_{ox} + \omega_y z - \omega_z y}{\omega_x} = \frac{v_{oy} + \omega_z x - \omega_x z}{\omega_y} = \frac{v_{oz} + \omega_x y - \omega_y x}{\omega_z}$$

ecuación de una recta; es la ECUACIÓN DEL EJE CENTRAL.

En el caso particular de que se verifique  $\omega \cdot \mathbf{v} = 0$ , todas las velocidades son perpendiculares a  $\omega$ , salvo las del eje central que son nulas. El movimiento es una rotación pura con el eje central como eje instantáneo de giro.

Ahora bien, si  $\omega \cdot \mathbf{v} \neq 0$ , la velocidad mínima no es nula y el eje central desliza en la dirección de  $\omega$  y en el mismo sentido o en el contrario según que  $\omega \cdot \mathbf{v}$  sea positivo a negativo. En cada instante el movimiento del sólido es HELICOIDAL, deslizando a lo largo del eje y girando a su alrededor.

Se llama «PASO» ( $h$ ) a la distancia entre dos puntos homólogos de dos espiras consecutivas; y equivale al avance del punto, a lo largo del eje, al dar una vuelta completa.

Si el movimiento de rotación y el de deslizamiento a lo largo del eje son uniformes, el movimiento helicoidal es de paso constante (Fig. IX-5).

Todo movimiento del sólido rígido es un MOVIMIENTO HELICOIDAL. La complejidad aparente de muchos movimientos radica en el cambio, en cada instante, del eje de rotación y traslación que, por este motivo, se llama EJE INSTANTÁNEO.

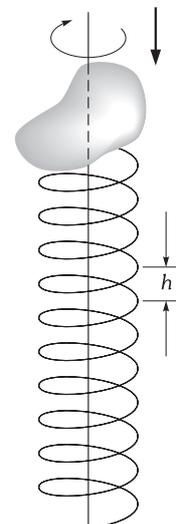


Fig. IX-5.– Movimiento helicoidal de paso constante.

**IX – 4. Aceleración del sólido rígido**

Derivando (2) con respecto al tiempo nos queda:

$$\frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_o}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{OP} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{OP}}{dt} \tag{4}$$

llamando  $\mathbf{a}_p = d\mathbf{v}_p/dt$  y  $\mathbf{a}_o = d\mathbf{v}_o/dt$ , y haciendo la transformación:

$$\frac{d\mathbf{OP}}{dt} = \frac{d(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_o)}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_p}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_o}{dt} = \mathbf{v}_p - \mathbf{v}_o = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OP}$$

al sustituir en (4) obtenemos:

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_o + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{OP} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OP}) \tag{5}$$

ecuación que nos da la aceleración de una partícula cualquiera (P) del sólido conocidos la aceleración de otra (O), el vector  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$  que caracteriza la rotación en un instante y su derivada.

Aplicaremos ahora la anterior expresión a los movimientos elementales del sólido.

1) TRASLACIÓN. Al ser  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{0}$  en cualquier instante, la (5) nos queda:

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_o$$

y por tanto: *Las aceleraciones de todas las partículas del sólido rígido en traslación son iguales en cada instante.*

2) ROTACIÓN ALREDEDOR DE UN EJE FIJO: si tomamos el punto O sobre el eje su velocidad y aceleración serán constantemente nulas. Nos queda:

$$\mathbf{a}_p = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{OP} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OP}) \tag{6}$$

En este movimiento hemos visto que  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$  corresponde a la definición de velocidad angular de una partícula en rotación alrededor de un punto y que ésta es invariablemente paralela al eje; el factor  $d\boldsymbol{\omega}/dt$  es la aceleración angular, que por ser  $\boldsymbol{\omega}$  de dirección constante, es también paralela al eje. Luego el primer sumando de la igualdad (6) será perpendicular al eje y al vector  $\mathbf{OP}$ , y por tanto tangente a la circunferencia trayectoria de la partícula, por consiguiente no es otra cosa que la aceleración tangencial.

Por otra parte, teniendo en cuenta que  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$  y la propiedad del doble producto vectorial vista en II-17, el segundo sumando de la igualdad (6) resulta:

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{R}) \boldsymbol{\omega} - \omega^2 \mathbf{R} = -\omega^2 \mathbf{R}$$

ya que  $\mathbf{R}$  es perpendicular al eje y por tanto también a  $\boldsymbol{\omega}$ , luego  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{R} = 0$ . Este vector así obtenido tiene la dirección del radio de la circunferencia trayectoria y sentido (signo negativo) hacia el centro de ella, su módulo es  $\omega^2 R$  y por tanto es la aceleración normal de la partícula. Consecuencia de lo anteriormente dicho es:

*Las aceleraciones angulares de todas las partículas que constituyen el sólido son iguales en cada instante, y conocida la distancia al eje de giro, la aceleración angular y la velocidad angular de una partícula del cuerpo se conocerán las características del movimiento de todas.*

Las discusiones del MOVIMIENTO DEL SÓLIDO RÍGIDO CON UN PUNTO FIJO Y EL CASO GENERAL se hacen de forma análoga a como lo hemos hecho para la velocidad.

**PROBLEMAS: 1 al 10.**

**B) MOMENTOS**

**IX – 5. Introducción**

Vamos a estudiar la causa que produce rotación a un cuerpo y llegaremos a la conclusión de que es la magnitud física llamada «MOMENTO», (esta palabra procede del vocablo latino «movimentum» es decir «capacidad de movimiento», no tiene nada que ver con el concepto de «momento de tiempo»); el momento surge por el efecto de las fuerzas, pero no es ni mucho menos como ellas, (son magnitudes totalmente diferentes) aunque ambas rompan el equilibrio de los sistemas. El camino que seguiremos será: primeramente estudiar el caso más sencillo mediante el que se observa la rotación pura de un sólido, «EL PAR DE FUERZAS» (Fig. IX-6); un paso más adelante será el estudio el «MOMENTO DE UNA FUERZA» que será el responsable de la rotación del movimiento «rototraslativo» que provoca la fuerza de la Fig. IX-20 (esto no es cierto si la fuerza pasa por el centro de masa, cuyo estudio veremos más adelante) y por último el caso general en el que consideraremos el sistema de fuerzas más complicado que podamos imaginarnos aplicado a cualquier cuerpo y que provocará en general un movimiento «rototraslativo».

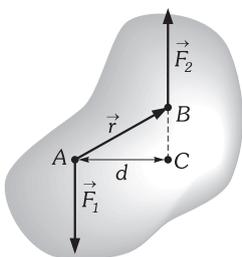


Fig. IX-6.– Par de fuerzas.

**IX - 6. Par de fuerzas: Características**

«Dos fuerzas paralelas de igual módulo y sentido opuestos que no tengan la misma línea de acción, constituyen lo que llamaremos un PAR DE FUERZAS».

Observamos que un sistema de fuerzas del tipo descrito, produce a un sólido libre un movimiento de rotación pura. Además el «par de fuerzas» (magnitud física que al igual que las fuerzas puede romper el equilibrio de los cuerpos) en esencia, no es lo mismo que la magnitud física «fuerza», ya que la resultante de las que constituyen el par es nula por ser iguales, paralelas y de sentido contrario. «El par de fuerzas, en sí, constituye una individualidad física».

«Se llama BRAZO DEL PAR al segmento perpendicular común a las dos fuerzas; es decir, su mínima distancia AC».

**CARACTERÍSTICAS DE UN PAR DE FUERZAS:**

1) En todo par  $-F_1 F_2-$  (Fig. IX-6) por deslizamiento podemos conseguir que las fuerzas estén localizadas en los extremos de su brazo AC; propiedad evidente si tenemos en cuenta que las fuerzas son vectores deslizantes.

2) Todo par se puede trasladar a cualquier lugar de su propio plano y en cualquier posición, sin que varíen los efectos que produce. Así, los pares de la Fig. IX-7 son equivalentes.

En efecto: Sea el par  $F_1 F_2$  (Fig. IX-8). En los puntos  $A'$  y  $B'$  introduzcamos el sistema de fuerzas  $F_3, F_4, F_5$  y  $F_6$ , todas ellas del mismo módulo, y equilibradas dos a dos ( $F_3$  con  $F_5$  y  $F_4$  con  $F_6$ ) por lo que el sistema de fuerzas primitivo no altera sus efectos; prolongaremos las direcciones de las fuerzas y obtendremos el rombo CDEF. Al punto E y por deslizamiento transportamos  $F_1$  y  $F_6$ , cuya resultante  $R$  seguirá la dirección de la bisetriz del ángulo E y, por lo tanto de la diagonal CE del rombo. Al punto C trasladamos  $F_2$  y  $F_5$  que nos dan la resultante  $R'$ , del mismo módulo y dirección, pero de sentido contrario a  $R$  y anulándose con ella, quedando, por tanto, todo el sistema reducido a las fuerzas  $F_3$  y  $F_4$  como queríamos demostrar.

3) Todo par se puede trasladar de su plano a cualquier lugar de otro paralelo a él y en cualquier posición. Los pares de la (Fig. IX-9) son equivalentes.

En efecto: supongamos el par  $F_1 F_2$  de la Fig. IX-10 que queremos trasladar del plano P al P'. Introduzcamos en los puntos  $A'$  y  $B'$  (proyecciones de A y B) el sistema de fuerzas de la figura, todas ellas del mismo módulo, paralelas a  $F_1$  y  $F_2$  y equilibradas dos a dos ( $F_3$  con  $F_5$  y  $F_4$  con  $F_6$ ) por lo que el sistema de fuerzas primitivo no altera sus efectos. Los puntos de aplicación de las fuerzas -A, B, A', B'- formarán un rectángulo. Compuestas las fuerzas  $F_1$  y  $F_6$  -paralelas, iguales y del mismo sentido- darán una resultante -R- doble que cualquiera de ellas y aplicada en O (centro de la diagonal). La resultante de  $F_2$  y  $F_5$  -R'- estará aplicada en el mismo punto y será igual pero de signo contrario que  $R$  y anulándose con ella; quedando, así, como resultante del sistema el par  $F_3 F_4$ , el cual lo podemos colocar en el lugar que interese en el plano P' y en cualquier posición.

No interesa conocer el lugar en que está situado un par ni su posición; interesa, únicamente, conocer la orientación de su plano, ya que podremos trasladarlo a cualquier plano, paralelo al primitivo, que nos convenga, y en el lugar y posición que deseemos.

De lo anteriormente dicho se deduce:

«Una de las características que fijan el modo de ser de un par es la orientación de su plano que, como es sabido, queda determinada por un vector (que se llama VECTOR NORMAL) perpendicular a él». (Fig. IX-14).

4) En todo par podemos modificar la longitud de su brazo sin que varíen sus efectos siempre que el producto del módulo de la fuerza por la longitud del brazo permanezca invariable.

Los pares  $F_1 F_2$  y  $F_1' F_2'$  son equivalentes puesto que  $6 \times 10 = 5 \times 12$  (Fig. IX-11).

«Otra característica del par es el producto del módulo de una de las fuerzas por la longitud del brazo».

Para demostrar la anterior afirmación, basta descomponer la fuerza  $F_1$  (vertical y hacia arriba) del par  $F_1 A B F_1$  (Fig. IX-12), en las  $F_2$  y  $F_1 - F_2$  situadas en O y en B respectivamente y cuya suma es  $F_2 + F_1 - F_2 = F_1$ , debiéndose cumplir:

$$\frac{F_1 - F_2}{F_2} = \frac{OA}{AB}$$

Al haber descompuesto  $F_1 A$ , queda un sistema de tres fuerzas: la  $F_2$  aplicada en O y las  $F_1 - F_2$  y  $F_1$  aplicadas en B; estas últimas dan una resultante  $F_1 - (F_1 - F_2) = F_2$  aplicada en B, paralela a la  $F_2 O$ , de su mismo módulo y de sentido

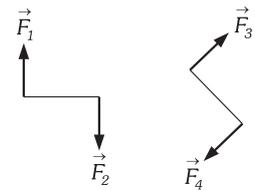


Fig. IX-7.- Pares equivalentes.

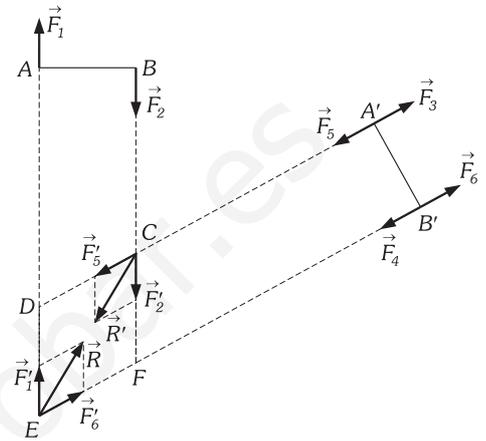


Fig. IX-8.- Todo par se puede trasladar a cualquier lugar de su propio plano y en cualquier posición sin que varíen los efectos que produce.

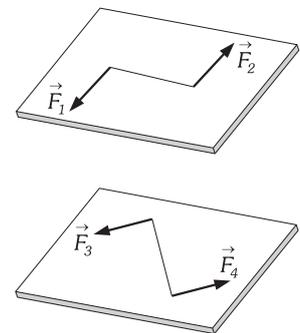


Fig. IX-9.- Pares equivalentes.

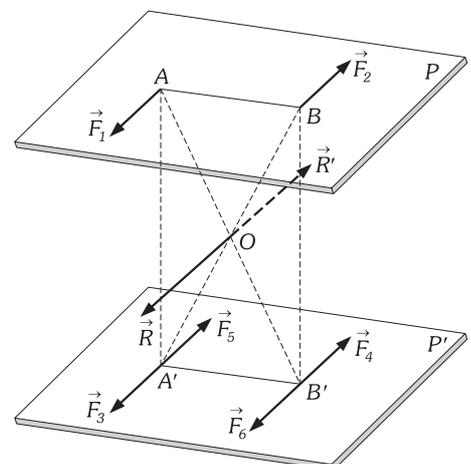


Fig. IX-10.- Todo par se puede trasladar de su plano a cualquier lugar de otro paralelo a él y en cualquier posición.

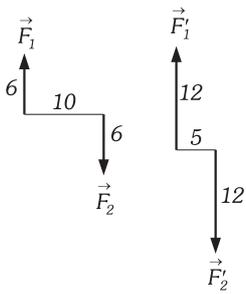


Fig. IX-11.- Pares equivalentes.

contrario constituyendo, por lo tanto, un par de fuerzas equivalente al primero. Aplicando a la expresión anterior la propiedad de las proporciones: «suma de numerador y denominador de la primera fracción es a su denominador, etc.», obtenemos:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{OA + AB}{AB} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{OB}{AB} \Rightarrow F_1 \times AB = F_2 \times OB$$

Igualdad que nos demuestra la equivalencia de dos pares, en los que el producto de la fuerza por el brazo es el mismo.

5) No bastan para determinar un par las características anteriores, ya que dos pares pueden tenerlas iguales y producir rotaciones opuestas (Fig. IX-13).

«Es característica del par el sentido de giro que produce».

**IX - 7. Momento de un par de fuerzas. Composición**

Las características del par se compendian en una magnitud que se llama MOMENTO DEL PAR, definida como un vector libre perpendicular al plano del par, de módulo igual al producto del módulo de una de las fuerzas por la mínima distancia entre ambas (longitud de su brazo) y cuyo sentido es el avance de un sacacorchos que gira, según la rotación del par (Fig. IX-14). Pares que tienen el mismo momento son equivalentes.

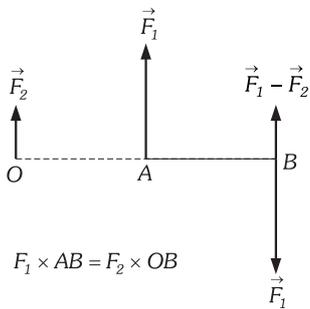


Fig. IX-12.- Dos pares son equivalentes cuando el producto de la fuerza por su brazo es el mismo.

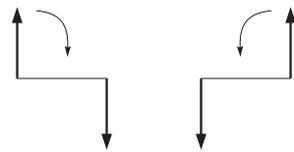


Fig. IX-13.- Los pares indicados producen rotaciones diferentes.

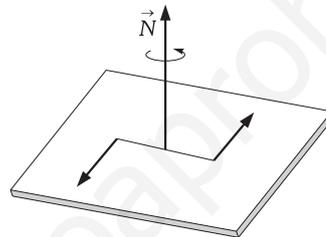


Fig. IX-14.- Vector momento de un par de fuerzas.

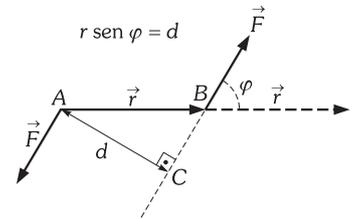


Fig. IX-15.- El momento de un par de fuerzas es el producto vector de la distancia entre sus puntos de aplicación por una de las fuerzas.

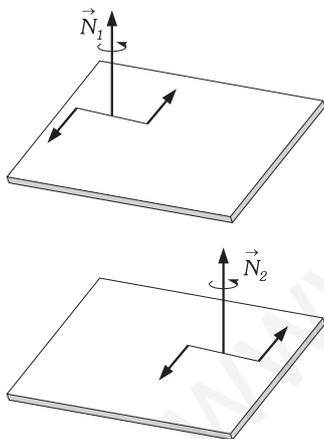


Fig. IX-16.- Los momentos  $\vec{N}_1$  y  $\vec{N}_2$  son equivalentes.

El momento del par de la Fig. IX-15 es un vector perpendicular al plano del papel hacia arriba y cuyo módulo es:

$$N = Fd = Fr \text{ sen } \varphi$$

Si damos a  $r$  carácter vectorial, en el sentido hacia la fuerza que consideramos (en el caso de la figura el sentido  $AB$  hacia la fuerza  $F$  del dibujo), el momento del par coincide con el producto vector de  $r$  (primer factor) por  $F$ , ya que tal producto es un vector perpendicular al plano del papel, hacia arriba y cuyo módulo es:  $rF \text{ sen } \varphi$ .

«El momento de un par es el producto vectorial del vector de posición del origen de una fuerza respecto de la otra, por la primera de ellas».

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$$

De acuerdo con las propiedades ya estudiadas del par de fuerzas, se comprende fácilmente que EL VECTOR MOMENTO ES UN VECTOR LIBRE Y AXIAL, es decir, que se puede trasladar paralelamente a sí mismo, a cualquier punto, con tal que se conserve su módulo y su sentido, puesto que el par 1 se puede trasladar a la posición 2 (Fig. IX-16), y, por lo tanto, el momento  $\vec{N}_1$  es equivalente a  $\vec{N}_2$ .

Para componer pares, se componen sus momentos, tomando un punto cualquiera del espacio,  $O$ , (Fig. IX-17) y trasladando a él paralelamente a sí mismos, a los momentos componentes.

Se verifica que «el momento del par resultante es igual a la suma de los momentos de los pares componentes». Es decir:  $\vec{N}_R = \vec{N}_1 + \vec{N}_2$ .

**IX - 8. Definición del momento de una fuerza con respecto a un punto\***

EL MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN PUNTO,  $O$  (Fig. IX-18) es un vector perpendicular al plano determinado por la fuerza y el punto, cuyo módulo es el producto del módulo de la fuerza por la menor distancia al punto:  $N = Fd$ , y cuyo sentido es el de avance de un sacacorchos que,

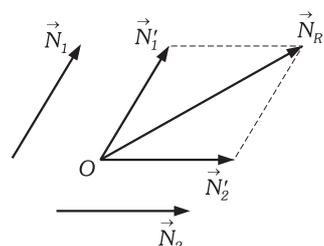


Fig. IX-17.- Composición de pares de fuerzas.

\* En la teoría de Momentos vista en el Capítulo II, tenemos un estudio más completo de esta operación del que realizamos en este y sucesivos párrafos.

apoyada su punta en  $O$  y colocado perpendicularmente al plano de  $F$  y  $O$ , girase en el sentido que determina la fuerza.

En el caso de la Fig. IX-18, el vector momento es perpendicular al plano del papel y hacia afuera. Siguiendo el criterio del párrafo anterior:

«EL MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN PUNTO es el producto vectorial del vector de posición del origen de la fuerza respecto del punto, por la propia fuerza».

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

### IX - 9. Concepto físico de momento de una fuerza con respecto a un punto

Si una fuerza  $\mathbf{F}$  se quiere trasladar (al punto  $O$ , por ejemplo) paralelamente a sí misma (Fig. IX-19-A), se tendrá que hacer el siguiente artificio: colocar en  $O$  dos fuerzas iguales y paralelas a  $\mathbf{F}$ , una de su sentido,  $\mathbf{F}_1$ , y otra contrario,  $\mathbf{F}_2$  (Fig. IX-19-B). De esta forma tenemos la fuerza en  $O$  ( $\mathbf{F}_1$ ), habiendo introducido un par  $\mathbf{F}\mathbf{F}_2$ . Si consideramos que el momento de  $\mathbf{F}$  con respecto a  $O$  es igual al momento del par  $\mathbf{F}\mathbf{F}_2$ , podemos afirmar que:

«El momento de una fuerza  $\mathbf{F}$  con respecto a un punto  $O$ , es el momento del par  $\mathbf{F}\mathbf{F}_2$ , que hay que introducir, para trasladar la fuerza al punto».

Para ponderar la importancia que tiene este concepto, consideremos el caso más sencillo en el estudio de la dinámica, el efecto que produce una sola fuerza aplicada a un cuerpo, de forma que ésta no pase por su centro de masa (Fig. IX-20). EL movimiento que adquiere el cuerpo es roto-traslatorio; para estudiar la traslación, trasladaremos la fuerza al centro de masa, al que producirá una aceleración dada por  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  (primera ecuación del movimiento). Para el estudio del movimiento de rotación producido por el par que se ha introducido al trasladar  $\mathbf{F}$  al centro de masa, tendremos en cuenta que su momento está relacionado con el momento angular del cuerpo mediante la ecuación  $\mathbf{N} = d\mathbf{J}/dt$  (segunda ecuación del movimiento) que junto con la primera nos describe el movimiento del cuerpo.

### IX - 10. Resultante y momento resultante de un sistema de fuerzas

Introducido el concepto de momento de una fuerza respecto de un punto, estamos en condiciones de demostrar el siguiente teorema:

«El sistema de fuerzas más complicado que podamos imaginar, se reduce siempre a una fuerza llamada RESULTANTE y a un par de fuerzas, al que llamamos MOMENTO RESULTANTE».

En efecto: Consideremos un cuerpo sobre el que actúan las fuerzas  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ , trasladémoslas paralelamente a sí mismas y a un punto cualquiera del espacio, el sistema equivalente al anterior quedará formado por  $n$  fuerzas concurrentes de resultante única:

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i$$

y por los pares  $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \dots, \mathbf{N}_n$  obtenidos al trasladar las  $n$  fuerzas primitivas al punto escogido, estos  $n$  pares darán uno resultante único de valor:

$$\mathbf{N} = \sum \mathbf{N}_i$$

quedando así demostrado el teorema. Al punto al que se trasladan todas las fuerzas, que es el mismo respecto al cual se toman sus momentos para obtener los  $n$  pares, se le llama CENTRO DE MOMENTOS.

Así como la fuerza resultante es invariante con respecto al punto al que se trasladan las fuerzas, el momento resultante varía su valor al variar éste. Si llamamos  $O$  y  $O'$  a dos centros de momentos distintos en el espacio, la relación entre los pares resultantes del sistema de fuerzas es (párrafo 23 del capítulo II):  $\mathbf{N}' = \mathbf{N} + \mathbf{O}'\mathbf{O} \times \mathbf{F}$ , que nos dice: «El momento de un sistema de fuerzas con respecto a un punto  $O'$  es igual al momento con respecto a otro  $O$  más el momento de la fuerza resultante supuesta aplicada en  $O$ ».

El Teorema de Varignon, Torsor, Momento mínimo (que en este estudio se llama «par mínimo»),... estudiados en el Capítulo II, completan el estudio de los sistemas de fuerzas que tratamos en este apartado.

PROBLEMAS: 11 al 17.

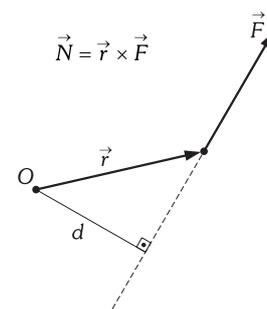


Fig. IX-18.- Momento de una fuerza respecto a un punto.

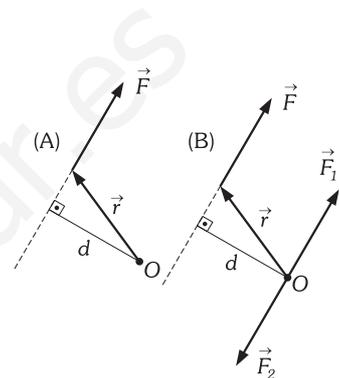


Fig. IX-19.- Los sistemas (A) y (B) son equivalentes; es decir: producirán los mismos efectos al actuar sobre un cuerpo.

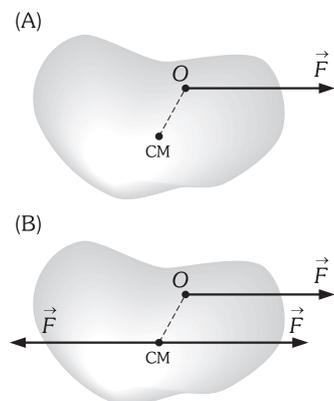


Fig. IX-20.- Los sistemas (A) y (B) producen los mismos efectos.

C) ESTÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

IX – 11. Estática del sólido rígido

Supongamos que sobre un cuerpo actúa el sistema de fuerzas  $F_1, F_2, \dots, F_n$  en puntos  $O_1, O_2, \dots, O_n$  que consideramos como orígenes de dichas fuerzas. Elijamos un punto cualquiera  $O$  en el espacio al que llamaremos CENTRO DE MOMENTOS; si  $r_1 = \overrightarrow{OO_1}, r_2 = \overrightarrow{OO_2}, \dots, r_n = \overrightarrow{OO_n}$ , la RESULTANTE Y EL MOMENTO RESULTANTE del sistema de fuerzas tomarán los valores:

$$F = \Sigma F_i \quad N = \Sigma r_i \times F_i = \Sigma N_i$$

«Diremos que el cuerpo se encuentra en EQUILIBRIO cuando la resultante  $F$  y el par resultante  $N$  del sistema de fuerzas aplicado sobre él sean nulos, independientemente del punto elegido para obtener ambos».

$$F = \Sigma F_i = 0 \quad N = \Sigma N_i = \Sigma r_i \times F_i = 0$$

estas ecuaciones vectoriales equivalen a:

$$\begin{array}{l|l} F_x = 0 & N_x = 0 \\ F_y = 0 & N_y = 0 \\ F_z = 0 & N_z = 0 \end{array}$$

y considerando que tales componentes serán a su vez la suma algebraica de las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, según hemos visto en la definición de suma de vectores, las seis ecuaciones anteriores se escribirán:

$$\begin{array}{l|l} \Sigma F_{ix} = 0 & \Sigma N_{ix} = 0 \\ \Sigma F_{iy} = 0 & \Sigma N_{iy} = 0 \\ \Sigma F_{iz} = 0 & \Sigma N_{iz} = 0 \end{array}$$

ecuaciones que son independientes, cualquiera de ellas puede cumplirse independientemente de las otras.

Obsérvese que un cuerpo en «movimiento» con velocidad lineal constante del centro de masas y velocidad angular constante alrededor de su centro de masas, verifican las condiciones de «equilibrio»; esta palabra se refiere a fuerzas y momentos.

Es de destacar que las tres ecuaciones del equilibrio referidas a momentos tienen que verificarse cualquiera que sea el punto  $O$  elegido como centro de momentos; por esto, en los problemas de estática, la elección más conveniente del centro de momentos será la del punto por el que pase el mayor número posible de fuerzas, de esta manera, el sistema de ecuaciones que frecuentemente hay que resolver en este tipo de problemas se simplificará muchísimo.

**PROBLEMAS: 18 al 46.**

IX – 12. Equilibrio de un cuerpo sometido a ligaduras

Cuando alguna de las seis condiciones de equilibrio de un cuerpo vistas en el párrafo anterior, se verifican «a priori» se dice que el cuerpo está sometido a ligaduras; dicho de otra forma: «un cuerpo está sometido a LIGADURAS cuando existen todas o algunas de las imposibilidades siguientes: traslación a lo largo de alguno de los tres ejes de un triedro de referencia o rotación en torno a ellos».

Por ejemplo: una cuenta de collar que puede, únicamente, deslizarse a lo largo del eje  $Y$  y girar en torno a él, tiene cuatro ligaduras, imposibilidades de desplazamiento sobre  $X$  y  $Z$ , y de giro alrededor de ellos (Fig. IX-21). Cada «ligadura» elimina una de las seis condiciones de equilibrio expresadas; así, en nuestro ejemplo, las ecuaciones de equilibrio de la cuenta de collar, son:  $\Sigma F_y = 0, \Sigma N_y = 0$ .

Consideremos un cuerpo sobre el que actúan diversas fuerzas y que tiene un punto fijo. Se pueden trasladar al punto fijo todas las fuerzas, introduciendo tantos pares como fuerzas. La resultante de las fuerzas no verificará acción alguna por estar aplicada a un punto fijo y quedar anulada por su «reacción». Los pares, una vez compuestos, determinan un par; si su momento es cero, habrá equilibrio. «La condición de equilibrio de un cuerpo con un punto fijo, es que la suma de los momentos de las fuerzas, con respecto a un punto, sea cero». Dada la imposibilidad de traslación a lo largo de los ejes, es decir, la existencia de tres «ligaduras» las condiciones de equilibrio quedan reducidas a:  $\Sigma N_x = 0, \Sigma N_y = 0, \Sigma N_z = 0$ .

En el caso de un sólido con un eje fijo, como sólo es posible el movimiento de rotación en torno al eje, las condiciones de equilibrio se reducen a:  $\Sigma N_x = 0, \Sigma N_y = 0, \Sigma N_z = 0$ . Orientando los ejes de coordenadas de forma que el  $Z$  sea paralelo al eje de giro ( $O_1 O_2$ ) y el  $X$  tangente a la posible trayectoria de un punto (Fig. IX-22), observamos que una fuerza  $F$  suma de todas las fuerzas que actúan, tiene por componente activa la  $F_x$  ya que la  $F_y$  y la  $F_z$  provocarían movimientos prohi-

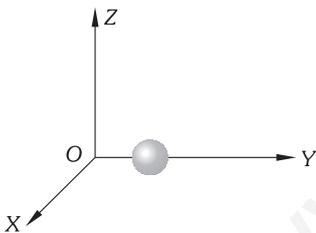


Fig. IX-21.- Sistema con cuatro ligaduras.

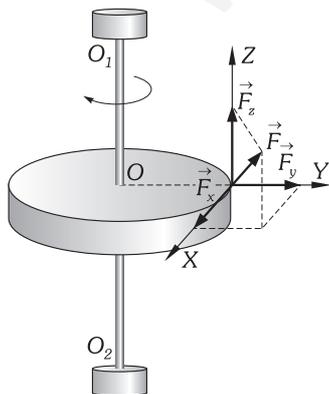


Fig. IX-22.- Un sólido con un eje fijo tiene cinco ligaduras.

bidos en el cuerpo. Las condiciones de equilibrio se reducen a:  $\Sigma N_z = 0$ . El valor del momento  $N_z$  con respecto a  $O$  equivalente al momento de  $\mathbf{F}$  con respecto al eje  $O_1O_2$ . «Para que un cuerpo que puede girar en torno a un eje fijo esté en equilibrio, es necesario que la suma de los momentos con respecto al eje, de todas las fuerzas aplicadas, sea igual a cero».

Por efecto de actuar fuerzas externas a un sistema y éste estar sometido a «ligaduras» aparecen fuerzas que llamaremos de *ligadura*, también externas, que provienen de otros sistemas y son respuesta a las limitaciones que imponen las «ligaduras».

Para clarificar estos conceptos, supongamos un cuerpo que se pueda deslizar a lo largo de un eje cuadrangular al que aplicamos una fuerza  $\mathbf{F}$  en el punto  $O$  (Fig. IX-23). Descomponemos  $\mathbf{F}$  en tres direcciones perpendiculares ( $X, Y, Z$ ), una de las cuales ( $\mathbf{F}_y$ ), coincide con la dirección del posible movimiento del cuerpo:  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_z$ . Las fuerzas  $\mathbf{F}_x$  y  $\mathbf{F}_z$ , perpendiculares al movimiento «permitido» al cuerpo son anuladas por la reacción del eje fijo. Las fuerzas «reacción» del eje que actúan sobre el cuerpo son las *fuerzas de ligadura* que son iguales y de sentido contrario a  $\mathbf{F}_x$  y  $\mathbf{F}_z$ .

Suponiendo un desplazamiento ( $dy$ ) a lo largo del único eje ( $Y$ ) en el que los desplazamientos son posibles, los trabajos de las componentes son:

$$dW_a = F_x dy \cos 90 = 0 \quad dW_b = F_y dy \quad dW_c = F_z dy \cos 90 = 0$$

«Las fuerzas de ligadura no producen trabajo».

Al ser el trabajo de un sistema de fuerzas igual a la suma de los trabajos de cada una de ellas, obtenemos para trabajo de la fuerza  $\mathbf{F}$ :  $dW = dW_a + dW_b + dW_c = F_y dy$ . En el cálculo del trabajo consideraremos «únicamente» como fuerza activa la componente de la fuerza en la dirección del movimiento permitido al cuerpo.

**IX - 13. Principio de los trabajos virtuales**

Siguiendo el ejemplo del párrafo anterior, para que exista equilibrio estático (reposo) o movimiento rectilíneo y uniforme, la suma de las fuerzas aplicadas a lo largo del eje  $Y$  ha de ser nula. Si suponemos fuerzas  $F_{1y}, F_{2y}, F_{3y}$ , etc., en la dirección del eje indicado, se ha de verificar para que exista equilibrio:  $F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \dots = 0$  y multiplicando por  $dy$  (desplazamiento que nos imaginamos se realiza en el eje  $Y$ ), obtenemos:

$$F_{1y} dy + F_{2y} dy + F_{3y} dy + \dots = 0$$

Cada uno de los términos de la suma es un TRABAJO VIRTUAL (que no se realiza, sino que imaginamos su realización) compatible con las fuerzas de ligadura (imposibilidad de movimiento a lo largo de los ejes  $X$  y  $Z$ ). Podemos enunciar, así, el PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES:

«En un sistema en equilibrio, la suma de los trabajos virtuales de las fuerzas aplicadas compatibles con las ligaduras del sistema, ha de ser igual a cero».

Este principio nos facilita el cálculo de las condiciones de equilibrio de cualquier sistema de fuerzas aplicado a un cuerpo.

**PROBLEMAS: 47 al 54.**

**D) RESISTENCIA A LA RODADURA**

**IX - 14. Resistencia a la rodadura**

Al hacer rodar un cuerpo sobre una superficie horizontal se observa que el cuerpo después de más o menos tiempo, se para, lo que indica la existencia de un par de fuerzas de resistencia a la rodadura de sentido contrario a la que hace girar al cuerpo. Ello es debido a que, por no ser absolutamente rígidos el cuerpo que rueda y el suelo en que se apoya, la rueda queda como encajada en éste en sus sucesivas posiciones, siendo mayores las reacciones del suelo contra la rueda en la parte anterior que en la posterior (Fig. IX-24), resultando en definitiva, una fuerza de reacción como la de la Fig. IX-25 que origina el par de resistencia a la rodadura.

Se demuestra experimentalmente que el MOMENTO DEL PAR DE RESISTENCIA A LA RODADURA es directamente proporcional a la fuerza normal al plano en que rueda el cuerpo.

$$N_R = \rho N$$

En el caso de una rueda sobre la que no actúa más fuerza que su peso, rodando en superficie horizontal, la fórmula anterior se escribirá:  $N_R = \rho Mg$ ,  $\rho$  es el COEFICIENTE DE RESISTENCIA A LA RODADURA, que como cociente del momento de un par a una fuerza, se mide en unidades de longitud.

Dejando aparte el par de rodadura, vamos a estudiar tres casos diferentes de rotores que por efecto de fuerzas que actúan sobre ellos giran (ejes de máquinas), o giran y se trasladan sobre una superficie de apoyo (ruedas).

1) Un eje al girar alrededor de una recta que pasa por su centro geométrico (eje de giro) se desliza o fricciona con la superficie en que está encajado en la que se apoya, la fuerza de resis-

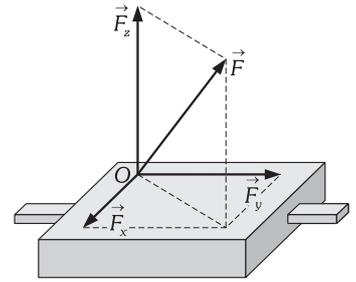


Fig. IX-23.- El cuerpo sólo puede moverse a lo largo del eje  $Y$ .  $\vec{F}_y$  es la «fuerza activa» la única que realiza trabajo.

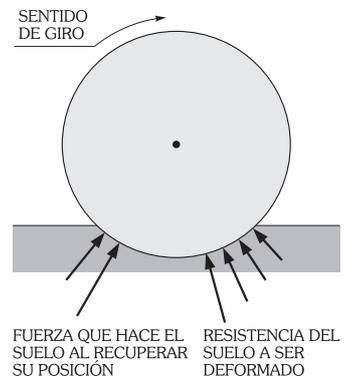


Fig. IX-24.- Las reacciones del suelo contra la rueda son mayores en la parte anterior que en la posterior.

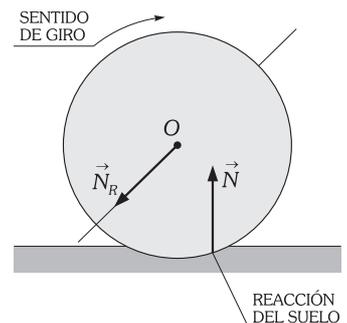


Fig. IX-25.- Fuerza neta de reacción resultante que origina el par de resistencia a la rodadura.

cia al deslizamiento aplicada en el punto (o puntos) de contacto del eje con la superficie toma el valor:  $R = \mu N$ , produciendo un momento que se opone a que el eje gire.

La fuerza de rozamiento en la rodadura suele ser de diez a veinte veces menor que en el deslizamiento a fricción, por lo que, para evitar en lo posible la resistencia que opone un cojinete a un eje que gire en él, se sustituye el deslizamiento por la rodadura por medio de «cojinetes de bolas».

En las máquina se disminuyen los rozamientos por medio de *lubricantes* que recubren de una película de grasa las superficies sometidas a rozamientos.

2) Al trasladarse una rueda, siempre que gire y se arrastre sobre una superficie (ruede y deslice) la fuerza de resistencia al deslizamiento existe siempre, aplicada en el punto de contacto de la rueda con la superficie y tomará el valor:  $R = \mu N$  produciendo dos efectos: oponiéndose a la traslación con dicha fuerza  $R$  y favoreciendo la rotación con un par de fuerzas cuyo momento toma el valor:  $Rr$ , en la que  $r$  es el radio de la rueda; este par podrá ser el único causante de la rodadura, como ocurre en el caso de una rueda que se mueve después de haber sido lanzada sobre una superficie horizontal (Fig. IX-26). El par de rodadura y la fuerza  $R''$  de resistencia a la traslación de la rueda hacen que se llegue a la rodadura sin deslizamiento que describimos en el siguiente apartado.

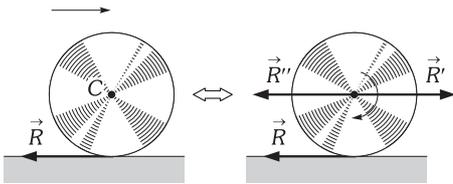


Fig. IX-26.— Al trasladar la fuerza  $\vec{R}$  al centro, aparecen la fuerza de frenado  $\vec{R}''$  y el par  $R'$  que produce la rotación.

3) Si se traslada una rueda *girando sin deslizar* entonces la fuerza de rozamiento es siempre:  $R \leq \mu_e N$  (el signo igual será el caso extremo, es decir; cuando esté a punto de deslizar). Esta  $R$  irá en el sentido del movimiento o en el contrario a él y tomando en un caso el valor cero, dependiendo estos hechos de la línea de la acción de la fuerza de tracción.

**PROBLEMAS: 55 y 56.**

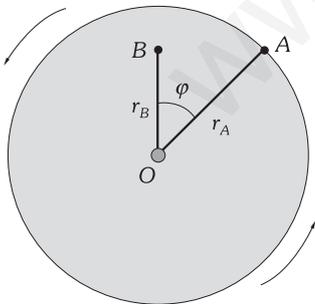
**PROBLEMAS**

**A) CINEMÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO**

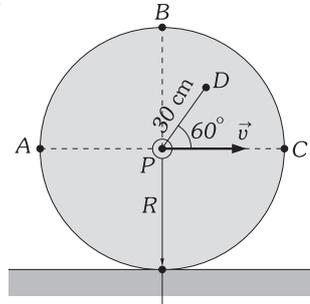
1. Un disco de radio 10 cm gira alrededor de su eje con una aceleración angular que viene expresada en el SI por la ecuación:  $\alpha = 2t + 3$ . Si el disco parte del reposo, determinar transcurridos 2 s: 1) Su velocidad angular. 2) El número de vueltas que ha girado. 3) La velocidad (módulo) de un punto que se encuentra a 6 cm del eje de giro. 4) La aceleración tangencial y normal de dicho punto.

2. El módulo del vector velocidad de un punto A de la periferia del volante de la figura, en un instante dado decrece a razón de  $1 \text{ m/s}^2$  y la aceleración total del punto B es  $1,4 \text{ m/s}^2$ . Si  $r_A = 30 \text{ cm}$  y  $r_B = 15 \text{ cm}$ , calcular la velocidad angular en tal instante.

3. Un disco de radio  $R = 1 \text{ m}$  rueda sin deslizar por un plano horizontal y en un instante dado, su centro P tiene una velocidad de  $10 \text{ m/s}$  en la dirección indicada en la figura. Se pide: 1) Demostrar que es cierta la relación  $v = \omega R$  en la que  $v$  es la velocidad lineal de P y  $\omega$  la velocidad angular del disco. 2) Determinar cuál es el eje instantáneo de rotación. 3) Calcular la velocidad de los puntos A, B, C y D que se indican en la figura.

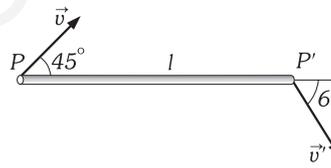


Problema IX-2.

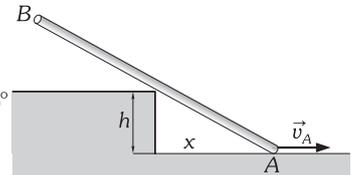


Problema IX-3.

4. En un instante determinado una barra de 3 m de longitud se mueve en un plano horizontal (Plano de la figura). Su extremo P tiene una velocidad de  $1 \text{ m/s}$  que forma un ángulo de  $45^\circ$  con la dirección  $PP'$ ; sabemos también que su extremo  $P'$  tiene una velocidad en ese instante tal que forma un ángulo de  $-60^\circ$  con la misma dirección. Se pide calcular: 1) La velocidad  $v'$  del extremo  $P'$ . 2) La velocidad angular en ese instante de todas las partículas que forman la barra. 3) Posición del eje instantáneo de rotación.



Problema IX-4.



Problema IX-5.

5. Una barra de 3 m de longitud resbala por el suelo apoyándose en un escalón de altura  $h = 1 \text{ m}$  (ver figura). Si el extremo A, en el momento en que está separado del escalón  $x = \sqrt{3} \text{ m}$ , tiene una velocidad  $v_A = 1 \text{ m/s}$ . Calcular: 1) La velocidad angular de la barra en ese momento. 2) La velocidad del extremo B.

6. Dos barras de 1 m de longitud están unidas en B por una bisagra como indicamos en la figura estando apoyadas en el suelo y el extremo A en una pared (A es un punto fijo); se deja el sistema en libertad y cuando  $\theta = 20^\circ$  la velocidad angular de la barra AB es  $\omega = 0,2 \text{ rad/s}$ . Determinar la velocidad del extremo C de la barra BC.

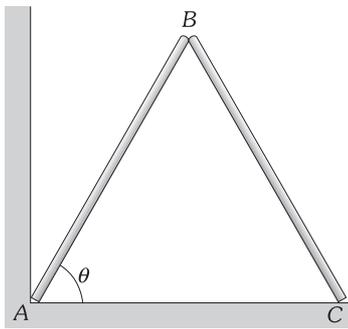
7. Una escalera de mano de 5 m de longitud se apoya sobre una pared vertical y el suelo horizontal; rebasada la posición de equilibrio comienza a caer de forma que en un momento determinado la velocidad del extremo que se arrastra por el suelo y que se encuentra a 4 m de la pared es de  $2 \text{ m/s}$  y su aceleración de  $-1 \text{ m/s}^2$ . Se pide calcular en ese instante: 1) La velocidad y aceleración del otro extremo. 2) La velocidad y aceleración del punto medio de la escalera.

8. Un volante de la forma indicada en la figura rueda sin deslizar a lo largo de las guías inclinadas  $30^\circ$  con la horizontal. El radio del cilindro es 2 cm y el del disco 10 cm. En un momento determinado los puntos del eje  $EE'$  tienen una velocidad  $v = 10 \text{ cm/s}$  y una aceleración  $a = 2 \text{ cm/s}^2$ . Se pide calcular la velocidad y aceleración de los puntos A, B, C y D del disco (recta AC paralela al plano horizontal y la BD perpendicular al plano inclinado).

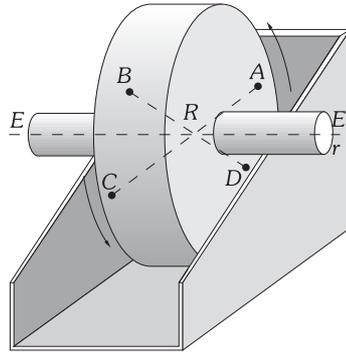
9. Un sólido rígido se mueve girando en torno del eje Y con  $\omega = 2 \text{ rad/s}$  en sentido positivo y deslizando sobre el mismo eje con velocidad  $v_D = 1 \text{ m/s}$ . El sistema se traslada a su vez, con una velocidad de  $10 \text{ m/s}$ , en la dirección  $3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ , respecto de un observador fijo. Calcular la ecuación del eje de giro y la velocidad de deslizamiento obtenidos por el observador fijo.

10. Los puntos A (0, 0, 1) m, B (1, 1, 0) m y C (0, 1, 2) m, pertenecientes a un sólido, tienen las velocidades  $\mathbf{v}_A = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k} \text{ m/s}$ ,  $\mathbf{v}_B = 6\mathbf{j} +$

$2\mathbf{k}$  m/s y  $\mathbf{v}_C = -2\mathbf{i} + \mathbf{k}$  m/s, respecto de un sistema de ejes rectangulares. 1) Calcular la velocidad angular del sólido en ese instante. 2) Hallar el eje instantáneo de rotación. 3) ¿Se trata de una rotación pura? 4) Si no es así, ¿cuál es la velocidad de deslizamiento?



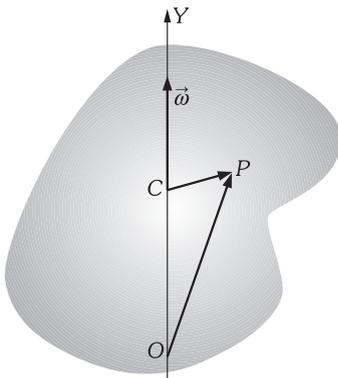
Problema IX-6.



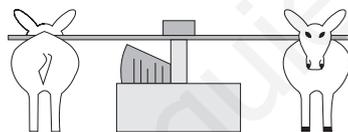
Problema IX-8.

**B) MOMENTOS**

11. Un molinero tiene dos borriquillos para mover la muela de su molino (ver figura); cada uno de ellos realiza una fuerza de 60 kg. La longitud del travesaño a que están enganchados es de 4 m. Uno de los borriquillos se muere. ¿Qué modificación se debe hacer en la instalación, para que el molino funcione, haciendo trabajar al superviviente con una fuerza de 80 kg?

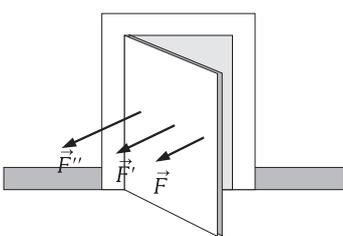


Problema IX-9.

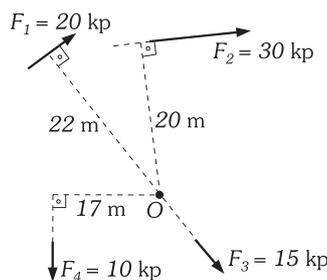


Problema IX-11.

12. La fuerza necesaria para abrir una puerta tirando de su manecilla es la centésima parte de su peso. Si la puerta pesa 10 kg y la distancia de la manecilla al eje de giro es 1 m, calcular: 1) La fuerza  $F'$  necesaria para abrir la puerta aplicándola en un punto que dista 50 cm del eje. 2) La fuerza  $F''$  necesaria para abrir la puerta, aplicada a un punto que dista 10 cm del eje (ver figura).



Problema IX-12.



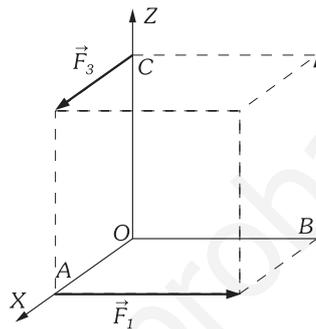
Problema IX-13.

14. Los módulos de las fuerzas indicadas en la figura son todos iguales a 1 N y el lado del cubo es 1 m. Calcular: 1) La fuerza resultante y su módulo. 2) Momento resultante respecto a O (0, 0, 0) y su módulo. 3) Momento resultante respecto a P (3, 4, 2) m y su módulo.

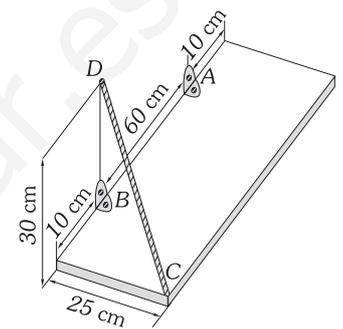
15. Aplicar el teorema de Varignon para demostrar que en la composición de dos fuerzas paralelas  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{F}'$  cuya punto de aplicación son A y B, la línea de acción de la resultante  $\mathbf{R} = \mathbf{F} + \mathbf{F}'$ : 1) Divide al segmento AB en partes inversamente proporcionales a las componentes si éstas tienen el mismo sentido. 2) Divide exteriormente a dicho segmento en partes inversamente proporcionales a las componentes si éstas tienen sentidos contrarios.

16. Dados los módulos de cuatro fuerzas paralelas y del mismo sentido  $F_1 = 2$  N,  $F_2 = 4$  N,  $F_3 = 6$  N y  $F_4 = 8$  N, cuyos puntos de aplicación distan de un plano paralelo a todas ellas  $d_1 = 3$  m,  $d_2 = 4$  m,  $d_3 = 1$  m y  $d_4 = 7$  m, determinar la resultante y la distancia de su punto de aplicación al plano mencionado.

17. Una estantería de las dimensiones que expresamos en la figura, está sujeta a la pared por dos soportes A y B, y por una cuerda CD, cuya tensión es de 30 N, sujeta a la pared en el punto D. Determinar el momento respecto de A de la fuerza que la cuerda ejerce en el punto C.



Problema IX-14.

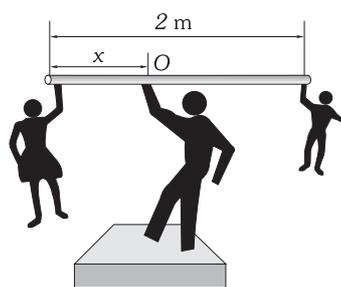


Problema IX-17.

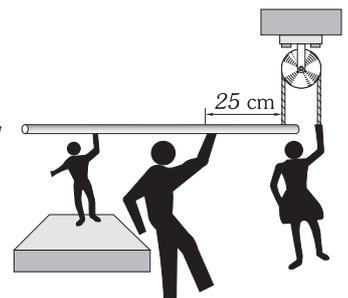
**C) ESTÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO**

18. Un hércules de circo levanta a su mujer (70 kg) y a su hijo (30 kg) colgados en los extremos de una barra, sin peso apreciable, de longitud 2 m (ver figura). ¿Qué fuerza efectúa y por dónde tiene que sostener la barra?

19. El niño del problema anterior –digno hijo de su padre– también sostiene la barra con el padre y la madre suspendidos en ella; la segunda colgando de una polea enlazada al extremo de la barra, como indica la figura; y el padre (80 kg), suspendido directamente, a 25 cm del mismo extremo. ¿Qué esfuerzo tiene que efectuar el niño y por dónde tiene que sostener la barra?



Problema IX-18.



Problema IX-19.

20. ¿Por qué el trabajador que va detrás se muestra tan descansado y su compañero con tanta fatiga? (Ver figura).

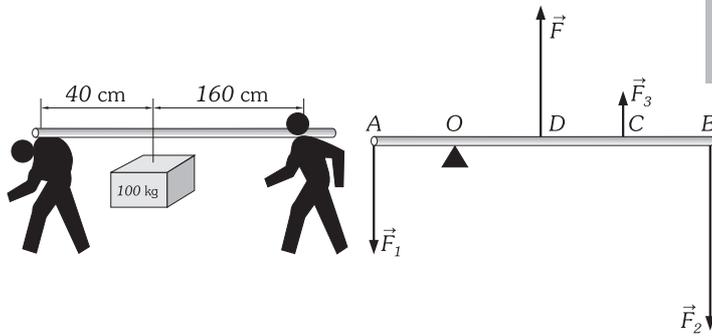
21. Determinar la fuerza perpendicular a la barra AB que hay que aplicar en el punto D para que exista equilibrio, suponiendo a O un punto de apoyo y los siguientes valores de fuerzas y distancias:  $F_1 = 10$  kp,  $F_2 = 15$  kp,  $F_3 = 5$  kp,  $OA = 50$  cm,  $OB = 100$  cm,  $OC = 75$  cm,  $OD = 25$  cm. Suponemos la barra sin peso apreciable (ver figura).

22. Los chicos A y B de la figura pesan respectivamente 40 y 30 kg, están montados en un tablón de 4 m de longitud apoyado en su parte central. ¿En qué punto debe colocarse el niño C de 30 kg de peso, para que haya equilibrio?

23. Una regla de un metro de longitud, homogénea y de sección constante, tiene de masa 50 g. En el extremo correspondiente a la división cero se cuelga una masa de 25 g y en el marcado con la división

100 otra masa de 50 g. 1) ¿En qué división hay que colocar el punto de apoyo para que la barra permanezca horizontal? 2) Comprobar que los resultados obtenidos en el apartado anterior, son los mismos aunque se cambie el centro de momentos. 3) ¿Qué contrapeso habría que añadir a la división 25 para que, apoyándose la barra por su punto medio, si quiera quedando en equilibrio?

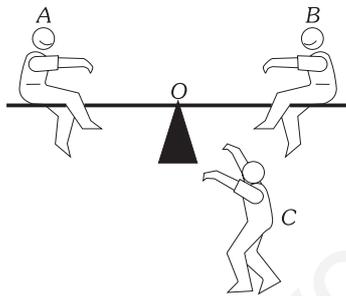
24. Calcular el peso  $P$  que hay que colgar de la cuerda  $BD$  que pasa por la polea  $E$  para que exista equilibrio en la palanca  $AB$ , siendo el ángulo  $OBC = 45^\circ$  (ver figura).



Problema IX-20.

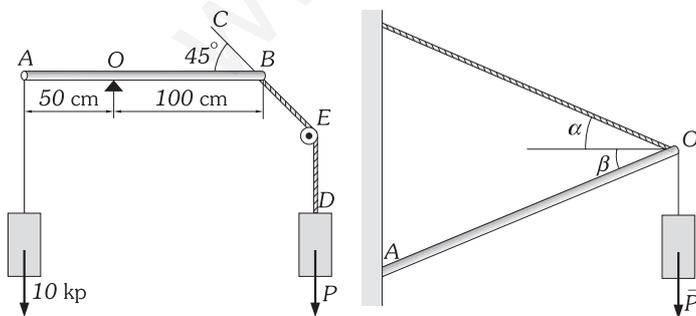
Problema IX-21.

25. Demostrar que cuando el peso del puntal de la figura es despreciable, la fuerza que actúa sobre el punto  $A$  sigue la dirección del puntal. Determinar tal fuerza (compresión) y la tensión de la cuerda. Hacer aplicaciones: 1)  $\alpha = 30^\circ$ ;  $\beta = 30^\circ$  y  $P = 1\ 000$  kp. 2)  $\alpha = 0^\circ$ ;  $\beta = 60^\circ$  y  $P = 1\ 000$  kp. 3)  $\alpha = 30^\circ$ ;  $\beta = 0^\circ$  y  $P = 1\ 000$  kp.



Problema IX-22.

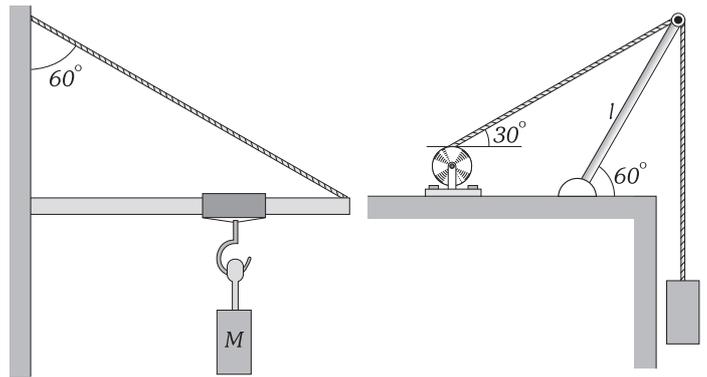
26. El puntal de la figura pesa  $P'$  y su centro de gravedad está en su centro geométrico. Determinar el módulo y la dirección de la fuerza que actúa sobre el punto en que se sujeta el puntal a la pared y la tensión de la cuerda. Hacer las mismas aplicaciones del problema anterior, con  $P' = 200$  kp.



Problema IX-24.

Problema IX-25 y 26.

27. La viga de la figura, que pesa 1 000 kg y tiene 8 m de larga, hace de carril aéreo. Sobre ella desliza un colgador en el que colocamos 2 000 kg de carga. Calcular: la tensión del cable de soporte, la fuerza ejercida por la pared sobre la viga, y el ángulo que forma esta fuerza con la horizontal cuando la carga se encuentra a una distancia de 6 m de la pared. (Se desprecian los pesos de colgador y cable).



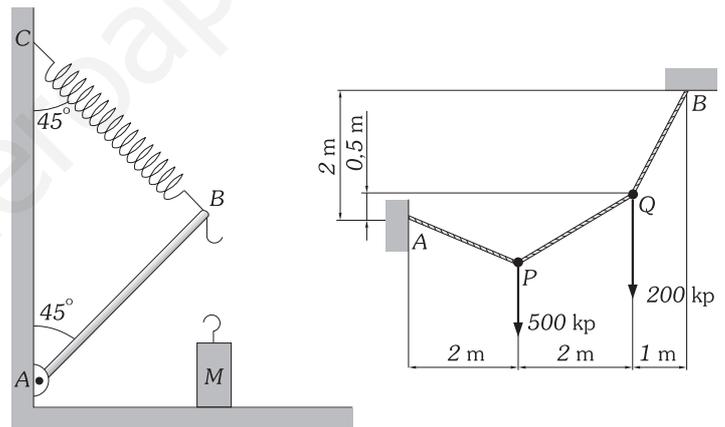
Problema IX-27.

Problema IX-28.

28. La pluma de 4 m de la grúa de la figura pesa 200 kg y está sosteniendo una carga de 1 000 kg. Calcular la tensión de la cuerda, la fuerza sobre el perno y el ángulo que forma ésta con la horizontal.

29. En el sistema de la figura la barra homogénea  $AB$  tiene una longitud de 100 cm y una masa de 5 kg. En el equilibrio los ángulos en  $A$  y en  $C$  son de  $45^\circ$ . Si la constante elástica del resorte es  $K = 400$  N/m, calcular su longitud natural. Calcular el valor de la masa  $M$  que, colgada en el punto  $B$ , haga que el nuevo equilibrio se alcance cuando el ángulo  $A$  sea de  $60^\circ$ .

30. La cuerda  $AB$  de la figura sostiene en los puntos  $P$  y  $Q$  dos pesos de 500 y 200 kp, respectivamente. Calcular: 1) La distancia vertical  $AP$ . 2) Las tensiones de la cuerda en  $A$  y en  $B$ .



Problema IX-29.

Problema IX-30.

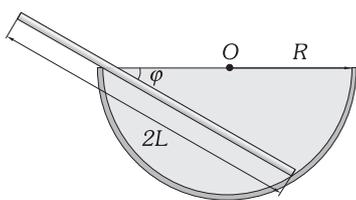
31. Un agitador de vidrio de longitud de longitud  $2L$  se apoya en el fondo y en el borde de una cápsula de porcelana de forma semiesférica de radio  $R$ ; el agitador se moverá hasta alcanzar una posición de equilibrio. Si los rozamientos son inapreciables, determinar en la posición de equilibrio el ángulo  $\varphi$  indicado en la figura.

32. Una escalera de mano de 3 m de longitud se apoya sin rozamientos sobre una pared vertical y el suelo horizontal, formando un ángulo de  $60^\circ$  con el suelo. La escalera tiene cinco travesaños equidistantes y pesa en total 40 kg, que pueden considerarse homogéneamente repartidos. (Considerar el cm en el centro de la escalera.) El último travesaño coincide, además, con el extremo superior de la escalera. Calcúlese la fuerza que habrá que ejercerse horizontalmente sobre la base de la escalera, para que ésta no resbale, en los casos siguientes: 1) La escalera sola. 2) Con un hombre de 80 kg subido, en posición vertical, al primer travesaño. 3) Íd., íd., íd., al cuarto travesaño.

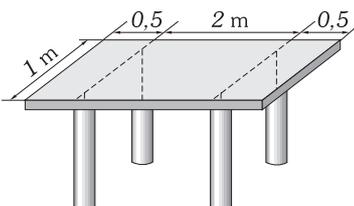
33. Una puerta que pesa 60 kg está sujeta por dos goznes que están separados 1,80 m. Cada gozne soporta la mitad del peso de la puerta, cuyo centro de gravedad se encuentra en su centro geométrico. La distancia de los goznes a los bordes superior e inferior de la puerta es la misma. La anchura de la puerta es de 1,20 m. Calcular las fuerzas que actúan sobre cada gozne y el ángulo que forman con la horizontal.

34. Calcular el mínimo peso  $P$  que se debe colocar en el extremo de la mesa de la figura para que vuelque. El peso del tablero es 50 kg y el de cada pata 5 kg. Las dimensiones quedan expresadas en la figura.

El centro de gravedad de la mesa está en la vertical que pasa por el centro del tablero.

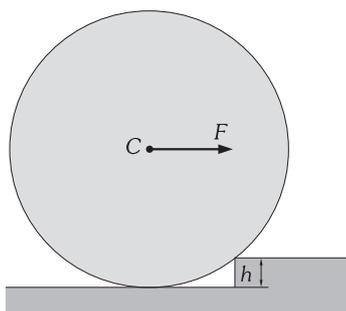


Problema IX-31.

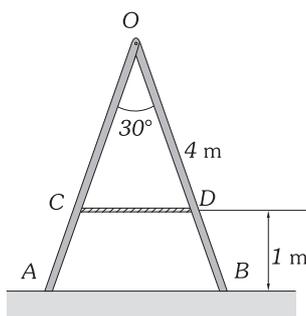


Problema IX-34.

35. Calcular la fuerza horizontal  $F$  que es necesario aplicar al centro de un rodillo de 100 kg de masa, y 50 cm de radio para hacerlo pasar por encima del obstáculo representado en la figura, que tiene 10 cm de altura.



Problema IX-35.

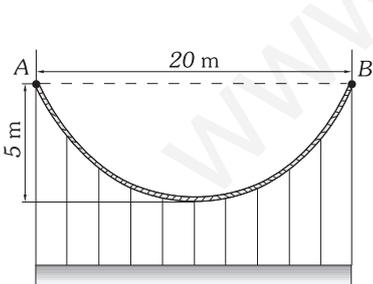


Problema IX-36.

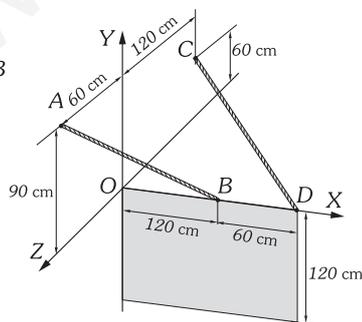
36. Una escalera de tijera de 12 kg de masa, está formada por dos brazos de 4 m de longitud, unidos por una cuerda horizontal a 1 m del suelo, y que forman entre sí un ángulo de  $30^\circ$  (ver figura). Si la escalera soporta en su punto más alto un cuerpo de 80 kg y el rozamiento con el suelo es despreciable, determinar: 1) La fuerza normal que el suelo ejerce sobre los puntos A y B de la escalera. 2) La tensión de la cuerda. 3) La fuerza que cada brazo ejerce sobre el otro en el punto O en el que están engoznados.

37. El cable de la figura soporta una carga distribuida uniformemente a lo largo de una horizontal. El peso de la viga que soporta es de  $4 \times 10^4$  N. 1) Obtener la ecuación de la curva que forma el cable. 2) Calcular la tensión en B.

38. El letrero homogéneo de la figura pesa 2000 N y está sujeto a la pared por soporte O y por dos cables AB y CD, también unidos a la pared. Determinar la tensión de los cables y la fuerza de reacción en O cuando el sistema se encuentre en equilibrio.



Problema IX-37.



Problema IX-38.

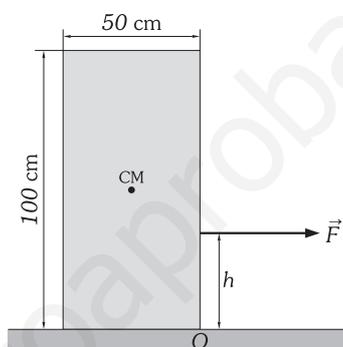
39. Un bloque de 54 kg de peso desliza sobre una superficie con movimiento uniforme producido por la fuerza  $F$  según se indica en la figura. Calcular: 1) La posición de la línea de acción de la normal cuando  $h = 30$  cm. 2) Determinar el valor máximo que puede tener  $h$  para que el bloque deslice sin volcar. DATOS: el coeficiente dinámico de rozamiento entre el bloque y la superficie es 0,5 y el centro de masa del bloque se encuentra en el centro geométrico.

40. Una escalera de mano de 4 m de longitud (centro de masa en su punto medio), está apoyada en una pared vertical sin rozamiento apreciable y en el suelo horizontal con rozamiento, siendo 0,4 el coeficiente

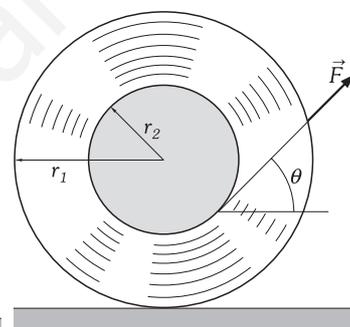
estático de rozamiento entre ambos. 1) Calcular la máxima distancia que puede separarse el pie de la escalera de la pared sin que caiga. 2) Determinar la altura sobre el suelo a la que podría subir un hombre de igual masa que la escalera, estando el pie de la escalera separado de la pared las 4/5 partes de la distancia máxima calculada en el apartado anterior.

41. Una escalera de mano se apoya sobre una pared vertical y el suelo horizontal, siendo el coeficiente estático de rozamiento en los dos extremos 0,3. Calcular el valor mínimo que puede tomar el ángulo  $\varphi$  que forma la escalera con el suelo para que se mantenga sin caerse. El centro de gravedad de la escalera se encuentra en su centro geométrico.

42. Dos discos de radio  $r_1$  están unidos por un eje de radio  $r_2$  como indica la figura. La masa total de la rueda así formada es  $M$  y el coeficiente de rozamiento entre ésta y la superficie en que descansa es  $\mu$  (suponer que son iguales los coeficientes de rozamiento estático y dinámico). Al aplicarle una fuerza  $F$  la rueda rodará hacia la izquierda cuando  $\theta$  sea grande y hacia la derecha cuando  $\theta$  sea pequeño. Calcular: 1) Valor que debe tomar  $\theta$  de forma que la rueda no se desplace ni a un lado ni a otro. 2) Valor de  $F$  para el cual la rueda deslizará sin rodar manteniéndose en su lugar.

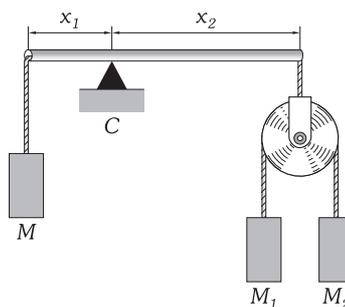


Problema IX-39.

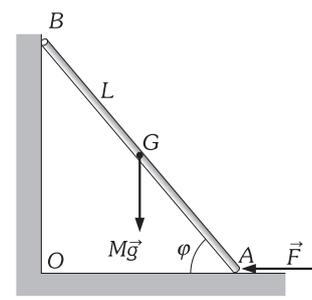


Problema IX-42.

43. En el sistema de la figura se verifica  $M_1 > M_2$ . La polea se considera de masa despreciable y sin rozamiento en su eje. Calcular el valor de la masa  $M$  que mantiene a la varilla horizontal en equilibrio, si: 1) La polea está frenada. 2) Se le deja girar libremente. 3) Calcular la reacción en el soporte C en ambos casos.



Problema IX-43.



Problema IX-47.

44. Un camión transporta un bloque rectangular de 2 m de altura y 1 m de anchura. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el suelo de la caja del camión es 0,6, calcular: 1) La máxima aceleración que puede darse al camión para que el bloque no deslice sobre la caja. 2) Supuesta la fuerza de rozamiento lo suficientemente grande para que el bloque no deslice. ¿Qué valor máximo puede tomar la aceleración del camión para que el bloque no vuelque?

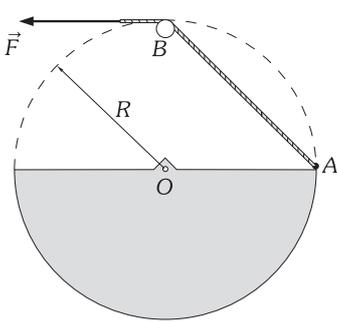
45. ¿Cuál es la velocidad a que puede ir un automóvil por una curva sin peralte, de radio  $R = 40$  m, sin derrapar, suponiendo que el coeficiente de rozamiento estático entre las ruedas y el suelo vale  $\mu = 0,5$ ? Suponiendo que dicho coeficiente fuera suficientemente grande para que el coche no derrapara, ¿cuál sería la velocidad máxima que podría alcanzar en la curva sin volcar, siendo la altura del centro de gravedad sobre el suelo  $h = 75$  cm y la distancia entre las ruedas  $d = 1,5$  m?

46. 1) Deducir la ecuación que nos dé el valor mínimo del radio que puede tener una curva de la carretera para que un automóvil que la recorre a la velocidad  $v$  km/h no se deslice hacia el exterior, suponiendo

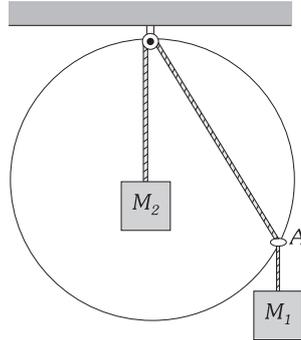
que el coeficiente de rozamiento sea  $\mu = 0,5$ . 2) Deducir la ecuación anterior en el supuesto de que la curva tenga un peralte de  $\alpha$  grados. 3) En el primer caso, es decir, si la curva no tiene peralte, suponiendo que el coche no se deslice hacia el exterior, deducir la fórmula que nos dé el valor mínimo del radio para que el coche que va a velocidad  $v$  km/h no vuelque, sabiendo que el centro de gravedad está  $h$  m sobre el suelo y que la distancia entre ruedas es de  $d$  metros.

47. Una barra homogénea de longitud  $L$  y masa  $M$  se apoya en una pared vertical y el suelo horizontal sin rozamientos apreciables. Para conseguir que esté en equilibrio se aplica en el extremo inferior una fuerza horizontal  $F$  como se indica en la figura. Determinar el valor de  $F$  para que la barra esté en equilibrio con un ángulo de inclinación  $\varphi$ .

48. Una plancha semicircular y homogénea, de masa  $M$  y radio  $R$ , puede girar sin rozamiento en torno a  $O$ , como en la figura. Mediante una cuerda, que desliza libremente por  $B$ , se tira del extremo  $A$  de la plancha con una fuerza  $F$ . Deducir la posición de equilibrio de la plancha. (Aplicación:  $M = 100$  kg,  $F = 400$  N.)



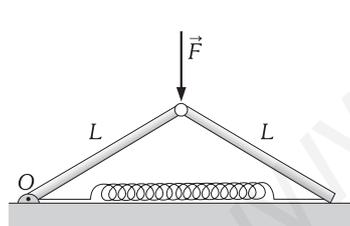
Problema IX-48.



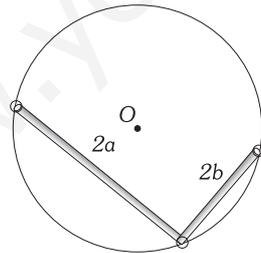
Problema IX-49.

49. El bloque de masa  $M_1$  de la figura pende de una anilla, que puede deslizar sin rozamiento por el aro de radio  $R$ . Por medio de la misma anilla está unido a otro bloque de masa  $M_2$ , que cuelga verticalmente. Deducir la posición de equilibrio del sistema.

50. Las barras homogéneas de la figura, de masa  $M$  y longitud  $L$ , están articuladas en  $O$  y entre sí sin rozamiento, y la de la derecha apoyada en la superficie horizontal lisa. Sus extremos inferiores están unidos por un muelle ideal, de constante  $K$ , y longitud natural nula. Si se aplica en la articulación superior una fuerza  $F$  vertical y hacia abajo, deducir la posición de equilibrio del sistema.



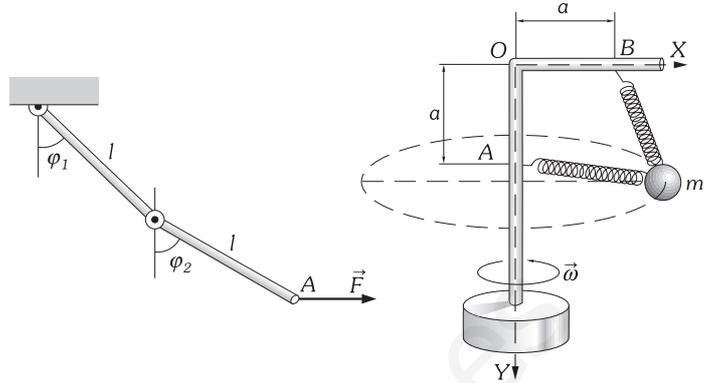
Problema IX-50.



Problema IX-51.

51. Las dos varillas homogéneas de la figura tienen la misma sección, son del mismo material y sus longitudes son  $2a$  y  $2b$ . Ambas están articuladas entre sí y con el aro de radio  $R$  sin rozamiento. Deducir la posición de equilibrio del sistema.

52. Las dos varillas de la figura, de masa  $M$  y longitud  $l$ , se articulan entre sí y con el techo sin rozamiento. Mediante el principio de los trabajos virtuales, calcular los ángulos  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  en el equilibrio cuando se aplica en  $A$  una fuerza horizontal  $F$ .



Problema IX-52.

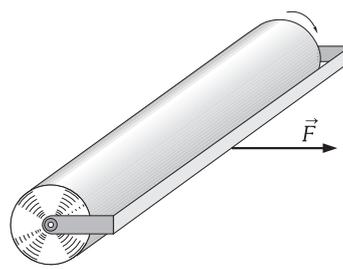
Problema IX-54.

53. En la figura del problema anterior sustituimos la varilla superior por un muelle, de constante  $K$  y masa y longitud natural despreciables, que colgamos del techo. La varilla inferior es homogénea y tiene masa  $M$  y longitud  $2l$ . ¿Cuál será la posición de equilibrio al aplicar la fuerza horizontal  $F$  en el extremo inferior de la varilla?

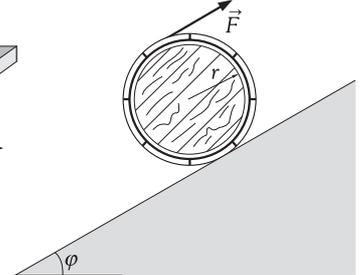
54. En los puntos  $A$  y  $B$  de la escuadra de la figura se fijan sendos muelles de constante  $K$ , masa despreciable y longitud natural nula. Los extremos libres de ambos se sujetan a un cuerpo de masa  $m$ , y todo el conjunto se hace girar con velocidad angular  $\omega$ , como indica la figura. 1) Mediante el principio de los trabajos virtuales, deducir las coordenadas de la posición estable del cuerpo. 2) Comprobar la igualdad de fuerzas en los ejes en el caso de  $x = a$  e  $y = a$ . 3) ¿Qué condición debe cumplir  $m$  para que el equilibrio se alcance en  $y = a/2$ ? 4) Resolver la primera cuestión mediante la energía potencial.

D) RESISTENCIA A LA RODADURA

55. Calcular la fuerza  $F$  de tracción paralela a un plano horizontal y aplicada al eje de un rodillo (figura) de  $100$  kp y  $1$  m de diámetro para que ruede sin desliza con movimiento uniforme de rotación y traslación, si el coeficiente de resistencia a la rodadura vale  $0,1$  m.



Problema IX-55.



Problema IX-56.

56. Enrollamos una cuerda a un barril cilíndrico de  $200$  kg para que, tirando de ella, suba por una rampa de  $30^\circ$  de inclinación con la horizontal (ver figura). Si el coeficiente de resistencia a la rodadura es  $0,2$  m. Calcular la mínima fuerza necesaria (Radio del barril  $35$  cm).

# CAPÍTULO X

## DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

### A) ANÁLISIS GENERAL

#### X - 1. El sólido rígido como sistema de partículas

«Un sistema de partículas entre las cuales se mantiene invariable la distancia constituye un SÓLIDO RÍGIDO, por tanto, en él se mantendrán también constantes su forma y volumen.»

Todos los cuerpos de la naturaleza son deformables, sin embargo, es una buena aproximación considerar rígido a cualquier sistema en que las fuerzas que producen su movimiento no producen deformaciones apreciables.

En cinemática (Capítulo IX) hacíamos un estudio del movimiento del sólido rígido; decíamos que el problema quedaba resuelto conociendo el movimiento de un punto  $P$  de él, ya que las magnitudes cinemáticas de cualquier otro punto  $P'$  del sólido venían relacionadas con las de  $P$  por las ecuaciones:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{PP}' \quad (1)$$

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{PP}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{PP}') \quad (2)$$

Decíamos que el movimiento general de un cuerpo rígido en cada instante es helicoidal (lo llamábamos también rototraslatorio) con un eje instantáneo  $e$ , y se obtenía como resultado de una rotación  $\boldsymbol{\omega}$ , y una traslación en la dirección de  $e$ , con una velocidad  $\mathbf{v}$ ; tanto la posición de  $e$ , como los valores de  $\mathbf{v}$  y  $\boldsymbol{\omega}$  son funciones del tiempo.

El sólido rígido es un caso particular de sistemas de partículas; teniendo en cuenta las coordenadas de su centro de gravedad obtenidas en el Capítulo VI y comparadas con las del centro de masas de un sistema de partículas obtenidas en el capítulo VIII, y si el valor de  $\mathbf{g}$  puede considerarse constante en todo el volumen ocupado por el cuerpo, concluimos que: «El centro de gravedad de un sólido rígido coincide con la posición de su centro de masas».

La dinámica del movimiento del CM de un sistema de partículas y del relativo a él, ha sido objeto de estudio en el capítulo VIII, y todo lo dicho entonces es aplicable al sólido. Las peculiaridades de estos sistemas rígidos hacen que cobren importancia aspectos que no han sido tratados en ese tema, como la caracterización del eje instantáneo de rotación, y magnitudes que no se han mencionado, como el momento de inercia.

En cualquier caso, son aplicables al estudio dinámico del sólido rígido las ecuaciones que relacionan las magnitudes fundamentales, y en particular, las dos ecuaciones del movimiento:

$$\mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad \mathbf{N}_{ext} = \frac{d\mathbf{J}}{dt}$$

la segunda de las cuales se reducirá en muchos casos interesantes a:

$$\mathbf{N}_{CM} = \frac{d\mathbf{S}}{dt}$$

siendo  $\mathbf{N}_{CM}$  el momento resultante de las fuerzas exteriores referido al CM como origen y  $\mathbf{S}$  el momento angular referido al mismo punto.

#### X - 2. Dinámica del movimiento de traslación del sólido rígido

Decíamos en el capítulo IX que «un cuerpo posee un movimiento de traslación cuando el segmento que une dos cualesquiera de sus puntos permanece siempre paralelo a sí mismo» (Fig. X-1). Consecuencia inmediata de ello es que, en cada instante, todos sus puntos tienen las mismas velocidad y aceleración que el centro de masas:  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}$ . La dinámica del sólido rígido con movimiento de traslación se reduce por tanto a la de su CM, estudiada en el capítulo V. Las expresiones fundamentales, aplicadas a este caso, nos quedarán:

MOMENTO LINEAL:  $\mathbf{P} = M\mathbf{v}$  donde  $\mathbf{v}$  es la velocidad del CM.

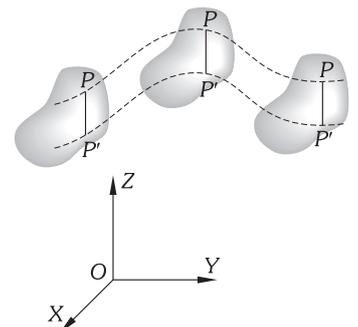


Fig. X-1.- Movimiento de traslación del sólido rígido.

PRIMERA ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO:  $\mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = M \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = M\mathbf{a}$

en la que  $\mathbf{a}$  es la aceleración del CM.

MOMENTO ANGULAR: Como  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_i$ , entonces:

$$\mathbf{J} = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = (\sum m_i \mathbf{r}_i) \times \mathbf{v} = M\mathbf{R} \times \mathbf{v} = \mathbf{R} \times \mathbf{p} = \mathbf{L}$$

«El momento angular de un sólido en movimiento de traslación es igual al momento angular de una partícula de masa igual a la del cuerpo, colocada en su CM; careciendo, por tanto, de spin ( $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ ) y poseyendo únicamente orbital ( $\mathbf{L}$ )».

SEGUNDA ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO:  $\mathbf{N}_{ext} = \frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} \times M\mathbf{v} + \mathbf{R} \times M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$

hemos anulado el primer sumando del tercer miembro de esta igualdad por ser  $\mathbf{v} \times m\mathbf{v} = \mathbf{0}$  (vectores paralelos).

Una consecuencia importante es que por ser  $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ , entonces  $d\mathbf{S}/dt = \mathbf{N}_{CM} = \mathbf{0}$ , el momento resultante de las fuerzas exteriores respecto del CM es nulo, es decir:

«Si el sólido rígido se traslada, la resultante de todas las fuerzas exteriores, si existe, pasa por el CM.»

**X - 3. Dinámica del movimiento de rotación del sólido en torno a un eje fijo. Definición de momento de inercia**

Supongamos que tenemos un sólido con dos puntos fijos (pivotes), o lo que es lo mismo: que sólo puede girar alrededor del eje que pasa por esos dos puntos. Tomemos un sistema de ejes de referencia de tal forma que Z coincida con el eje fijo, por tanto el origen O del sistema pertenecerá a él.

Hemos dicho que un sólido rígido puede considerarse como un sistema de partículas en las que las distancias entre ellas son invariables, con lo que será válida la ecuación del movimiento obtenida para los sistemas de partículas:  $\mathbf{N} = d\mathbf{J}/dt = \mathbf{N}_x + \mathbf{N}_y + \mathbf{N}_z$ , pero tal y como hemos tomado los ejes, el sólido no puede girar ni alrededor del eje X ni alrededor del eje Y, con lo que verifica:  $\mathbf{N}_x = d\mathbf{J}_x/dt = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{N}_y = d\mathbf{J}_y/dt = \mathbf{0}$ , siendo la única expresión que nos interesa:

$$\mathbf{N}_z = \frac{dJ_z}{dt}$$

Supongamos que en un instante determinado el sólido (todas sus partículas) tiene una velocidad angular  $\omega$ , encontrándonos en la situación representada en la Fig. X-2. El momento angular de la partícula de masa  $dm$  que en ese instante se encuentra en la posición definida por el vector  $\mathbf{r}$  y posee una velocidad  $\mathbf{v}$ , será:  $d\mathbf{J} = \mathbf{r} \times dm \mathbf{v}$ , y su módulo:  $dJ = rv dm$ , por ser los factores del producto vectorial perpendiculares. La componente de  $d\mathbf{J}$  en la dirección del eje de giro, OZ, tiene por módulo:

$$dJ_z = rv dm \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = rv dm \sin \varphi$$

y como:  $v = \omega R$  y  $R = r \sin \varphi$ , resulta:  $dJ_z = \omega R^2 dm$ .

Si sumamos (integramos) para todas las partículas contenidas en el volumen V del sólido, obtenemos para la componente según OZ del momento angular total:

$$J_z = \int_V dJ_z = \int_V \omega R^2 dm = \omega \int_V R^2 dm \tag{3}$$

a la integral que nos aparece la llamamos MOMENTO DE INERCIA (I) del sólido respecto al eje de giro (eje OZ), escribiremos:

$$I = \int_V R^2 dm$$

si además, tenemos en cuenta que los vectores  $\mathbf{J}_z$  y  $\omega$  tienen la misma dirección, podemos escribir la expresión (3) en forma vectorial:

$$\mathbf{J}_z = I\omega$$

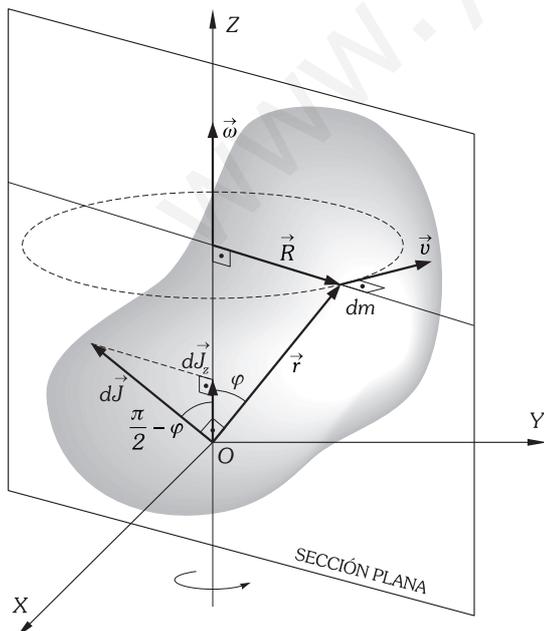


Fig. X-2.- Movimiento de rotación de un sólido alrededor de un eje fijo.

como I es invariante con el tiempo para el sólido rígido, derivándola con respecto a él, nos queda:

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d(I\boldsymbol{\omega})}{dt} = I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = I\boldsymbol{\alpha} \quad (4)$$

expresión que constituye la ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO DE ROTACIÓN DEL SÓLIDO ALREDEDOR DE UN EJE, en la que se ha prescindido del subíndice  $z$ , pero téngase muy claro que solamente se deriva respecto al tiempo la componente del vector  $\mathbf{J}$  en la dirección del eje de giro, pudiendo tener componentes perpendiculares al eje de giro no nulas. Sin embargo, existen casos muy interesantes en que el momento angular total  $\mathbf{J}$ , tiene la dirección del eje de giro y será paralelo a  $\boldsymbol{\omega}$ , en esos casos diremos que el eje es un EJE PRINCIPAL DE INERCIA, de forma que  $\mathbf{J} = I\boldsymbol{\omega}$  y la segunda ecuación del movimiento  $\mathbf{N}_{ext} = d\mathbf{J}/dt$ , no tendrá, para estos casos, ninguna restricción de componentes.

Los ejes de simetría de un sólido homogéneo, son ejes principales de inercia; en efecto: tomando uno de ellos como eje de rotación, cualquier partícula  $dm$ ; tiene su simetría de idénticas masa y velocidad, por lo que sus momentos angulares dan una resultante en la dirección de  $\boldsymbol{\omega}$  (Fig. X-3), y por tanto la resultante total, también tendrá esa misma dirección.

Se puede demostrar que en cualquier punto de un sólido rígido hay un sistema de ejes cartesianos que son ejes principales de inercia, y los momentos de inercia respecto de esos ejes son los que llamamos MOMENTOS PRINCIPALES DE INERCIA.

De la ecuación (4) se deduce inmediatamente el TEOREMA DE CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR para el sólido rígido que gira alrededor de un eje fijo, se puede expresar de la forma:

$$\mathbf{N}_{ext} = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{d(I\boldsymbol{\omega})}{dt} = \mathbf{0} \Rightarrow I\boldsymbol{\omega} = cte$$

«Si el momento resultante de todas las fuerzas que actúan sobre un sólido con un eje fijo es nulo, el producto  $I\boldsymbol{\omega}$  se mantiene constante con el tiempo».

Este resultado se puede generalizar a cuerpos no rígidos en los que varíe el momento de inercia; si  $\mathbf{N}_{ext} = \mathbf{0}$ , las variaciones de  $I$  van acompañadas de variaciones de  $\boldsymbol{\omega}$  que mantienen constante su producto.

Una consecuencia que apuntábamos en el capítulo V es que si no actúan pares externos sobre un cuerpo y éste se encuentra girando alrededor de un eje permanecerá para siempre girando alrededor de tal eje con velocidad angular constante.

EJEMPLOS:

Imaginémonos colocados en una plataforma que pueda girar sin rozamientos alrededor de un eje. Tras comunicar un inicial movimiento de rotación subimos y bajamos los brazos. Al subirlos la rapidez de la rotación será menor, al bajarlos mayor. Este efecto lo aumentamos llevando en las manos unas pesas.

Al subir los brazos,  $I = \sum m_i r_i^2$  aumenta, pues si bien la masa de cada una de las partículas de los brazos y pesas no varía,  $r_i$ , distancia al eje de giro aumenta. Al aumentar  $I$  tiene que disminuir  $\boldsymbol{\omega}$  para que su producto permanezca constante. El efecto inverso se produce al bajar los brazos, disminuyendo  $I$  y aumentando  $\boldsymbol{\omega}$ .

Las diversas velocidades de giro de los patinadores sobre hielo, tienen el mismo fundamento.

Consideremos a una persona sentada en un taburete de plano que puede girar sin rozamientos y provista de un volante que pueda girar en torno a un eje vertical. Si hace girar el volante en un determinado sentido la persona y el asiento del taburete giran en sentido contrario.

En efecto: el momento angular antes del giro del volante es nulo (reposo del sistema) y ha de ser igual al momento angular cuando gira el volante:  $\mathbf{0} = I\boldsymbol{\omega} + I'\boldsymbol{\omega}'$  ( $I$  e  $I'$  momentos de inercia del volante y del sistema «persona-asiento giratorio»;  $\boldsymbol{\omega}$  y  $\boldsymbol{\omega}'$  velocidades angulares respectivas).

De la anterior ecuación obtenemos:  $I\boldsymbol{\omega} = -I'\boldsymbol{\omega}'$ .

«Las velocidades angulares son de sentido contrario».

«Los valores de las velocidades angulares son inversamente proporcionales a los momentos de inercia».

La ecuación vectorial precedente puede proyectarse sobre los ejes (Fig. X-6); y así, si el individuo sentado en el taburete inclina el eje del volante cuando está en rotación, la conservación del momento cinético exige:  $I\omega_x = -I'\omega'_x$  e  $I\omega_y = -I'\omega'_y$ . La primera ecuación determinaría un giro en torno al eje horizontal, que se realizaría si el individuo estuviese sentado en la cúspide de una esfera con tal libertad de movimiento; en el caso del taburete, la ligadura o imposibilidad de giro en torno a tal eje, prohíbe la realización de tal movimiento. La segunda ecuación nos determina el giro alrededor del eje  $Y$ , obedeciendo a las expresiones (en las que suprimimos la notación vectorial por operar con módulos de vectores que tienen la misma dirección):

$$I\omega \sin \varphi = -I'\omega'_y \Rightarrow \omega'_y = -\frac{I\omega}{I'} \sin \varphi$$

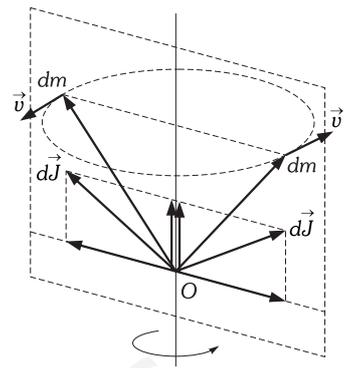


Fig. X-3.- Un eje de simetría de un sólido homogéneo es eje principal de inercia.

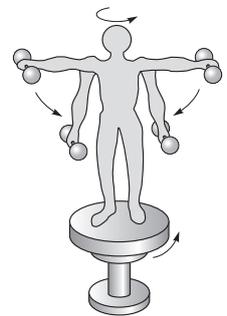


Fig. X-4.- Conservación del momento angular.

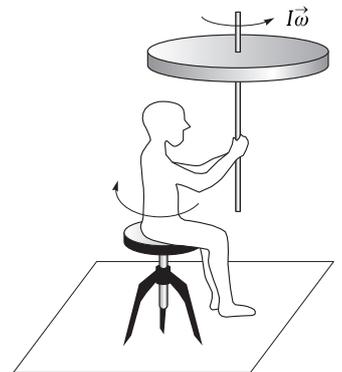


Fig. X-5.- Conservación del momento angular.

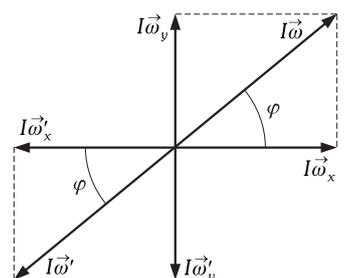


Fig. X-6.- Conservación del momento angular.

al inclinar el eje del volante hacia la horizontal la velocidad angular de la persona sentada disminuye. Si el eje del volante se pone horizontal, al ser  $\text{sen}\varphi = 0$  el individuo, vuelve al reposo.

**X - 4. Momento de inercia de un sólido respecto de un eje. Radio de Giro**

De la misma manera que la masa de un cuerpo le confiere inercia, que es la resistencia al cambio de su momento lineal (cuando sobre una partícula aplicábamos distintas fuerzas y medíamos las aceleraciones que éstas le producían, comprobábamos que existe una constante de proporcionalidad entre ambas magnitudes, a la que llamamos masa inerte de la partícula), *el momento de inercia da a un sólido una resistencia al cambio de su momento angular, es, digamos, una inercia en la rotación* (cuando un sólido gira en torno a un eje fijo, la constante de proporcionalidad entre los distintos momentos de las fuerzas aplicadas y las aceleraciones angulares que le producen, es, en este caso, el momento de inercia del sólido respecto del eje de giro).

Hemos definido el momento de inercia de un sólido respecto de un eje como:

$$I = \int_V R^2 dm \tag{5}$$

y para un elemento de masa  $dm$  a una distancia  $R$  del eje:

$$dI = R^2 dm$$

si consideramos al sólido como discreto, y son  $R_1, R_2, \dots, R_n$ , las distancias al eje (Fig. X-7), respecto del cual queremos determinar el momento de inercia, de las partículas  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , que lo constituyen, su valor será:

$$I = \sum m_i R_i^2$$

La ecuación de dimensiones del momento de inercia es  $[I] = ML^2$ , con lo que en el SI se medirá en  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ .

Obsérvese que la magnitud momento de inercia depende únicamente del eje respecto del cual lo calculamos, de la masa del sólido y de sus parámetros geométricos.

En determinados casos, para resolver la integral de volumen (5) recurrimos al concepto de densidad:  $\rho = dm/dv$ , o  $\rho = M/V$  cuando el sólido es homogéneo; así por ejemplo, para determinar el momento de inercia de un cilindro macizo y homogéneo de masa  $M$  y radio  $R$ , respecto de su eje de simetría, consideramos el volumen limitado entre dos cilindros de radios  $r$  y  $r + dr$  (Fig. X-8), su masa es:  $dm = 2\pi r h \rho dr$ ; por encontrarse distribuida simétricamente respecto al eje  $e$ , su momento de inercia será:  $dI = r^2 dm = 2\pi h \rho r^3 dr$ , luego el momento de inercia de todo el cilindro toma el valor:

$$I = \int_0^R dI = 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi h \rho \frac{R^4}{4}$$

y como la masa total del cilindro es:  $M = V\rho = \pi R^2 h \rho$ , se obtiene:  $I = MR^2/2$ .

Si definimos RADIO DE GIRO ( $K_0$ ) de un cuerpo de masa  $M$  respecto de un eje, como la distancia al eje a la que habría que colocar un punto de la misma masa que el cuerpo para que tuviera el mismo momento de inercia que el sólido (Fig. X-9), entonces:

$$I = \sum m_i R_i^2 = MK_0^2 \Rightarrow K_0 = \sqrt{\frac{I}{M}}$$

**X - 5. Teorema de Steiner (o de los ejes paralelos). Teorema de los cuerpos planos (o de los ejes perpendiculares)**

En los casos en que no resulta tan sencillo aplicar la (5), se recurre al cálculo del momento de inercia por métodos indirectos, para lo que se acude, siempre que sea posible, a los teoremas que vamos a demostrar en este apartado y en el siguiente.

TEOREMA DE STEINER

«El momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje, es igual al momento de inercia de tal cuerpo con respecto a un eje paralelo al primero y que pasa por el centro de masas, más el producto de la masa del cuerpo por el cuadrado de la distancia entre los dos ejes».

$$I = I' + Md^2$$

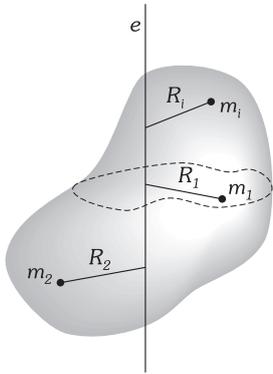


Fig. X-7.-  $R_1, R_2, \dots, R_n$ , son las distancias al eje  $e$  de las partículas  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , que constituyen al sólido.

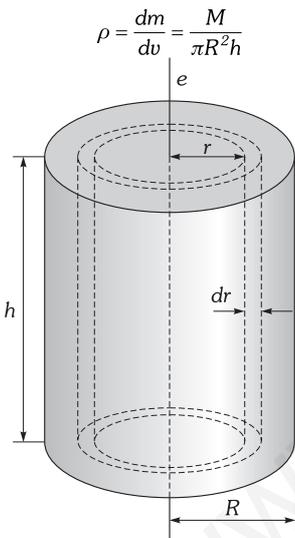


Fig. X-8.- Cilindro macizo y homogéneo de masa  $M$  y radio  $R$ .

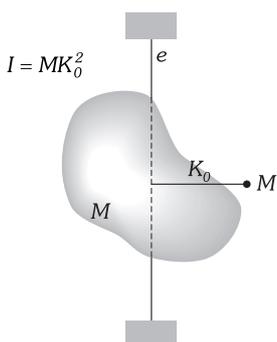


Fig. X-9.- Radio de giro.

En efecto: sea  $I'$  el momento de inercia del cuerpo de la Fig. X-10 respecto del eje  $O'Y'$  que pasa por el centro de masas ( $O' \equiv CM$ ); para cualquier partícula  $dm$  del sólido, la distancia al eje que pasa por el centro de masas verifica:  $R'^2 = x'^2 + z'^2$ , mientras que la distancia al eje  $OY$ , paralelo al anterior, y a una distancia  $d$ , cumple:

$$R^2 = (x' + d)^2 + z'^2 = x'^2 + z'^2 + d^2 + 2dx' = R'^2 + d^2 + 2dx'$$

El momento de inercia del sólido, que ocupa un volumen  $V$ , respecto del eje  $OY$  será:

$$I = \int_V R^2 dm = \int_V R'^2 dm + \int_V d^2 dm + \int_V 2dx' dm$$

En esta expresión, el primer sumando es  $I'$ , el segundo  $Md^2$ , siendo  $M$  la masa del cuerpo, y el tercero es nulo, por ser:

$$x'_{CM} = \int_V x' dm = 0$$

la primera coordenada del CM respecto del propio CM. Resulta pues  $I = I' + Md^2$ , como queríamos demostrar.

TEOREMA DE LOS CUERPOS PLANOS

*En cuerpos planos, de espesor despreciable, la suma de los momentos de inercia respecto de dos ejes perpendiculares y en el plano del cuerpo, es igual al momento de inercia respecto de un eje perpendicular al plano por el punto de corte de aquellos.*

En efecto: llamando  $I_{xx}, I_{yy}$  a los momentos de inercia del cuerpo plano respecto de los ejes  $OX$  y  $OY$  respectivamente, y teniendo en cuenta la Fig. X-11, obtenemos:

$$I_{xx} + I_{yy} = \int_A y^2 dm + \int_A x^2 dm = \int_A (x^2 + y^2) dm = \int_A R^2 dm$$

en las que hemos llamado  $A$ , a la superficie del cuerpo; y llamando  $I_{zz}$  al momento de inercia del cuerpo plano respecto del eje  $OZ$ , nos queda:

$$I_{xx} + I_{yy} = I_{zz}$$

**X - 6. Momentos de inercia de un sólido rígido con respecto a un punto y a un plano. Teoremas de Inercia**

«Definimos el MOMENTO DE INERCIA DE UN CUERPO CON RESPECTO A UN PUNTO, como la suma de los productos de las masas de las partículas que forman el sólido, por el cuadrado de sus distancias al punto.»

Luego el momento de inercia de un cuerpo con respecto al origen de coordenadas será:

$$I_O = \int_V (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

y si el sólido es discreto:

$$I_O = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

«Definimos el MOMENTO DE INERCIA DE UN SÓLIDO CON RESPECTO A UN PLANO como la suma de los productos de las masas de las partículas que forman el cuerpo por el cuadrado de sus distancias al plano.»

Luego el momento de inercia de un sólido con respecto a los planos que determinan los ejes coordenadas serán:

$$I_{xz} = \int_V y^2 dm \quad I_{xy} = \int_V z^2 dm \quad I_{yz} = \int_V x^2 dm$$

y si el sólido no es continuo:

$$I_{xz} = \sum m_i y_i^2 \quad I_{xy} = \sum m_i z_i^2 \quad I_{yz} = \sum m_i x_i^2$$

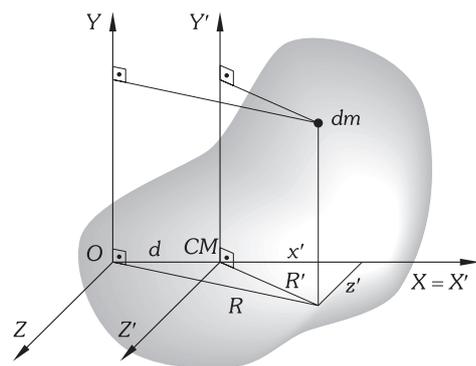


Fig. X-10.- Teorema de Steiner.

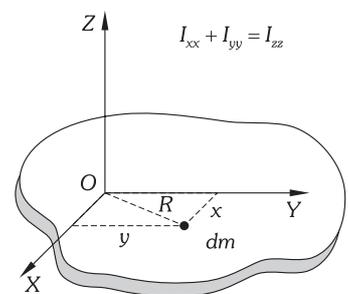


Fig. X-11.- Teorema de los cuerpos planos.

De la definición de MOMENTO DE INERCIA DE UN SÓLIDO RÍGIDO RESPECTO A UN EJE, las fórmulas que nos determinan los valores de los momentos de inercia del sólido con respecto a los ejes de coordenadas serán:

$$I_{xx} = \int_V (y^2 + z^2) dm \quad I_{yy} = \int_V (x^2 + z^2) dm \quad I_{zz} = \int_V (x^2 + y^2) dm$$

y para el caso de que el sólido sea discreto:

$$I_{xx} = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) \quad I_{yy} = \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) \quad I_{zz} = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

1. TEOREMA

«El momento de inercia de un cuerpo con respecto a un punto, es igual a la semisuma de los momentos de inercia con respecto a los tres ejes perpendiculares que pasan por tal punto».

En efecto:

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = \int_V (y^2 + z^2) dm + \int_V (x^2 + z^2) dm + \int_V (x^2 + y^2) dm = 2 \int_V (x^2 + y^2 + z^2) dm = 2I_O \quad \text{c.q.d.}$$

2. Teorema

«El momento de inercia de un cuerpo con respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de inercia con respecto a un plano y a un eje perpendicular a él que pasan por dicho punto».

En efecto, la expresión:

$$I_O = \int_V (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

la podemos escribir:

$$I_O = \int_V (x^2 + y^2) dm + \int_V z^2 dm = I_{zz} + I_{xy}$$

$$I_O = \int_V (y^2 + z^2) dm + \int_V x^2 dm = I_{xx} + I_{zy}$$

$$I_O = \int_V (x^2 + z^2) dm + \int_V y^2 dm = I_{yy} + I_{xz}$$

como queríamos demostrar.

3. TEOREMA

«El momento de inercia respecto a un eje es igual a la suma de los momentos respecto a dos planos perpendiculares que se cortan en el eje.»

En efecto:

$$I_{xy} + I_{xz} = \int_V z^2 dm + \int_V y^2 dm = \int_V (z^2 + y^2) dm = I_{xx}$$

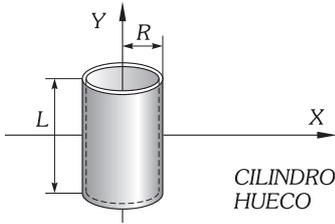
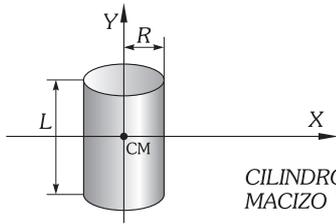
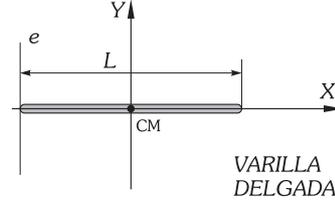
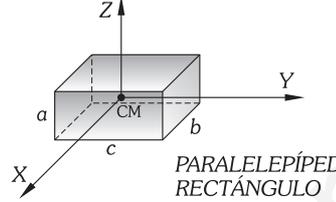
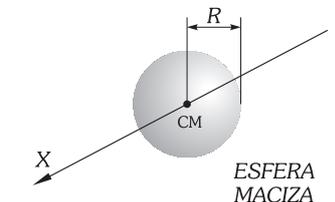
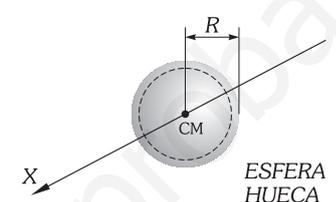
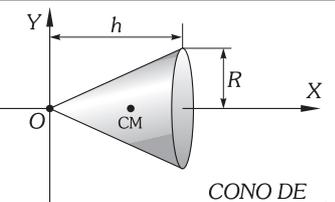
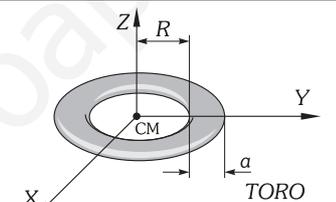
4. TEOREMA

«El momento de inercia de un cuerpo respecto de un punto es igual a la suma de los momentos respecto de tres planos perpendiculares que contienen al punto.»

En efecto, sean los planos coordenados:

$$I_{xy} + I_{xz} + I_{yz} = \int_V z^2 dm + \int_V y^2 dm + \int_V x^2 dm = \int_V (x^2 + y^2 + z^2) dm = I_O \quad \text{c.q.d.}$$

MOMENTOS DE INERCIA DE ALGUNOS SÓLIDOS HOMOGÉNEOS

Cuerpo	Momentos de inercia	Cuerpo	Momentos de inercia
 <p>CILINDRO HUECO</p>	$I_{yy} = MR^2$ $I_{xx} = \frac{1}{2} MR^2 + \frac{1}{12} ML^2$	 <p>CILINDRO MACIZO</p>	$I_{yy} = \frac{1}{2} MR^2$ $I_{xx} = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{12} ML^2$
 <p>VARILLA DELGADA</p>	$I_{yy} = \frac{1}{12} ML^2$ $I_{ee} = \frac{1}{3} ML^2$	 <p>PARALELEPÍPEDO RECTÁNGULO</p>	$I_{xx} = \frac{1}{12} M(a^2 + c^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{12} M(c^2 + b^2)$
 <p>ESFERA MACIZA</p>	$I_{xx} = \frac{2}{5} MR^2$	 <p>ESFERA HUECA</p>	$I_{xx} = \frac{2}{3} MR^2$
 <p>CONO DE REVOLUCIÓN</p>	$I_{xx} = \frac{3}{10} MR^2$ $I_{yy} = \frac{3}{20} MR^2 + \frac{1}{10} Mh^2$	 <p>TORO MACIZO</p>	$I_{zz} = 2MR^2 + \frac{3}{2} Ma^2$ $I_{xx} = MR^2 + \frac{5}{4} Ma^2$

PROBLEMAS: 1 al 47.

X - 7. Dinámica del movimiento del sólido rígido con un punto fijo

En este movimiento el sólido tiene un punto fijo de velocidad nula y del vector  $\omega = \omega(t)$  varían sus tres atributos (módulo, dirección y sentido). Eligiendo el punto  $P$  como fijo, la velocidad en un instante determinado de cualquier partícula de masa  $dm$ , que diste  $r$  del punto  $P$ , vendrá dada según (1) por:  $v = \omega \times r$ , en la que  $\omega$  es la misma para todas las partículas que constituyen el sólido en el instante que consideramos. El valor del MOMENTO ANGULAR DEL SÓLIDO RESPECTO DE  $P$  en ese instante determinado, vendrá dado por:

$$J = \int_V r \times v \, dm = \int_V r \times (\omega \times r) \, dm$$

por la propiedad del doble producto vectorial vista en II-17, podemos poner:

$$r \times (\omega \times r) = (r \cdot r) \omega - (r \cdot \omega)r = r^2 \omega - r(r \cdot \omega)$$

sustituyendo nos quedará:

$$J = \int_V [r^2 \omega - r(r \cdot \omega)] \, dm \Rightarrow J = \omega \int_V r^2 \, dm - \int_V r(r \cdot \omega) \, dm$$

Supongamos que las componentes coordenadas del vector velocidad angular instantánea son  $\omega_x, \omega_y$  y  $\omega_z$  y que las del vector de posición de la partícula  $dm$  son  $x, y, z$ . El valor del producto escalar de estos dos vectores será:  $r \cdot \omega = x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z$  que sustituida en la anterior, nos quedará:

$$J = \omega \int_V r^2 \, dm - \int_V (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) r \, dm$$

cuyas componentes coordenadas son:

$$J_x = \omega_x \int_V r^2 dm - \int_V (x \omega_x + y \omega_y + z \omega_z) x dm$$

$$J_y = \omega_y \int_V r^2 dm - \int_V (x \omega_x + y \omega_y + z \omega_z) y dm$$

$$J_z = \omega_z \int_V r^2 dm - \int_V (x \omega_x + y \omega_y + z \omega_z) z dm$$

desarrollando y agrupando términos:

$$J_x = \omega_x \int_V (r^2 - x^2) dm - \omega_y \int_V xy dm - \omega_z \int_V xz dm$$

$$J_y = -\omega_x \int_V yx dm + \omega_y \int_V (r^2 - y^2) dm - \omega_z \int_V yz dm$$

$$J_z = -\omega_x \int_V zx dm - \omega_y \int_V zy dm + \omega_z \int_V (r^2 - z^2) dm$$

a los coeficientes de  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  y  $\omega_z$  se les llaman COEFICIENTES DE INERCIA y toman el valor:

$$\begin{array}{l|l} I_{xx} = \int_V (r^2 - x^2) dm & I_{xy} = I_{yx} = - \int_V xy dm \\ I_{yy} = \int_V (r^2 - y^2) dm & I_{xz} = I_{zx} = - \int_V xz dm \\ I_{zz} = \int_V (r^2 - z^2) dm & I_{yz} = I_{zy} = - \int_V yz dm \end{array}$$

con esta notación, las componentes del momento angular quedan

$$\begin{aligned} J_x &= I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z \\ J_y &= I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z \\ J_z &= I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z \end{aligned} \tag{6}$$

como  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , los valores de  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ , e  $I_{zz}$  serán:

$$I_{xx} = \int_V (y^2 + z^2) dm \quad I_{yy} = \int_V (x^2 + z^2) dm \quad I_{zz} = \int_V (x^2 + y^2) dm$$

coincidiendo con los ya definidos momentos de inercia del sólido con respecto a los ejes X, Y, Z. (Obsérvese que  $I_{xy}$ ,  $I_{yz}$ , ... no son los mismos que los momentos de inercia del sólido respecto a los planos XY, YZ...). A los coeficientes  $I_{xy}$ ,  $I_{yz}$ , ..., se les denomina PRODUCTOS DE INERCIA.

La expresión (6) se puede escribir en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{J} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \tag{7}$$

donde  $I$  es el llamado TENSOR DE INERCIA, definido por la matriz  $3 \times 3$  de la relación anterior. Su expresión depende de la distribución de la masa del sólido (de su geometría) y de la elección de ejes de coordenadas, así, a una elección distinta de ejes, le corresponden otros valores de los coeficientes de inercia, pero el nuevo tensor de inercia relacionará  $\mathbf{J}$  y  $\boldsymbol{\omega}$  de la misma forma que el anterior, y esto es así porque el momento angular  $\mathbf{J}$  correspondiente a una velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$  no depende de la elección de ejes que hagamos.

Las propiedades de las matrices nos permiten afirmar que por ser  $I$  una matriz simétrica respecto de la diagonal principal, podemos diagonalizarla, es decir, encontrar una matriz en la que los productos de inercia sean nulos y que defina la misma transformación entre vectores. El sistema de ejes de coordenadas en que la matriz adopta esta forma es el de los ejes principales de inercia; en este caso la relación (7) se escribe:

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

o bien  $J_x = I_x \omega_x$ ,  $J_y = I_y \omega_y$ ,  $J_z = I_z \omega_z$ . Estos MOMENTOS DE INERCIA PRINCIPALES,  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_z$ , no tienen en general por qué ser iguales, con lo que las componentes de  $\mathbf{J}$  no serán proporcionales a las de  $\boldsymbol{\omega}$ , y ambos vectores no serán paralelos; sin embargo, si dos componentes de  $\boldsymbol{\omega}$  son nulas, si que lo

serán. Así que *el momento angular y la velocidad angular tienen la misma dirección si y sólo si la velocidad angular está sobre un eje principal, o lo que es lo mismo, si el sólido gira en torno a un eje principal de inercia.*

Al ser  $I$  dependiente de la masa y parámetros geométricos del cuerpo y éstos permanecer constantes con el tiempo; la SEGUNDA ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO se escribirá:

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d(I\boldsymbol{\omega})}{dt} = I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = I\boldsymbol{\alpha}$$

a la que llamaremos ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA DINÁMICA DE ROTACIÓN PARA EL SÓLIDO RÍGIDO CON UN PUNTO FIJO.

### X - 8. Dinámica del movimiento general del sólido rígido (rototraslatorio)

Podemos considerar el movimiento más general de un sólido en cada instante como la combinación de una rotación en torno a un eje instantáneo y de una traslación en la dirección del eje.

La velocidad de cualquier punto  $P'$  del sólido se obtendrá como la suma de dos velocidades:  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ , donde  $\mathbf{v}$  es la de un punto  $P$  del eje,  $\boldsymbol{\omega}$  la velocidad angular en ese instante, independiente de  $P$ , y  $\mathbf{r}$  el vector de posición de  $P'$  respecto de  $P$ . El momento angular del sólido en el instante considerado se expresa:

$$\mathbf{J} = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{v}' dm = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm + \int_V \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm$$

Haciendo los mismos cálculos que para el movimiento de traslación y rotación con un punto fijo se obtiene:  $\mathbf{J} = \mathbf{R} \times M\mathbf{v} + I\boldsymbol{\omega}$ , en la que  $I$  es la matriz formada por los coeficientes de inercia. Si tomamos como centro de momentos el CM, entonces:  $\mathbf{S} = I\boldsymbol{\omega}$ , en el que  $\mathbf{S}$  representa el spin, es decir el momento angular en el movimiento relativo con respecto al CM; ecuación que ya demostramos en el análisis del movimiento de los sistemas de partículas en general.

Las dos ecuaciones del movimiento de un sólido las podemos expresar:

$$\mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = M \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad \mathbf{N}_{CM} = \frac{d\mathbf{S}}{dt} = I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

La primera nos dice que:

*«El centro de masas del sólido tiene en el espacio la misma trayectoria que recorrería una partícula de masa  $M$ , igual a la del sólido, sometida a la fuerza resultante de las exteriores que actúan sobre el sólido.»*

La segunda demuestra que:

*«El movimiento relativo del sólido en torno del CM es el mismo que tendría el sólido rígido si su CM estuviera fijo, y actuasen sobre el sólido las mismas fuerzas exteriores que actúan en el caso que estudiamos.»*

**PROBLEMAS: 48 al 70.**

## B) TRABAJO Y ENERGÍA DE UN SÓLIDO EN ROTACIÓN

### X - 9. Trabajo realizado al hacer girar un sólido rígido alrededor de un eje fijo. Potencia mecánica

El único momento que produce rotación de un cuerpo alrededor de un eje es el que lleva la dirección del eje, originado por fuerzas como las que vemos en la Fig. X-12, siempre perpendiculares a  $R$  (distancia del punto de aplicación de la fuerza al eje de giro). Otras posibles componentes de la fuerza total aplicada son anuladas por reacciones del eje.

Supongamos que por efecto de esta fuerza  $F$  el cuerpo gira un ángulo  $d\varphi$  en un tiempo  $dt$ , el trabajo realizado por esta fuerza en el tiempo  $dt$  será:

$$dW = F ds = F d\varphi R = N d\varphi$$

ya que  $FR$  es el módulo del momento de la fuerza aplicada respecto del eje de giro. Concluimos diciendo:

*«El trabajo realizado por las fuerzas que hacen girar a un sólido alrededor de un eje fijo, es el producto del momento resultante respecto del eje, por el ángulo girado.»*

El trabajo en un giro finito entre dos posiciones  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  será:

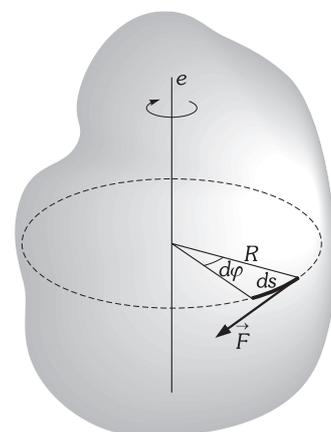


Fig. X-12.- La fuerza resultante que produce la rotación a un sólido rígido con un eje fijo es siempre perpendicular a  $R$ .

$$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} N d\varphi$$

y si  $N$  es constante:  $W = N\Delta\varphi$ .

La POTENCIA MECÁNICA tomará el valor:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{N d\varphi}{dt} = N\omega$$

fórmula que relaciona la potencia con la velocidad angular instantánea del móvil.

**X – 10. Energía cinética de un sólido rígido en rotación alrededor de un eje fijo**

Consideremos un cuerpo que gira alrededor de un eje fijo y que en un instante determinado posee una velocidad angular  $\omega$ . La energía cinética del sistema será:

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

expresión que para un sistema continuo de partículas (un sólido), toma la forma:

$$T = \frac{1}{2} \int v^2 dm$$

estando la integral extendida a todo el volumen del sólido. Según sabemos, la relación entre la velocidad  $v$  de un elemento de masa  $dm$  con la velocidad angular de todo el sólido es:  $v = \omega R$ , donde  $R$  es la distancia de  $dm$  al eje de giro; sustituyendo nos quedará:

$$T = \frac{1}{2} \int \omega^2 R^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int R^2 dm$$

y teniendo en cuenta la definición de momento de inercia del sólido respecto al eje, concluimos:

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2 \tag{8}$$

**X – 11. Energía cinética en el movimiento general de un sólido rígido**

Hemos visto en la cinemática del sólido rígido que el movimiento más general de éste puede describirse como la combinación de una rotación en torno a un eje instantáneo y de un deslizamiento a lo largo de dicho eje. Prescindimos por ahora del mencionado deslizamiento. Si nos quedamos con la rotación instantánea, la energía cinética vendrá dada por la expresión obtenida en el párrafo anterior. Ahora bien, en el caso de que el eje instantáneo no pase por el centro de masas podemos desglosar la energía cinética en dos términos; aplicando el teorema de Steiner:

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} (I_0 + Mr^2) \omega^2$$

donde  $I_0$  es el momento de inercia respecto de un eje paralelo al de giro y que pasa por el CM, que se encuentra a una distancia  $r$  de él. La velocidad del CM es  $v = \omega r$ , con lo que:

$$T = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + \frac{1}{2} Mr^2 \omega^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

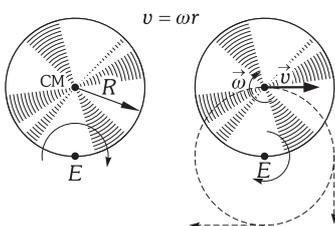


Fig. X-13.- Movimiento de un sólido en torno a un eje que pasa por E.

Así pues, se puede describir la energía cinética del sólido como la de una rotación pura en torno al eje instantáneo, o bien, como la suma de la energía cinética del centro de masas más la de una rotación, respecto de un eje que pasa por el centro de masas, de velocidad angular igual a la del sólido en torno al eje instantáneo.

Si además el sólido desliza con velocidad  $v_D$  a lo largo del eje, a la expresión anterior habrá que añadirle el término  $Mv_D^2/2$ .

Supongamos, por ejemplo, un sólido que gira con un punto fijo como en la Fig. X-13, considerando el movimiento como una rotación pura en torno a un eje que pasa por E pondremos  $T = I_E \omega^2/2$ , que podemos transformar en:

$$T = \frac{1}{2} (I_0 + MR^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + \frac{1}{2} Mv^2$$

el término  $\frac{1}{2} Mv^2$  corresponde al movimiento de la partícula CM con masa  $M$  y velocidad  $v = \omega R$ . Este movimiento puede ser circular en torno a  $E$ , como en la figura, rectilíneo si el sólido rueda sobre un plano, o de otro tipo según sea la trayectoria del centro instantáneo  $E$ .

Si además, todo el sólido tiene una velocidad  $v_D$  perpendicular al plano de la figura, habrá que añadir la correspondiente energía cinética de traslación, de expresión:

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_D^2 = \frac{1}{2} v_D^2 \sum m_i = \frac{1}{2} M v_D^2$$

**X - 12. Variación de la energía cinética de un sólido sometido a fuerzas externas**

Como en todo sistema de partículas, la variación de la energía cinética es igual al trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre él. En el caso del sólido rígido, el trabajo de las fuerzas interiores es cero; en efecto, para el caso de dos de ellas:

$$dW_{int} = \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_j = \mathbf{F}_{ij} \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij}$$

y por ser  $\mathbf{r}_{ij}$  de módulo constante,  $d\mathbf{r}_{ij}$  es perpendicular a  $\mathbf{r}_{ij}$ , y por tanto a  $\mathbf{F}_{ij}$ , con lo que su producto escalar es nulo. Extendiendo el razonamiento a todas las parejas de fuerzas interiores, podemos poner para el sólido  $W_{int} = 0$ .

La variación de la energía cinética se escribirá:

$$T - T_0 = W_{ext} = \sum \int_A^B \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i$$

«El incremento de energía cinética que experimenta un sólido rígido es igual al trabajo realizado por las fuerzas exteriores».

Si el único movimiento permitido al sólido es una rotación en torno a un eje, la expresión anterior se podrá poner de la forma:

$$W_{ext} = T - T_0 = \frac{1}{2} I \omega^2 - \frac{1}{2} I \omega_0^2$$

donde  $I$  es el momento de inercia respecto del eje y  $\omega_0$  y  $\omega$ , las velocidades angulares inicial y final. Podríamos haber llegado a la expresión anterior por un procedimiento análogo al teorema de las fuerzas vivas:

$$dW_{ext} = N d\varphi = I \alpha d\varphi = I \frac{d\omega}{dt} d\varphi = I \omega d\omega = d\left(\frac{1}{2} I \omega^2\right) \Rightarrow W_{ext} = \int_A^B d\left(\frac{1}{2} I \omega^2\right) = \frac{1}{2} I \omega^2 - \frac{1}{2} I \omega_0^2$$

**PROBLEMAS: 71 al 109.**

**C) OSCILACIONES, PÉNDULO FÍSICO Y GIRÓSCOPO**

**X - 13. El oscilador armónico de rotación**

Consideremos un volante que puede girar en torno a un eje  $e$  el cual está sujeto por un muelle en espiral Fig. X-15. Desplacemos el volante de su posición de equilibrio un ángulo  $\theta_m$  aplicándole un par de momento  $N$ ; al soltarlo, actúa el par de reacción elástica del muelle cuyo valor para un desplazamiento angular  $\theta$  es:  $N = -K\theta$ , siendo  $K$  la constante de elasticidad del muelle; el volante adquiere un MAS angular a un lado y otro de la posición de equilibrio y estaría oscilando indefinidamente a no ser por los rozamientos que originan una pérdida de energía y, por tanto, una pérdida de amplitud. (El sistema descrito constituye el volante del reloj al que se le restituye la energía perdida, evitando la pérdida de amplitud, por un mecanismo llamado «escape de áncora»).

Supongamos un modelo ideal análogo al descrito anteriormente y que no tuviera pérdida de amplitud (no existieran rozamientos), llegaremos a conclusiones análogas a las obtenidas en el párrafo VI-8. Si aplicamos la segunda ecuación del movimiento:

$$N = I \alpha \Rightarrow -K\theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow I \frac{d^2\theta}{dt^2} + K\theta = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0$$

con  $\omega^2 = K/I$ , ecuación diferencial de solución:

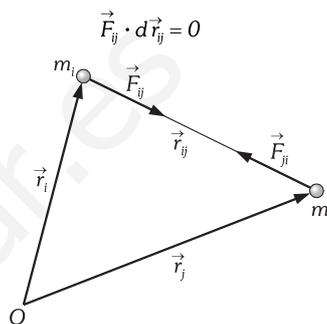


Fig. X-14.- Por ser  $r_{ij}$  constante en módulo,  $dr_{ij}$  es perpendicular a  $r_{ij}$  y por tanto a  $F_{ij}$ , con lo que su producto escalar es nulo.

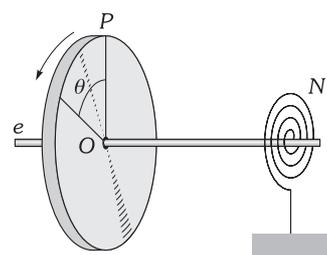


Fig. X-15.- Oscilador armónico de rotación.

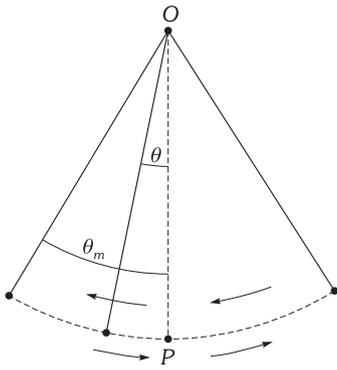


Fig. X-16.- El punto P realiza un MAS «alrededor» de O.

$$\theta(t) = \theta_m \text{sen}(\omega t + \varphi) \tag{9}$$

$\theta(t)$ : DESPLAZAMIENTO ANGULAR.  $\theta_m$ : AMPLITUD ANGULAR o *máximo desplazamiento angular*.  $\omega$ : FRECUENCIA ANGULAR (o PULSACIÓN), cuyo valor es  $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$ , siendo T y  $\nu$  el período y la frecuencia de la vibración.  $\varphi$ : la FASE INICIAL cuyo sentido físico lo obtenemos haciendo  $t=0$  en (9):  $\theta(0) = \theta_0 = \theta_m \text{sen} \varphi$ , indicándonos que el «segmento» móvil OP (Fig. X-16) en el instante inicial forma un ángulo  $\varphi$  con la posición de equilibrio.

El período de este oscilador es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{K}}$$

en la que I es el momento de inercia del cuerpo que oscila, con respecto al eje de giro.

**PROBLEMAS: 110 al 114.**

**X - 14. Péndulo físico**

PÉNDULO FÍSICO es un cuerpo cualquiera que oscila pendiente de un eje horizontal fijo que no pasa por su CM.

Supongamos el cuerpo de la Fig. X-17, que oscila alrededor de un eje perpendicular al plano del papel y que pasa por O; el valor del módulo del momento de Mg respecto de O (momento responsable del movimiento), es:

$$N = -Mgd \text{sen} \theta = -K\theta \Rightarrow K = Mgd$$

$\theta$  es el ángulo formado por d y la vertical, es decir, el desplazamiento angular, cuyo seno confundimos con él para *pequeñas oscilaciones*; el signo menos indica que el momento hace girar al cuerpo en sentido contrario al del desplazamiento angular ( $\theta$ ). El movimiento está producido por un momento proporcional al desplazamiento angular y de signo contrario a él; por tanto, es vibratorio armónico angular y su período es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{K}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}}$$

La ecuación del movimiento es:

$$\theta(t) = A \text{sen} \left( \sqrt{\frac{Mgd}{I}} t + \varphi \right)$$

siendo A, el máximo desplazamiento angular o amplitud angular.

**X - 15. Centro de oscilación. Longitud equivalente o reducida de un péndulo físico**

«Se llama LONGITUD REDUCIDA de un péndulo físico a la longitud que tendría un péndulo simple del mismo período».

Igualando las expresiones de los períodos del simple y el físico, obtenemos para valor de la longitud equivalente o reducida:

$$2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}} \Rightarrow l = \frac{I}{Md} \tag{10}$$

Al punto en que la vertical que pasa por G (centro de masas) corta al eje de suspensión, cuando el péndulo está en la posición de equilibrio, se le llama CENTRO DE SUSPENSIÓN (O).

Tomemos a partir de O, en la dirección y sentido OG, una distancia  $l = I/Md$ ; habremos obtenido un punto, el llamado CENTRO DE OSCILACIÓN (O'); *supuesta toda la masa del péndulo concentrada en él, habríamos obtenido el péndulo simple del mismo período que el péndulo físico.*

Apliquemos el teorema de Steiner a la ecuación anterior, llamando  $I_G$  al momento de inercia del cuerpo con respecto a su eje horizontal, paralelo al de suspensión, y que pasa por el CM(G), de (10):

$$l = \frac{I_G + Md^2}{Md} = \frac{I_G}{Md} + d \tag{11}$$

Para que un péndulo que oscila alrededor de un eje, cuya distancia al centro de masa es d, lo haga con el mismo período que oscilando alrededor de otro, cuya distancia a G es d', se debe verificar que tenga en los dos casos la misma longitud equivalente, es decir:

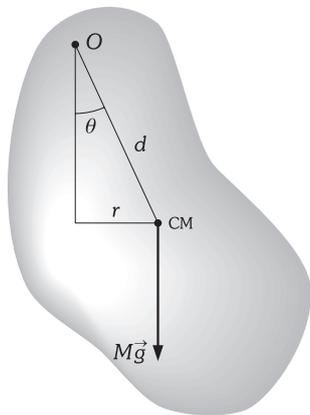


Fig. X-17.- Péndulo físico.

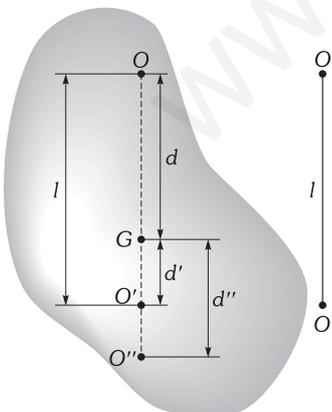


Fig. X-18.- Longitud reducida de un péndulo.

$$l = \frac{I_G}{Md} + d = \frac{I_G}{Md'} + d' \Rightarrow I_G \left( \frac{1}{Md} - \frac{1}{Md'} \right) = d' - d \Rightarrow I_G \frac{d' - d}{Md d'} = d' - d \quad (12)$$

Esta última ecuación tiene dos soluciones: la primera  $d' - d = 0$ , es decir,  $d = d'$ . Si a un lado y otro del centro de masas de un cuerpo sobre la misma recta y distancias iguales, tomamos dos puntos ( $O$  y  $O'$ ) por los que hacemos pasar ejes horizontales, el período de oscilación del péndulo, en torno a uno u otro eje es el mismo. (El período vendrá dado por:  $T = 2\pi \sqrt{l/g}$  siendo el valor de  $l$  el dado por la ecuación (10).

La segunda de las soluciones de la ecuación (12) es la más interesante y nos demuestra que los centros de suspensión ( $O$ ) y oscilación ( $O'$ ) son conjugados; si  $d$  y  $d'$  son desiguales, dividiendo por  $d' - d$  obtenemos:

$$\frac{I_G}{Mdd'} = 1 \Rightarrow \frac{I_G}{Md} = d'$$

sustituyendo este valor (11) obtenemos:

$$l = d + d'$$

«Si dos puntos de un cuerpo gozan de la propiedad de que el período de la oscilación es el mismo suspendido el cuerpo de uno o de otro, siendo distintas sus distancias al CM la suma de tales distancias es igual a la longitud equivalente o reducida».

En este hecho se basa el péndulo de Kater.

**PROBLEMAS: 115 al 119.**

**X - 16. Péndulo reversible y usos del péndulo**

El péndulo reversible de Kater es una barra metálica con dos cuchillas ( $C$  y  $C'$ ), y una lenteja  $M$ , que sirve para que el CM del sistema no equidiste de  $C$  y  $C'$ . Las masas móviles  $m$  y  $m'$  permiten modificar la posición del CM. (La masa  $m$  se desplaza a voluntad a lo largo de la barra sin más que aflojar el tornillo de presión que la sujeta; la  $m'$  se mueve con respecto a la  $m$  por medio de un tornillo micrométrico). Se modifica la posición de  $m$  y  $m'$  hasta que el péndulo sea reversible, es decir, hasta que tenga el mismo período de oscilación apoyado en  $C$  o en  $C'$  (lenteja arriba). La longitud equivalente de este péndulo (longitud del péndulo simple del mismo período) es, entonces, la distancia entre los puntos de apoyo. Para determinar la longitud de un péndulo cualquiera se compara con el reversible:

$$\left. \begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (\text{para el reversible}) \\ T' &= 2\pi \sqrt{\frac{x}{g}} \quad (\text{para el desconocido}) \end{aligned} \right| \Rightarrow \frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{l}{x}}$$

Los dos períodos,  $T$  y  $T'$  se determinan experimentalmente.

El péndulo se emplea para medir el tiempo, debido a la constancia que tiene su período para un lugar de la Tierra. El semiperíodo de los péndulos de los relojes es de 1 s, y el período, por lo tanto, de dos segundos; se dice, entonces, que el péndulo bate segundos. La longitud equivalente debe ser, en este caso, la correspondiente a la fórmula:

$$\left. \begin{aligned} 2 &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \\ g &= 980 \text{ cm/s}^2 \end{aligned} \right| \Rightarrow 1 = \pi \sqrt{\frac{l}{980}} \Rightarrow l = \frac{980}{\pi^2} \text{ cm} = 1 \text{ m}$$

También se emplea el péndulo para medir la aceleración de la gravedad, puesto que conocidos  $l$  y  $T$  queda determinado  $g$ .

**X - 17. Centro de percusión**

Cuando estudiábamos el movimiento de traslación de un cuerpo, producido por un determinado impulso, considerábamos a la masa concentrada en el CM. Para averiguar el movimiento de rotación de un cuerpo con un eje fijo, consideraremos a la masa concentrada en el centro de oscilación.

En efecto: sea  $O'$  el centro de oscilación de un cuerpo cuando se cuelga de un punto  $O$  (Fig. X-20); al golpear en  $O'$  con un cierto impulso que llamaremos  $p$ , en dirección perpendicular a la recta  $GO'$ , el centro de masas adquiere una velocidad tal que:

$$dp = F dt = d(M v_G) \Rightarrow p = M v_G \Rightarrow v_G = \frac{p}{M}$$

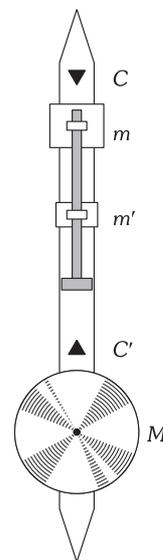


Fig. X-19.- Péndulo reversible.

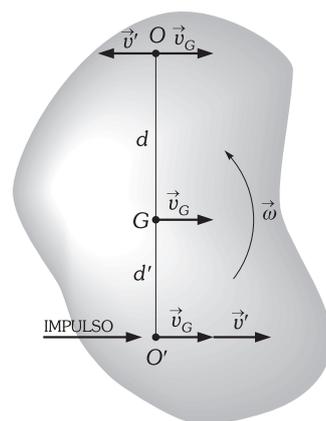


Fig. X-20.- Centro de percusión  $O'$ .

al mismo tiempo este impulso le produce al cuerpo una velocidad angular alrededor del centro de masas que calcularemos teniendo en cuenta que:

$$J_G = I_G \omega = pd' \Rightarrow \omega = \frac{pd'}{I_G}$$

(siendo  $J_G$  el momento angular respecto al centro de masas), y el cuerpo comenzaría a girar al mismo tiempo que se traslada. La velocidad de cualquier punto del cuerpo es el vector suma de la velocidad del centro de masas ( $v_G$ ) y de la velocidad tangencial ( $v' = \omega \times d'$ ) debida a la rotación alrededor del centro de masas. En  $O'$  (centro de oscilación) tales velocidades se suman escalarmen- te, sin embargo en  $O$  (centro de suspensión) se encuentran en oposición, entonces la velocidad de  $O$  tomará el valor:

$$v = v_G - \omega d = \frac{p}{M} - \frac{pd'}{I_G} d = \frac{p}{M} \left( 1 - \frac{Mdd'}{I_G} \right) = 0$$

puesto que, como se ha visto en el párrafo X-15,  $Mdd'/I_G = 1$ . En consecuencia  $v_G = \omega d$  y el cuer- po gira alrededor del centro de suspensión  $O$  (punto de soporte), y al ser su velocidad nula, no se ejerce sobre él reacción alguna al impulso que se ha hecho en el centro de percusión ( $O'$ ).

Casos de esta propiedad ocurren en el tenis, juego de pala, béisbol, ...etc.; los jugadores pue- den sentir una reacción en sus manos cuando le pegan a la pelota a menos que lo hagan en el centro de oscilación; por esto se le llama a tal punto CENTRO DE PERCUSIÓN.

**PROBLEMA: 120.**

**X - 18. Giróscopo**

*Movimiento giroscópico es el de un cuerpo que gira en torno a un eje móvil; estudiaremos el caso de que el cuerpo tenga simetría de revolución y gran momento de inercia con respecto al eje de giro (GIRÓSCOPO).*

El movimiento de una peonza o trompo es giroscópico, realizándose, al mismo tiempo que el giro en torno al eje, un movimiento cónico de éste (cabecéo) al que se llama PRECESIÓN DEL EJE.

Supongamos –aunque ello no es más que aproximado– que el momento angular de rotación ( $I\omega$ ) coincide en dirección con el eje (Fig. X-21 y X-22). Sobre el centro de gravedad (CM) del siste- ma actúa su peso ( $P$ ) produciendo un par, cuyo momento  $N$  (momento de  $P$  con respecto a  $O$  que se mantiene fijo) es perpendicular al eje y está situado en el plano horizontal  $XY$  (Fig. X-22). Descomponemos  $N$ , así como el momento angular ( $J = I\omega$ ) en sus componentes rectangulares.

$$J = J_x + J_y + J_z \qquad N = N_x + N_y$$

en la que  $N_z = 0$  por estar  $N$  situado en el plano  $XY$ . La ecuación del movimiento será:

$$N = \frac{dJ}{dt} \begin{cases} N_x = \frac{dJ_x}{dt} \\ N_y = \frac{dJ_y}{dt} \\ N_z = \frac{dJ_z}{dt} = 0 \end{cases}$$

luego si  $N_z = 0$  obtenemos:  $J_z = cte = J \cos \theta = I\omega \cos \theta$ .

Como  $I$  es constante y  $\omega$  también (puesto que  $N$  no tiene componente en la dirección del eje  $Z$  por ser perpendicular a él y no considerarse rozamientos), el único movimiento permitido es tal que el ángulo  $\theta$ , que forma el eje de giro con  $Z$  ha de permanecer constante; es decir: un movi- miento de precesión en torno al eje  $Z$ .

Al ser (Fig. X-23):  $J_y = OB \sin \alpha = I\omega \sin \theta \sin \alpha$  y  $N_y = N \cos \alpha$ , entonces:

$$N_y = \frac{dJ_y}{dt} = I\omega \sin \theta \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} = N \cos \alpha \Rightarrow \omega' = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{N}{I\omega \sin \theta}$$

expresión que nos indica que  $\alpha$  aumenta conforme aumenta el tiempo, realizándose, por tanto, el movimiento de precesión con velocidad angular  $\omega'$  (Fig. X-23). La expresión  $N_x = dJ_x/dt$  hubiese conducido al mismo resultado. La fórmula anterior se puede escribir en forma vectorial:  $N = \omega' \times I\omega$ .

Conforme el eje realiza su movimiento de precesión,  $OB$  gira con velocidad angular  $\omega'$  y como  $N$ , que es siempre perpendicular al eje de giro y a  $OB$ , también gira con la misma velocidad angular, el movimiento debería persistir indefinidamente, si no existiesen rozamientos.

En resumen: La velocidad angular de precesión es tal que tiende a hacer coincidir al momento angular ( $I\omega$ ) con el momento del par aplicado ( $N$ ).

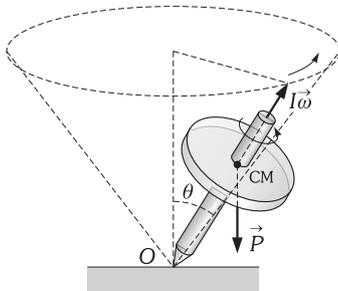


Fig. X-21.- Movimiento de precesión de un trompo.

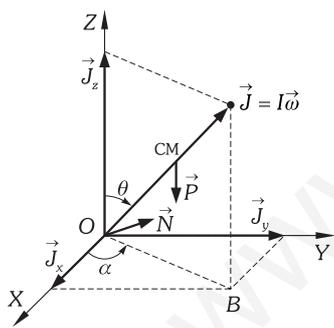


Fig. X-22.- Giróscopo.

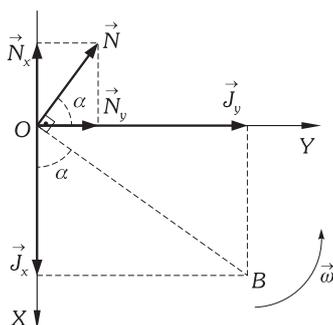


Fig. X-23.- Giróscopo.

En realidad, el movimiento es más complejo: el ángulo  $\theta$  (Fig. X-21), varía de un valor mínimo a otro máximo, realizando el eje, además del movimiento de precesión (cabeceo del trompo), un «festeo» o «balanceo» llamado *nutación*.

Por efectos del rozamiento el momento angular ( $I\omega$ ) va disminuyendo, el cono de precesión va aumentando su abertura y el «trompo» cae.

**X - 19. Aplicación del giroscopo**

MOVIMIENTO DE UN GIRÓSCOPO CUYO EJE TIENE ABSOLUTA LIBERTAD DE ORIENTACIÓN: Consideremos un giroscopo en una suspensión Cardan (Fig. X-24). El centro de gravedad del volante coincide con la intersección de los ejes X, Y, Z, y, por tanto, el peso queda anulado por la reacción del soporte. Enhebrando un hilo en un orificio del eje  $EE'$  y tirando de tal hilo, el volante o «rotor» se pone a girar en torno a Y.

A) Cualquiera que sea la orientación del eje de giro, presenta éste gran estabilidad, como se demuestra haciendo girar con la mano el soporte S y observando cómo el eje  $EE'$  no cambia de orientación, como cambia cuando el volante no gira; tampoco cambia sensiblemente tal orientación si se golpean el anillo A o la horquilla H.

B) Si en el ganchito G colgamos un peso, se originará un par de fuerzas cuyo momento  $\mathbf{N}$  va en dirección y sentido  $OX'$ , como el momento angular va en el sentido  $OY$ , obedeciendo a la ley antedicha  $OY$  tiende a coincidir con  $OX'$  y se realizará, en torno al eje Z una «precesión»; lo mismo que en el caso del trompo;  $\mathbf{N}$  gira en el plano horizontal con la misma velocidad angular que la de precesión ya que el pesito  $\mathbf{P}$  acompañará al eje  $EE'$  en su giro, la precesión cesa en el instante que se quita el peso  $\mathbf{P}$ , quedando fija la orientación del eje, mientras no vuelva a actuar otro par de fuerzas.

C) Sin peso alguno en el ganchito G, y girando el rotor, tomamos con nuestra mano la horquilla H y la hacemos girar, comunicándole un par de fuerzas cuyo momento es vertical y hacia arriba (sentido positivo del eje Z); el momento angular ( $I\omega$ ) tiende a coincidir con el momento del par y el eje  $EE'$  se empuja (subiendo  $E'$ ) hasta quedar vertical. Si en una posición intermedia cesa el par (dejamos de actuar sobre la horquilla H), el eje del rotor queda en la posición que estaba cuando dejó de actuar el par. Estos hechos nos confirman las leyes:

Si sobre un giroscopo que gira en torno a un eje con libertad de movimientos, no actúa par de fuerza alguno, se mantiene fija la orientación de su eje de giro; al actuar un par, el momento angular tiende a coincidir con el momento del par (EFECTO GIROSCÓPICO); el efecto giroscópico cesa al cesar el par que lo produjo.

La TIERRA COMO GIRÓSCOPO: El eje de rotación terrestre NS, forma con la normal A al plano de la eclíptica un ángulo de  $23^\circ 27' 8''$ , (Fig. X-25), el mismo que forman entre sí los planos ecuatorial y de la eclíptica; a esta inclinación se deben las estaciones del año. El hecho de que la Tierra no es esférica y la mayor atracción del Sol sobre las regiones de la Tierra más próximas a él, hacen que la resultante de las fuerzas que actúan sobre nuestro planeta, no pase por su centro de masas, lo que origina una fuerza, localizada en él, productora del movimiento de traslación y un par ( $\mathbf{F}' \mathbf{F}''$ ), de momento  $\mathbf{N}$ , que tendería a llevar el plano ecuatorial sobre la eclíptica, si no se realizase el efecto giroscópico. Razonando exactamente como hicimos en el estudio del «trompo», demostraríamos la existencia de un movimiento de precesión del eje terrestre, en sentido contrario al de giro de la Tierra; la abertura del cono de precesión es doble que el ángulo que forman el plano de la eclíptica y el ecuatorial y el período de tal movimiento 25 800 años. Cuando transcurra la mitad de este tiempo el eje terrestre dejará de apuntar a la que hoy es Estrella Polar y apuntará a Vega, de la constelación de Lira.

Los cambios de posición del Sol y la Luna, con respecto a la Tierra, originan, en ésta, una pequeña nutación que se superpone a la traslación, rotación y precesión.

BRÚJULA GIROSCÓPICA: Supongamos a un giroscopo en el polo N, con absoluta libertad de orientación de su eje (suspensión Cardan) y con su rotor girando; el giro de la Tierra no influye para nada en la orientación de su eje, que permanecerá invariable, lo mismo que cuando giramos el soporte S, del giroscopo (experiencia A). Un observador situado en el polo creerá que en 24 horas el eje del rotor realiza un cono completo de precesión (si el eje estaba desviado de la vertical) aunque, en realidad, giran la Tierra y el observador, conservando el eje del volante su orien-

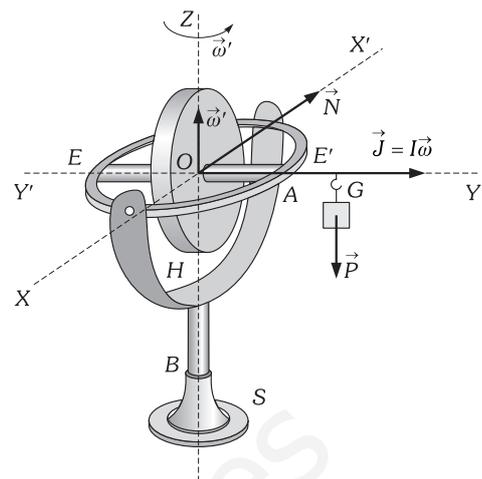


Fig. X-24.- Suspensión Cardan.

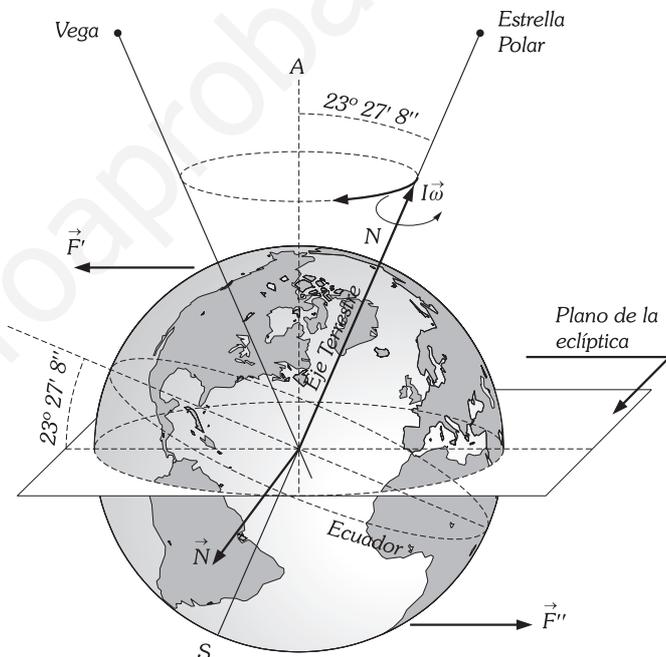


Fig. X-25.- La Tierra como giroscopo.

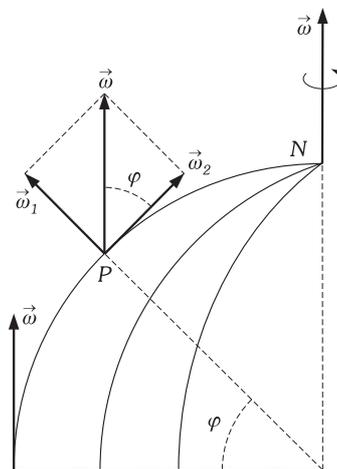


Fig. X-26.- Brújula giroscópica.

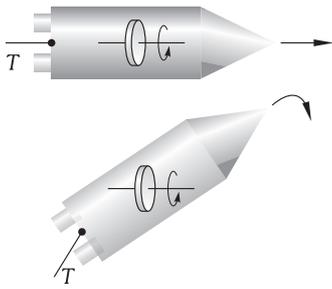


Fig. X-27.- El piloto automático.

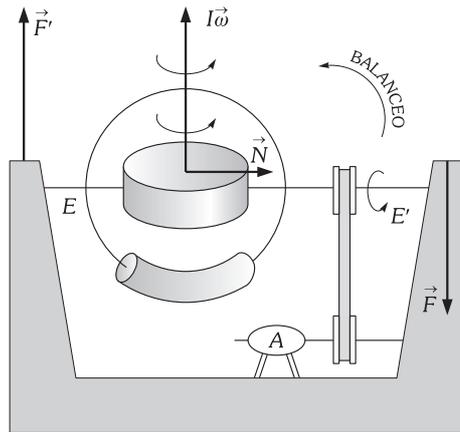


Fig. X-28.- Estabilizador giroscópico.

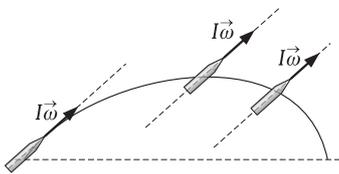


Fig. X-29.- Orientación del eje de un proyectil.

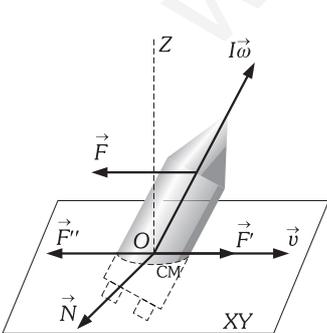


Fig. X-30.- Acciones de la resistencia del aire sobre un proyectil.

tación en el espacio. Si el eje  $B$  (Fig. X-24) de horquilla  $H$  es fijo (clavamos en el suelo tal eje), ocurrirá lo mismo que en la experiencia  $C$  empujándose el eje del rotor hasta coincidir con el radio polar.

En el Ecuador el giro de la Tierra equivale a un par que actúa sobre el giróscopo, cuyo momento coincide en dirección y sentido con la velocidad angular terrestre y el eje del rotor adquiere tal dirección tangente a la Tierra (horizontal del lugar).

Estos hechos indican (Fig. X-26):

1.º Si el eje de la horquilla (vertical) es móvil, sobre la orientación del eje del volante no influye para nada la componente de  $\omega$  en la dirección del radio terrestre (caso del Polo) pero influye la componente tangente a la Tierra, colocándose el eje del volante en tal dirección (caso del Ecuador).

En las condiciones expresadas y en un punto  $P$  de la Tierra, de latitud  $\varphi$ , el eje del volante adquiere la dirección de la componente horizontal ( $\omega_h$ ) de la velocidad angular ( $\omega$ ) de nuestro planeta; el plano vertical, que pasa entonces por el eje del rotor, determina el meridiano terrestre (BRÚJULA GIRÓSCÓPICA).

2.º Si es fijo el eje de la horquilla del giróscopo con suspensión Cardan, se orienta el eje del volante en la dirección de la velocidad angular terrestre, cualquiera que sea la posición del punto en la Tierra.

Colocado el giróscopo en el punto  $P$ , y fijo a tierra el eje de la horquilla, el ángulo que forma el eje del rotor con la horizontal, determina la latitud del lugar.

EL PILOTO AUTOMÁTICO: Es un giróscopo que gira en torno a un eje libre que coincide en dirección con el rumbo de un torpedo o un avión; cuando una causa externa modifica el rumbo, la orientación del eje del giróscopo no varía; ello supone una variación de la posición de tal eje con respecto al torpedo o avión; en definitiva, para un observador interior el eje del giróscopo cambia de orientación, lo que se aprovecha para provocar, adecuadamente, el movimiento de un timón que hace retornar el sistema al rumbo deseado (Fig. X-27).

ESTABILIZADOR GIROSCÓPICO: Sirve para amortiguar el balanceo de los barcos, consiste en un enorme giróscopo al que hace girar un motor (no dibujado en la Fig. X-28), en torno a un eje vertical. Cuando se inicia el balanceo, un pequeño giróscopo cierra el circuito del motor  $A$ , que obliga a inclinarse al sistema con la parte superior hacia proa. El motor  $A$  ha originado un par de momento  $\mathbf{N}$ , y el giróscopo reacciona produciendo fuerzas que tienden a crear una precisión llevando  $I\omega$  sobre  $\mathbf{N}$ ; en definitiva actúan sobre los soportes solidarios al barco las fuerzas  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{F}'$  que constituyen el par estabilizador.

RAYADO DE LOS CAÑONES: Por efecto del rayado del ánima de un cañón el proyectil sale de él girando en torno a su eje geométrico, con lo que en la trayectoria prevista no influyen, prácticamente las acciones exteriores (viento, por ejemplo); ello es debido a que si la acción externa es un par de fuerzas que debía provocar una rotación que desviase el proyectil del trayecto previsto, al girar aquél en torno a su eje, se produce únicamente un movimiento de precesión, sin modificación de la trayectoria del centro de gravedad, precesión que cesa cuando cesa la causa que la produjo, y que se puede aminorar haciendo grande el momento angular del proyectil (ya que  $\mathbf{N} = \omega \times I\omega$ ).

La orientación del eje de giro debería conservarse, salvo la precesión indicada (Fig. X-29), y así ocurriría si no existiese la resistencia del aire. Esto provoca sobre el proyectil una fuerza  $\mathbf{F}$  (Fig. X-30); si suponemos aplicadas en el centro de masas del proyectil dos fuerzas  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{F}'$  iguales a  $\mathbf{F}$ , ponemos de manifiesto la existencia de la fuerza  $\mathbf{F}''$  que retarda el movimiento de  $CM$  (deformación de la trayectoria parabólica) y el par  $\mathbf{FF}'$  cuyo momento es  $\mathbf{N}$ .

La precesión se origina tendiendo  $I\omega$  a coincidir con  $\mathbf{N}$ , por lo que la punta del proyectil sale hacia la derecha del plano del trayecto.

Suponiendo que  $ZY$  es el plano de la primitiva trayectoria, la desviación del eje del proyectil (punta hacia la derecha de tal plano) es la indicada en la figura X-31. La resistencia del aire ( $\mathbf{R}$ ) actúa entonces sobre el lado izquierdo del proyectil y hacia la derecha del trayecto, lo que origina una fuerza  $\mathbf{R}'$ , que actúa sobre el  $CM$  y desvía el proyectil hacia la derecha (deriva), y el par  $\mathbf{RR}'$  cuyo momento es  $\mathbf{N}'$ , originándose por él una precesión que tiende a llevar  $I\omega$  sobre  $\mathbf{N}'$  y por tanto, haciendo que la punta del proyectil tienda hacia la dirección del movimiento del centro de masas.

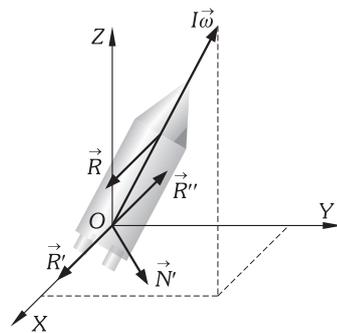
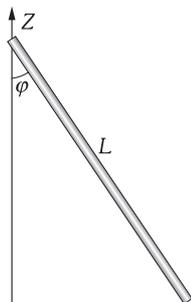


Fig. X-31.- Deriva.

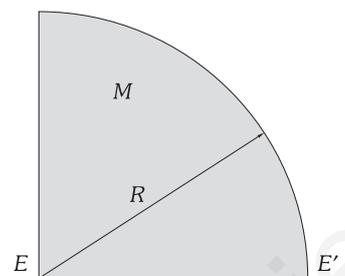
PROBLEMAS

A) MOMENTOS DE INERCIA

- En los vértices sucesivos A, B, C y D de un cuadrado de 10 cm de lado hay localizadas masas de 1, 2, 3 y 4 g, respectivamente. Determinar el momento de inercia del sistema y su radio de giro con respecto a un eje perpendicular al plano que lo contiene y que pasa: 1) Por A. 2) Por el centro del cuadrado. 3) Por el centro de masa del sistema. 4. Comprobar 1 y 2 aplicando el teorema de Steiner
- Tres masas puntuales de 2, 3 y 4 kg se encuentran en A (1, 2, 1), B (-2, 1, 0) y C (3, 2, 4) referidas a un sistema de ejes cartesianos y medidas éstas en metros. Calcular el momento de inercia del sistema con respecto a: 1) El origen de referencia. 2) Los ejes del sistema de referencia. 3) Los planos XOY, YOZ y XOZ. 4) Verificar los dos primeros teoremas referentes a los coeficientes de inercia.
- Demostrar que el momento de inercia de un sistema formado por dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$ , separadas una distancia fija  $r$ , con respecto a un eje que pasa por su CM y es perpendicular a la línea que une las dos masas, es  $I = \mu r^2$ , siendo  $\mu$  la masa reducida del sistema.
- Calcular el momento de inercia de una varilla delgada homogénea respecto a un eje perpendicular a ella y que pasa por uno de sus extremos.
- Se tiene una varilla homogénea de longitud  $L$  y masa  $M$ . Calcular su momento de inercia respecto de un eje ( $Z$ ) que pasa por uno de sus extremos y que forma con ella un ángulo  $\varphi$  (ver figura).

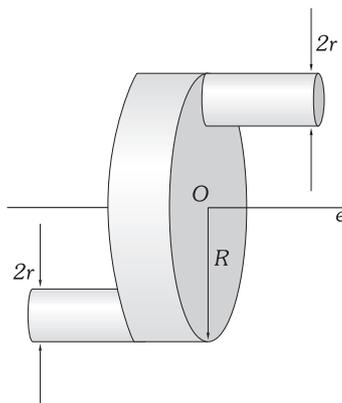


Problema X-5.

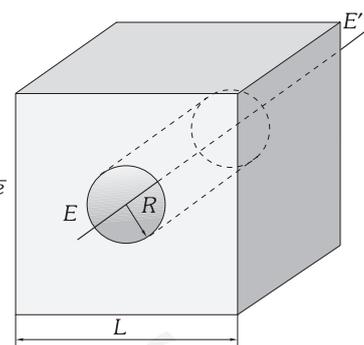


Problema X-6.

- Calcular el momento de inercia respecto del eje  $EE'$  de la lámina, de espesor despreciable, de la figura.
- Calcular el momento de inercia de un cilindro macizo y homogéneo con respecto a su eje geométrico.
- Calcular el momento de inercia de un cono respecto a su eje de simetría.
- Calcular el momento de inercia de una esfera maciza y homogénea con respecto a un eje que pasa por su centro.
- Calcular el momento de inercia de una esfera cuya densidad varía con la distancia al centro de la forma  $\rho = \rho_0 - ar$  (con  $\rho_0$  y  $a$  constantes), respecto de un diámetro.
- Calcular el momento de inercia de un cilindro macizo y homogéneo con respecto a un eje perpendicular a su eje geométrico y que pasa por el centro de su altura ( $H$ ).
- 1) Calcular el radio de giro de un cilindro macizo y homogéneo con respecto a su eje geométrico. 2) Calcular el radio de giro de una esfera maciza y homogénea con respecto a un eje que pasa por su centro. 3) Calcular el radio de giro de una varilla delgada y homogénea con respecto a un eje perpendicular a ella y que pasa por su centro.
- Conocido el momento de inercia de una varilla delgada y homogénea con respecto a un eje perpendicular a ella y que pasa por uno de sus extremos determinar el correspondiente a un eje paralelo al anterior y que pasa por el centro.
- Conocido el momento de inercia de una varilla delgada y homogénea con respecto a un eje ( $e$ ) perpendicular a ella y que pasa por uno de sus extremos, determinar el correspondiente a un eje paralelo al primero ( $e'$ ) y que dista de él  $1/4$  de la longitud de la varilla.
- Determinar el momento de inercia de la pieza maciza y homogénea de la figura respecto del eje  $e$ , sabiendo que el cilindro central tiene de masa  $M$  y radio  $R$ , y los acoplados son iguales y tienen de masa  $m$  y radio  $r$ .
- Calcular el momento de inercia del bloque cúbico, homogéneo de densidad  $\rho$  de la figura, respecto del eje  $EE'$ .



Problema X-16.



Problema X-17.

B) DINÁMICA DEL SÓLIDO GIRANDO ALREDEDOR DE UN EJE

- Una rueda de fuegos artificiales de 1 m de radio lleva, sujetos en los extremos de un diámetro, dos cartuchos que al arder ejercen dos fuerzas iguales, constantes, tangenciales y de sentidos contrarios. 1) ¿Qué clase de movimiento será el de la rueda? (Se desprecia la resistencia del aire y la pérdida de masa de los cartuchos mientras se queman.) 2) Cada cartucho produce una fuerza de 0,25 kp. Calcular el momento del par de fuerzas que hace girar a la rueda, expresándolo en  $\text{kp} \cdot \text{m}$  y en unidades del SI y cuál es la dirección y sentido del vector momento, si vemos girar la rueda en el sentido de las agujas del reloj. 3) Si en los 10 primeros segundos ha dado la rueda cinco vueltas, ¿cuántos radianes ha girado? 4) Calcular la aceleración angular y su velocidad angular al cabo de los 10 s.
- Un «torniquete hidráulico» consiste en el aparato esquematizado en la figura, cuya sección horizontal también dibujamos. Calcular: 1) La fuerza de reacción que lo mueve en función de la velocidad de salida del líquido ( $v$ ), de su densidad ( $\rho$ ) y del gasto ( $G$ ). Gasto o caudal de una tubería es el volumen de fluido que pasa por la sección transversal en la unidad de tiempo:  $G = dV/dt = Av$ . 2) Si el momento de inercia respecto al eje de giro del «torniquete» es  $I$ , ¿cuál sería su aceleración angular si no existieran rozamientos?
- Una varilla de longitud  $L$  y densidad lineal constante  $\lambda$  gira con un extremo fijo barriando una superficie cónica de abertura  $\varphi$ . Si lo hace con velocidad angular  $\omega$ , calcular el valor del ángulo  $\varphi$ .
- Un cilindro macizo gira alrededor de su eje con una velocidad angular de 600 rpm. Su masa es de 1 kg y su radio de 5 cm. Tangencialmente se aplica una fuerza constante de frenado de 0,1 kp. Determinar: 1) Aceleración angular de frenado. 2) Tiempo que tarda en pararse. 3) Número de vueltas que da hasta que se para.
- Una rueda tiene un momento de inercia de  $10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  y gira a razón de 40 rpm. Se le aplica una fuerza tangencial, constante y se para en 30 s. Determinar: 1) El valor del momento de la fuerza aplicada. 2) Aceleración angular del frenado. 3) Número de vueltas que da la rueda desde que se aplica la fuerza hasta que se para.
- El equipo móvil de un motorcito eléctrico tiene una masa de 20 g y un radio de giro de 3 cm. El par de fuerzas responsable del movimiento vale  $2 \text{ g} \cdot \text{cm}$ . ¿Qué tiempo precisa el motorcito para alcanzar una velocidad de 100 rpm?
- Si una rueda de 80 cm de radio y de momento de inercia  $10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  gira impulsada por un cohete fijo en su periferia, como en los fuegos artificiales, de manera que los gases los expulsa tangencialmente y de una manera constante, se desea calcular: 1) La fuerza constante de reacción de los gases, sabiendo que al cabo de 6 s la rueda, que partió del reposo, alcanza la velocidad de 1 Hz. 2) El valor de las aceleraciones tangencial y normal de un punto de su periferia, al cabo de esos 6 s. Dibujar también el vector que representa la aceleración total. 3) ¿Cuánto tiempo tardaría la rueda en alcanzar la misma velocidad angular, si el aro periférico aumentara su masa en 5 kg?
- Una rueda maciza de 32 cm de diámetro que pesa 17,3 kg se desea que gire a 385 rpm, aplicándole, para ello, dos fuerzas de 2,6 kp en sentidos opuestos sobre su periferia. ¿Cuánto tiempo tardaría en lo-

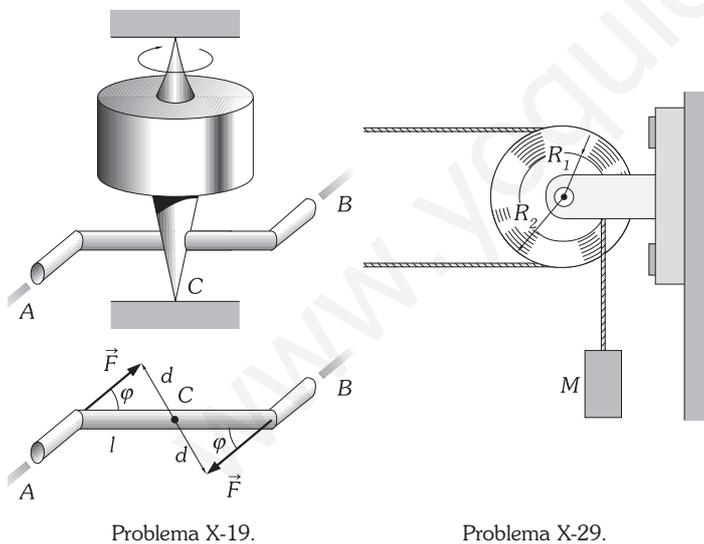
grarse, si no existiese ninguna clase de rozamiento? ¿Y cuánto se tardará realmente si los rozamientos equivalen a un par de rodadura de  $150 \text{ g} \cdot \text{m}$ ? Si una vez lograda dicha velocidad se dejara a la rueda girar libremente, ¿cuánto tiempo seguiría todavía según se considere o no la presencia del par de rodadura?

**26.** Se hace girar un cilindro macizo de  $20 \text{ cm}$  de radio y  $5 \text{ kg}$  de masa alrededor de su eje, colocado éste horizontalmente, arrollando sobre dicho cilindro una cuerda de peso despreciable sujeta por un extremo al mismo y de la que pende por el otro extremo un peso de  $50 \text{ g}$ . Calcular: 1) ¿Cuál es el momento de inercia del cilindro? 2) ¿Cuál es el momento del par que lo hace girar? 3) ¿Cuál es la aceleración angular con que se mueve el cilindro? 4) ¿Cuál es la aceleración de caída del cuerpo de  $50 \text{ g}$ ? 5) ¿A qué tensión está sometida la cuerda mientras cae el peso? Se desprecian los rozamientos.

**27.** Un cilindro macizo y homogéneo de  $5 \text{ cm}$  de radio y de masa  $20 \text{ kg}$ , cuyo eje es horizontal y puede girar en torno a él, sin rozamiento, lleva arrollada una cuerda supuesta sin peso, de la que se tira con una fuerza constante de  $10 \text{ kp}$ . Determinar: 1) La aceleración de un punto de la cuerda. 2) Espacio recorrido por tal punto de la cuerda en los tres primeros segundos. 3) Tiempo necesario para que el volante dé  $20$  vueltas. 4) Si en vez de actuar una fuerza de  $10 \text{ kp}$  atamos a la cuerda un cuerpo de  $10 \text{ kp}$  de peso, resolver las tres cuestiones anteriores.

**28.** Un volante de  $50 \text{ cm}$  de radio gira por la acción de un peso de  $4 \text{ kg}$  que cuelga verticalmente del extremo de una cuerda arrollada a su eje. El momento de inercia del volante es de  $9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Al dejar el sistema en libertad se pone espontáneamente en movimiento. Determinar: 1) La velocidad adquirida por el peso al cabo de  $2 \text{ s}$  de empezar a moverse. 2) La fuerza que tendrá que desarrollar un freno aplicada en la periferia del volante para parar el sistema en  $1 \text{ s}$ , empezando a actuar dicho freno al transcurrir el tiempo citado en el apartado anterior.

**29.** El sistema de poleas acopladas de la figura tiene un momento de inercia respecto de su eje de  $100 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Los radios indicados son  $R_1 = 10 \text{ cm}$  y  $R_2 = 20 \text{ cm}$ . Calcular la diferencia de tensiones entre ambas ramas de la correa cuando el bloque de  $M = 500 \text{ kg}$ : 1) Es subido a velocidad constante. 2) Ascende con aceleración de  $1 \text{ m/s}^2$ . 3) Desciende con aceleración de  $0,2 \text{ m/s}^2$ .



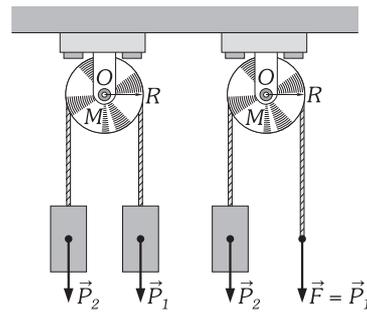
Problema X-19.

Problema X-29.

**30.** En los sistemas representados en la figura el peso de los cables es despreciable. La polea es un cilindro macizo de  $3 \text{ kg}$  de masa.  $P_1 = F = 20 \text{ kp}$  y  $P_2 = 16 \text{ kp}$ . Determinar las aceleraciones del cuerpo y de un punto de la cuerda en ambos sistemas y las tensiones de cada uno de los ramales del cable.

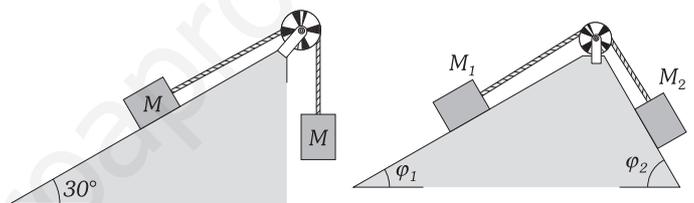
**31.** Dos poleas cuyos radios son  $1 \text{ m}$  y  $0,3 \text{ m}$  están acopladas, es decir, pegadas la una a la otra, formando un bloque que gira alrededor de su eje central horizontal. De la garganta de la polea grande pende un peso de  $20 \text{ kg}$ , y de la garganta de la polea pequeña pende otro de  $100 \text{ kg}$  que tiende a hacer girar las poleas en sentido contrario al anterior. El momento de inercia del sistema formado por las dos poleas acopladas es de  $10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Al dejar el sistema en libertad se pone espontáneamente en movimiento. Se pide: 1) ¿En qué sentido se mueven las poleas? 2) Valor de la aceleración con que se mueve cada peso. 3) Valor de la

aceleración angular de las poleas. 4) Tensión de la cuerda que sostiene el peso de  $100 \text{ kg}$  cuando el sistema está en movimiento.



Problema X-30.

**32.** Sobre una mesa horizontal descansa un cuerpo de  $1 \text{ kg}$ . Una cuerda sujeta a él pasa por la garganta de una polea, y se cuelga de su otro extremo otra masa de  $1 \text{ kg}$ . El primer cuerpo desliza sobre la mesa sin rozamiento y el segundo cae verticalmente. Realizando medidas de espacios y tiempos, deducimos que la aceleración de los cuerpos del sistema es de  $3,9 \text{ m/s}^2$ . Calcular la masa de la polea, supuesta cilíndrica maciza de  $10 \text{ cm}$  de diámetro, y determinar su momento de inercia y su radio de giro. ¿Cómo se modifican estos resultados si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y la mesa es  $0,1$ ?



Problema X-33.

Problema X-34.

**33.** En el extremo superior de un plano inclinado  $30^\circ$  hay una polea de  $2 \text{ kg}$  de masa formada por un cilindro macizo, por cuya garganta pasa un cordón inextensible y sin peso apreciable. Uno de los ramales del cordón sostiene un peso de  $10 \text{ kg}$ , el otro se mantiene paralelo al plano inclinado y tiene atado en su extremo un cuerpo que pesa  $10 \text{ kg}$ . Si no existe rozamiento entre el cuerpo y el plano calcular: 1) La aceleración de los cuerpos. 2) Las tensiones de los dos ramales del cordón. 3) ¿Cómo se modifican los anteriores resultados si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano es  $0,3$ ?

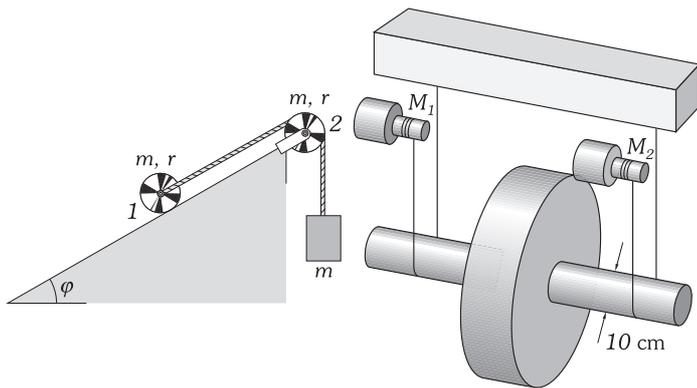
**34.** Sobre un plano inclinado  $\varphi_1$  se tiene un cuerpo de masa  $M_1$  que está unido por una cuerda (que supondremos inextensible y sin peso apreciable) que pasa por una polea de masa  $M$  con otro cuerpo de masa  $M_2$ , que se apoya en un plano inclinado  $\varphi_2$ . Si el coeficiente de rozamiento entre  $M_1$  y el plano en que está apoyado es  $\mu_1$  y el de  $M_2$  respecto al suyo es  $\mu_2$ : 1) Determinar las condiciones del movimiento en uno u otro sentido. 2) En el caso en que las masas se muevan con aceleración, calcular ésta.

**35.** En el sistema de la figura calcular: 1) Aceleración de caída del bloque. 2) Aceleración angular de la polea. 3) Tensiones en la cuerda. DATOS:  $I_1 = I_2 = mr^2/2$ ,  $\varphi = 37^\circ$ ,  $m = 10 \text{ kg}$ ,  $r = 0,20 \text{ m}$ ,  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . No hay deslizamiento.

**36.** El sistema de la figura, con su eje, tiene una masa de  $2 \text{ t}$  y un radio de giro de  $25 \text{ cm}$ . Las dos cuerdas son idénticas y los motores  $M_1$  y  $M_2$  sueltan cuerda de forma que el sistema desciende con una aceleración de  $20 \text{ cm/s}^2$ . El radio del eje es de  $5 \text{ cm}$ . Calcular las tensiones en las cuerdas.

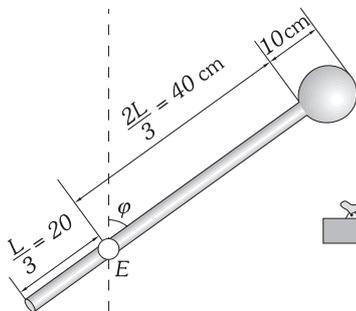
**37.** Una varilla homogénea, de masa  $M$  y longitud  $L$ , cuelga horizontal suspendida de dos hilos verticales sujetos a ambos lados del centro de la varilla y a distancia  $x$  de él. Si cortamos uno de los hilos, calcular, en función de  $x$ , la tensión que soporta el otro en el instante inmediato al corte.

**38.** En el sistema de la figura, la varilla tiene una longitud  $L = 60 \text{ cm}$  y una masa de  $1,8 \text{ kg}$ , y la esfera es de  $10 \text{ cm}$  de diámetro y  $1,5 \text{ kg}$ . Todo él puede girar en torno a un eje horizontal  $E$ , e inicialmente se encuentra vertical con la esfera arriba. Si parte de esa posición, calcular: 1) La aceleración angular del sistema cuando haya barrido un ángulo  $\varphi$ . 2) La fuerza de reacción del eje en ese instante.

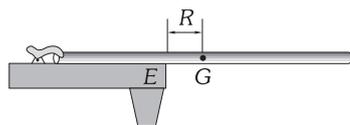


Problema X-35.

39. La barra homogénea de la figura, de masa  $M$  y longitud  $L$ , se mantiene en reposo sujeta por un extremo. Al soltar la sujeción comienza a girar en torno a  $E$ . Si el coeficiente estático de rozamiento con la superficie es  $\mu$ , calcular el ángulo que habrá girado la barra cuando empiece a deslizar.

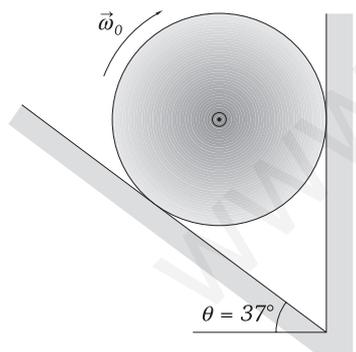


Problema X-38.

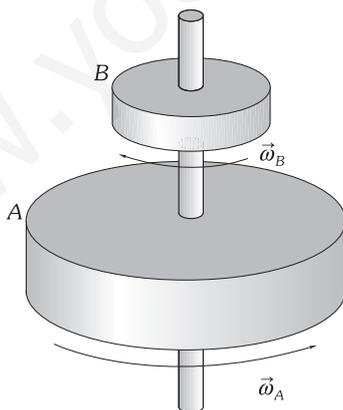


Problema X-39.

40. El cilindro macizo de la figura, de masa  $m$  y radio  $r$ , inicia el contacto con la pared vertical con una velocidad angular  $\omega_0$ . Si su coeficiente de rozamiento con el suelo y la pared es el mismo,  $\mu$ , calcular el número de vueltas que completa hasta pararse. DATOS:  $\theta = 37^\circ$ ,  $\mu = 10$  kg,  $m = 0,25$ ,  $r = 20$  cm,  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>,  $\omega_0 = 5$  Hz.



Problema X-40.



Problema X-43.

41. Un disco de 30 cm de diámetro y de 200 g de masa se encuentra girando alrededor de su eje con una velocidad angular de 33 rpm. En estas condiciones se adhiere una partícula de 10 g en un punto que dista 10 cm del eje de giro. Hállese la velocidad angular del conjunto disco-partícula.

42. Tenemos un volante de 80 cm de diámetro y 50 kg de masa que consideramos concentrada en el aro periférico, y que puede girar en un plano horizontal. Queremos saber: 1) Su aceleración angular si partiendo del reposo tira de él una cuerda arrollada a su periferia, con la fuerza constante de 1 kp. La masa de la cuerda es despreciable y no existen rozamiento. 2) Velocidad angular del volante y de traslación de la cuerda al cabo de 10 s. 3) Longitud de la cuerda desarrollada en ese

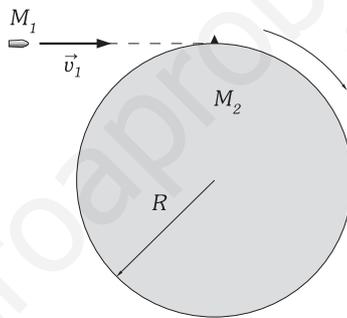
tiempo. 4) A los 10 s citado se rompe la cuerda y entonces colgamos del aro pesos por valor de 25 kg ¿Cuál es la nueva velocidad angular?

43. El disco A de la figura gira con una velocidad angular  $\omega_A = 4$  rad/s. El disco B, que tiene un momento de inercia tres veces menor que el de A, gira con una velocidad angular  $\omega_B = 8$  rad/s en sentido contrario al A. Si se acoplan ambos discos para que giren juntos, ¿cuál es la velocidad angular final del conjunto?

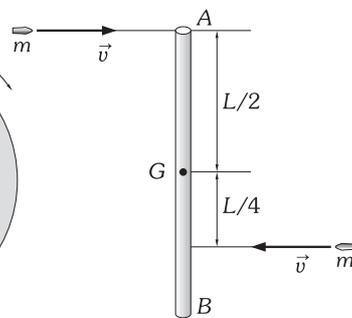
44. Una bala de masa  $M_1$  y velocidad horizontal  $v_1$  choca con un pequeño diente situado en la periferia de un volante de masa  $M_2$  y radio  $R$  (ver figura). Suponiendo la bala como una masa puntual, que el volante es cilíndrico, macizo y homogéneo (no se tiene en cuenta el pequeño diente) y que la bala queda incrustada en el diente, averiguar la velocidad angular adquirida por el sistema después del choque. DATOS:  $M_2 = 1$  kg;  $M_1 = 100$  g;  $R = 10$  cm;  $v_1 = 100$  m/s.

45. Una fuerza de 2 kg actúa durante 3 s sobre un cuerpo de 9,8 g. 1) ¿Qué velocidad le comunica al cuerpo? 2) El cuerpo con esa velocidad choca con un aro circular fijo por su centro. El choque es tangencial y el cuerpo queda incrustado en el aro. ¿Cuál es la velocidad que adquiere el conjunto si la masa del aro es de 2 kg y 5 cm su diámetro?

46. Dos proyectiles, de masa  $m$  y velocidad  $v$ , se incrustan simultáneamente en una barra de masa  $M = 2m$  y longitud  $L$ , como indica la figura. Antes de los impactos la barra descansa sobre una mesa horizontal sin rozamiento. Calcular las velocidades de los extremos de la barra después de los impactos.



Problema X-44.



Problema X-46.

47. Un hombre de 100 kg se encuentra en el centro de un radio pintado en una plataforma circular horizontal de 5 m y momento de inercia 5 000 kg · m<sup>2</sup>, que puede girar sin rozamiento en torno a un eje vertical por su centro. En un instante dado, empieza a andar, con velocidad constante de 1 m/s respecto de la plataforma, en una dirección que es en todo momento perpendicular al radio pintado en ella. Cuando alcanza el borde, calcular: 1) Su posición respecto del radio inicial. 2) La velocidad angular de la plataforma.

### C) DINÁMICA DE ROTACIÓN Y TRASLACIÓN DEL SÓLIDO RÍGIDO

48. Al rodillo de jardín de masa  $M$  indicado en la figura se le aplica una fuerza  $F$ , de forma que rueda sin deslizar, produciéndole a su centro de masa un movimiento uniformemente acelerado; la fuerza de rozamiento que existe en la superficie de contacto entre el rodillo y el suelo está dirigida en sentido contrario a  $F$ . En el caso en que el rodillo es arrastrado mediante una cuerda enrollada alrededor de él, rodando sin deslizamiento, entonces la fuerza de rozamiento está dirigida en el mismo sentido que  $F$ . 1) Probar estas afirmaciones y calcular la aceleración del centro de masa en los dos casos. 2) ¿A qué distancia del centro del rodillo habría que aplicar la fuerza horizontal para que al rodar sin deslizar la fuerza de rozamiento fuera nula?

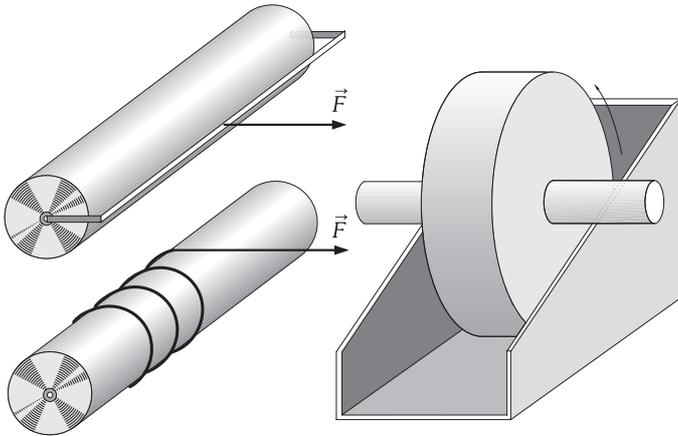
49. Establecer las ecuaciones que deben de cumplirse para el caso de un cuerpo que rueda sin deslizar a lo largo de un plano inclinado un ángulo  $\phi$ .

50. Estudiar las características del movimiento de un cilindro macizo y homogéneo que rueda sin deslizar por un plano inclinado un ángulo  $\phi$ .

51. ¿Qué condición debe cumplir el ángulo de inclinación de un plano para que un cilindro macizo y homogéneo ruede por él sin deslizar?

52. Un volante de la forma indicada en la figura rueda sin deslizar sobre unos carriles paralelos. La masa del volante (incluido su eje) es 200 kg y el diámetro del eje 1 cm; la pendiente de las guías es el 10 %

(100 m de recorrido para cada 10 m de descenso). Partiendo del reposo, se observa que recorre el primer metro en 3 s. Calcular: 1) El valor del rozamiento en el descenso. 2) Su momento de inercia. 3) Su radio de giro.



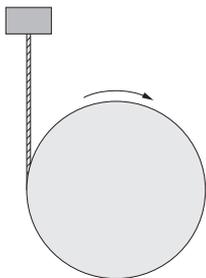
Problema X-48.

Problema X-52.

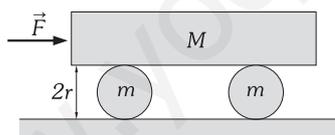
53. 1) ¿Cuál es la condición que debe cumplir el ángulo de un plano inclinado para que un aro homogéneo ruede sin deslizar? 2) Realizar el mismo estudio para una esfera maciza y homogénea. 3) Calcular la aceleración del centro de gravedad para los anteriores casos. 4) El aro o la esfera ruedan y deslizan por un plano de ángulo de inclinación  $\varphi$ , con respecto a la horizontal. Determinar la aceleración del centro de masa y la aceleración angular de giro.

54. Un cilindro macizo y homogéneo rueda y desliza a lo largo de un plano inclinado. Determinar la aceleración del CM y la aceleración angular de giro.

55. Un disco homogéneo, de 2 kg de masa y 10 cm de radio, lleva enrollada en su periferia una cuerda sujeta al techo por un extremo (ver figura). Si se abandona el sistema partiendo del reposo, calcular: 1) Aceleración del CM del disco. 2) Tensión de la cuerda. 3) Velocidad angular del disco cuando se hayan desenrollado 2 m de cuerda.



Problema X-55.



Problema X-59.

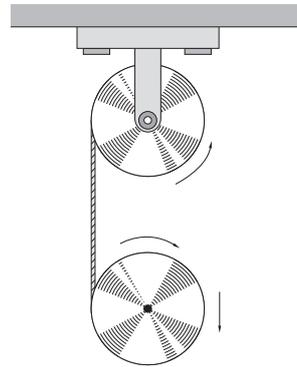
56. Del extremo libre de la cuerda del problema anterior estiramos hacia arriba con una fuerza de 30 N. Calcular: 1) Aceleración del CM. 2) Velocidad angular cuando se hayan desenrollado 2 m de cuerda. 3) Aceleración de un punto del tramo recto de la cuerda y distancia recorrida en el intervalo citado.

57. Dos cilindros de la misma masa y radio, uno macizo y homogéneo y otro hueco de pared delgada, se abandonan desde el mismo nivel de un plano inclinado un ángulo de  $10^\circ$  respecto de la horizontal. Uno de ellos parte 2 segundos antes que el otro. Si, después de recorrer ambos  $s$  metros, el segundo en salir alcanza al primero: 1) Razonar cuál de los dos partió en primer lugar. 2) Calcular la distancia  $s$  recorrida por ambos hasta encontrarse.

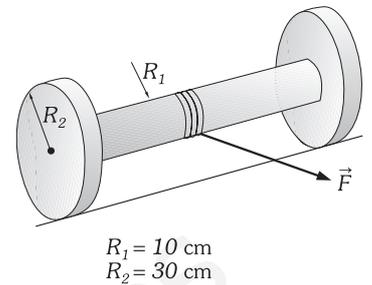
58. Una esfera homogénea rueda sin deslizar por un plano horizontal con una velocidad de 4 m/s. Inicia el ascenso por un plano inclinado  $30^\circ$  respecto del plano horizontal. Calcular la distancia que recorre sobre el plano inclinado hasta pararse.

59. El bloque de masa  $M$  de la figura es empujado por una fuerza  $F$  que le hace moverse horizontalmente sobre dos rodillos de masa  $M$  y radio  $r$ , los cuales ruedan sin deslizar tanto con la superficie del bloque como con la del suelo. Determinar la aceleración del bloque.

60. Las dos poleas de la figura son cilíndricas y tienen la misma masa  $m$  y radio  $r$ . Cuando el sistema se abandona a sí mismo, calcular: 1) Aceleraciones angulares de las poleas. 2) Tensión de la cuerda. 3) Espacio recorrido por la segunda polea en 2 segundos.



Problema X-60.

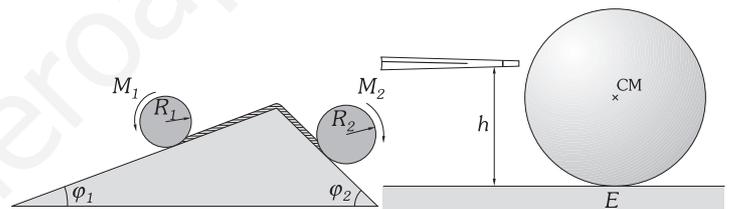


$R_1 = 10$  cm  
 $R_2 = 30$  cm

Problema X-61.

61. El sistema de la figura tiene una masa total de 50 kg y un radio de giro de 20 cm. Los coeficientes de rozamiento con el suelo son  $\mu_e = 0,25$  y  $\mu_d = 0,1$ . Si se tira de la cuerda con una fuerza de 300 N como se indica en la figura, calcular la velocidad lineal del centro de masas y la angular del sistema en torno a él a los 2 s de empezar a actuar la fuerza.

62. Los rodillos de masas  $M_1$  y  $M_2$  y radios  $R_1$  y  $R_2$  están unidos por una cuerda flexible e inextensible que pasa por el vértice de los planos, rodando a lo largo de ellos, como se indica en la figura. Calcular la tensión de la cuerda y la aceleración con la que resbala sobre los planos.



Problema X-62.

Problema X-63.

63. Calcular a qué altura  $h$  hay que golpear horizontalmente con un taco a una bola de billar, de radio  $R$ , para que ruede sin deslizar (ver figura).

64. Una bola de billar, de masa  $m$  y radio  $r$ , se encuentra en reposo sobre una masa horizontal, con la que presenta un coeficiente de rozamiento dinámico  $\mu$ . Se le golpea con un taco, en dirección horizontal que pasa por el centro de la bola, comunicándole una velocidad inicial  $v_0$ . Calcular la distancia recorrida por la bola antes de empezar a rodar sin deslizar.

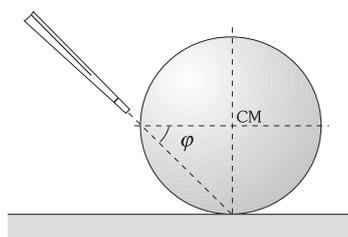
65. A la bola de billar del problema anterior, se le comunica una velocidad angular inicial  $\omega_0$ , con velocidad lineal nula. Calcular la distancia que recorre hasta empezar a rodar sin deslizar.

66. A la bola de billar de los problemas anteriores se le golpea como indica la figura, comunicándole un impulso lineal  $A$ . A partir del instante en que cesa el impulso, calcular: 1) La condición que debe verificar el ángulo  $\varphi$  para que la bola deslice. 2) Distancia que recorre antes de iniciar el retroceso. 3) La condición que debe cumplir el ángulo  $\varphi$  para que exista retroceso. 4) Una vez iniciado, distancia que recorre hasta empezar a rodar sin deslizar. 5) Velocidades lineal y angular en este instante.

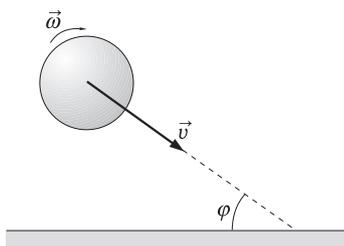
67. Una esfera de radio  $r$ , con una velocidad de su centro de masas  $v$  y una velocidad angular en torno a él  $\omega$ , choca con un plano horizontal, como en la figura. Calcular el menor valor del coeficiente estático de rozamiento entre el plano y la esfera para que, después del choque, ésta ruede sin deslizar.

68. Supuesto el siguiente modelo: a) La Tierra gira alrededor del Sol en órbita circular de radio  $R = 1,495 \times 10^8$  km y tarda  $T = 365,25$  d en dar una vuelta. b) La Tierra es perfectamente esférica, de radio  $R_0 = 6370$  km y masa  $M_0 = 5,976 \times 10^{24}$  kg. c) La Tierra tarda  $T' = 24$  h en dar una vuelta alrededor de su eje. d) El plano de la eclíptica (plano de la órbita de la Tierra alrededor del Sol) y el plano del ecuador forman

un ángulo constante  $\varepsilon = 23^\circ 27'$ . Tomando como origen el centro del Sol, calcular: 1) El orbital de la Tierra. 2) El spin. 3) La expresión vectorial del momento angular.



Problema X-66.



Problema X-67.

69. 1) Una varilla homogénea y recta de 1 m de longitud y 4 kg de masa se mueve en el plano XY, de modo que su centro de masa tiene una velocidad de 1 m/s sobre la recta  $y = 2$  m en el sentido positivo del eje de las X. La barra gira en el sentido de las agujas de un reloj con una velocidad angular de 6 rad/s. Calcular el vector momento angular respecto al origen de coordenadas. 2) Si el centro de masa de la varilla se mueve en el plano YZ con la misma velocidad que antes sobre la recta  $y = 2$  m y en sentido positivo del eje Z y gira en un plano paralelo al XY con la misma velocidad angular que en el caso anterior, ¿cuál será ahora el vector momento angular?

70. Una varilla, de masa M y longitud L, gira con velocidad angular  $\omega$ , como un péndulo cónico de abertura  $\varphi$  articulada en uno de sus extremos. Se considerará un sistema de referencia centrado en el extremo fijo y con el eje de giro como eje Z. La posición inicial de la varilla es en el plano  $y = 0$  y en el sentido de X positivo. 1) Calcular la expresión del momento de las fuerzas exteriores respecto del origen en función del tiempo. 2) Obtener la expresión del momento angular de la varilla respecto del origen. 3) De esta última expresión deducir el momento de inercia de la varilla respecto del eje de giro y compararlo con el obtenido por integración en el problema X-5. 4) ¿Qué productos de inercia se pueden deducir de la expresión del momento angular?, ¿cuál es su valor?

**D) TRABAJO Y ENERGÍA DE UN SÓLIDO EN ROTACIÓN**

71. Calcular el momento que produce un motor de 50 CV cuando gira a 3600 rpm.

72. Un volante en forma de cilindro sólido, de masa 200 kg y radio 40 cm, gira a razón de 120 rpm, calcular: 1) La energía cinética del volante. 2) Tiempo que tardará en pararse cuando se le frena, mediante un par de 40 N · m. 3) Número de vueltas que dará hasta pararse, a partir del momento en que comienza el frenado.

73. Un volante en forma de cilindro sólido de 200 kg de masa y 40 cm de radio gira a 10 Hz. Se actúa sobre él hasta pararlo con un par. Determinar: 1) Trabajo realizado por el par durante el frenado. 2) ¿Qué ángulo ha girado el volante hasta que se para, si el par aplicado es de 100 N · m?

74. Un par de fuerzas de 200 N · m de momento, actuando sobre una esfera de 30 cm de radio y pivotada en su eje, le comunica una velocidad angular de 50 Hz después de girar un ángulo de  $10\pi$  rad, calcular: 1) La masa de la esfera. 2) La aceleración angular. 3) Tiempo invertido en el proceso.

75. Un aro de 1 m de diámetro y de 500 g de masa se encuentra girando, en ausencia de rozamientos, alrededor de su eje con una frecuencia de 1 Hz. Se le aplica entonces una fuerza tangencial constante que le comunica una aceleración angular de una revolución/s<sup>2</sup> hasta que adquiere una frecuencia de 10 Hz. Calcúlese: 1) El trabajo realizado. 2) El tiempo que dura la aceleración. 3) El valor de la fuerza tangencial aplicada. 4) La potencia mecánica puesta en juego.

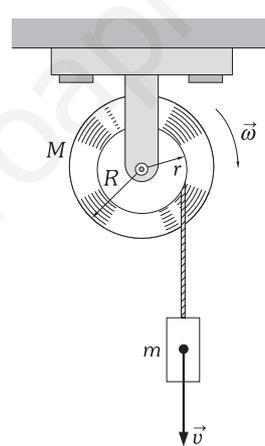
76. Calcular el trabajo desarrollado por un freno que, actuando sobre un cuerpo de 25 kg de masa, cuando éste se encuentra girando alrededor de un eje (radio de giro del cuerpo respecto al eje: 1 m) con una velocidad angular de 20 Hz, lo hace pasar a girar con 10 Hz.

77. Supuesta la Tierra esférica de  $M_0 = 5,98 \times 10^{24}$  kg y de  $R_0 = 6379$  km, calcular: 1) La energía cinética de rotación alrededor de su eje. 2) La fuerza que habría que aplicar en un punto del ecuador y en la dirección de la tangente a éste para que desde el reposo adquiriera la energía antes calculada en 15 días.

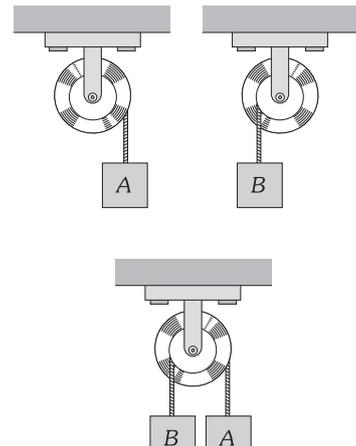
78. Supuesto el siguiente modelo: a) La Tierra gira alrededor del Sol en órbita circular de radio  $R = 1,495 \times 10^8$  km y tarda  $T = 365,25$  d en dar una vuelta. b) La Tierra es perfectamente esférica, de radio  $R_0 = 6370$  km y masa  $M_0 = 5,976 \times 10^{24}$  kg. c) La Tierra tarda  $T_0 = 24$  h en dar una vuelta alrededor de su eje. Calcular, tomando como origen el centro del Sol, la energía cinética de la Tierra en su órbita.

79. Se tiene un volante de radio  $R = 1$  m y cuya masa  $M = 100$  kg se supone localizada en la llanta. Arrollada a su eje, cuyo radio es de  $r = 10$  cm y masa despreciable, hay una cuerda de la que pende un cuerpo de masa  $m = 40$  kg, como se indica en la figura; este cuerpo está a una altura  $h = 18$  m del suelo, calcular: 1) La aceleración con que cae el cuerpo. 2) Tensión de la cuerda durante la caída. 3) Tiempo que tarda el cuerpo en llegar al suelo. 4) Energía cinética adquirida por el volante al llegar el cuerpo al suelo.

80. 1) Un volante de eje horizontal tiene una masa  $M = 1500$  g que podemos considerar uniformemente repartida en su llanta, de radio  $r = 10$  cm, como se indica en la figura. Un hilo enrollado en esa llanta sostiene un cuerpo A de masa  $m = 100$  g, de manera que al descender A el volante gira. a) Suponiendo nulos los rozamientos, calcular la velocidad  $v$  de A cuando haya descendido 2 m. b) Calcular el tiempo que ha empleado en descender los 2 m. 2) Quitamos el cuerpo A y enrollamos un hilo sobre el eje del volante, de radio  $r' = 4$  cm, que sostiene un cuerpo B de masa  $m' = 200$  g. a) Calcular la velocidad  $v_C$  de B cuando haya descendido 2 m. b) Calcular el tiempo que ha empleado en descender los 2 m. 3) Supongamos ahora que A y B actúan simultáneamente. a) Calcular la velocidad V de A cuando haya descendido 2 m. b) Calcular el tiempo que emplea en descender esos 2 m.



Problema X-79.

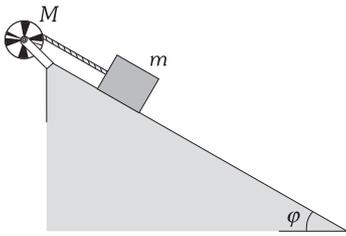


Problema X-80.

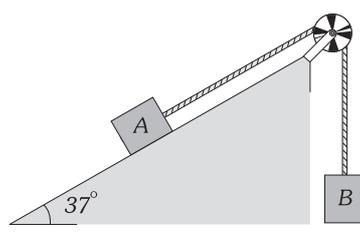
81. Una rueda de 25 cm de radio y 0,5 kg de masa, que se supone localizada en la periferia, puede girar alrededor de un eje de masa despreciable de 4 cm de diámetro, en el que se encuentra enrollado un hilo del que pende un cuerpo de 200 g que al descender hace girar el sistema, calcular: 1) El espacio recorrido por el cuerpo a los 10 s de iniciado el movimiento. 2) Su velocidad en ese instante y la de un punto de la periferia de la rueda. 3) Quitando la masa y suponiendo que la rueda gire con la velocidad adquirida, calcular la fuerza tangencial constante aplicada a la periferia de la rueda capaz de mantenerla en 30 s y el número de vueltas que da la rueda hasta detenerse.

82. La garganta de una polea de 5 cm de radio lleva enrollada una cuerda de la cual pende un peso de 20 g, siendo de  $2 \times 10^{-5}$  kg · m<sup>2</sup> el momento de inercia de la polea. Se pide calcular: 1) La aceleración lineal del peso de 20 g. 2) La energía cinética adquirida por el sistema al cabo de 3 s de empezar a moverse. 3) La fuerza que tendrá que desarrollar un freno sobre la periferia de la polea para parar el sistema en 1 s, empezando a actuar dicho freno al transcurrir el tiempo citado en 2)

83. A la garganta de una polea fija, cilíndrica y maciza, de 5 cm de radio y de 2 kg de masa, enrollamos un cordón de masa despreciable al que se le sujeta un cuerpo de 1 kg que se encuentra apoyado en un plano inclinado de 30° con la horizontal, como se indica en la figura. Si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano es de 0,2, calcular: 1) La velocidad del cuerpo cuando haya descendido 50 cm a lo largo del plano. 2) La aceleración con que cae el cuerpo y la aceleración angular de la polea.



Problema X-83.



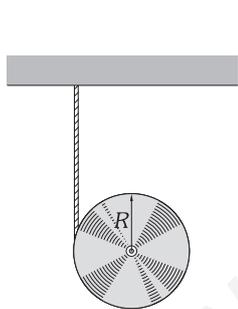
Problema X-84.

**84.** Las masas A y B de la figura son de 8 kg cada una y la polea cilíndrica tiene un radio de 20 cm. El coeficiente de rozamiento entre A y el plano, inclinado 37° respecto a la horizontal, es de 0,25. Se abandona el sistema a sí mismo partiendo del reposo y se mide un desplazamiento de las masas de 1,8 m en 2 s. 1) Calcular la masa de la polea. 2) Calcular las tensiones en los dos ramales de la cuerda.

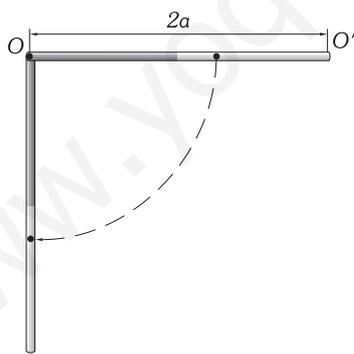
**85.** Enrollamos una cuerda a un cilindro macizo y homogéneo de 10 kg y el otro extremo del cordón se fija al techo, como indica la figura. Soltamos el sistema partiendo del reposo, de forma que al caer la cuerda va desarrollándose, calcular: 1) La velocidad del CM del cilindro cuando haya descendido 2 m. 2) La aceleración del CM durante la caída. 3) La tensión de la cuerda.

**86.** Una varilla homogénea de 1 m de longitud puede girar en torno a un eje horizontal que pasa por uno de sus extremos. La desplazamos de su posición de equilibrio estable y la colocamos vertical, de forma que el eje de giro esté en el punto más bajo del sistema. La varilla cae girando, espontáneamente. Calcular: 1) La velocidad de su extremo libre al pasar por la posición de equilibrio estable. 2) La velocidad de su extremo libre al pasar la varilla por su posición horizontal. 3) Hallar un fórmula general de la velocidad de su extremo libre y aceleraciones angular, tangencial, normal y resultante, en función de su longitud l, de g y del ángulo descrito desde su posición inicial.

**87.** Construimos una barra de 2 m de longitud, mitad de un material de masa  $M_1 = 1$  kg y la otra mitad de otro de masa  $M_2 = 2$  kg. Pongamos un eje en un extremo y se deja que caiga desde la posición horizontal como indicamos en la figura; hacemos lo mismo colgándola del otro extremo. Calcular la velocidad angular del sistema en ambos casos cuando pasa por la posición de equilibrio.



Problema X-85.



Problema X-87.

**88.** La varilla, de masa M y longitud l, comienza a deslizar desde la posición vertical como se indica en la figura. Si no presenta rozamiento con la pared ni con el suelo, cuando choque con éste, calcular qué parte de su energía cinética corresponde al movimiento del centro de masas y qué parte es interna.

**89.** Una varilla homogénea, de masa M y longitud 2l, lleva en sus extremos dos pequeñas anillas mediante las cuales se engarza en un aro de radio R ( $R > l$ ), colocado verticalmente. Si la varilla parte sin velocidad inicial de su posición de equilibrio inestable como se indica en la figura, calcular la velocidad de su centro al pasar por la posición de equilibrio estable.

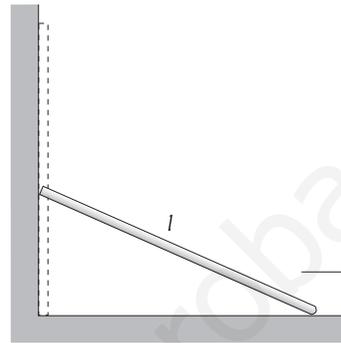
**90.** Una varilla delgada y homogénea, de masa  $M_1$  y longitud 2R puede deslizar sin rozamiento por el interior del aro de masa  $M_2$  y radio R. En un instante dado la posición es la de la figura, con una velocidad angular  $\omega_0$ . Si la varilla gira sobre su centro hasta ponerse horizontal: 1) ¿Cuál será la velocidad angular del sistema? 2) ¿Cuál es la variación

de energía cinética del sistema? Considerar en esta segunda cuestión:  $M_1 = M_2 = 2$  kg,  $R = 0,5$  m,  $\omega_0 = 10$  rad/s.

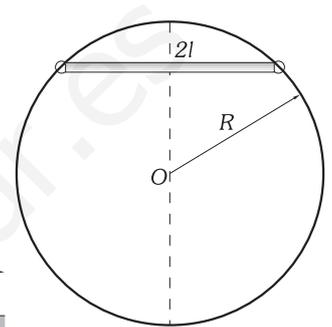
**91.** Un cilindro macizo de 100 kg y 60 cm de radio rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal con velocidad de traslación de 1 m/s. Calcular: 1) Su energía cinética de traslación. 2) Su energía cinética de rotación. 3) La altura a que podría subir por un plano inclinado.

**92.** Calcular por energías las características del movimiento de un cilindro macizo de radio r que baja rodando, sin deslizar, a lo largo de un plano inclinado, conservando su eje horizontal. (Se supone que no existen rozamientos por rodadura.)

**93.** A lo largo de un plano inclinado de longitud 1 m y que forma un ángulo de 30° con la horizontal cae rodando (sin deslizamiento) una esfera homogénea de radio r y de masa 500 g. Inició la caída partiendo del reposo. ¿Cuánto vale su velocidad final? ¿Y su energía cinética?

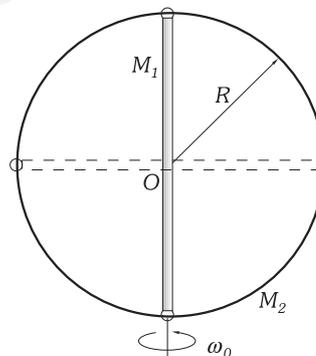


Problema X-88.

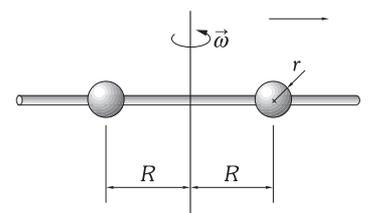


Problema X-89.

**94.** Un cilindro de 8 kg de peso y de 0,15 m de radio rueda, sin deslizamiento, por un plano inclinado que forma con la horizontal un ángulo de 30°. Se trata de calcular: 1) El momento de inercia respecto al punto de contacto con el plano. 2) La aceleración lineal del CM en el movimiento a lo largo del plano. 3) La longitud del plano inclinado recorrido en 4 s.



Problema X-90.



Problema X-99.

**95.** Un cilindro de masa 2 kg y radio 5 cm rueda sin deslizamiento por un plano inclinado 30°. Suponiendo que el cilindro partió del reposo, determinar: 1) Su velocidad, después de haber rodado 3 m por el plano inclinado, suponiendo el cilindro macizo. 2) Suponiendo el cilindro hueco y su masa uniformemente distribuida por la periferia, determinar su velocidad después de haber recorrido 3 m del plano. 3) En ambos casos determinar en tiempo que ha tardado en recorrer los 3 m.

**96.** Calcular la aceleración de caída por un plano inclinado un ángulo 30° de dos conos rectos iguales, unidos por sus vértices; el sistema rueda sin deslizar.

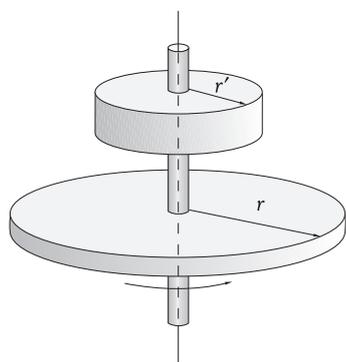
**97.** Desde el punto más alto de una esfera de radio R se deja que caiga rodando y sin deslizar una bola maciza y homogénea de radio r. Determinar la velocidad angular de la bola en el momento de separarse de la esfera.

**98.** Una esfera rueda sin deslizar por un plano horizontal con velocidad v, y empieza a subir por un plano inclinado. 1) ¿Alcanzará la misma altura vertical si el plano es rugoso, y sube rodando sin deslizar, que si el plano es perfectamente liso? 2) En este segundo caso, cuando vuelva al plano horizontal y alcance la rodadura sin deslizamiento, ¿tendrá

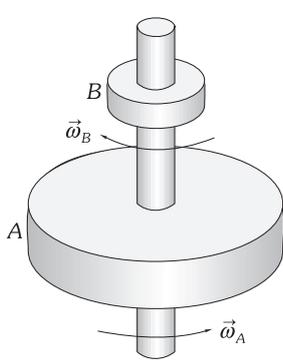
una velocidad igual o distinta de la inicial? 3) ¿Cuál es la velocidad final de la esfera?

**99.** Dos esferas de masa  $M = 6 \text{ kg}$  y radio  $r = 20 \text{ cm}$  están montadas como indica la figura y pueden deslizar a lo largo de la barra muy delgada y homogénea de masa  $M' = 2 \text{ kg}$  y longitud  $L = 2 \text{ m}$ . El conjunto gira libremente con una frecuencia  $\nu_0 = 120 \text{ rpm}$  respecto a un eje vertical que pasa por el centro del sistema. Inicialmente las esferas se encuentran fijadas mediante fiadores a una distancia  $R = 50 \text{ cm}$  del eje de giro; se sueltan los fiadores y las esferas deslizan por la barra hasta que salen por los extremos, calcular: 1) La frecuencia con que gira el sistema cuando los centros de las esferas se encuentran en los extremos. 2) La energía cinética del sistema en cada uno de los casos.

**100.** Un disco homogéneo que puede girar alrededor de un eje vertical pasa del reposo a  $90 \text{ rpm}$  en  $10 \text{ s}$ . Su peso son  $25 \text{ kg}$  y el diámetro  $1 \text{ m}$ , calcular: 1) Fuerza constante capaz de producir dicho movimiento aplicada en la periferia durante los  $10 \text{ s}$ . 2) Energía cinética del disco cuando gira a  $90 \text{ rpm}$ . 3) Cuando va girando a dicha velocidad se acopla a él otro disco coaxial de  $50 \text{ kg}$  de peso y  $50 \text{ cm}$  de diámetro. Calcular la velocidad angular del conjunto formado por ambos (ver figura).



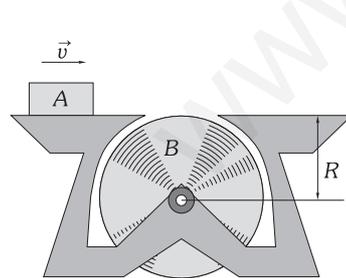
Problema X-100.



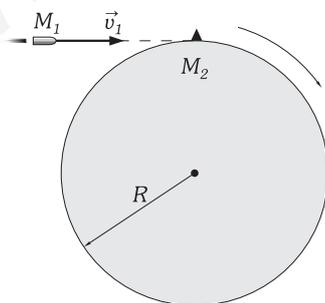
Problema X-101.

**101.** El disco A de la figura gira con una velocidad angular  $\omega_A$ . El disco B, que tiene un momento de inercia tres veces menor que el de A, gira con una velocidad angular  $\omega_B$  en sentido contrario al A y dos veces mayor en módulo que  $\omega_B$ . Se deja caer el disco B sobre el A y en el acoplamiento se producen  $315 \text{ kgm}$  de calor. Calcular las energías cinéticas iniciales de ambos discos.

**102.** El bloque A de la figura, de masa  $M_1 = 5 \text{ kg}$ , posee una velocidad  $v = 4 \text{ m/s}$  sobre una mesa horizontal lisa. El cilindro, de masa  $M_2 = 10 \text{ kg}$  y radio  $R$ , está inicialmente en reposo y puede girar sin rozamiento en torno a su eje. Cuando el extremo izquierdo de A abandona el cilindro no hay deslizamiento entre ambos. Calcular el trabajo de las fuerzas de rozamiento existentes entre A y B.



Problema X-102.

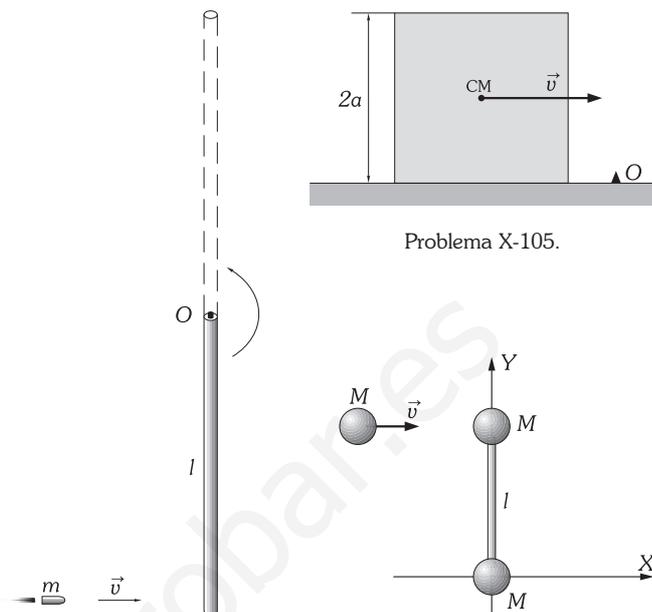


Problema X-103.

**103.** Una bala de masa  $M_1$  y velocidad horizontal  $v_1$  choca con un pequeño diente situado en la periferia de un volante de masa  $M_2$  y radio  $R$ , como se indica en la figura. Suponiendo la bala como una masa puntual, que el volante es cilíndrico, macizo y homogéneo (no se tiene en cuenta el pequeño diente) y que el choque es perfectamente elástico, realizándose en la periferia del volante, averiguar la velocidad de la bala y la angular adquirida por la rueda después del choque. ( $M_2 = 1 \text{ kg}$ ;  $M_1 = 100 \text{ g}$ ;  $R = 10 \text{ cm}$ ;  $v_1 = 100 \text{ m/s}$ .)

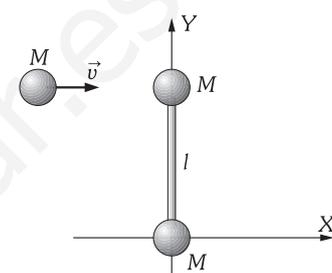
**104.**Cuál es la mínima velocidad que tiene que llevar el proyectil de masa  $m$ , de la figura, para que al chocar e incrustarse en el extremo

inferior de una barra homogénea, de longitud  $l$  y masa  $M$ , que se encuentra atravesada por el otro extremo por un eje, ésta dé una vuelta completa alrededor de dicho eje, después del impacto.



Problema X-104.

Problema X-105.



Problema X-106.

**105.** El cubo de la figura, de arista  $2a$ , resbala con una velocidad  $v$  sobre una superficie horizontal cuando tropieza con un pequeño obstáculo. Determinar: 1) El momento de inercia del cubo respecto de una arista, sabiendo que con respecto a un eje de simetría, perpendicular a las caras, es  $MI^2/6$ . 2) La velocidad del centro de masa justamente después del choque. 3) El valor mínimo de  $v$  para que el cubo vuelque.

**106.** El choque esquematizado en la figura es totalmente inelástico y se realiza sobre una mesa horizontal lisa. Las dos masas situadas inicialmente en el eje Y están rígidamente unidas por una varilla de masa despreciable. 1) Describir el movimiento del sistema después de la colisión. 2) Calcular la variación de energía cinética en el choque.

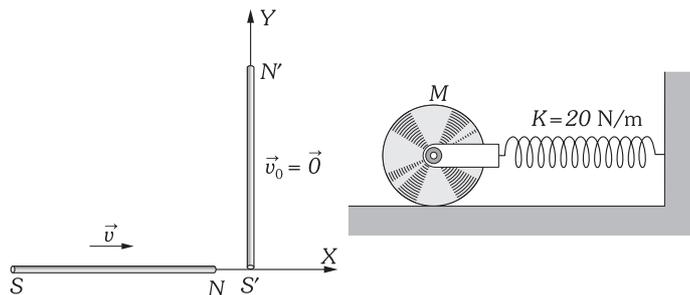
**107.** En el problema anterior se sustituyen las dos masas inicialmente quietas, por una varilla de longitud  $l$ , masa  $2M$ , en reposo sobre el eje Y con un extremo en el origen. Resolver las mismas cuestiones que en el anterior ejercicio.

**108.** Resolver el problema anterior suponiendo que el choque es totalmente elástico.

**109.** Dos varillas imanadas, de la misma masa  $M$  y longitud  $L$ , chocan en un plano horizontal sin rozamiento como indica la figura. Después del choque se mueven acopladas como una varilla única de extremos  $NS'$  y  $SN'$ . 1) Obtener la ecuación de movimiento del extremo  $NS'$ . 2) ¿Durante qué fracción de tiempo permanece cada extremo por debajo del eje X de la figura?

**E) OSCILACIONES. PÉNDULO FÍSICO**

**110.** Un volante cuyo eje está sujeto a un muelle elástico oscila con una frecuencia de  $0,5 \text{ Hz}$ . El volante es de masa  $5 \text{ g}$  y de radio  $1 \text{ cm}$ . Determinar la constante de elasticidad del resorte.

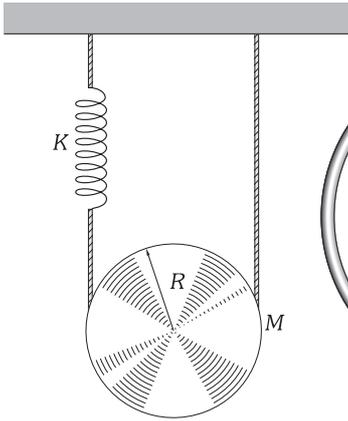


Problema X-109.

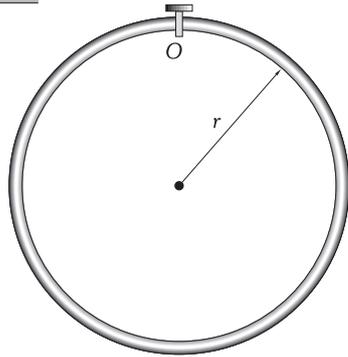
Problema X-111.

**111.** La figura nos representa un cilindro macizo de 500 g de masa, unido a un resorte horizontal sin masa y de constante recuperadora  $K = 20 \text{ N/m}$ . Soltamos el sistema en una posición en la cual el resorte está estirado 15 cm, y el cilindro rueda sin deslizar sobre la superficie horizontal. Calcular: 1) La velocidad de traslación del CM al pasar por la posición de equilibrio. 2) La expresión de la ecuación de su movimiento  $x(t)$ .

**112.** El sistema de la figura consta de una polea cilíndrica de masa  $M$  y radio  $R$ , una cuerda inextensible y sin peso, y un muelle de longitud natural  $l_0$  y constante  $K$ . Calcular el período de las pequeñas oscilaciones que se producen al separar el sistema ligeramente de su posición de equilibrio, y dejarlo en libertad.



Problema X-112.



Problema X-115.

**113.** Una delgada varilla homogénea de longitud  $L$  y masa  $M_2$  puede girar en torno a un eje fijo que pasa por uno de sus extremos. Soldado al eje hay un resorte que, al girar aquél, se comprime. Disparamos horizontalmente una bala de masa  $M_1$  que choca con la varilla, incrustándose en su extremo libre. Por efecto del choque la varilla gira un ángulo  $\varphi$ . Calcular la velocidad  $v_1$  de la bala. (Sabemos que por efecto

de un par de momento  $N$  el sistema eje-resorte gira un ángulo  $\beta$ ). ( $L = 1 \text{ m}$ ;  $M_2 = 1,2 \text{ kg}$ ;  $M_1 = 10 \text{ g}$ ;  $\varphi = 60^\circ$ ;  $N = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$ ;  $\beta = 60^\circ$ ).

**114.** Calcular el período de las oscilaciones de pequeña amplitud de una esfera de radio  $r$  que rueda sin deslizar en la parte interior e inferior de una superficie cilíndrica de radio  $R$ .

**115.** El aro de la figura, de radio  $1 \text{ m}$ , oscila con pequeña amplitud alrededor del punto  $O$ . Calcular: 1) Período de oscilación. 2) Longitud del péndulo simple equivalente.

**116.** Una varilla de  $1 \text{ m}$  de longitud pesa  $100 \text{ g}$  y oscila como un péndulo colgada de uno de los extremos; la varilla es de densidad uniforme y su sección es constante. Determinar: 1) Período de oscilación de la varilla. 2) Longitud del péndulo simple equivalente. 3) Si la varilla se separa  $30^\circ$  de su posición vertical, ¿cuál es la velocidad del extremo inferior de la varilla, al pasar por la posición vertical? No hay rozamientos.

**117.** Una barra cilíndrica de  $2 \text{ m}$  de longitud y una masa de  $1000 \text{ g}$  oscila suspendida por un eje horizontal que pasa por uno de sus extremos. Calcular: 1) Período de las oscilaciones. 2) Longitud del péndulo simple del mismo período. 3) Momento de inercia de la barra respecto a un eje paralelo al anterior, pero que atraviesa la barra a un cuarto de su longitud de su extremo superior. 4) Período de las oscilaciones si la barra está suspendida por este último eje.

**118.** Dos esferas de plomo de  $4 \text{ cm}$  de diámetro penden de un alambre rígido sin peso; el centro de la primera dista  $1 \text{ m}$  del punto de suspensión del alambre, y el de la segunda está a  $50 \text{ cm}$  del centro de la anterior y más lejos del centro de suspensión. Calcular el período de oscilación del sistema.

**119.** El péndulo de un reloj de pared está constituido por una varilla homogénea de  $1 \text{ m}$  de longitud y de masa  $M_1$  en cuyo extremo hay soldada una «lenteja» en forma de cilindro macizo y homogéneo de masa tres veces mayor que la varilla. Calcúlese el valor del radio de la «lenteja» para que el reloj de péndulo funcione con período dos segundos (tómese  $g = \pi^2 \text{ m/s}^2$ ).

**120.** Un péndulo de reloj como el del problema anterior tiene la varilla de  $1 \text{ m}$  de longitud, la masa de la lenteja es el triple de la masa de la varilla y el radio de la lenteja es de  $10 \text{ cm}$ . Si se suspende del extremo libre de la varilla, calcular la posición de centro de percusión para: 1) Oscilaciones en el plano de la lenteja. 2) Oscilaciones en un plano perpendicular al de la lenteja.

www.yoquiero.com

# CAPÍTULO XI

## EL CAMPO GRAVITATORIO

Vamos a completar el estudio del Campo Gravitatorio que iniciamos en el capítulo VI describiendo las observaciones que llevaron a Newton a enunciar su principio-ley de gravitación, el cual nos conducirá a analizar magnitudes dinámicas que explican multitud de fenómenos que ocurren en el Universo.

### XI – 1. Principio-ley de gravitación universal de Newton

Cuantificábamos en el párrafo VI-1 la interacción entre dos partículas  $m_1$  y  $m_2$ , que es inversalmente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas  $r_{21}$  (Fig. VI-1), mediante la expresión

$$\mathbf{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \mathbf{r}_{21} \quad (1)$$

el signo menos nos indica que el vector  $\mathbf{r}_{21}$  que define la posición de  $m_2$  relativa a  $m_1$  es de sentido contrario a  $\mathbf{F}_{21}$  (fuerza con que  $m_1$  atrae a  $m_2$ ). El Principio de Acción y Reacción, también enunciado por Newton y que hemos estudiado, nos lleva a la conclusión:  $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$  es decir: «La fuerza que la partícula uno ejerce sobre la dos es igual y de sentido contrario a la que la partícula dos ejerce sobre la uno».

$G$  es la constante de gravitación universal, independiente de todas las circunstancias o medio ambiente que rodee a los cuerpos que se atraen, su valor es:  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$

Más adelante, el teorema de Gauss nos permitirá demostrar que en la aplicación de la ley de gravitación universal a un cuerpo con simetría esférica, éste es sustituible por una partícula de masa igual a la del cuerpo y colocada en el centro de dicha esfera.

Si nos preguntamos: ¿De dónde sale la cuantificación de esta fuerza?; Newton llegó a la formulación de su ley basándose en una minuciosa observación de la naturaleza y la ecuación (1) es la expresión matemática de su estudio experimental, no teniendo demostración matemática alguna.

Newton razonó de la siguiente forma: observó en el tubo de vacío (párrafo III-15) que todos los cuerpos caían atraídos por la Tierra con la misma aceleración ( $9,8 \text{ m/s}^2$ ) independientemente de su masa, la única explicación lógica es que la fuerza de atracción sea directamente proporcional a la masa del cuerpo, puesto que  $F/m$  sólo queda invariable cuando esto ocurre; además los cuerpos se atraen mutuamente con fuerzas del mismo módulo y siendo éstas directamente proporcionales a la masa de cada uno de ellos, recibiendo aceleraciones que no dependen de sus masas, querrá decir que la fuerza de interacción entre ellos es directamente proporcional al producto de las masas de ambos.

Para deducir la proporcionalidad inversa de la fuerza con el cuadrado de la distancia que los separa, Newton supuso que la fuerza de atracción de la Tierra sobre los cuerpos debía ser contada desde su centro, por esta razón para pequeñas variaciones de altura sobre la superficie terrestre comparada con los 6 400 km del radio de la Tierra, la aceleración de la gravedad no varía notoriamente. Para estudiar la dependencia de la fuerza de la gravedad con la distancia, pensó que tenía que medir la aceleración de la gravedad en puntos muy alejados de la Tierra, siéndole imposible en aquellos tiempos trasladarse a miles de kilómetros sobre la superficie de la Tierra para hacer esta medición, pensó en la trayectoria circular que posee la Luna alrededor de la Tierra y en que la aceleración centrípeta (normal) de aquella es igual a la aceleración de la gravedad terrestre. Conoció la distancia Tierra-Luna, que es  $d = 384\,000 \text{ km} \approx 60 R_0$ , siendo  $R_0$  el radio de la Tierra y sabía también que la Luna da 1 vuelta en  $T = 27,3 \text{ d}$  alrededor de la Tierra, con lo que dedujo:  $g = a = 4 \pi^2 d / T^2 = 2,7 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$  y como  $g_0/g = 9,8/2,7 \times 10^{-3} \approx 3\,600 = 60^2$  sacó en consecuencia que al aumentar 60 veces la distancia entre los cuerpos que se atraen, se produce una aceleración  $60^2$  veces menor, pudiendo concluir que la aceleración comunicada a los cuerpos por la fuerza de gravitación universal y por tanto, la propia fuerza, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre los cuerpos en interacción.

Para la obtención del valor de la constante de gravitación universal  $G$  se han realizado muchos experimentos; uno de ellos, que tiene su importancia histórica, fue el de Cavendish que consiste en tomar dos bolitas metálicas ( $A$  y  $B$ ) de masa  $m$  (Fig. XI-2), y colocarlas en los extremos de una varilla muy ligera de longitud  $l$ , colgada por su centro  $O$ , de un hilo de cuarzo resistente a la torsión. Colocamos delante y detrás de ellas sendas bolas de plomo ( $C$  y  $D$ ) de gran masa  $M$ , que

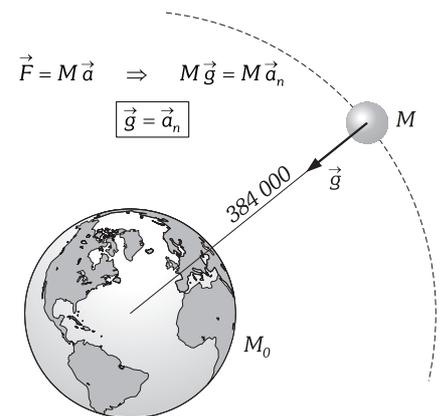


Fig. XI-1.— Esquema para la medida de  $g$  terrestre en la Luna.

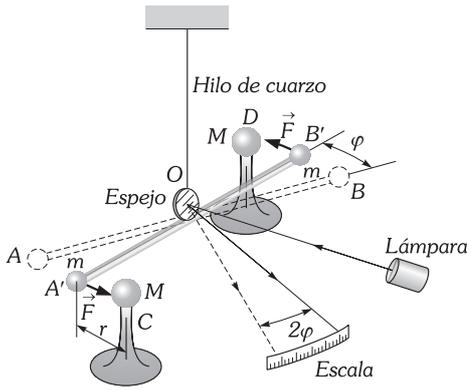


Fig. XI-2.- Experiencia de Cavendish.

atraerán a las bolitas A y B con una fuerza F dada por la ley de gravitación de Newton. Se habrá formado un par de fuerzas y la varilla AOB girará un ángulo  $\varphi$ , consiguiéndose el equilibrio cuando el momento del par de fuerzas que actúa sobre la varilla, sea igual al momento del par de torsión del hilo ( $C\varphi$ ), siendo C la constante de torsión del hilo de cuarzo, constante característica de él.

Suponiendo que en la posición de equilibrio de la varilla ( $A'OB'$ ) las fuerzas son perpendiculares a ella, y que las distancias entre los centros de A' y C y de B' y D son iguales, e iguales a r, se habrá de verificar:  $C\varphi = Fl = GMml/r^2$ .

De la anterior ecuación obtenemos el valor de G en función de magnitudes conocidas:

$$G = \frac{C\varphi r^2}{Mml}$$

resultando para valor de G, el expresado anteriormente.

**PROBLEMAS: 1 al 5.**

**XI - 2. Intensidad del campo gravitatorio creado por una partícula. Principio de superposición**

La fuerza de gravitación es una fuerza central y podemos decir que por el hecho de «estar», una partícula de masa m, crea a su alrededor un campo de fuerzas centrales; y al colocar la masa m' (magnitud escalar testigo) en puntos A, B, C... sobre ella actúan fuerzas dirigidas hacia el punto en que se encuentra m (Fig. XI-3).

«INTENSIDAD DEL CAMPO GRAVITATORIO EN UN PUNTO es la fuerza que actúa sobre la unidad de masa colocada en el punto».

Si tenemos en cuenta que  $\mathbf{F}(P) = -Gmm' \mathbf{u}_r/r^2 = -Gmm' \mathbf{r}/r^3$  su valor será:

$$\mathbf{g}(P) = \frac{\mathbf{F}}{m'} = -G \frac{m}{r^2} \mathbf{u}_r = -G \frac{m}{r^3} \mathbf{r} \quad \text{con } \mathbf{u}_r = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2)$$

¿Cuál será el campo producido por dos partículas  $m_1$  y  $m_2$  en un punto P? Para determinarlo tomamos una masa de prueba  $m_3$  y la colocamos en P en presencia de  $m_1$  y  $m_2$ , la fuerza que actuará sobre  $m_3$  será (Fig. XI-4):  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32}$  por tanto el campo en P será:

$$\mathbf{g}(P) = \frac{\mathbf{F}}{m_3} = \frac{\mathbf{F}_{31}}{m_3} + \frac{\mathbf{F}_{32}}{m_3} = -\frac{Gm_1}{r_{31}^3} \mathbf{r}_{31} - \frac{Gm_2}{r_{32}^3} \mathbf{r}_{32} = \mathbf{g}_1(P) + \mathbf{g}_2(P)$$

es decir, el «campo resultante» es la suma vectorial de los campos que producirían las masas como si estuviesen solas. Este resultado se puede generalizar y constituye el PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN.

«El campo creado por un sistema de masas puntuales es la suma de los campos que producirían cada una de las partículas separadamente».

$$\mathbf{g} = \sum \mathbf{g}_i = -G \sum \frac{m_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i$$

La intensidad de la gravedad (fuerza/masa) se mide en dyn/g (CGS), en N/kg (SI) y kp/utm (TÉCNICO). Su ecuación de dimensiones:  $[g] = [F]/[M] = MLT^{-2}/M = LT^{-2}$  coincidiendo con la ecuación de dimensiones de una aceleración, razón por la que la llamamos ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD.

**XI - 3. Expresión general de la intensidad del campo gravitatorio en un punto debido a una distribución discreta y continua de masas calculado en función de éstas**

El valor para la intensidad del campo calculado en el párrafo anterior corresponde a una distribución discreta, si éste está creado además por una distribución continua, habrá que sumarle la contribución debida a ésta última.

La distribución continua vendrá definida por una densidad volumétrica de masa:

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{dm}{dv} \Rightarrow dm = \rho(\mathbf{r}) dv \Rightarrow m = \int_V \rho(\mathbf{r}) dv$$

cada dm puede ser considerada como una partícula, la suma (integral) de todas las contribuciones de todos los elementos de masa nos dará el valor del campo en P debido a la distribución volumétrica. Con lo que el campo total será:

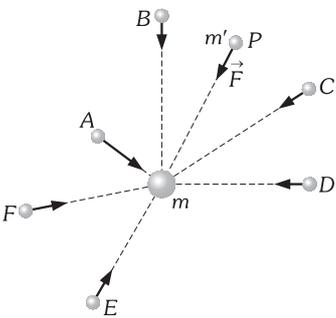


Fig. XI-3.- Una partícula de masa m crea a su alrededor un campo de fuerzas centrales.

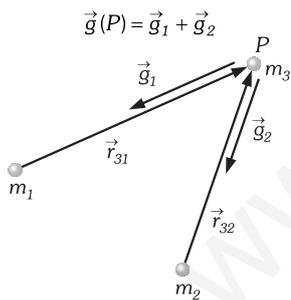


Fig. XI-4.- Principio de superposición para dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$

$$\mathbf{g}(P) = -G \sum \frac{m_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i - G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r})}{r^3} dV \mathbf{r} \tag{3}$$

**XI - 4. Intensidad del campo gravitatorio terrestre**

«INTENSIDAD DEL CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE EN UN PUNTO es la fuerza con que la Tierra atrae a la unidad de masa, colocada en el punto».

Considerando la Tierra como una esfera, el valor de la intensidad del campo gravitatorio terrestre ( $\mathbf{g}$ ), teniendo en cuenta únicamente la atracción gravitatoria, para cualquier punto exterior a ella y que se encuentra a una distancia  $r$  de su centro, será:  $g = GM_0/r^2$ , en la que  $M_0$  es la masa de la Tierra. Si consideramos un lugar de la superficie terrestre,  $r$  es el radio de la Tierra. La intensidad del campo gravitatorio terrestre ( $M_0 = \text{constante}$ ,  $G = \text{constante}$ ) varía con  $r$ : a grandes alturas sobre la Tierra corresponde menor  $g$ , y a la inversa. La expresión vectorial de la intensidad del campo gravitatorio es:

$$\mathbf{g} = -G \frac{M_0}{r^3} \mathbf{r}$$

el signo menos nos indica que el vector  $\mathbf{r}$  que nos define la posición del centro de gravedad de la unidad de masa relativa al centro de gravedad de la Tierra es de sentido contrario a  $\mathbf{g}$ ; teniendo este vector la dirección y el sentido hacia el centro de la Tierra.

Llamando  $R_0$  al radio terrestre, el valor de la intensidad de la gravedad ( $\mathbf{g}_0$ ) en la superficie de la Tierra será:

$$\mathbf{g}_0 = -G \frac{M_0}{R_0^3} \mathbf{R}_0$$

Esta determinación de  $g$  siguiendo la ley de gravitación es la aceleración que se mediría en un sistema de ejes de referencia cuyo centro estuviera en el centro de la Tierra y que no girasen con ella.

En general, la intensidad de la gravedad o fuerza que actúa sobre la unidad de masa en el espacio que nos rodea, medida desde una posición solidaria a la superficie terrestre, no es solamente la correspondiente al fenómeno de gravitación; existe además la fuerza centrífuga cuyo valor sobre la masa unidad es  $\omega^2 \mathbf{R}$  ( $\omega = \text{velocidad angular de la Tierra} = 2\pi/86\,400 \text{ rad/s}$ ;  $R$ , radio del movimiento de rotación del lugar considerado en la Tierra); esta fuerza, de la dirección del radio del paralelo ( $R$ ) y de sentido hacia el exterior de la Tierra (Fig. XI-5), compuesta con la atracción gravitatoria sobre la unidad de masa ( $\mathbf{g}_0$ ) nos da la intensidad real de la gravedad:

$$\mathbf{g} = -G \frac{M_0}{R_0^3} \mathbf{R}_0 + \omega^2 \mathbf{R}$$

La dirección de  $\mathbf{g}$ , no es en general hacia el centro de la Tierra (aunque pase por puntos muy próximos a tal centro); en los polos y ecuador la dirección de  $\mathbf{g}$  es la del radio terrestre. En los polos la intensidad real de la gravedad se confunde con la intensidad del campo gravitatorio ( $\mathbf{g}_0$ ) ya que no existe fuerza centrífuga, por ser el radio nulo. En el ecuador  $\mathbf{g}_0$  y  $\omega^2 \mathbf{R}$  son de la misma dirección y sentido contrario, restándose sus módulos. La acción de la fuerza centrífuga disminuye del ecuador a los polos, siendo considerable únicamente en trabajos que necesiten de una gran precisión; su máximo valor, en el ecuador, influye en 0,3% del calculado aplicando la ley de gravitación.

Considerando además del efecto de rotación de la Tierra su forma elipsoidal, el valor de precisión, para un punto cualquiera de su superficie y con sistema de referencia en el centro de la Tierra, fue expresado en 1980 por la Fórmula Internacional de la Gravedad:

$$g = 9,780\,327 (1 + 5,279 \times 10^{-3} \text{sen}^2\varphi + 2,3 \times 10^{-5} \text{sen}^4\varphi \dots)$$

donde  $\varphi$  es la latitud del lugar y  $g$  está expresado en el SI ( $\text{m/s}^2$ ).

Además influyen otros factores en el cálculo de la intensidad real de la gravedad, en pequeña cuantía pero detectables, tales como la presencia de la Luna, anomalías locales... etc.

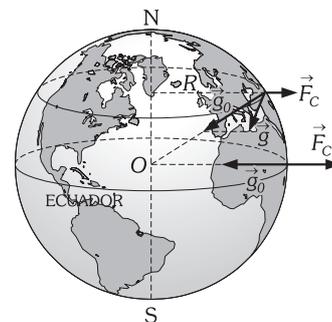


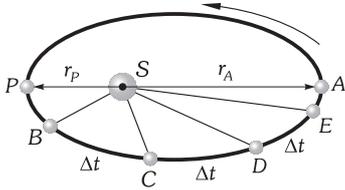
Fig. XI-5.- Influencia de la fuerza centrífuga en la intensidad del campo gravitatorio terrestre.

DATOS TERRESTRES, SOLARES Y LUNARES EN EL SI

	TIERRA	SOL	LUNA
Masa	$5,98 \times 10^{24}$	$1,99 \times 10^{30}$	$7,35 \times 10^{22}$
Radio ecuatorial	$6,378 \times 10^6$	-	-
Radio polar	$6,357 \times 10^6$	-	-
Radio de una esfera del mismo volumen	$6,37 \times 10^6$	$6,96 \times 10^8$	$1,738 \times 10^6$
Densidad promedio	5 522	1 408	3 342

DATOS TERRESTRES, SOLARES Y LUNARES EN EL SI (continuación)

	TIERRA	SOL	LUNA
Aceleración de la gravedad	9,806 65	274	1,623
Velocidad orbital promedio	29 770	-	-
Velocidad angular	$7,29 \times 10^{-5}$	-	-
Distancia Tierra-Luna	$3,84 \times 10^5$	-	-



DATOS TERRESTRES

$$r_p = 1,471 \times 10^8 \text{ km}$$

$$r_A = 1,521 \times 10^8 \text{ km}$$

Fig. XI-6.— Si las áreas BSC, CSD, DSE, etc, son iguales, los tiempos para pasar el centro del planeta, de B a C, de C a D, de D a E etc, también son iguales. El punto P en que el planeta está más próximo al Sol lo llamamos Perihelio, y el punto A el más alejado Afelio.

### XI - 5. Leyes de Kepler

Johannes Kepler (1571-1630) recopilando resultados obtenidos de la observación da las siguientes leyes empíricas:

- 1ª. Los planetas describen órbitas planas y elípticas, en uno de cuyos focos está el Sol.
- 2ª. Las áreas barridas por el radio vector que parte del centro del Sol son directamente proporcionales a los tiempos empleados en barrerlas.

Si las áreas BSC, CSD, DSE, etc., son iguales, (Fig. XI-6) los tiempos para pasar el centro del planeta de B a C, de C a D, de D a E, etc., también son iguales.

El movimiento del centro de masa de los planetas alrededor del Sol tiene velocidad areolar constante, por estar producido por una fuerza central cuya dirección pasa, en todo momento, por el centro de masa del Sol. La velocidad tangencial y la angular no son constantes, ya que los arcos y los ángulos descritos en el mismo tiempo, no son iguales.

- 3ª. Los cuadrados de los períodos son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores.

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{r'^3}{T'^2} = \dots = \text{constante} = f(M)$$

Esta constante es independiente de la masa del planeta atraído (cualquiera que sea su masa se cumple la ecuación anterior) pudiendo depender únicamente de la masa del Sol (M).

El año solar en los planetas más alejados del Sol que la Tierra (Marte, Júpiter, etc.) es más largo que nuestro año solar (3ª ley); en los más cercanos (Mercurio y Venus) ocurre lo contrario.

Tanto la ley de gravitación universal como las leyes de Kepler fueron enunciadas como postulados; sin embargo las leyes de Kepler son deducibles a partir de los estudios que hemos realizados de mecánica y la ley de gravitación, o a la inversa. En efecto:

Consideremos dos partículas (o dos cuerpos esféricos, o dos estrellas formando un sistema, que en Astronomía denominamos «Sistema Estelar Binario») que se mueven en órbitas circulares por la acción gravitacional mutua (Fig. XI-7) y supongamos que no actúa sobre ellas ninguna fuerza externa, entonces el CM no posee aceleración alguna, encontrándose en la línea que las une; tomando al CM como origen de referencia y llamando R y r a los radios de las órbitas de las partículas mayor (M) y menor (m) respectivamente, se tendrá que verificar:  $MR = mr$ . Para que ambas partículas se muevan en órbitas circulares tendrá que verificarse que la fuerza gravitacional que actúa sobre cada una de ellas les suministre la aceleración centrípeta necesaria para ello; con esto las fuerzas centrípetas que experimentan ambas partículas son iguales en módulo por ser las de interacción gravitatoria, es decir:

$$\left. \begin{aligned} M \omega^2 R &= m \omega'^2 r \\ MR &= mr \end{aligned} \right| \Rightarrow \omega = \omega'$$

con lo que «ambas partículas se mueven con la misma velocidad angular alrededor del centro de masa». Siendo la fuerza gravitacional de valor:  $GMm / (R + r)^2$ , la condición para que se muevan en órbitas circulares es:

$$F = ma \Rightarrow G \frac{Mm}{(R + r)^2} = m \omega^2 r$$

Aplicando esta última ecuación al sistema solar, teniendo en cuenta que la fuerza entre los planetas la podemos despreciar en primera aproximación y que si  $M \gg m$  (M: masa del Sol, y m: la masa de un planeta cualquiera) R será muchísimo menor que r, pudiéndose despreciar, entonces:

$$GM = \frac{4\pi^2}{T^2} r^3 \tag{4}$$

de la que se deduce la 3ª ley de Kepler:  $\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$

en esta expresión no aparece la masa del planeta, siendo  $GM/4\pi^2$  una constante que, tomando el mismo valor para todos los planetas, depende de la masa del Sol.

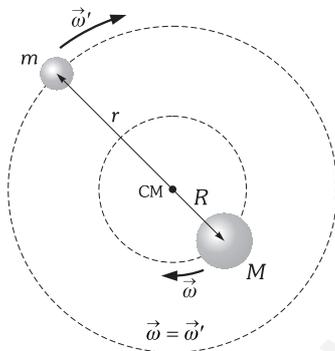


Fig. XI-7.— Si dos partículas (o cuerpos esféricos) se mueven en órbitas circulares bajo la influencia única de la atracción gravitacional mutua, entonces ambas tienen la misma velocidad angular.

La expresión (4) es la ecuación básica del movimiento de los planetas y es también válida para las órbitas elípticas sin más que sustituir  $r$  por el valor del semieje mayor de la elipse.

El recíproco, es decir, la deducción de la ley de gravitación universal basándonos en la tercera ley de Kepler es: consideremos, en primera aproximación, la trayectoria del centro de un planeta como circular. La fuerza de atracción que el Sol ejerce sobre el planeta es la *fuerza centrípeta*, cuyo valor en el movimiento circular uniforme es:

$$F = m \frac{4\pi^2}{T^2} r \tag{5}$$

[ $m$  = masa del planeta;  $r$  = distancia entre el centro del Sol y el del planeta;  $T$  = período de revolución]. La tercera ley de Kepler indica:  $r^3/T^2 = cte = f(M) \Leftrightarrow r/T^2 = f(M)/r^2$ , siendo  $M$  la masa del sol; sustituida en (5) da:

$$F = 4\pi^2 f(M) \frac{m}{r^2} \tag{6}$$

La fuerza de atracción que ejerce el planeta sobre el Sol, habrá de ser igual y de signo contrario a la anterior (ley de acción y reacción) y su valor habrá de tener la misma forma que la expresada en la ecuación anterior:

$$F = 4\pi^2 f(m) \frac{M}{r^2}$$

igualando:  $4\pi^2 m f(M) = 4\pi^2 M f(m) \Leftrightarrow \frac{4\pi^2 f(m)}{m} = \frac{4\pi^2 f(M)}{M} = G$

Ecuación que se ha de cumplir cualquiera que sea el astro que atrae (Sol) y el planeta atraído, siendo por tanto,  $G$  una *constante universal*. De la ecuación anterior obtenemos:  $4\pi^2 f(M) = GM$ , que sustituida en la (6) nos da:

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \tag{c.d.q.}$$

Hemos demostrado en el párrafo V-19, que en el movimiento bajo la acción de fuerzas centrales, y por lo tanto bajo la acción de fuerzas gravitacionales:

- 1º Las trayectorias seguidas por los cuerpos sometidos a fuerzas gravitacionales son planas (1.ª ley de Kepler)\*
- 2º En los movimientos producidos por fuerzas gravitacionales la velocidad areolar es constante (2.ª ley de Kepler).

**PROBLEMAS: 6 al 24.**

EL SISTEMA SOLAR

	MERCURIO	VENUS	TIERRA	MARTE	JÚPITER	SATURNO	URANO	NEPTUNO	PLUTÓN
Distancia máxima al Sol ( $10^6$ km)	69,7	109	152,1	249,1	815,7	1 507	3 004	4 537	7 375
Distancia mínima al Sol ( $10^6$ km)	45,9	107,4	147,1	206,7	740,9	1 347	2 735	4 456	4 425
Distancia promedio al Sol ( $10^6$ km)	57,9	108,2	149,6	227,9	778,3	1 427	2 869,6	4 496,6	5 900
Período de revolución	88d	224,7d	365,26d	687d	11,86a	29,46a	84,01a	164,8a	247,7a
Período de rotación**	58d 15,5h	-243d	23h 56min 4s	24h 37min 30s	9h 50min 30s	10h 16min	-15h 34min 12s	18h 25min 55s	6d 9h
Velocidad orbital (km/s)	47,9	35	29,8	24,1	13,1	9,6	6,8	5,4	4,7
Excentricidad de su órbita	0,206	0,007	0,017	0,093	0,048	0,056	0,047	0,009	0,25
Diámetro ecuatorial (km)	4 880	12 104	12 756	6 794	142 800	120 000	50 800	48 600	3 000
Masa (de la Tierra = 1)	0,055	0,815	1	0,107	317,9	95,2	14,6	17,2	-
Volumen (de la Tierra = 1)	0,06	0,88	1	0,15	1 316	755	67	57	-
Densidad ( $g/cm^3$ )	5,43	5,24	5,52	3,93	1,3	0,7	1,31	1,74	-
Gravedad superficial (de la Tierra = 1)	0,37	0,88	1	0,38	2,64	1,15	1,17	1,18	-
Satélites conocidos	0	0	1	2	16	17	5	2	1

\* Que «los planetas describen órbitas elípticas en uno de cuyos focos está el Sol» se verá en el párrafo XI-12.  
 \*\* El signo menos nos indica un giro en sentido contrario al terrestre (retrogrado).

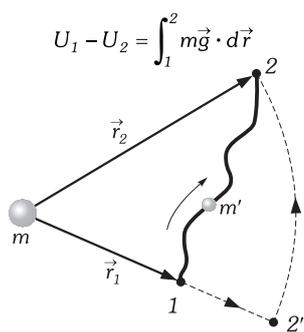


Fig. XI-8.- En la trayectoria de 1 a 2'  $\mathbf{r}$  y  $d\mathbf{r}$  tienen la misma dirección. En la 2' a 2, la fuerza central y  $d\mathbf{r}$  son perpendiculares.

**XI - 6. Energía potencial en el campo gravitatorio creado por una partícula. Generalización a cualquier distribución**

Hemos visto que el campo gravitatorio producido por una partícula de masa  $m$  es central y su módulo varía únicamente con la distancia (tiene simetría esférica), se trata por tanto de un campo conservativo. Por ello, a una partícula de masa  $m'$  situada en el campo de  $m$ , podemos asignarle una energía potencial, cuya diferencia entre dos puntos del campo calculamos de la forma siguiente:

$$U_1 - U_2 = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 -G \frac{mm'}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \Leftrightarrow U_2 - U_1 = \int_1^2 G \frac{mm'}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$$

pero al ser este valor de la integral independiente de la trayectoria a seguir, y teniendo en cuenta la Fig. XI-8, nos queda:

$$U_2 - U_1 = \int_1^{2'} G \frac{mm'}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} + \int_{2'}^2 G \frac{mm'}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$$

la segunda integral es nula, ya que la  $\mathbf{F}$  y  $d\mathbf{r}$  son perpendiculares, y en la primera podemos quitar la notación vectorial por tener  $\mathbf{r}$  y  $d\mathbf{r}$  la misma dirección; luego:

$$U_2 - U_1 = \int_1^{2'} G \frac{mm'}{r^2} dr = Gmm' \left[ -\frac{1}{r} \right]_1^{2'}$$

al ser en módulo  $r_2 = r'_{2'}$ , obtenemos:

$$U_2 - U_1 = Gmm' \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]$$

expresión que nos mide: *el trabajo realizado para trasladar la partícula de masa  $m'$  del punto 1 al punto 2 en presencia de  $m$ .*

Para asignarle un valor único a la energía potencial de  $m'$  en cada punto del campo, elegimos un punto arbitrario en el que consideramos la energía potencial nula. El convenio que se utiliza normalmente es el de tomar  $U = 0$  en  $r = \infty$ , con lo que la energía potencial de interacción gravitatoria de las masas  $m$  y  $m'$  a distancia  $r$ , es:

$$U_2 = -G \frac{mm'}{r}$$

expresión que nos mide el trabajo que hay que realizar para trasladar una partícula de masa  $m'$  desde el infinito hasta el punto, en presencia de  $m$ . El signo menos nos indica que en un punto del espacio la energía potencial es menor que en el infinito.

Teniendo en cuenta que las contribuciones de energía potencial se suman escalarmente podemos decir que: «La energía potencial» de una masa puntual  $m'$  colocada en un punto del campo gravitatorio debido a encontrarse en presencia de un sistema discreto de masas puntuales es (Fig. XI-9)

$$U(P) = -Gm' \sum \frac{m_i}{r_i} \tag{7}$$

La energía potencial de una masa puntual  $m'$  colocada en un punto del campo gravitatorio debida a una distribución volumétrica continua (Fig. XI-10) la podemos escribir como una generalización de la expresión anterior. Tendríamos que calcularla sumando (integral) las contribuciones de energía potencial de cada uno de los elementos de volumen que compongan la distribución, cuya masa es:  $dm = \rho dv$ , ( $\rho$ : la densidad volumétrica que existe en el punto ocupado por  $dv$ ) y la contribución a la energía potencial de  $m'$  en  $P$  debida a estos elementos sería:

$$U(P) = -Gm' \int_V \frac{\rho(\mathbf{r})}{r} dv \tag{8}$$

**XI - 7. Energía potencial en el campo gravitatorio terrestre**

Considerando la Tierra como una esfera homogénea, podemos utilizar los resultados obtenidos en los párrafos anteriores, y suponiendo su masa  $M_0$  concentrada en su centro, y por tanto, la intensidad de la gravedad en un punto a una distancia  $r$  de dicho centro y fuera de ella, es en módulo:

$$g = G \frac{M_0}{r^2} \tag{9}$$

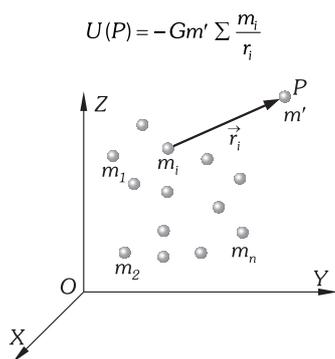


Fig. XI-9.- Partícula  $m'$  sometida a la acción de una distribución discreta de masas.

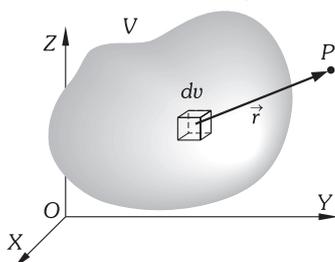


Fig. XI-10.- Distribución volumétrica continua.

Para un cuerpo de masa  $m$  mucho menor que la masa de la Tierra y que trasladamos de un punto 1 a otro 2 en presencia de ella (Fig. XI-11), podemos obtener la diferencia de energía potencial entre dichos dos puntos de la misma forma y con las mismas consideraciones hechas en el párrafo anterior, llegando a que:

$$U_2 - U_1 = GM_0m \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] = m(g_1 r_1 - g_2 r_2) \quad (10)$$

expresión que nos mide «el trabajo realizado para subir un cuerpo a una altura,  $h = r_2 - r_1$  en el campo gravitatorio terrestre».

Si convenimos en que sea cero la energía potencial en el infinito (fuera de la atracción terrestre), tomando a 2 como el punto del infinito ( $U_2 = 0$  y  $1/r_2$  sería también cero) nos queda para valor de la energía potencial de un cuerpo de masa  $m$  en un punto  $P$  exterior a la Tierra y a una distancia  $r$  de su centro:

$$U(P) = - \frac{GM_0m}{r}$$

como ya se ha dicho, el signo menos nos indica que en el punto considerado la energía potencial es menor que en el infinito.

La representación gráfica de la función energía potencial que posee una partícula de masa  $m$  que se encuentra en un punto situado en la línea que une los centros de la Tierra y la Luna, conocidos la masa de la Tierra  $M_0$ , la de la Luna  $M$ , la distancia entre sus centros  $d$  y la constante de gravitación universal  $G$ , se hace teniendo en cuenta las siguientes consideraciones: Tomamos el eje  $OX$  en la dirección que une el centro de la Tierra al de la Luna, en  $x = 0$ , el centro de la Tierra  $T$

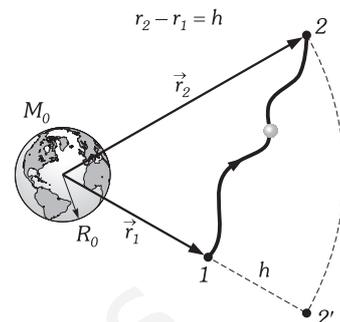


Fig. XI-11.- El trabajo realizado por  $P = mg$ , del punto 1 al punto 2 es independiente de los caminos intermedios y depende única y exclusivamente de las coordenadas del punto 1 y del punto 2.

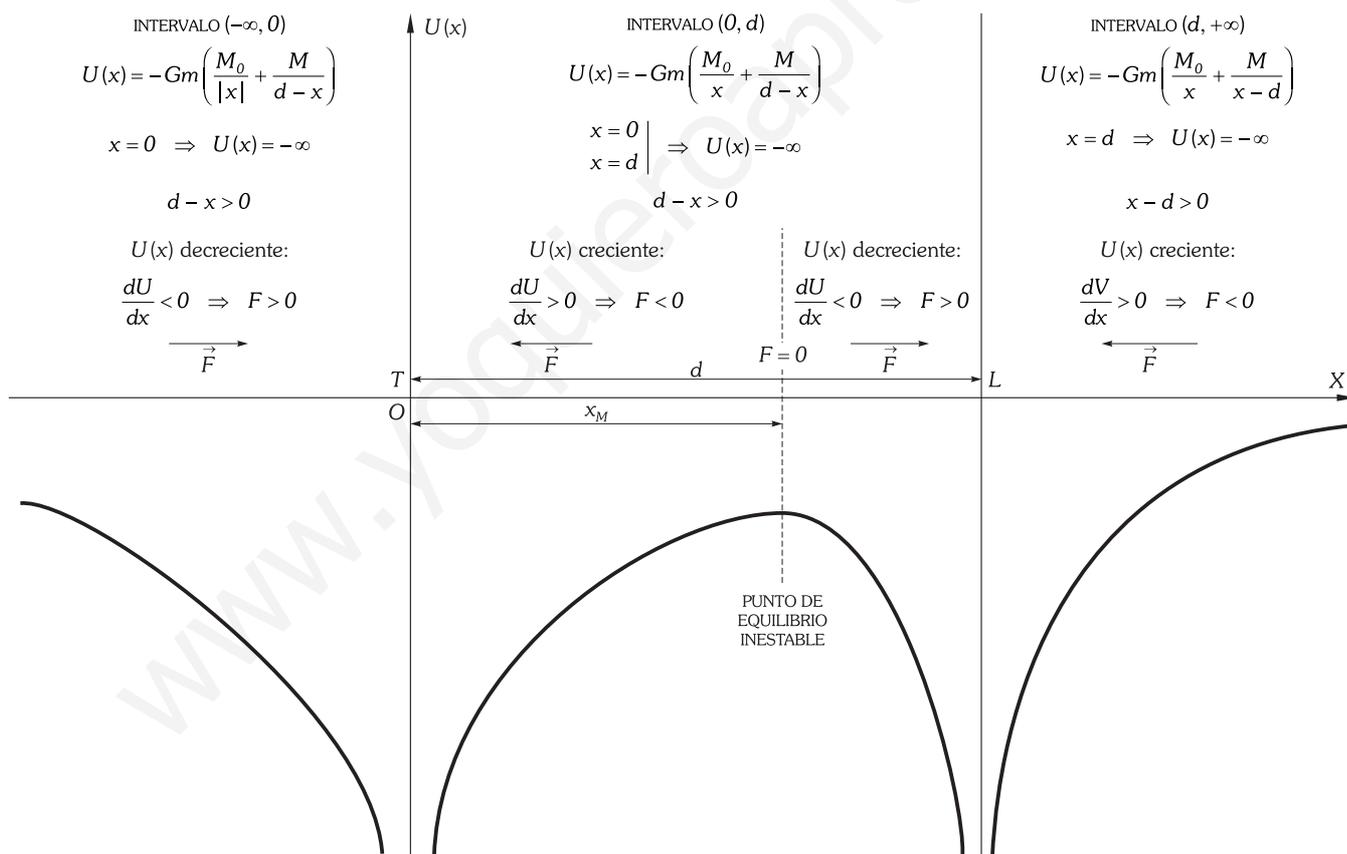


Fig. XI-12.- Representación gráfica de la energía potencial de una partícula de masa  $m$  que se encuentra en un punto cualquiera situado en la línea que une los centros de la Tierra y la Luna.

que coincide con  $O$ , y en  $x = d$  el centro de la Luna  $L$  (Fig. XI-12); el potencial y también la intensidad del campo se hacen infinitas en ambos puntos, son puntos de discontinuidad. Analizamos el campo y la energía potencial de  $m$  en tres regiones por separado, una la zona entre la Tierra y la Luna y las otras dos las exteriores, en todas ellas se emplea que la función  $U(x)$  es negativa (menor que en el infinito), que  $dU/dx$  es la pendiente de la curva  $U(x)$ , y que la fuerza que actúa sobre  $m$  colocada en cualquier punto  $x$  es  $F = -dU/dx$ . El punto en el que aparece un máximo relativo (punto de equilibrio inestable), es aquel en el que se equilibran las fuerzas de atracción gravitatoria situado entre  $T$  y  $L$ , que se calculará:

$$g_T = g_L \Rightarrow G \frac{M_0}{x_M^2} = G \frac{M}{(d - x_M)^2}$$

proporcionándonos una ecuación de segundo grado de la que se obtienen dos soluciones, una la que nos interesa y otra que se encuentra detrás de la Luna ( $>d$ ) que no corresponde a un punto de equilibrio; o bien razonando matemáticamente obtenemos  $x_M$  haciendo  $dU/dx = 0$  para la función  $U(x)$ , como indicamos en la Fig. XI-12, en la que también indicamos las características de la curva que nos conducen a su representación.

En el caso en que en la (10) sea:  $r_1 \approx r_2 = r$ , operando obtenemos:

$$U_2 - U_1 = G M_0 m \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \approx G \frac{M_0}{r^2} m h$$

y teniendo en cuenta (9) nos queda:

$$U_2 - U_1 = mgh$$

en la práctica, para movimientos con variaciones de altura despreciables frente a su distancia al centro de la Tierra, generalmente tomamos «nivel de energías potenciales» en 1 (o lo que es lo mismo: decimos que en 1 la energía potencial la consideramos nula) y escribimos:

$$U = mgh$$

«Un cuerpo (su centro de masa) colocado en un punto 2 posee una energía potencial de gravitación, con respecto a otro 1 colocado a una distancia vertical  $h$  por debajo de él y cuando ésta es lo suficientemente pequeña para que no exista variación de  $g$ , igual a  $mgh$ ».

El estudio de la energía potencial y de la energía mecánica total en puntos próximos a la superficie terrestre están hecho en los párrafos VI-20 y 21.

**PROBLEMAS: 25 al 31.**

### XI - 8. Diferencia de potencial entre dos puntos del campo gravitatorio. Potencial en un punto en función de la distribución de masa que crea el campo

Definimos DIFERENCIA DE POTENCIAL ENTRE DOS PUNTOS DEL CAMPO GRAVITATORIO mediante la expresión:

$$dV = \frac{dU}{m'} \Leftrightarrow dV = -\frac{dW}{m'} \Leftrightarrow dW = -m' dV$$

o bien:

$$V_1 - V_2 = \frac{W_1^2}{m'} \Leftrightarrow W_1^2 = -m' \int_1^2 dV$$

«DIFERENCIA DE POTENCIAL entre dos puntos del campo gravitatorio terrestre, es el trabajo que realiza el campo, al pasar la unidad de masa de un punto a otro».

En el campo gravitatorio terrestre y considerando pequeñas modificaciones de altura para que  $g$  sea prácticamente constante:

$$V_1 - V_2 = \frac{W}{m'} = \frac{Ph}{m'} = \frac{m'gh}{m'} = gh$$

siendo  $h$  la altura vertical salvada.

Recordando que:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\text{grad}U \\ \mathbf{g} &= \frac{\mathbf{F}}{m'} \end{aligned} \quad \left| \quad \mathbf{g} = -\text{grad}V \right. \quad (11)$$

de las relaciones entre  $W$  y  $U$  con  $V$  también obtenemos que:

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r}$$

luego las funciones  $V_1$  y  $V_2$  y en general la función  $V$  (potencial en un punto cualquiera del campo) «es una función exclusiva de las coordenadas del punto».

Si el punto 1 es variable, tendremos:

$$V_1(P) = V_2 + \int_1^2 \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r}$$

La función  $V(P)$  se define como FUNCIÓN POTENCIAL GRAVITATORIO en cualquier punto del campo.

Obsérvese que esta función  $V(P)$  está unívocamente determinada salvo una constante que es el valor de  $V_2$ . Para determinar unívocamente el valor de  $V(P)$  en cada punto hay que asignar un valor arbitrario al potencial de algún punto, la hipótesis que normalmente hacemos es tomar como potencial cero el de un punto infinitamente alejado. Es decir, si hacemos:  $2 \rightarrow \infty$  implica que  $V_2 = 0$  por lo cual el POTENCIAL EN EL PUNTO ( $P$ ) será:

$$V_1(P) = \int_r^\infty \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = - \int_\infty^r \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r}$$

interpretando el valor del POTENCIAL EN UN PUNTO como «el trabajo que es necesario realizar para trasladar la unidad de masa desde el infinito a dicho punto» o bien «menos el trabajo que realiza el campo al trasladar la unidad de masa desde el infinito a dicho punto».

Hasta aquí no hemos considerado la distribución de masa que crea el campo. Podemos calcular EL POTENCIAL EN UN PUNTO EN FUNCIÓN DE LAS DISTINTAS DISTRIBUCIONES DE MASA que crean el campo, sin más que tener en cuenta que  $U = m'V$  y las ecuaciones (7) y (8), obteniéndose:

$$V(P) = -G \sum \frac{m_i}{r_i} \quad V(P) = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r})}{r} d\mathbf{w} = -G \int_V \frac{dm}{r}$$

El problema fundamental que nos planteamos en el estudio del campo gravitatorio es el calcular su intensidad debida a una distribución de masa. El conocimiento de la función potencial  $V(P)$  nos facilita una vía general para calcular campos gravitatorios. Téngase en cuenta que el campo es una función vectorial,  $\mathbf{g}(g_x, g_y, g_z)$  y para determinarlo será preciso calcular tres integrales para cada término de la ecuación general de  $\mathbf{g}(P)$  (3). En el mejor de los casos este es un procedimiento tedioso; en algunos es casi imposible integrar. La ecuación anterior, por otra parte, es escalar e implica sólo una suma o una integral por término; además los denominadores que intervienen en esta ecuación son todos de la forma  $r$  en vez de  $r^2$  que simplifica las integrales en comparación con las de la ecuación de  $\mathbf{g}(P)$ . Además la operación de derivar  $V(P)$  para obtener  $\mathbf{g}(P)$  es (si existe) siempre muy sencilla y por supuesto más que la integración. Consecuencia de lo expuesto es que para resolver el problema fundamental se obtenga primeramente el  $V(P)$  y luego  $\mathbf{g}(P)$ .

**PROBLEMAS: 32 al 39.**

### XI - 9. Líneas de fuerza y superficies equipotenciales

Hemos definido la intensidad del campo gravitatorio asignando un valor a cierta variable física en todos los puntos del espacio, en notación vectorial  $\mathbf{g}(P) \equiv \mathbf{g}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{g}(x, y, z)$ , y tal magnitud vectorial puede sustituirse por tres funciones escalares  $g_x, g_y$  y  $g_z$ ; es decir, un campo gravitatorio  $\mathbf{g}$  puede describirse en coordenadas cartesianas como:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = g_x(x, y, z) \mathbf{i} + g_y(x, y, z) \mathbf{j} + g_z(x, y, z) \mathbf{k}$$

El concepto básico de campo fue desarrollado por Michael Faraday (1791-1867) y utilizó las «líneas de campo» para hacer una representación gráfica de las fuerzas que actúan en el espacio que rodea a un cuerpo; nuestro concepto matemático de campo fue una abstracción posterior de su propia representación gráfica, y las «líneas de campo» siguen siendo una herramienta muy útil a la hora de resolver problemas de gravitación.

LÍNEAS DE FUERZA son las trayectorias que seguiría una partícula, sometida a la influencia del campo, en una sucesión de caminos elementales, partiendo, en todos ellos, del reposo.

Imaginemos una partícula que abandonamos en un campo gravitatorio. Comenzará a moverse por la influencia del campo, al estar sometida a la fuerza dada por la fórmula (2). En cuanto ha iniciado su movimiento la detenemos, volviendo a abandonarla de nuevo y a detenerla. De esta forma describiría una trayectoria —sucesión indefinida de espacios elementales— que se llama LÍNEA DE FUERZA

«El vector intensidad del campo es siempre tangente a las líneas de fuerza».

Esta propiedad podemos expresarla:

$$\mathbf{g} \times d\mathbf{r} = \mathbf{0}$$

siempre que  $d\mathbf{r}$  pertenezca a una línea de fuerza. Esta expresión nos proporciona un procedimiento para determinar la ecuación de las líneas de campo.

SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES son las que tienen el mismo potencial en todos sus puntos. Las superficies equipotenciales y la dirección del peso (líneas de fuerza) en el campo gravitatorio terrestre, son perpendiculares entre sí.

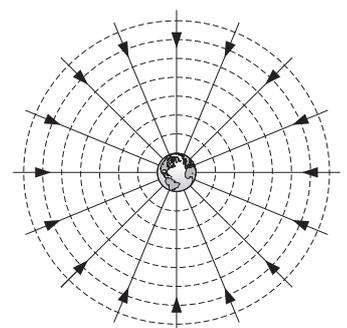


Fig. XI-13.- Líneas de fuerza y superficies equipotenciales del campo gravitatorio terrestre (no se consideran los efectos producidos por la Luna, el Sol...).

En efecto; traslademos una partícula de masa  $m$ , de un punto a otro infinitamente próximo, situado en la misma superficie equipotencial; el trabajo elemental es:  $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m\mathbf{g} \cdot d\mathbf{r}$ , y que es:  $dW = -mdV = 0$ , puesto que  $V$  no varía; por lo tanto:  $\mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = gdr \cos \varphi = 0$ , y como  $g \neq 0$  y  $dr \neq 0$ , será  $\cos \varphi = 0$  y por tanto  $\varphi = \pi/2$ ; con lo que queda demostrado que las líneas de fuerza y las superficies equipotenciales se cortan perpendicularmente

**XI – 10. Movimiento bajo la acción de fuerza gravitatorias**

El movimiento de una partícula en el interior de un campo gravitatorio por la acción única de la fuerza generada en él, es un ejemplo para el que la *energía mecánica total* y el *momento angular de la partícula respecto al CM del sistema se conservan para cualquiera que sea la distribución que crea el campo*, puesto que éste es conservativo.

En el caso en el que la distribución que genera el campo sea una masa puntual  $M$ , (o lo que es lo mismo, sea una masa esférica que en su exterior produce los mismos efectos que una masa igual a la de la esfera  $M$  colocada en su centro), si es  $m$  la masa de la partícula que se mueve en presencia de  $M$ , formando ambas un sistema aislado, A, B, C... puntos pertenecientes a su trayectoria\* (Fig. XI-14), cuyos vectores de posición respecto de O (centro de la esfera) son  $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C, \dots$ , y en ellos  $m$  posee las velocidades  $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B, \mathbf{v}_C, \dots$ , las magnitudes dinámicas que se conservan por ser el campo central y por tanto conservativo, son la *energía mecánica total* y el *momento angular respecto de O*, pudiéndose escribir para dos puntos cualesquiera (A y B) las ecuaciones:

$$E = T + U = cte \Leftrightarrow T_A + U_A = T_B + U_B = \dots$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad U = -\frac{GMm}{r} \quad (U_\infty = 0)$$

Fig. XI-14.- Movimiento de una partícula de masa  $m$  en el interior del campo gravitacional generado por  $M$ , cuando sobre  $m$  sólo actúa la fuerza gravitatoria.

$$E = cte \Rightarrow T(A) + U(A) = T(B) + U(B) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GMm}{r_A} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{GMm}{r_B}$$

$$\mathbf{J}_0 = cte \Rightarrow \mathbf{J}(A) = \mathbf{J}(B) \Rightarrow \mathbf{r}_A \times m\mathbf{v}_A = \mathbf{r}_B \times m\mathbf{v}_B$$

Consideremos un cuerpo esférico de masa  $M$  (por ejemplo, el Sol), cuyo centro tomamos como origen de un sistema de referencia inercial, alrededor del cual se mueve otro de masa  $m \ll M$  (por ejemplo, la Tierra), en órbita circular de radio  $r$ , sometido a la fuerza gravitacional; la energía potencial que posee es:

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

y su energía cinética será:

$$T(r) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2r^2$$

en la que  $\omega$  es la velocidad angular constante del movimiento circular de  $m$  alrededor de  $M$ . La condición para que  $m$  se mueve de la forma descrita será:

$$F = ma \Rightarrow \frac{GMm}{r^2} = m\omega^2r \Rightarrow \omega^2r^2 = \frac{GM}{r}$$

quedándonos para valor de la energía cinética:

$$T(r) = \frac{GMm}{2r}$$

luego la energía total es:

$$E = T + U = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} \Rightarrow E(r) = -\frac{GMm}{2r}$$

esta energía es constante y negativa (Fig. XI-15). Obsérvese que la energía potencial es siempre doble en valor absoluto que la cinética (recordemos que el signo negativo de la energía potencial surge del convenio de que la energía potencial en el infinito es cero, entonces en cualquier punto a una distancia finita  $r$  de  $M$ , es siempre menor que en el infinito y, por tanto, negativa). El significado de una energía total negativa es que se trata de un sistema aislado donde  $m$  está siempre asociado a  $M$  que lo atrae y nunca escapará de él.

**PROBLEMAS: 40 al 48.**

**XI – 11. Velocidad de escape de un proyectil**

Se llama así a la velocidad que tenemos que dar a un proyectil para que «escape» de la atracción terrestre.

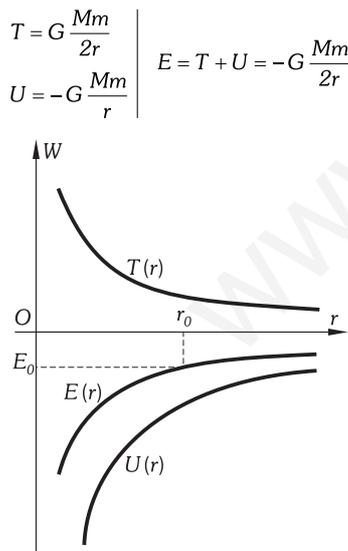


Fig. XI-15.- En el eje de ordenadas hemos tomado indistintamente la energía cinética, la potencial y la total. Un satélite o planeta con energía total  $E_0$  (siempre negativa y constante) se encuentra en una órbita de radio  $r_0$ . Cuanto más lejano esté el planeta de  $M$ , mayor (menos negativa) es su energía total.

\* Para el caso de los planetas del Sol son elipses.

Para calcularla procederemos de la siguiente forma: supongamos un cuerpo que partiendo del reposo desde el infinito ( $U_\infty = 0$ ) llega a un punto  $P$  que dista  $r$  del centro de la Tierra con una velocidad  $v_E$ ; el principio de conservación de la energía exige:

$$E = U_\infty + T_\infty = U + T \Rightarrow 0 = -\frac{GM_0 m}{r} + \frac{1}{2} m v_E^2 \Rightarrow v_E = \sqrt{\frac{2GM_0}{r}}$$

siendo la intensidad de la gravedad en la superficie terrestre:  $g_0 = GM_0/R_0^2 \Rightarrow GM_0 = g_0 R_0^2$  quedándonos:

$$v_E = R_0 \sqrt{\frac{2g_0}{r}}$$

Recíprocamente si a un proyectil a distancia  $r$  del centro de la Tierra se le comunica una velocidad cuyo valor sea igual o mayor que  $v_E$ , escapará de la atracción terrestre. (La velocidad real de escape debe ser algo mayor por efecto del rozamiento con la atmósfera). Si el proyectil es lanzado desde la superficie terrestre,  $r$  es, entonces, el radio de nuestro planeta, y nos quedará:

$$v_E = \sqrt{2g_0 R_0}$$

obsérvese que cuanto mayor sea la altura sobre la Tierra (conforme crece  $r$ ), es menor la velocidad de escape, y que además es independiente de la masa del proyectil.

La Fig. XI-16 nos representa la energía potencial gravitatoria  $U(r) = -GM_0 m/r$  para un proyectil lanzado desde un punto que se encuentra a una distancia  $r$  del centro de la Tierra; para la superficie  $U(R_0) = -GM_0 m/R_0 = -mg_0 R_0$ , aumentando a medida que aumenta  $r$ . Si el proyectil ha sido lanzado con una velocidad menor que la de escape, poseerá una energía total  $E_1 < 0$ , por lo que se elevará hasta una distancia  $r_1$ , del centro de la Tierra y volverá a caer sobre ella. Si el lanzamiento se realiza con una velocidad mayor que la de escape entonces poseerá una energía total  $E_2 > 0$  y como ya se ha dicho no volverá a la Tierra.

**PROBLEMAS: 49 al 51.**

### XI - 12. Ecuación de la trayectoria de una partícula bajo la acción de una fuerza gravitatoria

Consideremos una partícula de masa  $m$  sometida a la tracción gravitatoria de una masa  $M$ , que supondremos fija y de valor mucho mayor que  $m$  (Fig. XI-17).

Para obtener la ecuación de la trayectoria de  $m$  partimos de la segunda ley de Newton que escribiremos empleando coordenadas polares, en las que las expresiones de la aceleración y la fuerza son, respectivamente:

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\mathbf{u}_\varphi \quad \mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{u}_r$$

Por consiguiente:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \Rightarrow -\frac{GMm}{r^2} \mathbf{u}_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{u}_r + m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\mathbf{u}_\varphi$$

que puede descomponerse en:  $\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{GM}{r^2} \quad r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0$  (12)

Por otra parte, al tratarse de una fuerza central se conserva constante el momento angular de  $m$ , es decir,  $\mathbf{J} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = c\mathbf{e}_z$ ; y su módulo es  $J = rmv_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$ , con lo que podremos poner:  $r^2\dot{\varphi} = J/m \Rightarrow \dot{\varphi} = J/mr^2$ , que pondremos de la forma:

$$\dot{\varphi} = \frac{h}{r^2}$$

donde se ha hecho  $J/m = h$ .

De esta ecuación y la primera de las anteriores, obtenemos la ecuación diferencial de la trayectoria en la forma  $r = f(\varphi)$ , mediante las siguientes expresiones:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -h \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r} \right)$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{h}{r^2} \frac{d\dot{r}}{d\varphi} = \frac{h}{r^2} \frac{d}{d\varphi} \left[ -h \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r} \right) \right] = -\frac{h^2}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right)$$

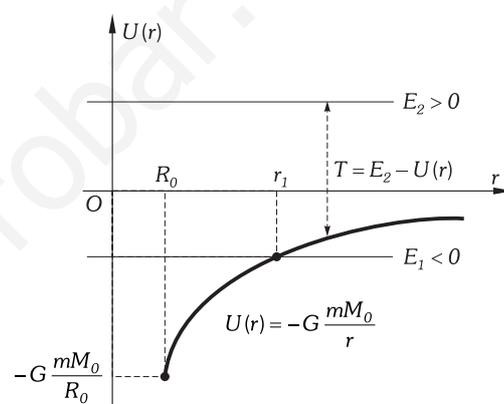


Fig. XI-16.- Para una energía total  $E \leq 0$  el proyectil se encuentra "ligado" a la Tierra. Para  $E \geq 0$  el proyectil "escapa" de la influencia gravitacional de la Tierra.

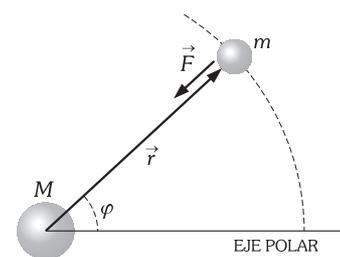


Fig. XI-17.- Partícula de masa  $m$  sometida a la atracción gravitatoria de otra de masa  $M \gg m$  que suponemos fija.

que sustituidas en (12) conducen a:

$$-\frac{h^2}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2}$$

y haciendo el cambio de variable  $u = 1/r$ , se transforma en:  $d^2u/d\varphi^2 + u = GM/h^2$ , que con el nuevo cambio  $z = u - GM/h^2$ , se reduce a:  $d^2z/d\varphi^2 + z = 0$ , cuya solución es:  $z = C \cos(\varphi - \varphi_0)$ .

Deshaciendo los cambios de variable y eligiendo el eje polar de forma que  $\varphi_0 = 0$ , obtenemos:

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2} + C \cos \varphi \Rightarrow r = \frac{h^2/GM}{1 + \frac{Ch^2}{GM} \cos \varphi} \quad (13)$$

que es la ecuación de una cónica (hipérbola, parábola o elipse) con un foco en el centro de  $M$ . (Ver problema II-58 y 59).

La masa  $m$ , lanzada en el campo gravitatorio de  $M$ , describe pues una cónica de parámetro  $p = b^2/a = h^2/GM$  y excentricidad  $e = c/a = Ch^2/GM$ , en las que las constantes dependen de la posición y velocidad de  $m$  en el instante de iniciar su movimiento bajo la acción exclusiva de  $M$ .

Si en (13)  $M$  es la masa del Sol, dicha ecuación describe el movimiento de, por ejemplo, la Tierra, y si es  $M$  la masa de la Tierra el movimiento descrito puede ser el de un satélite artificial.

**XI - 13. Tipos de trayectoria en función de las condiciones iniciales y de la energía**

Para poner un satélite en órbita se le hace ascender mediante cohetes hasta una distancia  $r_0$  del Centro de la Tierra, llegando a ese punto con velocidad  $v_0$  paralela a la superficie terrestre, es decir, con componente únicamente transversal. En ese punto inicia el movimiento bajo la acción exclusiva de la atracción terrestre (despreciamos la influencia de otros cuerpos).

Determinaremos el tipo de trayectoria que seguirá a partir de  $B$  (Fig. XI-18), en función de  $r_0$  y  $v_0$ , a través de la excentricidad, que caracteriza el tipo de cónica, y de la energía del satélite.

Si tomamos el eje polar pasando por  $B$ , en la ecuación (13) se verifica  $\cos \varphi = \cos 0 = 1$ , con lo que:

$$C = \frac{1}{r_0} - \frac{GM}{h^2}$$

Por otra parte, en  $B$  es  $v_0 = r_0 \dot{\varphi}_0$  y  $h = r_0^2 \dot{\varphi}_0 = r_0 v_0$ , que es constante por serlo  $J$ . Con esto, la excentricidad resulta:

$$e = \frac{Ch^2}{GM} = \frac{1}{GM} \left( \frac{h^2}{r_0} - GM \right) = \frac{1}{GM} \left( \frac{r_0^2 v_0^2}{r_0} - GM \right) \Rightarrow e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1 \quad (14)$$

La energía total del satélite es constante, por ser la fuerza gravitatoria conservativa, e igual a su valor en  $B$ :

$$E = U_0 + T_0 = -\frac{GMm}{r_0} + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{m}{2r_0} (r_0 v_0^2 - 2GM) \Rightarrow$$

$$E = \frac{GMm}{2r_0} \left( \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 2 \right) \Leftrightarrow E = \frac{GMm}{2r_0} (e - 1) \quad (15)$$

a) ÓRBITAS CIRCULARES. Para que la cónica sea una circunferencia debe verificarse:  $e = 0$ , con lo que, de (14), se tiene:  $r_0 v_0^2/GM = 1$ . La velocidad característica de una órbita circular es:

$$v_c = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$$

y la energía total, de (15),  $E = -GMm/2r_0$ , que resulta negativa como corresponde a trayectorias ligadas a  $M$ .

b) ÓRBITAS ELÍPTICAS. Para una elipse se verifica  $0 < e < 1$ , con lo que  $1 < r_0 v_0^2/GM < 2$ , el paréntesis de (15), y por tanto la energía total, es negativo. La velocidad inicial del satélite debe estar en el intervalo:  $\sqrt{GM/r_0} < v_e < \sqrt{2GM/r_0}$ , es decir  $v_c < v_e < \sqrt{2}v_c$ , siendo la posición inicial el punto de la trayectoria más cercano a  $M$ .

c) TRAYECTORIAS HIPERBÓLICAS. En términos de excentricidad, hipérbola significa  $e > 1$ , es decir, en nuestro caso  $r_0 v_0^2/GM > 2$ , resultando una energía total positiva y distinta de cero. En tales trayectorias el cuerpo puede llegar teóricamente al infinito con una cierta velocidad, ya que en él la energía sería tan solo cinética y, como hemos visto, no nula. El cuerpo  $m$  tiene una trayectoria abierta no ligada a  $M$ .

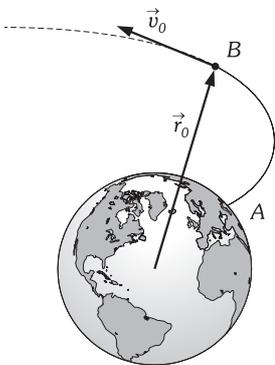


Fig. XI-18.- En B se desprenden los cohetes y se inicia la trayectoria libre.

d) TRAYECTORIAS PARABÓLICAS. Para una parábola se tiene  $e = 1$ , con lo que  $r_0 v_0^2 / GM = 2$  y la energía total resulta nula. La velocidad para esta trayectoria es:  $\sqrt{2GM/r_0}$  que no es más que la velocidad de escape  $v_E$  ya mencionada. Se trata también en este caso de trayectoria de  $m$  abierta y sin orbitar alrededor de  $M$ .

**XI - 14. Características de las órbitas elípticas: semiejes, apogeo, perigeo, período orbital y energía**

Supongamos un lanzamiento como el de la Fig. XI-20, en el que desde  $L$  hasta  $A$  el satélite es impulsado por cohetes que lo abandonan en  $A$ , con  $v_0$  perpendicular a  $r_0$  para que, a partir de ese punto, describa una trayectoria elíptica.

El punto  $A$  de la órbita se denomina PERIGEIO\*, es el más cercano a la Tierra, y el  $A'$  apogeo\*, el más alejado. En nuestro caso, el perigeo está a una distancia al centro de la Tierra,  $r_p$ , que coincide con la distancia inicial  $r_0$ . Podemos expresar las características de la órbita en función de las condiciones iniciales del vuelo libre del satélite,  $r_0$  y  $v_0$ .

Si en la ecuación (13) de la órbita, sustituimos  $\varphi$  por  $0$  y  $\pi$  radianes, obtendremos los valores de  $r_p$  y  $r_a$ , respectivamente:

$$\varphi = 0 \Rightarrow r_p = \frac{h^2/GM}{1 + Ch^2/GM}$$

$$\varphi = \pi \Rightarrow r_a = \frac{h^2/GM}{1 - Ch^2/GM}$$

y haciendo de nuevo los cambios:

$$h = \frac{J}{m} = r_0 v_0$$

$$C = \frac{1}{r_0} - \frac{GM}{h^2}$$

resultan los valores:

$$r_p = r_0 \quad r_a = \frac{r_0^2 v_0^2}{2GM - r_0 v_0^2}$$

El SEMIEJE MAYOR de la órbita resulta, de la figura:

$$a = \frac{r_a + r_p}{2}$$

y en función de las condiciones iniciales:

$$a = \frac{GM r_0}{2GM - r_0 v_0^2} \quad (16)$$

Para la obtención del SEMIEJE MENOR,  $b$ , tendremos en cuenta que en una elipse, la suma de distancias de cualquier punto a los dos focos es constante e igual a  $2a$ ; por tanto:  $FB + F'B = 2a \Leftrightarrow FB = a$ , y en consecuencia:

$$b^2 = FB^2 - FC^2 = a^2 - (a - r_p)^2 = r_p(2a - r_p) = r_p r_a \Rightarrow b = \sqrt{r_a r_p}$$

y en función de  $r_0$  y  $v_0$ :

$$b = r_0 v_0 \sqrt{\frac{r_0}{2GM - r_0 v_0^2}}$$

Otra característica importante de este movimiento es el PERÍODO ORBITAL, es decir, el tiempo que emplea el satélite en completar una órbita. Puesto que el área de una elipse es  $\pi ab$ , y la velocidad con que se barre es la velocidad areolar  $v_A = J/2m = h/2$ , el período orbital  $T$ , resulta:

$$T = \frac{2\pi ab}{h}$$

cuya expresión en función de  $r_0$  y  $v_0$  se puede obtener sin más que sustituir los valores calculados de  $a$ ,  $b$  y  $h$ .

Podemos obtener una expresión de la ENERGÍA TOTAL en función del semieje mayor de la órbita, a partir de las expresiones (14), (15) y (16), efectivamente:

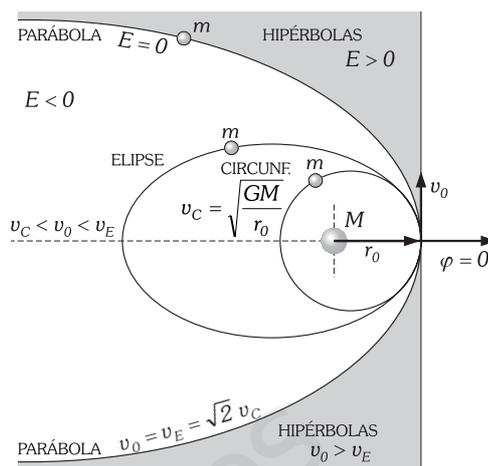


Fig. XI-19.- Distintos tipos de órbitas en función de la velocidad y posición iniciales. La zona sombreada corresponde a trayectorias abiertas, con  $v \geq v_E$  y  $E \geq 0$ . La zona sin sombreada corresponde a trayectorias ligadas, con  $v < v_E$  y  $E < 0$ .

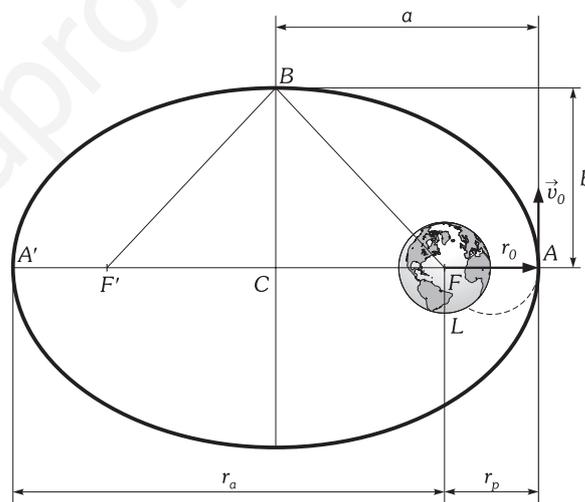


Fig. XI-20.- Características de la órbita elíptica de un satélite.

\* Los puntos  $A$  y  $A'$  se denominan en general PERIASTRO y APOASTRO, si el centro atractivo es el Sol su nombre es PERIHELIO y AFELIO, y para satélites terrestres la denominación es PERIGEIO y APOGEO.

$$a = \frac{GM r_0}{2GM - r_0 v_0^2} \Rightarrow a = \frac{r_0}{2 - \frac{r_0 v_0^2}{GM}} = \frac{r_0}{2 - (e + 1)} \Rightarrow \boxed{a = \frac{r_0}{1 - e}}$$

por tanto:

$$E = \frac{GMm}{2r_0}(e - 1) = -\frac{GMm}{2r_0}(1 - e) \Rightarrow \boxed{E = -\frac{GMm}{2a}} \quad (17)$$

o bien:  $E = -GMm/(r_a + r_p)$ .

La expresión (17) indica que para un satélite determinado la energía total depende exclusivamente del semieje mayor  $a$  de su órbita.

**PROBLEMAS: 52 al 57.**

**XI – 15. Teorema de Gauss para el campo gravitatorio. Ecuación de Poisson**

El vector intensidad de campo gravitatorio producido por una masa puntual  $m$  en un punto caracterizado respecto de ella por el vector de posición  $\mathbf{r}$  es, según (2):  $\mathbf{g} = -Gm \mathbf{r}/r^3$ . Se trata pues, de un campo central y newtoniano (su módulo varía con la distancia como  $r^{-2}$ ).

La expresión del teorema de Gauss (párrafo VII-17) para estos campos es:

$$\phi = \oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 4\pi C$$

en la que  $C$  es la constante de proporcionalidad en la expresión de la intensidad de campo.

En nuestro caso es:  $C = -Gm$ , con lo que para el campo creado por una masa puntual  $m$  podemos poner:

$$\phi = \oint_A \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = -4\pi Gm$$

Y si el campo es producido por una distribución discreta de masas (Fig. XI-21) concluimos que:

«El flujo de campo gravitatorio a través de una superficie cerrada es igual al producto, con signo negativo, de  $4\pi G$  por la suma de todas las masas encerradas en su interior, no influyendo para nada en él las masas que existan en el exterior».

Es decir:

$$\phi = \oint_A \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = -4\pi G \sum m_i = -4\pi GM$$

donde  $M$  representará la masa total interior a la superficie cerrada  $A$ .

Si la distribución de masa interior a la superficie  $A$  fuese una distribución volumétrica definida por una densidad de masa  $\rho(x, y, z)$ , la masa total sería:

$$M = \int_V \rho dV$$

donde  $V$  es el volumen de la distribución. El teorema de Gauss se escribirá:

$$\oint_A \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = 4\pi G \int_V \rho dV$$

donde  $A$  es una superficie arbitraria que rodea a la distribución, luego en particular podemos tomar la propia superficie de la distribución. La integral del primer miembro de la fórmula anterior la podemos transformar, en virtud del Teorema de Ostrogradsky-Gauss en una integral de volumen:

$$\oint_A \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \text{div } \mathbf{g} dV$$

luego se verifica que:

$$\int_V \text{div } \mathbf{g} dV = -4\pi G \int_V \rho dV \Rightarrow \int_V (\text{div } \mathbf{g} + 4\pi G\rho) dV = 0$$

para que esta relación se verifique para todo  $dV$  es preciso que:

$$\boxed{\text{div } \mathbf{g} = -4\pi G\rho}$$

que es la expresión diferencial (local) del Teorema de Gauss.

$$\phi = \oint_A \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi GM$$

$$M = \sum m_i$$

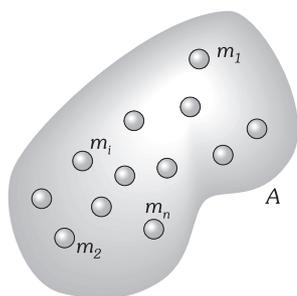


Fig. XI-21.– Teorema de Gauss para una distribución discreta de masas.

Nótese que los valores de la divergencia de un campo vectorial nos dan las fuentes y sumideros de dicho campo en cada punto. En el caso del campo gravitatorio tales sumideros (divergencia negativa) son las propias masas.

El teorema de Gauss es un método cómodo para calcular campos gravitatorios en algunos casos determinados en los cuales se conozca algo de antemano de dicho campo, por ejemplo las líneas de fuerza, o lo que es lo mismo la dirección y el sentido del vector  $\mathbf{g}$  en cada punto. Con el teorema de Gauss podemos calcular el módulo del campo fácilmente en estas condiciones. Conocer de antemano las líneas de fuerza del campo es posible cuando la distribución de masa tenga una simetría muy específica (esférica, cilíndrica o plana).

La ecuación que vamos a calcular (ECUACIÓN DE POISSON), nos da una forma de calcular  $V(P)$  y conocida esta función determinar  $\mathbf{g}(P)$  como decíamos en el párrafo XI-8. Su deducción es a partir del teorema de Gauss y la relación entre el campo y el potencial:

$$\mathbf{g} = -\text{grad}V \quad \left| \quad \Rightarrow \quad \text{div grad}V = 4\pi G\rho \right.$$

$$\text{div } \mathbf{g} = -4\pi G\rho$$

conviene considerar la div  $\text{grad}$  como un solo operador y se representa por  $\Delta$  o  $\nabla^2$ , con esta notación escribiremos:

$$\Delta V = 4\pi G\rho$$

y en coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 4\pi G\rho(x, y, z)$$

PROBLEMAS: 58 y 59.

### XI - 16. Cálculo de la intensidad del campo gravitatorio producido por una esfera homogénea

Resolvamos como aplicación del Teorema de Gauss este caso particular. Si la distribución es uniforme, la simetría de la distribución de masa es esférica. No existe ninguna dirección privilegiada, por consiguiente el campo tiene que ser necesariamente radial.

Vamos a calcular el campo a una distancia  $r$  del centro de la distribución. Tomaremos una superficie de integración de acuerdo con la simetría de nuestro problema: una esfera de radio  $r$  concéntrica con la distribución. El campo en  $P$  por ser radial será paralelo a  $\mathbf{r}$  y también a  $d\mathbf{A}$ . Calculemos el flujo del campo a través de  $A$ .

a) EN UN PUNTO  $P$  EXTERIOR A LA DISTRIBUCIÓN ( $r > a$ ).

$$\phi = \oint_A \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = \oint_A g dA \cos \varphi = - \oint_A g dA$$

como  $g$  sólo depende de  $r$ , y  $A$  es una esfera, es constante al integrar, luego:

$$\phi = -g \oint_A dA = -g 4\pi r^2$$

por otra parte:  $\phi = -4\pi GM$  en la que  $M$  es la masa total, luego:  $g = GM/r^2$ , vectorialmente:

$$\mathbf{g} = -G \frac{M}{r^3} \mathbf{r}$$

«La intensidad del campo gravitatorio que produce una distribución esférica y homogénea de masa en un punto exterior, es la que producirá una masa puntual colocada en el centro de la distribución».

b) EN UN PUNTO  $P$  INTERIOR ( $r < a$ ).

En este caso los argumentos de simetría son iguales. Para integrar, tomaremos una esfera  $A'$  de radio  $r$  que pasa por el punto  $P$ . Igual que antes  $\mathbf{g}$  es paralelo a  $\mathbf{r}$  y a  $d\mathbf{A}$ , luego:

$$\phi = \oint_{A'} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = -g \oint_{A'} dA = -g 4\pi r^2$$

y por otra parte:  $\phi = -4\pi GM'$  donde  $M'$  es la masa encerrada dentro de  $A'$  ( $M' < M$ ), luego:  $g = GM'/r^2$ ; se ha dicho que la esfera es homogénea luego su densidad  $\rho$  es constante y de valor:

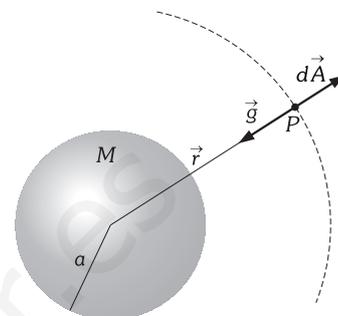


Fig. XI-22.- La intensidad del campo gravitatorio en  $P$ , es la que produciría una masa puntual de valor igual a la de la distribución esférica colocada en su centro.

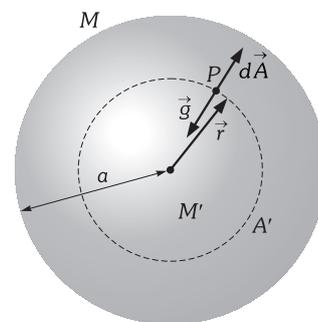


Fig. XI-23.- La intensidad del campo gravitatorio en  $P$ , es la que produciría una masa puntual  $M'$  igual a la que hay en el interior de la esfera de radio la distancia del centro al punto considerado ( $r$ ), colocada en dicho centro.

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{M'}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow M' = M \frac{r^3}{a^3} \Rightarrow g = GM \frac{r}{a^3}$$

y la expresión vectorial será:

$$\mathbf{g} = -\frac{GM}{a^3} \mathbf{r}$$

«La intensidad del campo gravitatorio que produce una distribución esférica y homogénea de masa  $M$  en un punto interior a ella es: 1.º El que produciría una masa puntual ( $M'$  igual a la que habría en el interior de la esfera de radio la distancia del centro al punto considerado ( $r$ ), colocada en el centro. 2.º Proporcional a la distancia al centro ( $r$ ). 3.º Independiente de la masa que queda en el exterior de la esfera citada en el apartado 1.º

Compruébese que ambas expresiones obtenidas coinciden cuando calculamos el campo en la superficie de la distribución ( $r = a$ ).

**XI – 17. Variación del peso con la profundidad**

En una mina profunda el peso de un cuerpo es menor que en la superficie terrestre. En efecto: hemos demostrado que la intensidad del campo gravitatorio en cualquier punto interior a una esfera, es igual al producido únicamente por la esfera material de radio  $r$  y masa  $M$  (Fig. XI-24). Si  $\rho$  es la densidad media de tal esfera material, el peso de un cuerpo de masa  $m$  en el interior de la mina (prescindiendo de las influencias de la rotación de la Tierra y de las diversas densidades del subsuelo), es:

$$P = mg = G \frac{Mm}{r^2}$$

pero siendo  $M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ , obtenemos:

$$P = \frac{4\pi\rho Gm}{3} r$$

Observemos que el peso es tanto menor cuanto menor es la distancia al centro de la Tierra. En tal centro ( $r = 0$ ) el peso es nulo.

**PROBLEMAS: 60 al 63.**

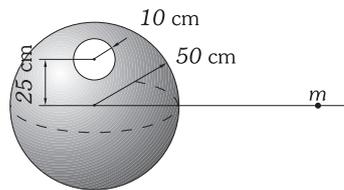


Fig. XI-24.- Variación del peso con la profundidad.

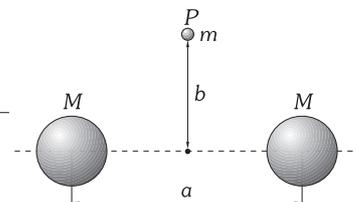
**PROBLEMAS**

1. La distancia entre los centros de dos esferas de 3 t de masa es de 1 m, determinar la fuerza con que se atraen.
2. Supongamos que en el espacio intergaláctico (fuera de toda influencia de cuerpos celestes) tres masas puntuales de 2, 4 y 2 kg se encuentran en tres vértices de un cuadrado de 1 m de lado. ¿Cuál es la fuerza que ejercerán sobre una partícula de 1 g colocada en el cuarto vértice?
3. Supongamos que en el espacio intergaláctico (fuera de toda influencia de cuerpos celestes) se encuentran tres esferas de masas 1t, 2t y 3t cuyos centros se encuentran en (0, 0), (2, 3) y (-2, 3) medidas estas coordenadas en metros y referidas a un sistema de ejes rectangulares. Calcular la fuerza que ejercerán sobre una partícula de 1 g de masa colocada en (0, 6) m.
4. La esfera de hierro de la figura, centrada en el origen de coordenadas y de 50 cm de radio, tiene una burbuja también esférica, vacía, de 10 cm de radio y con su centro a 25 cm del de la esfera grande. Calcular la fuerza gravitacional que ejerce sobre una pequeña masa de 100 g situada a 1 m del origen, como indica la figura. Densidad del hierro: 7,86 g/cm<sup>3</sup>.
5. Supongamos un sistema aislado (en ausencia de campo gravitacional) formado por dos masas iguales ( $M$ ) como se indica en la figura. Una tercera masa  $m$  se suelta en un punto  $P$  equidistante de las dos masas y a una distancia  $b \ll a$  de la línea que las une. Demostrar que adquiere un movimiento vibratorio armónico y calcular su período.
6. En un experimento para medir la constante de gravitación universal  $G$ , se encontró que una esfera de masa 0,8 kg atrae a otra esfera de masa  $4 \times 10^{-3}$  kg con una fuerza de  $1,3 \times 10^{-10}$  N cuando la distancia entre los centros de ambas esferas es de  $4 \times 10^{-2}$  m. La aceleración

de la gravedad en la superficie terrestre es 9,80 m/s<sup>2</sup> y el radio terrestre es de 6 400 km. Calcular a partir de estos datos la masa de la Tierra.



Problema XI-4.



Problema XI-5.

7. La masa de la Luna es aproximadamente  $6,7 \times 10^{22}$  kg, su radio  $1,6 \times 10^6$  m y el valor de  $g_0$  en la superficie de la Tierra es 9,8 N/kg. 1) ¿Qué distancia recorrerá un cuerpo en un segundo, en caída libre hacia la Luna, si se abandona en un punto próximo a la superficie de aquella? 2) ¿Cuál será el período de oscilación, en la superficie lunar, de un péndulo cuyo período en la Tierra es de 1 s? 3) En la superficie terrestre, al colocar un cuerpo en el platillo de una balanza y en el otro platillo 23,15 g se consigue el equilibrio. ¿Qué pesas tendríamos que utilizar para equilibrar, igualmente, el mismo cuerpo en la superficie lunar?
8. Si por alguna causa interna la Tierra redujese su radio a la mitad manteniendo su masa ( $g_0 = 9,8$  N/kg y frecuencia de giro de la Tierra:  $v_0 = 1$  vuelta/día). 1) ¿Cuál sería la intensidad de la gravedad en su nueva superficie? 2) ¿Cuál sería la nueva duración del día en horas?
9. «Se dice que una órbita circular o elíptica de un satélite artificial es estable cuando ésta corta la esfera terrestre en un círculo máximo.» ¿Por qué no lo es en caso contrario?

10. Conocida la masa de la Tierra y el radio ecuatorial, la fórmula  $GM_0/R_0^2$  nos daría para valor de la intensidad de la gravedad el valor de 981,4 dyn/g. Realizada la medida por procedimientos experimentales (péndulo), se obtiene un valor de 978,049 dyn/g. ¿Por qué?

11. El globo terráqueo, cansado de tanta experiencia atómica que le agujerea las entrañas, gira cada vez más deprisa para desembarazarse de sus molestos perforadores. Al fin, los hombres, mujeres, perros, gatos... que habitan en el ecuador son lanzados por la tangente a tal paralelo. ¿Cuántas vueltas en 24 h da la inquieta Tierra? Emplear como únicos datos del problema los valores de 981,4 dyn/g para la intensidad de la gravedad en el ecuador si no existiese la fuerza centrífuga y 978,049 dyn/g valor real del peso de 1 g en tal lugar.

12. Calcular el ángulo que se desvía la plomada respecto de la dirección del radio terrestre del lugar, debido a la rotación de la Tierra, en un punto en que la latitud es  $\varphi$ . DATOS:  $G$ : constante de gravitación;  $M_0$ : masa de la Tierra;  $R_0$ : radio terrestre del lugar;  $\nu$ : frecuencia angular de la Tierra (una vuelta por día).

13. Sabiendo que en un año la Luna recorre 13 veces su órbita alrededor de la Tierra, determinar la distancia entre la Tierra y nuestro satélite, suponiendo la órbita circular. Radio de la Tierra: 6 370 km,  $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

14. La distancia Tierra-Sol es en promedio  $1 495 \times 10^5 \text{ km}$  y tarda 365,25 días en dar una vuelta a su alrededor. Sabemos también que Mercurio tiene un período de revolución de 88 días en su giro alrededor del Sol y que la distancia media Marte-Sol es de  $2280 \times 10^5 \text{ km}$ . Determinar con estos datos: 1) La distancia entre Mercurio y el Sol. 2) Tiempo que tarda Marte en dar una vuelta alrededor del Sol.

15. Calcular la masa del Sol, suponiendo que la Tierra describe una órbita circular alrededor de él, siendo la distancia entre el Sol y la Tierra  $1 495 \times 10^5 \text{ km}$ ;  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ .

16. El radio de la órbita de la Luna es de 60,3 veces el radio de la Tierra, y su período orbital de  $2,36 \times 10^6 \text{ s}$ . Calcular con estos datos la densidad media de la Tierra. ( $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ ) (Suponer que la órbita es circular.)

17. Febos es un satélite de Marte que gira alrededor de él en órbita circular de 14 460 km de radio. Siendo 3 393 km el radio del planeta Marte, y su gravedad superficial 0,38 veces la superficial terrestre  $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$ ; determinar el período orbital de este satélite.

18. Suponiendo que la órbita terrestre es circular de  $1,495 \times 10^8 \text{ km}$  de radio y que la Tierra invierte 365,25 días en su revolución completa, determinar la intensidad del campo gravitatorio solar en un punto que diste del centro del Sol la centésima parte de lo que dista nuestro planeta.

19. Calcular con qué velocidad hay que colocar en órbita circular estable un satélite artificial a una altura de 30 000 m sobre la superficie terrestre ( $R_0 = 6 370 \text{ km}$ ;  $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$ ).

20. Calcular el período de un satélite artificial que está girando a  $10^4 \text{ km}$  de altura ( $R_0 = 6 370 \text{ km}$ ,  $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$ ).

21. Queremos colocar un satélite artificial en órbita alrededor de la Tierra, de tal forma que éste se encuentre siempre en la vertical del lugar (CÉNIT). ¿En qué lugares puede hacerse? ¿A qué altura sobre la Tierra hay que ponerlo en órbita? (Radio de la Tierra:  $R_0 = 6 370 \text{ km}$ ,  $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$  y  $T_0 = 1 \text{ día}$ ). A estos satélites se les llama GEOESTACIONARIOS.

22. Calcular la altura sobre la superficie terrestre a que hay que colocar un satélite artificial que gira en órbita circular en el plano del ecuador y en el sentido de rotación de la Tierra para que pase periódicamente sobre un punto del ecuador cada dos días. ( $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$ ;  $R_0 = 6 370 \text{ km}$ ;  $T_0 = 1 \text{ d}$ ).

23. Un satélite artificial de la Tierra, gira en órbita circular en el plano del ecuador en el sentido de rotación de ésta y a una altura  $H = 2R_0$ . Determinar el tiempo que transcurre entre dos pasos consecutivos por el cénit de un punto del ecuador. ( $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$ ;  $R_0 = 6 370 \text{ km}$ ;  $T_0 = 1 \text{ d}$ ).

24. Determinar la distancia entre dos estrellas lejanas cuyas masas suman 4 veces la masa del Sol, y que se mueven alrededor de su centro de masa, bajo la acción de la fuerza de interacción gravitacional entre ellas, en órbitas circulares con período de 6 años. Se sabe además que la distancia promedio Tierra-Sol es  $1,496 \times 10^8 \text{ km}$  y que tarda 1 a en dar una vuelta. Consideramos la masa de la Tierra despreciable en comparación con la masa del Sol.

25. Calcular la energía potencial gravitatoria de una masa de 500 kg que se encuentra al nivel del mar si se toma el infinito como punto de referencia. ( $R_0 = 6 370 \text{ km}$ ).

26. Calcular la altura sobre el suelo a la que hay que colocar una masa de 100 kg para que tenga una energía potencial igual a la cinética que posee un barco de 5 000 t que marcha con una velocidad de 36 km/h ( $R_0 = 6 370 \text{ km}$ ,  $g_0 = 9,80 \text{ m/s}^2$ ).

27. En los vértices de un cuadrado de lado  $l$  hay 4 masas puntuales iguales de valor  $m$ . Determinar la energía potencial gravitatoria de tal distribución que se encuentra aislada del resto del Universo.

28. Un satélite de masa  $M$  describe órbitas circulares de radio  $2R_0$  en torno a la Tierra, siendo  $R_0$  el radio de ésta. Con una energía igual a la empleada para ponerlo en órbita partiendo de la superficie terrestre, se pretende elevar otro satélite de masa  $2M$ . ¿A qué distancia del centro de la Tierra orbitará este segundo satélite? No considerar la rotación de la Tierra.

29. Dos satélites artificiales de masas  $M$  y  $2M$  describen órbitas circulares del mismo radio  $R = 2R_0$  siendo  $R_0$  el radio de la Tierra. Calcular la diferencia de energías mecánicas (cinética más potencial) de ambos satélites.

30. Calcular la energía que hay que comunicarle a un satélite artificial de 4 t de masa, para colocarlo en órbita circular alrededor de la Tierra, a una altura de 35 000 km sobre la superficie terrestre. DATOS:  $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$ ;  $R_0 = 6 370 \text{ km}$ ;  $\nu_0 = 1 \text{ vuelta/día}$ .

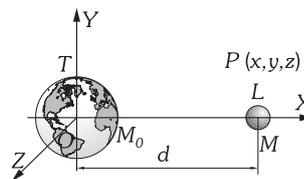
31. Un satélite artificial de 500 kg gira en torno a la Tierra en una órbita circular a 500 km de altura sobre la superficie. Si su energía disminuye a razón de 7 200 julios por vuelta, ¿cuántas revoluciones habrá completado cuando su altura se haya reducido a 400 km? Suponer que pasa por trayectorias solamente circulares.  $M_0 = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$ ,  $R_0 = 6 370 \text{ km}$ .

32. A 9 m de distancia de la superficie de una esfera de 1 000 kg y 1 m de radio se sitúa una masa de 500 g. 1) ¿Cuál es su energía potencial? 2) ¿Cuál es el potencial gravitatorio en dicho punto?

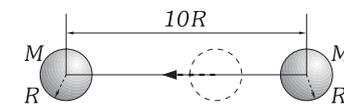
33. Supongamos que en el espacio intergaláctico (fuera de toda influencia de cuerpos celestes) definimos un sistema de ejes rectangulares. Dos partículas de masas 4 y 5 kg las colocamos en  $(0, 0)$  y  $(0, 3)$ , medidas estas coordenadas en metros. Calcular: 1) La fuerza con que se atraen. 2) La intensidad del campo gravitatorio creado por las dos partículas en el punto A  $(4, 0) \text{ m}$ . 3) El trabajo realizado al transportar en presencia de estas dos partículas otra de masa 3 kg desde el punto A al B  $(6, 7) \text{ m}$ .

34. Dos partículas de masa  $m$  están situadas en los puntos  $(0, y_0)$  y  $(0, -y_0)$  de un sistema de coordenadas. 1) Calcular en qué puntos del eje de abscisas es máxima la intensidad de campo gravitatorio producido por ambas. 2) ¿Cuánto vale el campo en esos puntos?

35. En un momento determinado el sistema Tierra-Luna se encuentra en la posición indicada en la figura. Determinar la intensidad del campo gravitatorio generado por este sistema en cualquier punto  $P(x, y, z)$  respecto del sistema OXYZ representado. DATOS:  $M_0, M$  y  $d$ .



Problema XI-35.



Problema XI-40.

36. Dos masas puntuales  $m$  están colocadas en los puntos  $(a, 0)$  y  $(-a, 0)$  de un sistema de coordenadas. Para los puntos del eje de abscisas, calcular: 1) La expresión del vector intensidad del campo gravitatorio. 2) El potencial gravitatorio. 3) Hacer una gráfica aproximada de la variación de  $V$  con  $x$ .

37. 1) Calcular la intensidad del campo gravitatorio creado por una varilla delgada y homogénea de longitud  $L$  y masa  $M$  en un punto situado en el eje de la varilla y a una distancia  $a$  de su extremo. 2) Calcular la energía potencial que tiene una partícula de masa  $m$  colocada en dicho punto.

38. Calcular la fuerza gravitatoria ejercida por un anillo de masa  $M$  y radio  $R$  sobre una partícula de masa  $m$  situada en el eje del anillo y a una distancia  $x$ .

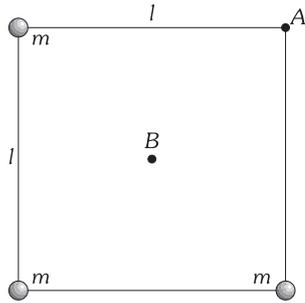
39. Calcular la intensidad de campo gravitatorio producida por un disco homogéneo, de masa  $M$  y radio  $R$ , a una distancia  $x$  sobre su eje.

40. Imagina dos esferas iguales de masa  $M$  y radio  $R$  formando un sistema aislado. Se sitúan de forma que la distancia entre sus centros es

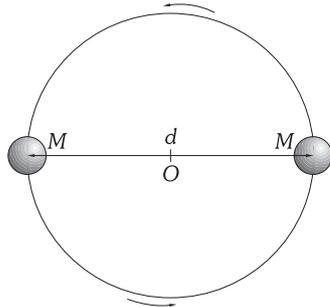
10R y se libera una de ellas con velocidad inicial nula. ¿Con qué velocidad se moverá cuando llegue a chocar con la otra? Supón conocida la constante de gravitación universal G.

41. Dos esferas homogéneas de 10 kg están colocadas con sus centros fijos en los puntos (0, 3) y (0, -3) de un sistema de coordenadas. Una tercera masa de 10 g se abandona en reposo en el punto (4, 0), ¿con qué velocidad pasará esta última por el origen de coordenadas?

42. Tres partículas iguales de masa m están fijas en tres vértices de un cuadrado de lado l, formando un sistema aislado. Conocemos el valor de la constante de gravitación universal G. 1) Determinar el potencial gravitatorio en los puntos A y B, vértice vacante y centro del cuadrado, respectivamente. 2) Si situamos una cuarta partícula en el punto A y la soltamos con velocidad inicial nula, se moverá hacia B. ¿Por qué? Determina su velocidad al pasar por B.



Problema XI-42.



Problema XI-46.

43. Dejamos caer un cuerpo desde una altura  $H = 20\,000$  m sobre un astro igual a la Tierra ( $R_0 = 6\,379$  km y  $g_0 = 9,8$  m/s<sup>2</sup>), de tal forma que alrededor de éste existe vacío (para anular en el problema la resistencia del aire). Calcular la velocidad alcanzada por el cuerpo cuando llegue a la superficie del astro.

44. Desde la superficie de la Tierra se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba. 1) Si se le comunica una velocidad de 8 km/s, calcular la altura que alcanzaría si no existiese la atmósfera. 2) Con la misma suposición, calcular qué velocidad habría que comunicarle para que alcanzase una altura igual al radio de la Tierra. ( $M_0 = 6 \times 10^{24}$  kg,  $R_0 = 6,37 \times 10^6$  m)

45. Una sonda de exploración, de masa  $m = 500$  kg, describe una órbita circular en torno a Marte. Sabiendo que el radio de dicha órbita es  $R = 3,50 \times 10^6$  m, que la masa de Marte es  $M = 6,42 \cdot 10^{23}$  kg y que  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  N m<sup>2</sup> kg<sup>-2</sup>, calcula: 1) La velocidad orbital de la sonda y su momento angular respecto al centro de Marte. 2) Las energías cinética, potencial y mecánica de la sonda.

46. En la figura representamos lo que los astrónomos llaman un Sistema Estelar Binario, tratándose en nuestro caso de dos estrellas idénticas en órbita circular común, que giran persiguiéndose entre sí. Las leyes de la mecánica exigen que ocupen siempre los extremos del diámetro. La masa de cada estrella es M, la distancia entre ellas d y la constante universal de gravitación es G. 1) Calcular el período de rotación 2) Suponiendo que las estrellas están inmóviles, calcular la velocidad de cada estrella en el momento en que la distancia entre ambas sea d/2.

47. Si suponemos que entre la Tierra y la Luna existe el vacío y haciendo abstracción del movimiento de ellas, determinar la velocidad mínima de lanzamiento de un proyectil desde la superficie de la Tierra para que llegue a la Luna; calcular también la velocidad con que llega dicho proyectil a la superficie lunar. (DATOS:  $d_{TL} = 60,3 R_0$ ;  $M_0 = 81 M_L$ ;  $R_0 = 6\,370$  km;  $R_0 = 4R_L$ ;  $g_0 = 9,8$  m/s<sup>2</sup>).

48. Un cohete impulsor coloca un satélite artificial a una distancia de 20 000 km del centro de la Tierra y con una velocidad de 5 000 m/s que forma 60° con la vertical. Calcular el apogeo y el perigeo de la órbita que seguirá el satélite.  $M_0 = 6 \times 10^{24}$  kg.

49. 1) Calcular la velocidad  $v_0$  con la que llegaría a la superficie de la Tierra, en ausencia de rozamiento en la atmósfera y bajo el único efecto del campo gravitatorio terrestre, un cuerpo que cae, partiendo del reposo, desde un punto infinitamente alejado de la Tierra. 2) Describir los movimientos que efectuarían cuerpos que se lanzasen verticalmente hacia el exterior, desde la superficie de la Tierra y en las mismas condiciones que en el apartado anterior, con velocidades  $2v_0$  y  $v_0/2$ , respectivamente. DATOS:  $g_0$  y  $R_0$ .

50. Una nave espacial de masa  $m = 5 \times 10^3$  kg, con los motores apagados, describe una órbita circular de radio  $r = 2,55 \times 10^7$  m en torno a la Tierra. Calcular el trabajo que tendrían que realizar, como mínimo, los motores de la nave para escapar de la atracción gravitatoria de la Tierra. DATOS:  $G = 6,67 \times 10^{-11}$  N · m<sup>2</sup> kg<sup>-2</sup>,  $M_0 = 5,98 \times 10^{24}$  kg.

51. Una nave espacial describe órbitas circulares, en torno a la Tierra, de radio 20 000 km. ¿En cuánto ha de incrementar su velocidad para conseguir la velocidad de escape?  $R_0 = 6\,370$  km.

52. Deducir la tercera ley de Kepler para órbitas elípticas.

53. Expresar la excentricidad de una órbita elíptica en función de las distancias del apogeo y perigeo.

54. Para un planeta en órbita elíptica en torno a una estrella de masa M, obtener la expresión de la excentricidad de la órbita en función de la energía total y del momento angular orbital del planeta.

55. Un satélite artificial es colocado por un cohete a una altura de 1 000 km sobre la Tierra y con una velocidad transversal de 9 000 m/s. 1) Comprobar que la trayectoria posterior del satélite será elíptica. 2) Calcular su máximo alejamiento de la Tierra. 3) Calcular el período orbital. Radio de la Tierra  $R_0 = 6\,370$  km.

56. Una nave espacial de 10 000 kg describe una trayectoria elíptica en torno a la Tierra, con unas distancias mínimas y máxima, respecto del centro de ésta, de 10 000 km y 20 000 km, respectivamente. Cuando se encuentra en el apogeo de su trayectoria expulsa gases hacia delante 500 kg de gases, con lo que reduce su velocidad a la justa para tener un nuevo perigeo de 9 000 km. Calcular la velocidad de salida de los gases respecto de la Tierra en el frenado, suponiendo que la emisión es instantánea. Radio de la Tierra  $R_0 = 6\,379$  km, intensidad de la gravedad en su superficie 9,8 m/s<sup>2</sup>.

57. Las distancias más próximas y más alejada de la Tierra al Sol en su órbita son de  $1,47 \times 10^{11}$  m y de  $1,52 \times 10^{11}$  m respectivamente. Considerando la masa del Sol como  $M_S = 2 \times 10^{30}$  kg y  $G = 6,67 \times 10^{-11}$  N · m<sup>2</sup> kg<sup>-2</sup>, calcular las velocidades mínima y máxima del movimiento orbital de la Tierra.

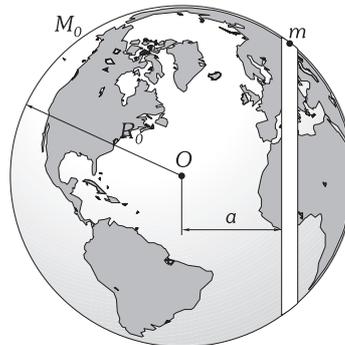
58. Calcular la intensidad del campo gravitatorio debido a un volumen cilíndrico muy largo, homogéneo, de densidad  $\rho$  y radio R en puntos situados: 1)  $r > R$ . 2)  $r < R$ .

59. Se tiene un cascarón esférico hueco, de radios interior  $R_1$  y exterior  $R_2$ , y densidad uniforme  $\rho$ . Para las zonas  $r \leq R_1$ ,  $R_1 \leq r \leq R_2$  y  $r \geq R_2$ , siendo r la distancia al centro del cascarón, calcular: 1) El vector intensidad de campo gravitatorio. 2) El potencial gravitatorio.

60. Supuesta la Tierra esférica de radio  $R_0$  y homogénea (densidad constante), calcular la profundidad a que debe introducirse un cuerpo para que su peso sea el mismo que a una altura h sobre su superficie.

61. Si la Tierra fuese homogénea y se hiciese un conducto recto de polo a polo, al dejar caer por él un cuerpo desde uno de los polos adquiriría un MAS. ¿Por qué? Calcular el período de este movimiento.

62. Si la Tierra fuese homogénea y se hiciese en conducto recto como se indica en la figura, al dejar caer por él un cuerpo de masa m adquiriría un movimiento vibratorio armónico. ¿Por qué? Calcular el período de ese movimiento. Suponer que no existen rozamientos entre el cuerpo y las paredes del conducto.



Problema XI-62.

63. Calcular la energía potencial que posee una masa  $M \ll M_0$  en el interior de la Tierra en un punto situado a una profundidad h, supuesta ésta homogénea y esférica de radio  $R_0$  y densidad  $\rho$ .

# CAPÍTULO XII

## ESTUDIO BÁSICO DE LA ESTRUCTURA DE LA MATERIA. MECÁNICA DE FLUIDOS

### A) ESTUDIO BÁSICO DE LA ESTRUCTURA DE LA MATERIA

Hemos estudiado la Mecánica de la partícula y del sólido rígido, vamos a analizar en éste y sucesivos capítulos la MECÁNICA DEL SÓLIDO DEFORMABLE Y LA DE LOS FLUIDOS (*líquidos y gases*); para comprenderlas necesitamos recordar al lector los fundamentos básicos de la estructura de la materia que, en gran parte, deben ser familiares a los que hayan hecho un curso elemental de Física y Química\*; también manejaremos los conceptos de calor, presión y de la magnitud fundamental temperatura\*\* cuya unidad patrón hemos definido en el párrafo I-11. De todas formas, tenemos que decir que hoy por hoy no contamos con una teoría general de la materia para todo lo que ocurre en la naturaleza, sin embargo, nuestro conocimiento de la naturaleza se ha ampliado enormemente en todas las direcciones en el transcurso del siglo XX; debido a la mecánica cuántica se han descubierto aspectos de la materia que antes no cabía ni soñar. Podemos decir, por ejemplo, que actualmente se comprenden bastante bien las propiedades macroscópicas de la materia y de los fenómenos químicos que en ella ocurren, pudiéndose responder a cuestiones que la Mecánica Clásica no puede contestar; en nuestra exposición tendremos que recurrir a frases tales como la Mecánica Cuántica demuestra..., que para el estudiante de Física Clásica le tiene que ser suficiente, formulándose una especie de «dogma de fe» de muchas cuestiones que cuantitativamente demostrará con toda su formalidad si continua sus estudios de Física,

Para finalizar esta introducción hay que decir que no es posible en sucesivos capítulos, separar el análisis de las propiedades de la materia en el estudio de los tres estados de agregación, puesto que están basados generalmente en conceptos, modelos y propiedades que son extensibles a los tres o se solapan unos con otros.

### XII – 1. Átomos y moléculas. Masa molecular. Mol. Número de Avogadro

El principio de conservación de la masa, enunciado en 1774 por Antoine L. de Lavoisier (1743-1794), da comienzo al conocimiento de la estructura atómica de la materia. Además confirma en sus experimentos la existencia de cuerpos simples o elementos que por medios químicos no pueden descomponerse en elementos más simples.

El estudio de las combinaciones entre los elementos demuestra que no puede variar de forma continua la proporción entre la masa de los elementos que se combinan. Joseph Louis Proust (1754-1826) enunció en 1789 la ley que lleva su nombre o también LEY DE LA PROPORCIÓN DEFINIDA O CONSTANTE: «cuando dos o más elementos (o compuestos) se unen para formar un mismo compuesto lo hacen siempre en una proporción en peso fija»; que junto con la ley enunciada en 1803 por John Dalton (1766-1844) que completa la anterior: «además cuando se combinan dos elementos según varias proporciones, la masa de uno de ellos que se une a la misma masa del otro para formar varios compuestos, están en una relación de números enteros sencillos» (Ej.: 3/4, 1/2, 2/3, 4/3, etc) a la que se le llama LEY DE LAS PROPORCIONES MÚLTIPLES, sugirieron al mismo Dalton (verdadero iniciador de la Teoría Atómica) la hipótesis atómica: «cada elemento está constituido por partículas idénticas, químicamente indivisibles, que se llaman ÁTOMOS». Existen tantos átomos diferentes como elementos diferentes.

Los átomos se unen entre sí para dar un conjunto llamado MOLÉCULA. Si los átomos que se ligan son idénticos se obtiene la molécula del correspondiente elemento (Ej.: Cl<sub>2</sub>), pudiéndose agrupar de forma estable distinto número de átomos del mismo elemento correspondiéndole distintas moléculas o variedades alotrópicas del elemento (Ej.: O<sub>2</sub> y O<sub>3</sub>); una molécula se dice que es *monoatómica* cuando no contiene más que un átomo, es decir, cuando no pueden ligarse los átomos de un mismo elemento (sólo los gases nobles y algunos metales en estado de vapor poseen moléculas monoatómicas); si los átomos que se unen no son todos idénticos se obtiene la molécula de un compuesto, siendo ésta la parte más pequeña de esa sustancia, es decir:

*Las menores partículas de un cuerpo, iguales entre sí y que conservan las propiedades inherentes al mismo, son las MOLÉCULAS.*

Una molécula de azúcar, en su pequeñez, tiene las mismas propiedades que un terrón de la misma sustancia.

\* En los capítulos XVIII y XXX profundizaremos en estas teorías.

\*\* En éste y en sucesivos capítulos puntualizaremos sobre estas magnitudes.

MASA MOLECULAR ( $M_m$ ) es las veces que la masa de una molécula contiene a una unidad adoptada como tipo de comparación. Esta unidad de masa está contenida 12 veces en la masa de un átomo de carbono isótopo 12.

La unidad empleada para la medida de masas moleculares es, así, la 1/12 parte de la masa del átomo de carbono 12 (1u).

Al afirmar que la masa molecular de nitrógeno es 28, afirmamos que una molécula de este gas contiene 28 veces a la unidad adoptada.

UNA MOLÉCULA GRAMO O MOL\* de una sustancia contiene en gramos una masa igual al número que expresa su masa molecular. ( $M_m$  expresada en g).

La masa molecular de oxígeno es 32. Una molécula gramo o MOL de oxígeno es 32 gramos de este gas.

NÚMERO DE AVOGADRO es el número de moléculas que hay en un mol de una sustancia.

El número de Avogadro es una constante universal de valor:

$$N_A = 6,022045 \times 10^{23}$$

Esta última característica hace que actualmente se tome como *unidad patrón* de CANTIDAD DE SUSTANCIA en el SI al MOL, definida como:

«La cantidad de sustancia que contiene un número de Avogadro de partículas; o lo que es lo mismo: tantas entidades elementales como átomos hay en 0,012 kg de carbono-12».

Es inmediato que el número de moles  $n$  de una masa  $m$  de una sustancia de masa molecular  $M_m$ , toma el valor:

$$n = \frac{m}{M_m}$$

**PROBLEMAS: 1 al 4.**

## XII - 2. Estructura de los átomos. Iones

Las diferentes formas de unirse los átomos para formar moléculas se deben a las distintas estructuras que presentan los átomos de cada elemento, siendo la definición de VALENCIA su interpretación práctica.

Fundamentalmente los átomos están constituidos por tres tipos de partículas: los PROTONES y NEUTRONES contenidos en el NÚCLEO central cargado positivamente, con masas  $m_p = 1,00728$  u y  $m_n = 1,00867$  u, y cargas  $q_p = e = 1,6021892$  C\*\* y nula la del neutrón, y los ELECTRONES, que se encuentran en la zona llamada CORTEZA, cada uno con la misma masa  $m_e = 0,0005486$  u (unas 1 840 veces menor que la del protón) y carga  $-e$ . La suma de cargas negativas es igual en valor absoluto a la carga positiva del núcleo, es decir, el átomo es esencialmente neutro. Por consiguiente, la carga del núcleo es un múltiplo entero de la carga del electrón:  $Ze$ ; a  $Z$  se le llama NÚMERO ATÓMICO del átomo considerado y corresponde al número de electrones de la corteza del átomo del elemento en estado neutro y al número de protones del núcleo. Este número caracteriza a los ELEMENTOS o cuerpos simples, es decir, se diferencian uno de otro por el número de protones que contiene el núcleo; se conocen 112 elementos confirmados, de los cuales 90 tienen isótopos estables o de vida media larga y el resto son sintéticos. Sin embargo, pueden tener los átomos de un mismo elemento (el mismo  $Z$ ) distinta masa atómica, debido a un desigual número de neutrones en su núcleo, a estos átomos se les llama ISÓTOPOS del elemento considerado.

De los valores numéricos dados para la masa del electrón, del protón y del neutrón, se deduce que en los átomos ésta reside esencialmente en el núcleo, siendo del orden de 2 000 a 5 000 veces la masa total de los electrones, según sea el tamaño del átomo.

Según el modelo que tenemos actualmente del átomo, MODELO MECÁNICO-CUÁNTICO, los electrones residen en lugares llamados ORBITALES (lo suponemos encerrados en volúmenes de máxima probabilidad de estancia del electrón, siendo estos de formas diferentes y con simetría central, en cuyo centro se encuentra el núcleo), correspondiéndoles a cada uno de estos energías potenciales diferentes para los electrones que poseen y, decimos que a cada orbital le corresponde un determinado nivel energético referido a cada electrón que en él reside. Tales niveles de energía son únicamente posibles cuando cumplen las reglas de cuantificación siguientes:

1. El momento angular del electrón es un múltiplo entero de  $h/2\pi$ , en la que  $h$  es la constante universal de Plank cuyo valor es:  $h = 6,626\ 176 \times 10^{-34}$  J·s.

2. Cuando un electrón pasa de un nivel a otro de menor energía emite un cuanto de energía electromagnética llamado FOTÓN, de frecuencia  $\nu$  dada por la expresión:  $E_1 - E_2 = h\nu$ , en la que

\* Ver párrafo 1-12.

\*\* Este valor se toma como unidad atómica de carga eléctrica.

$E_1$  es la energía del nivel inicial y  $E_2$  la del final. Inversamente, un fotón de energía  $h\nu$  puede hacer pasar a un electrón del nivel de energía  $E_2$  al de  $E_1$ .

Las propiedades y la forma de unirse de los átomos para formar moléculas e iones, dependen fundamentalmente, por una parte, de los niveles de energía de los orbitales ocupados por los electrones y, por otra, del número de electrones existentes en cada uno.

La pérdida o ganancia de un protón en el núcleo (ver Radioactividad en el capítulo XXX), supone la *transmutación* del elemento, es decir, el átomo del elemento que sufre la pérdida o ganancia del protón (o protones) se transforma en otro diferente, puesto que aumenta o disminuye el número  $Z$  que lo caracteriza. Sin embargo, si un átomo pierde o gana un electrón sigue siendo el mismo elemento, pero su carga neta deja de ser nula, transformándose en lo que denominamos un IÓN.

Un átomo pierde un electrón cuando a éste se le comunica la energía suficiente para alejarlo de él una distancia lo suficientemente grande comparada con sus dimensiones (a la correspondiente energía suministrada se le denomina ENERGÍA DE IONIZACIÓN cuando se le comunica al electrón que se encuentra en el orbital de máxima energía potencial, es decir, al electrón que es más fácil de extraer por encontrarse en el nivel de energía más elevado), y se convierte en un ión positivo de carga  $e$ . Cuando el átomo retiene un electrón suplementario (AFINIDAD ELECTRÓNICA), el ión que se obtiene es negativo de carga  $-e$ . Si se extraen (o se captan) más de un electrón a un mismo átomo se obtendrá un ión del mismo elemento varias veces ionizado, y su carga será positiva (o negativa) y múltiplo de  $e$ .

No solamente se pueden transformar los átomos en iones, las agrupaciones de estos y las moléculas pueden ionizarse de una forma análoga. Por lo general, la ionización resulta de la interacción (choque) de un átomo o molécula con otra partícula que posea una energía cinética suficiente, o por la interacción con una radiación electromagnética de energía suficiente (véase como ejemplo el efecto fotoeléctrico, capítulo XXVIII).

Suponiendo al átomo (núcleo y corteza) contenido en el interior de un volumen esférico, su radio, como ya se dijo en el párrafo I-22, es del orden de  $10^{-10}$  m y los radios de los núcleos se encuentran comprendidos entre  $1,2 \times 10^{-15}$  m el más pequeño, hasta aproximadamente  $9 \times 10^{-15}$  m que mide el mayor, existiendo una «laguna» en los tamaños de  $10^5$ , es decir, el radio del núcleo es del orden de  $10^5$  veces menor que el tamaño total del átomo y si tenemos en cuenta que la práctica totalidad de la masa del átomo reside en el núcleo, puede decirse que el átomo y en consecuencia la materia están prácticamente huecos.

### XII – 3. Fuerzas interatómicas e intermoleculares. Cohesión

De las tres fuerzas fundamentales (ver párrafo V-3), la electromagnética es la responsable de los enlaces entre átomos para formar moléculas y entre moléculas para formar estructuras macroscópicas (las fuerzas de Van der Waals y los puentes de Hidrógeno no son sino el resultado de complejas interacciones electromagnéticas, principalmente dipolares).

*Es evidente que toda FUERZA DE ENLACE (tanto entre átomos como entre moléculas), resulta de la composición de fuerzas atractivas y repulsivas, dependientes de la distancia  $r$  a que se encuentran los átomos o las moléculas, y solamente por realizarse un enlace si existe una distancia  $r_0$  interatómica o intermolecular tal que estén en equilibrio las fuerzas de atracción y repulsión, y para una distancia  $r > r_0$  prevalezcan las de atracción sobre las de repulsión.*

El rápido aumento que las fuerzas repulsivas experimentan al reducirse la distancia  $r$  por debajo de la posición de equilibrio  $r_0$  nos permite introducir la noción de dimensiones atómicas o moleculares que corresponderá al  $\approx r_0$ , es decir, distancia a partir de la cual las fuerzas repulsivas impiden la aproximación entre ellos cuando se encuentran en estado sólido o líquido, pudiéndose encontrar un valor aproximado de su radio medio partiendo de la densidad, de su masa molecular y del número de Avogadro.

#### PROBLEMA: 5.

Los enlaces se asemejan al modelo físico de muelles, es decir: las fuerzas de enlace entre los átomos y moléculas, se comportan como si estuvieran conectados por muelles que les permiten vibraciones alrededor de la distancia de equilibrio ( $r_0$ ).

*«Llamaremos ENERGÍA DE ENLACE al trabajo que debemos realizar para disociar (separar) una distancia lo suficientemente grande (comparada con las dimensiones de los átomos o moléculas), los átomos ligados de una molécula o dos moléculas unidas entre sí».*

La energía de enlace entre átomos suele ser del orden de  $10^{-19}$  J, que para un mol corresponden  $6 \times 10^4$  J/mol  $\approx 15$  kcal/mol. La energía de enlace entre moléculas es del orden de 10 a 100 veces menor que las interatómicas.

Para poner de manifiesto las fuerzas de enlace, someteremos a una sustancia a una deformación, la experiencia nos demuestra que aparecen fuerzas que se oponen a tal deformación. Para explicar esto consideremos la fuerza  $F(r)$  que enlaza a dos átomos o moléculas, composición de las de repulsión  $F_r$  (que en el gráfico de la Fig. XII-2A, representamos como positivas) y las de atrac-

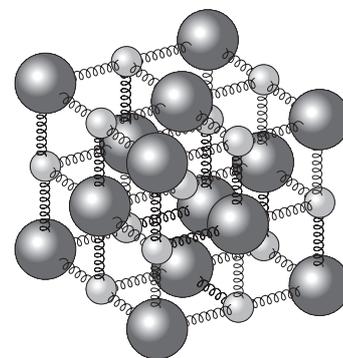


Fig. XII-1.- Las fuerzas de enlace se comportan como resortes.

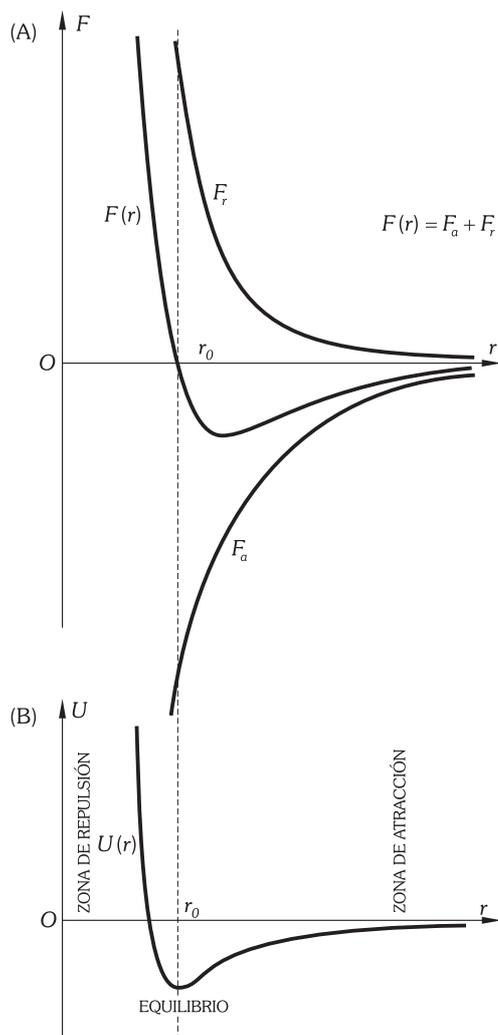


Fig. XII-2.- Curvas típicas de la fuerza de enlace  $F(r)$  y de la energía potencial de enlace  $U(r)$  entre dos átomos o moléculas en función de la distancia  $r$  entre sus centros.

ción  $F_a$  (que las representamos como negativas), ambas en función de la distancia que las separa, obteniéndose la representación gráfica adjunta. Cuando las partículas (átomos o moléculas) se encuentran en equilibrio, entonces  $r = r_0 \Rightarrow F(r) = 0$ . Si  $r < r_0 \Rightarrow F(r) > 0$ , y la fuerza de enlace entre las dos partículas es de repulsión y crece rápidamente al disminuir la distancia, lo que nos explica la práctica incompresibilidad de los sólidos y líquidos. Por último, si  $r > r_0 \Rightarrow F(r) < 0$ , y la fuerza entre las dos partículas es de atracción, que nos explican la resistencia a ser separadas las partículas que estructuran macroscópicamente una sustancia, observándose que más allá de una cierta distancia son despreciables. La energía de enlace entre dos partículas  $U(r)$ , que representamos en el gráfico de la Fig. XII-2B, es mínima para  $r = r_0$  lo que naturalmente corresponde a la posición de equilibrio.

En toda sustancia en equilibrio, formando una estructura macroscópica, las partículas que rodean a una cualquiera se encuentran en su mayor parte (exceptuamos a la que se encuentran a la distancia  $r_0$ ) a distancias  $r > r_0$  interaccionando entre sí por las fuerzas de atracción que llamamos de COHESIÓN. Naturalmente, en el interior de la sustancia en equilibrio, cada partícula atrae y es atraída por todas las que le rodean, las acciones iguales en todas las direcciones y sentidos se equilibran. Las fuerzas de cohesión en líquidos y entre sólidos y líquidos producen los llamados fenómenos moleculares y de superficie que se estudian en el capítulo XIII.

Las fuerzas electromagnéticas causantes de los enlaces, las podemos clasificar en dos tipos: las coulombianas y las de intercambio, interviniendo ambas en una relación variable y según la configuración eléctrica de los átomos y moléculas que intervienen.

Decimos que existe entre los átomos un ENLACE IÓNICO o HETEROPOLAR cuando las fuerzas que intervienen son mayoritariamente coulombianas (Ej. de la unión de los iones  $\text{Na}^+$  y  $\text{Cl}^-$  resulta la sal común cuya fórmula resultante es  $\text{NaCl}$ ). En realidad no se forman moléculas constituidas por un par de átomos aislados del resto sino que cada ión se rodea de un determinado número, llamado ÍNDICE DE COORDINACIÓN, de iones de signo contrario puesto que la atracción se ejerce en todas las direcciones, formándose de esta manera una agrupación macroscópica cristalina que llamaremos ESTRUCTURA IÓNICA (para el caso del  $\text{NaCl}$ , que representamos en la Fig. XII-3, el índice de coordinación es seis y nos indica que cada ión  $\text{Na}^+$  se rodea de seis iones  $\text{Cl}^-$ , y cada ión  $\text{Cl}^-$  de seis  $\text{Na}^+$ , adquiriendo la estructura iónica en forma de cristal cúbico). En definitiva, en un cristal iónico sus iones están empaquetados regularmente en los vértices de la red (Fig. XII-3); la fórmula de un compuesto iónico es siempre una FÓRMULA EMPÍRICA o mínima y da sólo la relación numérica más simple en que entran los átomos en el cristal a diferencia de la FÓRMULA MOLECULAR de un compuesto, que es la habitualmente utilizada, y que indica el número real de átomos que forman la molécula.

Cuando las fuerzas preponderantes son de intercambio, diremos que el enlace entre los átomos que forman la molécula es un enlace COVALENTE u HOMOPOLAR (Ej.:  $\text{H}_2$ ,  $\text{CO}_2$ ,  $\text{CH}_4^+$ ... etc). La Mecánica Cuántica demuestra que a distancias lo suficientemente pequeñas, aparecen fuerzas repulsivas que aumentan muy rápidamente cuando disminuye la distancia y cuando la distancia aumenta lo suficiente, se hacen prácticamente nulas. Por otra parte, cuando la distancia aumenta, decrecen igualmente las fuerzas de atracción pero con menor rapidez.

En los cuerpos cristalizados y especialmente en los metales, la periodicidad espacial de su estructura, junto con la vibración alrededor de la posición de equilibrio de los átomos que la componen, provocan un potencial eléctrico periódico. Los niveles de energía de los electrones que se encuentran a ese potencial no están totalmente separados, como ocurre para el caso de un átomo aislado, sino que se encuentran en BANDAS DE ENERGÍA más o menos amplias, en cuyo interior los niveles se encuentran muy próximos (ver capítulo XXIX). Cuando los átomos se aproximan entre sí aumenta la anchura de estas bandas; inversamente, si se alejan entonces las bandas se estrechan y tienden hacia el nivel del átomo aislado. La energía media de los átomos enlazados varía con la distancia interatómica como indicamos en la Fig. XII-4, pasando por un mínimo para la distancia  $r = r_0$ , que corresponde a la posición de equilibrio de los átomos enlazados; cuando  $r > r_0$ , entonces existirá una fuerza de atracción entre los átomos y, para  $r < r_0$  la fuerza que aparece será de repulsión, la cual crece muy rápidamente cuando  $r$  disminuye; a este tipo de enlace se le llama ENLACE METÁLICO. La energía de enlace en los metales es del orden de  $10^{-18}$  a  $10^{-19}$  J.

Las fuerzas de atracción entre moléculas llamadas fuerzas de Van der Waals, en muchas ocasiones, encuentran su origen en la interacción entre los dipolos eléctricos que constituyen las moléculas, las cuales disminuyen rápidamente al aumentar la distancia entre ellas, siendo, según demuestra la Mecánica Cuántica, proporcionales a  $1/r^7$ , y para distancias superiores a unas centésimas de micrómetro resultan despreciables.

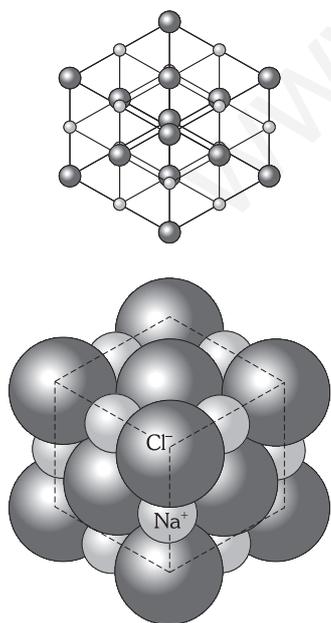


Fig. XII-3.- Red cristalina de  $\text{NaCl}$ .

Decimos de una sustancia que tiene ESTRUCTURA MOLECULAR cuando en el origen de las fuerzas de enlace intervienen las fuerzas de Van der Waals; en esta estructura, la molécula conserva su individualidad y puede ser considerada en muchos casos como una partícula. En realidad, existe toda una gama de estructuras intermedias entre iónicas, moleculares y metálicas en las que la individualidad de las moléculas se conserva más o menos.

#### XII – 4. Estados de agregación de la materia

La materia en su forma macroscópica y para todas las sustancias se encuentra normalmente en nuestro planeta en tres estados de agregación fundamentales: SÓLIDO, LÍQUIDO y GASEOSO; existen, al menos, otros dos estados extraterrestres que presentan características muy diferentes llamados de PLASMA y NUCLEÓNICO, que cada día van alcanzando más importancia en la Física de vanguardia.

Una propiedad macroscópica de la materia, con la cual estamos más o menos familiarizados es la TEMPERATURA, de la que depende el continuo movimiento, respecto al sistema de referencia CM de la sustancia en cuestión, a que se encuentran sometidos todos los átomos dentro de las moléculas, y ellas mismas consideradas cada una como un todo (partículas) y sea cual sea su estado de agregación. Esta dependencia hace que se le llame MOVIMIENTO TÉRMICO y ENERGÍA TÉRMICA a la energía a él asociada.

A medida que la temperatura de la materia la hacemos disminuir, el movimiento térmico se hace más y más lento (o a la inversa) hasta que «clásicamente» en el cero absoluto ( $-273^{\circ}\text{C}$ ) cesa. Decimos «clásicamente» puesto que realmente, y según demuestra la Mecánica Cuántica, el movimiento de las partículas nunca cesa por completo y en el cero absoluto de temperatura debe conservarse cierto movimiento oscilatorio de los átomos en el interior de la molécula, o de oscilaciones de los átomos alrededor de los nudos de la red cristalina del cuerpo sólido, a este movimiento se le denomina «vibración del punto cero».

Ni mucho menos todas las partículas de una sustancia tienen el mismo movimiento, es decir, no todas las partículas tienen la misma energía cuando se encuentra la sustancia en cuestión a una temperatura determinada; en este caso la temperatura está relacionada con la *energía molecular media*. En el capítulo XIV demostraremos que la energía cinética media de las moléculas de un gas en unas determinadas condiciones es directamente proporcional a la temperatura absoluta; cuando la materia se presenta en otros estados diferentes, la relación no es tan sencilla. En cualquier caso la magnitud macroscópica temperatura es una propiedad media que se refiere a un sistema con un gran número de moléculas.

Cualquiera que sea el estado de agregación de la materia, el movimiento de las partículas de ésta es «caótico». Estableciendo un orden dentro de este caos, en los sólidos este movimiento está más ordenado que en los líquidos y gases, ya que en los sólidos sus partículas no se alejan mucho de unas determinadas posiciones llamadas nudos y vibran a su alrededor, siendo caótico el movimiento en el sentido de que las amplitudes y las fases de las distintas partículas son diferentes y no se encuentra relación alguna entre ellas. En los líquidos el orden en el movimiento, y siempre dentro del caos, es «mayor» que en los gases, moviéndose sus partículas con cierta libertad pero conservando, en cierto modo, sus mutuas distancias (constancia de volumen pero no de forma). Las partículas de los gases, y a pesar de ser los más fáciles de estudiar, poseen el movimiento más caótico de los tres estados de agregación. El comportamiento mecánico de los sólidos, líquidos y gases puede explicarse de forma aproximada en función de la libertad de movimiento que poseen sus partículas.

Para modificar la temperatura de una sustancia es obvio que es necesario comunicarle o absorberle energía desde el exterior a ella, lo que generalmente se hace comunicando o absorbiendo energía calorífica del sistema. Si un sólido se calienta (se le comunica energía calorífica) lo suficiente y en condiciones adecuadas (dependiendo de la magnitud presión, como veremos en el capítulo XV) puede pasar al estado líquido y si seguimos calentando puede pasar al estado gaseoso; de la misma manera pero absorbiendo calor puede realizarse el proceso inverso (salvo el helio que no alcanza nunca el estado sólido). La excepción a la variación de la temperatura al comunicar energía a una sustancia está en el proceso de cambio de estado, ya que, mientras dura éste, permanece constante; teniendo también esta regla su excepción en los cuerpos sólidos amorfos (no cristalinos) en los que en su fusión y solidificación (paso de sólido a líquido y a la inversa) la temperatura no permanece constante, y este proceso es continuo y no tiene ningún momento de paso determinado; así, por ejemplo, al calentar el vidrio, la resina, ..., estos se reblandecen gradualmente, pasando al estado líquido sin solución de continuidad.

La diferencia entre los sólidos amorfos y los líquidos no es cualitativa, sino cuantitativa y no solamente por lo anteriormente dicho, sino también por la magnitud de sus viscosidades. También la diferencia entre el estado gaseoso y el estado líquido en condiciones habituales es cuantitativa y reside en que en un gas sus moléculas se encuentran muy distanciadas entre sí en comparación con sus propias dimensiones, por lo que éstas se desplazan casi libremente chocando entre sí muy de tarde en tarde, por lo que esta interacción entre ellas es nula; sin embargo en los líquidos, las distancias entre sus moléculas son del orden de magnitud de sus dimensiones, hallándose en cons-

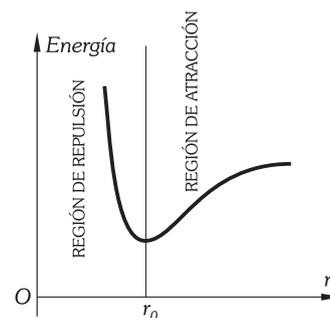


Fig. XII-4.- Variación de la energía media de los átomos metálicos enlazados.

tante interacción, condicionando fuertemente su comportamiento; consecuentemente estas diferencia de distancias intermoleculares en ambos estados hace que se diferencien en el orden de magnitud de su densidad. Sin embargo esta diferencia no es tanta, sobre todo, en el paso del estado líquido al gaseoso en el punto crítico (o próximo a él; ver párrafo XV-36), en el cual cuando se realiza éste, las condiciones son tales que en ningún momento podemos indicar donde termina un estado y comienza el otro.

La propiedad general de los sólidos amorfos, líquidos y gases es el caos entre las moléculas que lo forman, el cual acarrea la ISOTROPÍA: *igualdad de propiedades en todas las direcciones*. Esta última propiedad diferencia cualitativamente a los *sólidos amorfos (isótropos)* de los *sólidos cristalinos (anisótropos)* los cuales pasamos a describir a continuación.

ESTADO SÓLIDO: En un sólido las distancias existentes entre las partículas (átomos o moléculas consideradas como un todo) que lo estructuran, son comparables a las dimensiones de éstas, por lo que las fuerzas que forman sus enlaces son muy intensas, y en consecuencia, resisten a la acción de las fuerzas exteriores normales a su superficie (*compresión*) reaccionando con las fuerzas interatómicas e intermoleculares de repulsión, y a las tangenciales (*tracción*) que equilibran las de cohesión. Dentro de un cierto límite, en el cual el sólido no sufre ruptura, si las fuerzas externas provocan alguna deformación y el sólido recupera su forma inicial al cesar éstas, decimos que se comporta como un *medio elástico\**. En todos los casos, *un sólido tiene en su estado natural un volumen y una forma definida y ofrece una resistencia a cualquier modificación de ellos*.

Los cuerpos sólidos pueden ser CRISTALINOS y AMORFOS. Los sólidos amorfos, salvando las diferencias ya indicadas, se asemejan a los líquidos (se dice que son líquidos sobreenfriados), y las partículas que los constituyen no se encuentran distribuidas de una forma regular, no teniendo ninguna ley de simetría, presentando carácter isótropo.

La gran mayoría de los cuerpos sólidos se encuentran en estado cristalino y, bajo la influencia de las fuerzas de enlace, las partículas que lo estructuran se reparten de forma que su estabilidad sea la máxima posible (*energía potencial mínima*), distribuyéndose respetando una simetría característica de sus átomos o moléculas, que se sitúan en los nudos de una red espacial geométricamente regular, formando agrupamientos de éstos que llamamos REDES CRISTALINAS, pudiéndose obtener cualquier cristal mediante la repetición múltiple en tres direcciones diferentes de un mismo elemento estructural que llamaremos CÉLULA CRISTALINA ELEMENTAL. Según la forma de esta célula, los cristales se clasifican en siete SISTEMAS CRISTALOGRAFICOS, dependiendo cada uno de las diferentes clases de simetría.

Condicionado a la naturaleza de las partículas situadas en los nudos de la red cristalina y del carácter de las fuerzas que forman el enlace entre ellas, obtenemos cuatro tipos diferentes de redes cristalinas; IÓNICAS, ATÓMICAS, METÁLICAS y MOLECULARES.

Decimos que una red es *iónica* o *heteropolar* cuando las fuerzas de enlace entre los átomos que forman el cristal son esencialmente culombianas; por ejemplo, en los cristales de muchas sales, los átomos llevan cargas eléctricas y son iones positivos (*cationes*) o negativos (*aniones*), alternándose de manera que el cristal, en conjunto, es neutro; en su totalidad el cristal así formado puede ser considerado como una gigantesca molécula (Fig. XII-3).

En el caso de los cuerpos sólidos químicamente sencillos, los átomos que ocupan los nudos de la red espacial son neutros, la naturaleza de las fuerzas de enlace son también de carácter eléctrico (pero no culombianas) su magnitud y descripción solamente son explicables en la mecánica cuántica, estas redes las llamamos *atómicas* u *homopolares* (a este tipo pertenecen, por ejemplo, el carbono en sus modalidades de grafito y diamante, los semiconductores tales como el Ge y el Si, ...).

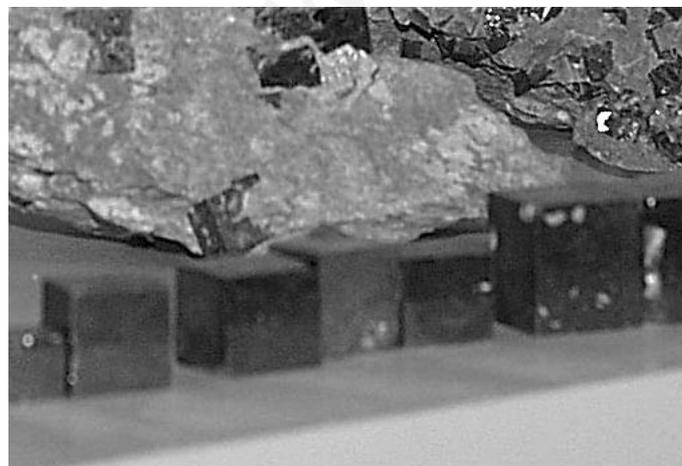


Fig. XII-5.- Cristales de pirita.

La red es *metálica*, cuando en los nudos de la red cristalina se encuentran los iones metálicos, representándonos sus electrones «perdidos» al separarse de sus átomos como una «nube electrónica» que, como un gas, se mueve entre los nudos de la red en relativo desorden produciendo las fuerzas de enlace que mantienen unidos a los iones positivos en la red, y no pudiendo por la acción de los iones abandonar los márgenes del cristal.

En las redes *moleculares*, los nudos se encuentran ocupados por moléculas orientadas de un modo determinado, las fuerzas tienen su origen en los dipolos; estas moléculas poliatómicas y su descripción y magnitud responden, de nuevo, a las explicaciones que de ellas da la mecánica cuántica. Son redes moleculares, por ejemplo, las de las siguientes sustancias: O<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, CO<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>O, el hielo, los cristales orgánicos...

Los sólidos cristalinos se presentan en la naturaleza, o bien en forma de cristales individuales regulares en todo su volumen, y que pueden presentar grandes dimensiones, formándose solamente en condiciones especiales de crecimiento y a los que la-

\* Ver capítulo XIII.

amos MONOCRISTALES (Fig. XII-5), o más generalmente en forma de POLICRISTALES constituidos por una enorme cantidad de pequeños cristales individuales a los que llamamos GRÁNULOS o CRISTALITOS, frecuentemente de dimensiones microscópicas (como, por ejemplo, los metales cuyas dimensiones de sus gránulos oscilan entre  $10^{-8}$  y  $10^{-3}$  cm, dependiendo del modo en que se elaboran o se obtienen) (Fig. XII-6). La ordenación irregular en los conglomerados de cristalitas que se enlazan entre sí por fuerzas esencialmente electromagnéticas (en el electromagnetismo, y concretamente en los dominios ferromagnéticos) párrafo XXI-41 volveremos a hablar de esta cuestión), hace que a escalas grandes en comparación con las dimensiones de los gránulos resulte isotrópica, en contraposición a su verdadera naturaleza molecular que se revela en la anisotropía de sus gránulos, en los que como en un monocristal las direcciones no son equivalentes y las propiedades físicas dependen de la dirección que se considere.

**ESTADO LÍQUIDO:** El estado líquido es un estado intermedio entre el sólido cristalino y el gaseoso teniendo propiedades semejantes a ambos. Una primera semejanza al estado sólido es la resistencia que oponen a la compresión, sin embargo, no resisten las fuerzas de tracción al igual que los gases.

La incompresibilidad de los líquidos está estrechamente relacionada con el conocido Teorema de Pascal, característico de los líquidos, según el cuál si se comprime un líquido en equilibrio con un émbolo, por ejemplo, la presión ejercida se transmite íntegramente a todos sus puntos y aumentará en el mismo valor en todas las paredes del recipiente que lo contiene. Al no compensar los líquidos las fuerzas tangenciales (cizalladura) en condiciones de equilibrio, las fuerzas debidas a la presión en las paredes del recipiente serán siempre perpendiculares a la superficie de dichas paredes.

Al comunicar energía calorífica a un sólido el movimiento de sus partículas aumenta y llega un momento en que se desmorona el edificio cristalino y todo ocurre como si las partículas que lo constituyen pudieran deslizarse fácilmente unas entre las otras; se dice que se produce la *fusión* del sólido pasando al estado líquido.

Como ocurre en los sólidos, en los líquidos las distancias entre sus partículas son comparables a las dimensiones de las mismas, en consecuencia, las fuerzas de enlace entre ellas toman un considerable valor, pero no son lo suficientemente grandes como para mantener un determinado orden estructural, por lo que, como los gases, *no tienen una forma definida, pero conservan su volumen* a semejanza de los sólidos.

Si comunicamos calor a un líquido aumenta su movimiento térmico, llegando un determinado momento en que sus partículas rompen casi totalmente las fuerzas de enlace entre ellas y abandonan el volumen líquido pasando a moverse casi con total libertad; se dice que se produce la *ebullición* del líquido pasando al estado gaseoso.

El hecho de que el *calor latente de fusión* (se llama en general *calor latente de cambio de estado de una sustancia* a la cantidad de calor necesaria para hacer el cambio a 1 g de tal sustancia) sea normalmente mucho menor que el de ebullición, se explica porque en la fusión tiene lugar solamente un debilitamiento de las fuerzas de enlace entre sus partículas, en cambio la ebullición supone una ruptura prácticamente total de dichas fuerzas, implicando un aporte mayor de energía. También, dependiendo de las fuerzas de enlace entre las partículas de cada sustancia, se verificará el cambio de estado a distintos niveles de energía térmica (diferentes temperaturas); obviamente, se necesitará un nivel térmico mayor (mayor temperatura) para aquellas sustancias en que las fuerzas de enlace son mayores.

Como hemos dicho, las fuerzas de enlace en los líquidos y en los gases no son lo suficientemente fuertes como para mantener las partículas que los componen en posiciones fijas, moviéndose de forma «herrática» o al «azar». La relativa rapidez de DIFUSIÓN (*fenómeno que se realiza al poner dos o más sistemas en contacto en un recinto, mezclándose o «difundiéndose» unas con otras las partículas que los componen hasta que, transcurrido un cierto tiempo, se encuentran uniformemente por todo el recinto*) entre líquidos o gases, es una prueba del movimiento térmico de sus partículas. Todos los gases entre sí verifican este fenómeno, en los líquidos hay que exceptuar los llamados *no miscibles*, en determinadas condiciones también puede realizarse entre sólidos y entre los tres estados entre sí, diferenciándose unas de otras en el tiempo que dura la difusión, siendo más lento cuanto más fuerte sean las fuerzas de enlace entre sus moléculas.

También constituye una evidencia del movimiento caótico de las partículas en el interior de los líquidos el fenómeno de *evaporación* (que junto con el de *ebullición* son las dos formas posibles de *vaporización*: paso de líquido a vapor), que ocurre a cualquier temperatura, concebible por la existencia de partículas con velocidades lo suficientemente grandes como para abandonar la masa líquida y pasar al estado gaseoso, evidenciando la existencia de una gamma de velocidades.

Otra confirmación ingeniosa del movimiento desordenado de las partículas en los líquidos y gases, fue realizada en 1827 por Robert Brown (1773-1858), observando al microscopio, como unas diminutas partículas, miles de veces más grandes que las moléculas del fluido (líquido o gas), suspendidas en él se encontraban en movimiento constante y desordenado, que no depende de las causas externas y no cesa nunca, al cual se le llamo MOVIMIENTO BROWNIANO, que es una manifestación del movimiento caótico interno de las partículas que constituyen el fluido, a causa del

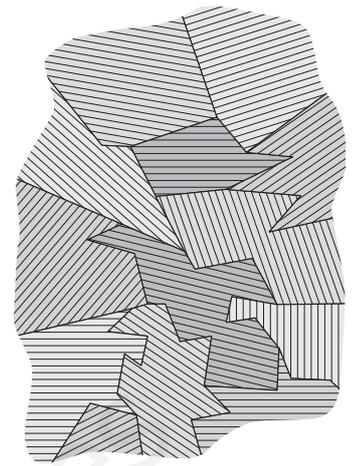


Fig. XII-6.- Estructura microcristalina de un metal.

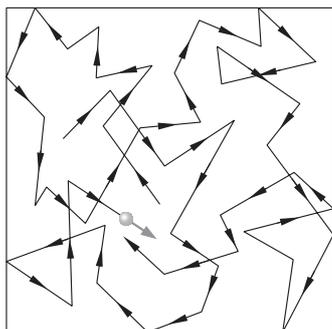


Fig. XII-7.- Movimiento Browniano.

cuál las diminutas partículas en suspensión, son impulsadas asimétricamente, es decir, con un impulso total no nulo, provocando su movimiento herrático. (Fig. XII-7)

A pesar del movimiento de las partículas de un líquido y de acuerdo con las medidas realizadas radioscópicamente, resulta que en lo que se refiere a la disposición de sus partículas, éstas ocupan una posición regular intermedia respecto del estado cristalino al cual le corresponde un *orden de largo alcance*, que implica la disposición regular de sus partículas respecto de cualquiera de ellas y en todo su volumen; lo que queremos decir, es que en los líquidos se observa un *orden de corto alcance*, lo que significa, que en relación con cualquiera de sus partículas, la disposición de cualquiera de sus vecinas es regular (ordenada), sin embargo, a medida que nos alejamos de la partícula considerada, la disposición de ellas va perdiendo regularidad con bastante rapidez, desapareciendo por completo.

Debido a la carencia del orden de largo alcance *los líquidos son isótropos* respecto de sus propiedades físicas salvo en algunas excepciones, como son algunos líquidos orgánicos de grandes moléculas generalmente en forma alargada, en los que en su disposición se observa una regular ordenación en lo que se refiere a la orientación de ellas en considerables volúmenes y lo mismo que en los líquidos normales, entre sus moléculas no se observa orden de largo alcance en su mutua disposición, y como ellos los hay que tienen fácil movilidad (poco viscosas) y de menor movimiento (de gran viscosidad), a estos últimos los llamamos CRISTALES LÍQUIDOS cuya anisotropía se observa sobre todo en sus propiedades ópticas.

ESTADO GASEOSO: Poco queda por decir del estado gaseoso que no se haya dicho ya, pero a pesar de parecer reiterativos, describiremos, para este apartado, las propiedades que lo analizan.

En un gas, el número de partículas que lo componen por unidad de volumen es, en general, mucho menor que en los líquidos, la distancia media entre sus partículas es lo suficientemente grande como para que las fuerzas de enlace entre ellas sean prácticamente despreciables, y en consecuencia se desplazan libremente. No obstante no hay que considerar que la interacción de las partículas de un gas no existe en absoluto, al contrario, las partículas, aunque muy raramente, chocan entre sí y estas colisiones son esenciales en el establecimiento de determinadas propiedades térmicas. En los choques las partículas se aproximan entre sí lo suficiente como para entrar en acción las fuerzas de repulsión que componen las de enlace, produciéndoles un brusco cambio de dirección en su movimiento y «generalmente» el choque es elástico (decimos «generalmente» ya que puede existir, aunque aún más raramente, un choque no elástico, cuando la energía de las partículas del gas es lo suficientemente grande como para producirles una transformación interna, por ejemplo: ionización, formación de nuevas moléculas con nuevos enlaces internos...). En resumen, en un gas sus moléculas poseen un movimiento continuo y desordenado (caótico) cambiando su dirección y velocidad cuando se produce un choque entre ellas o con las paredes del recipiente que las contiene, teniendo un movimiento libre (rectilíneo y uniforme) entre choque y choque. Por efecto de los choques, que tienden a alejar las partículas entre sí, los gases tienden siempre a ocupar el máximo volumen.

Teniendo en cuenta el enorme número de partículas que componen un volumen macroscópico de un gas y su estado de caos, las propiedades físicas no dependen de las direcciones, siendo éstos esencialmente *isótropos*.

ESTADO DE PLASMA: Se denomina materia en estado de plasma a una especie de gas en el que casi todos los átomos que lo forman están ionizados faltándoles a sus núcleos uno o varios de los electrones que lo neutralizan, y estos electrones se mueven libremente por el interior del sistema así formado. Un estado tal solo puede darse de manera estable en condiciones muy especiales, como las que se dan en la ionosfera terrestre o a elevadísimas temperaturas de las estrellas. Esta «nube electrónica», formada por igual cantidad de cargas positivas y negativas, es perfectamente conductora como si fuera un metal, y tiene viscosidad como si fuera un líquido.

El estudio del estado de plasma constituye la parte de la Física llamada Magnetohidrodinámica y en ella se estudian las reacciones termonucleares\*. La primera reacción termonuclear conocida, producida en la Tierra que el seno del plasma, en la que se alcanzaron ~ 35 millones de grados durante milésimas de segundo, fue realizada en el año 1960 en el laboratorio de Radiación Lawrence de California.

ESTADO NUCLÉICO: Al estallar apocalípticamente una estrella, mientras sus capas superiores son lanzadas al espacio con velocidades de miles de kilómetros por segundo, el núcleo se contrae hasta alcanzar una densidad muy alta, del orden de  $10^4$  g/cm<sup>3</sup>, adoptando la materia un nuevo estado llamado *nucléico*, y a la estrella así formada ESTRELLA DE NEUTRONES, en la que los electrones de los átomos, debido a la altísima gravedad existente, son captados por los protones convirtiéndolos en neutrones unidos entre sí por fuerzas de enlace muy elevada, y sin dejar apenas espacios libres entre ellos.

\* Capítulo XXX.

**B) HIDROSTÁTICA**

**XII – 5. Definición de presión. Unidades**

«PRESIÓN es una magnitud escalar igual a la fuerza ejercida sobre la unidad de superficie».

$$p = \frac{F}{A} \Leftrightarrow F = p A$$

Como la fuerza  $F$ , que actúa sobre la superficie  $A$ , puede no ser constante, la fórmula indicada nos da una presión media. La presión en un punto es:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$

De aquí se obtiene:

$$dF = p dA \Leftrightarrow F = \int_A p dA$$

La ecuación de dimensiones de la presión es en los sistemas CGS y SI:  $[p] = [F]/[A] = MLT^{-2}/L^2 = ML^{-1} T^{-2}$ ; en el sistema TÉCNICO es:  $[p] = [F]/[A] = FL/L^2 = FL^{-2}$ .

Las unidades de presión son el PASCAL (Pa) = 1 N/m<sup>2</sup> en el SI, la BARIA = 1 dyn/cm<sup>2</sup> en el CGS y el kp/m<sup>2</sup> es el TÉCNICO.

La equivalencia entre tales unidades es: 1 Pa = 10 dyn/cm<sup>2</sup> = 10 barias; 1 kp/m<sup>2</sup> = 9,8 Pa = 98 barias.

Otras unidades de presión en uso son las siguientes:

El BAR: 1 bar = 10<sup>5</sup> Pa, y el MILIBAR: 1 milibar = 100 Pa

La ATMÓSFERA FÍSICA (atm): es la presión ejercida en la base por una columna de mercurio de 760 mm de altura\*. 1 atm = 101 325 Pa.

La atmósfera técnica (at ó ata): 1 at = 1 kp/cm<sup>2</sup> = 98 000 Pa

Industrialmente la atmósfera física (1 atm = 1,033 kp/cm<sup>2</sup>) y la técnica (1 a = 1 kp/cm<sup>2</sup>) se confunden.

El TORR o mm de mercurio: 1 torr = 1 mm Hg = 1/760 atm.

**XII – 6. Fluidos. Presión en el interior de un fluido**

Vamos a estudiar en este y sucesivos capítulos los efectos que producen las fuerzas debidas a la acción de las presiones que ejercen los FLUIDOS, *entendiendo como tales a toda sustancia continua que puede fluir. Los fluidos pueden ser gaseosos o líquidos.*

Un fluido, en estado de equilibrio, es incapaz de soportar una fuerza tangente a la superficie sobre la que se ejerce (cizalladura)\*\* ya que en este caso las diferentes capas del fluido resbalarían unas sobre otras (es esa incapacidad de los fluidos para resistir fuerzas tangenciales la que les permite cambiar su forma o fluir) y dejaría de estar en equilibrio. Podemos afirmar que:

*Sobre una superficie cualquiera, dentro de fluido en equilibrio, la fuerza correspondiente a la presión actúa normalmente a la superficie.*

Si no fuese así podríamos descomponer la fuerza que actúa,  $F$  (Fig. XII-8), en otras dos; una  $F_n$  normal a la superficie, anulada por su reacción, y  $F_r$  en la dirección de la superficie, que haría moverse al líquido a lo largo de ella, dejando de estar en equilibrio.

*La fuerza ejercida por el propio fluido en equilibrio en uno cualquiera de sus puntos actúa en todas las direcciones y sentidos.*

Se comprende esta afirmación considerando que la superficie mencionada la podemos orientar dentro del fluido en cualquier posición, siendo siempre la fuerza normal a ella.

*La presión es una magnitud escalar, ya que no tiene carácter direccional y es una característica del punto del fluido en equilibrio que consideremos y dependerá de sus coordenadas; es decir, será una función de punto.*

En efecto: Consideremos un punto  $P$  en el interior del fluido en equilibrio y tomemos un punto  $O$  infinitamente próximo a él que tomamos como origen de un sistema  $(O X Y Z)$  de ejes cartesianos de referencia (Fig. XII-9). Los planos  $XY$ ,  $YZ$ ,  $ZX$  y el elemento de superficie  $dA$  determinan un tetraedro elemental que supondremos parcialmente solidificado. Sobre el elemento de área  $dA$  (cara  $ABC$  del tetraedro) se ejerce una fuerza  $dF = p dA$  que por ser normal a la superficie y hacia el interior, tiene por componentes:

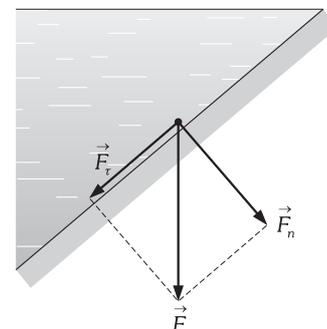


Fig. XII-8.- Si la fuerza  $F$  no tuviera la dirección normal a la superficie, su componente  $F_r$  haría moverse al líquido y éste no estaría en equilibrio.

\* Párrafo XII-16.  
\*\* Párrafo XIII-5.

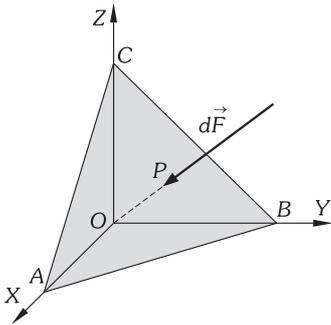


Fig. XII-9.- Para demostrar que la presión es una magnitud escalar.

$$dF_x = -p \, dA \cos \alpha \quad dF_y = -p \, dA \cos \beta \quad dF_z = -p \, dA \cos \gamma$$

donde  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son los ángulos que forma la normal a la superficie  $dA$  con los ejes.

La fuerza ejercida sobre la cara  $OBC$  de área  $dA_1$  será  $p_1 \, dA_1$ , siendo  $p_1$  la presión sobre dicha cara, y es paralela al eje  $OX$ ; la fuerza ejercida sobre  $OAC$  será  $p_2 \, dA_2$  paralela al eje  $OY$  y sobre  $OAB$  actuará  $p_3 \, dA_3$  paralela al eje  $OZ$ .

Al encontrarse el tetraedro en equilibrio, la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre él tendrá que ser nula y considerando despreciables las fuerzas gravitacionales, obtenemos:

$$-p \, dA \cos \alpha + p_1 \, dA_1 = 0 \quad -p \, dA \cos \beta + p_2 \, dA_2 = 0 \quad -p \, dA \cos \gamma + p_3 \, dA_3 = 0 \quad (1)$$

y como  $dA_1$ ,  $dA_2$  y  $dA_3$  son las proyecciones de  $dA$ , resulta:

$$dA_1 = dA \cos \alpha \quad dA_2 = dA \cos \beta \quad dA_3 = dA \cos \gamma$$

sustituyendo en (1) se obtiene:

$$p = p_1 = p_2 = p_3$$

obsérvese que el error cometido al despreciar las fuerzas de gravitación va disminuyendo a medida que  $O$  se aproxima a  $P$ , y en el límite no existe error alguno, y como las cuatro presiones ejercidas sobre elementos de superficie distintamente orientados y que pasan por  $P$  son iguales, queda demostrado el carácter escalar de la presión.

Sin embargo la fuerza debida a la presión es una magnitud vectorial, cuya dirección es perpendicular a la superficie sobre la que actúa, y de sentido hacia el interior del cuerpo al que pertenece la superficie. En la ecuación:  $dF = p \, dA$  el factor que hace vector al segundo miembro es la superficie, la cual, en este caso, se representa por un vector, perpendicular al elemento de superficie, y cuyo módulo es la medida de la superficie. Así escribiremos:

$$dF = p \, dA = p \, dA \, \mathbf{n}$$

siendo  $\mathbf{n}$  el vector unitario en la dirección indicada.

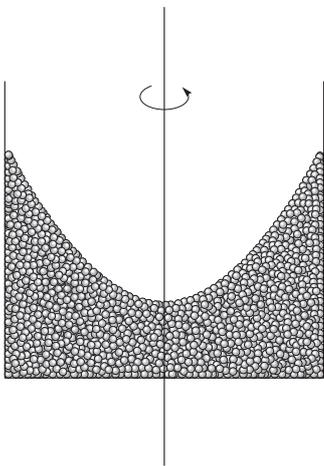


Fig. XII-10.- Forma adoptada por los perdigones contenidos dentro de un cilindro que gira alrededor de su eje con velocidad angular constante.

### XII - 7. Hipótesis y definiciones

Para realizar el estudio de líquidos y gases nos imaginamos un modelo al que llamaremos FLUIDOS PERFECTOS, en el que las fuerzas de cohesión las consideramos nulas y no tenemos en cuenta el movimiento térmico de sus partículas en su interior, en ellos «una de sus partes se puede desplazar en su propio seno, sin efectuar esfuerzo ni trabajo alguno, contra las fuerzas de cohesión». (CONDICIÓN DE PERFECTA MOVILIDAD).

El estudio de los líquidos en equilibrio constituye la HIDROSTÁTICA. Los LÍQUIDOS son cuerpos que tienen volumen determinado y adoptan la forma de la vasija que los contiene.

Consideraremos a los líquidos perfectos como incompresibles: ejerciendo compresiones sobre ellos, su volumen permanece constante. (En realidad los líquidos no gozan de la perfecta movilidad ni de la incompresibilidad).

«Diremos que un líquido está en EQUILIBRIO cuando no existe movimiento relativo entre las partículas que lo componen».

Así por ejemplo, son casos de equilibrio relativo, un líquido contenido en un recipiente cilíndrico girando alrededor de su eje de simetría con velocidad angular constante, un líquido en el interior de una cisterna sometido a una aceleración rectilínea constante; un líquido en REPOSO (en un sistema inercial) es también un caso particular de equilibrio.

Para comprender la idea de líquido en equilibrio relativo, analicemos el caso, que consideramos similar, de unos perdigones contenidos dentro de un cilindro que gira alrededor de su eje de simetría con velocidad angular constante; los perdigones adoptan la forma indicada en la Fig. XII-10, en posiciones que no varían con relación a los demás (no existe movimiento relativo de unos perdigones respecto de los otros). Cualquier perdigón, observado desde el sistema no inercial giratorio solidario al cilindro, estará sometido a la fuerza centrífuga  $F_c$  y a su peso  $P$ , la resultante  $R$  (Fig. XII-11) haría moverse a éste entre los demás perdigones que le rodean; si, como ocurre, no lo hace, es porque se lo impiden los demás perdigones por el efecto (presión) que ejercen sobre él, contrarrestando así a  $R$  para que exista equilibrio.

Los líquidos en reposo, en pequeñas extensiones, tienen una superficie libre plana y horizontal. Si así no fuese, las partículas de la superficie del líquido irían espontáneamente de las posiciones de mayor altura a las de menor altura.

En resumen: el estudio de los líquidos con un grado bastante elevado de exactitud, y para la mayoría de los casos, lo realizaremos considerando a estos como absolutamente incompresibles (ejerciendo fuerzas normales a su superficie límite, su volumen permanecerá constante) y supondremos que al desplazarse una de sus partes en su seno, no aparecen fuerzas internas de rozamiento (no hay viscosidad). Este líquido incompresible y no viscoso lo denominamos LÍQUIDO PERFECTO, el cual es una aproximación a los líquidos reales.

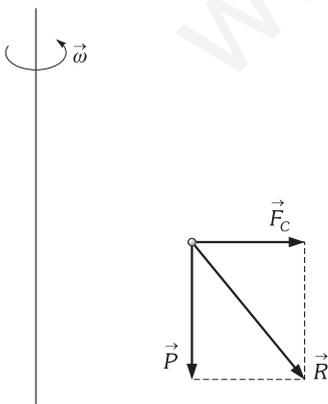


Fig. XII-11.- Sobre el perdigón aislado del conjunto, y observado desde el SNI solidario al cilindro, actúan  $F_c$  y  $P$ , dando como resultante  $R$ .

**XII – 8. Ecuaciones fundamentales de la estática de fluidos**

Consideremos un volumen elemental  $d\tau$  en el interior de un fluido en equilibrio, que tenga forma de paralelepípedo rectángulo de aristas  $dx$ ,  $dy$  y  $dz$  (Fig. XII-12) entonces:

$$d\tau = dx \, dy \, dz$$

si  $p = p(x, y, z)$  es la presión (función de punto) que el fluido ejerce sobre el punto  $M(x, y, z)$  situado en el centro del paralelepípedo, entonces la fuerza debida a la presión sobre la cara anterior del dibujo será:

$$dF_1 = - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy \, dz \, \mathbf{i}$$

y sobre la cara posterior:

$$dF_2 = \left( p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy \, dz \, \mathbf{i}$$

luego la componente de las fuerzas de presión según el eje OX vale:

$$dF_x = dF_1 + dF_2 = - \frac{\partial p}{\partial x} dx \, dy \, dz \, \mathbf{i} = - \frac{\partial p}{\partial x} d\tau \, \mathbf{i}$$

De la misma forma se obtendrá:

$$dF_y = - \frac{\partial p}{\partial y} d\tau \, \mathbf{j} \quad dF_z = - \frac{\partial p}{\partial z} d\tau \, \mathbf{k}$$

luego la fuerza debida a la presión que actúa sobre el paralelepípedo resulta:

$$dF = - \left( \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k} \right) d\tau = - d\tau \, \mathbf{grad} \, p \tag{2}$$

Llamando  $\rho$  a la densidad del líquido y  $dM$  a la masa del paralelepípedo; como:

$$\rho = \frac{dM}{d\tau} \quad \Leftrightarrow \quad d\tau = \frac{dM}{\rho}$$

que sustituida en (2) nos queda:

$$dF = - \frac{dM}{\rho} \, \mathbf{grad} \, p$$

como el fluido lo hemos considerado en equilibrio, la suma de las fuerzas de presión y las fuerzas exteriores debe ser nula. Considerando, en general, que el fluido se encuentra en un campo de fuerzas de intensidad  $\mathbf{f}$  (fuerza por unidad de masa), es decir:  $\mathbf{f} = dF/dM$  el valor de las fuerzas externas será  $\mathbf{f} \, dM$  y se obtiene:

$$\mathbf{f} \, dM + dF = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f} \, dM - \frac{dM}{\rho} \, \mathbf{grad} \, p = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{f} = \frac{1}{\rho} \, \mathbf{grad} \, p} \tag{3}$$

que es la ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA ESTÁTICA DE FLUIDOS.

Multiplicando escalarmente ambos miembros de la ecuación anterior por  $d\mathbf{r} = dx \, \mathbf{i} + dy \, \mathbf{j} + dz \, \mathbf{k}$  y teniendo en cuenta que  $d\mathbf{r} \cdot \mathbf{grad} \, p = dp$ , en la que  $dp$  es la diferencia de presiones entre dos puntos del fluido sometido al campo de fuerzas de intensidad  $\mathbf{f}$  y que distan entre sí  $d\mathbf{r}$ , deducimos que:

$$\boxed{dp = \rho \, \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}}$$

que es otra forma de expresar la ecuación fundamental de la estática de fluidos.

Para integrar la ecuación anterior tendremos que conocer en cada caso:  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x, y, z)$ . Aunque la presión, en general, dependerá de la posición del punto [ $p = p(x, y, z)$ ], hay superficies de puntos de igual presión: ISOBARAS; para obtener la familia de superficies isobaras correspondientes a cada caso, y en las que  $dp = 0$ , habrá que integrar la ecuación:

$$\boxed{\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0}$$

Si el campo de fuerzas a que está sometido el fluido es el gravitatorio, la fuerza (peso) resulta:  $\mathbf{F} = - \mathbf{grad} \, U$  y como:  $\mathbf{g} = \mathbf{F}/M = - \mathbf{grad} \, V$  es decir: dicho campo deriva de un potencial  $V$ , como ya vimos en el capítulo XI; sustituyendo en (3) nos queda:

$$\mathbf{grad} \, p + \rho \, \mathbf{grad} \, V = 0$$

Si hacemos  $p = cte$ , se tiene:

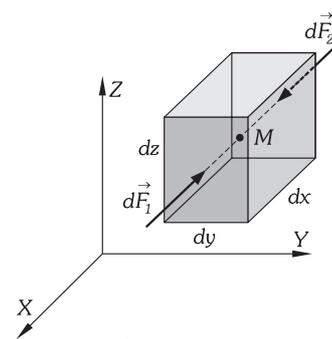


Fig. XII-12.- Volumen elemental en el interior de un fluido.

$$\text{grad } p = 0 \Rightarrow \text{grad } V = 0 \Rightarrow V = cte$$

es decir: «En un fluido en equilibrio bajo la acción de un campo de fuerzas derivado de un potencial las superficies isobaras son también superficies equipotenciales». Es inmediato que al ser isobara la superficie libre de un líquido, será también equipotencial. En consecuencia, para grandes extensiones de líquido y en, campo gravitacional, las isobaras son superficies esféricas (forma que adopta la superficie libre de los mares).

Teniendo en cuenta las propiedades del vector gradiente, y multiplicando escalarmente por  $dr$  la expresión anterior, obtenemos:

$$\text{grad } p \cdot dr + \rho \text{ grad } V \cdot dr = 0 \Rightarrow dp + \rho dV = 0 \Rightarrow \boxed{dp = -\rho dV} \quad (4)$$

De esta expresión obtenemos:  $\rho = -dp/dV$ , es decir, si  $V$  es constante, la densidad también lo es: «Las superficies equipotenciales son también isopíricas».

**XII - 9. Teorema fundamental de la hidrostática (líquidos en reposo en el campo gravitatorio)**

«La diferencia de presión entre dos puntos de un líquido en reposo, bajo la acción de la gravedad, es igual al peso de una columna líquida que tiene por base la unidad de superficie y por altura la diferencia de alturas de los puntos».

En efecto: si el fluido se encuentra sometido únicamente a la acción de las fuerzas gravitacionales:  $f = -gk$ , y sustituyendo en (3):

$$-gk = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} i + \frac{\partial p}{\partial y} j + \frac{\partial p}{\partial z} k \right)$$

en la que  $\partial p/\partial x = \partial p/\partial y = 0$ , ya que la presión no varía con  $x$  o  $y$ , es la misma en un plano horizontal. Podemos por tanto escribir la expresión anterior con derivadas totales de la forma:

$$-g = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} \Rightarrow dp = -\rho g dz$$

e integrando entre los puntos A y B (Fig. XII-13) separados una distancia vertical  $h$ :

$$p_A - p_B = -\rho g \int_{z_B}^{z_A} dz = \rho g (z_B - z_A) = \rho g [-h_B - (-h_A)] = \rho g (h_A - h_B)$$

y en definitiva:

$$\boxed{p_A - p_B = \rho gh}$$

ecuación que expresa el teorema enunciado.

De una forma elemental podríamos demostrar este teorema de la siguiente forma: *Demostraremos primero que se cumple el teorema para puntos situados en la misma vertical* (Fig. XII-14). Consideremos en el seno de un líquido un cilindro, de eje vertical y de base unidad, del mismo líquido *parcialmente solidificado*; es decir, conservando sus propiedades, pero separado idealmente del resto del líquido. Las fuerzas que actúan sobre tal cilindro son: fuerzas sobre la superficie lateral, que se anulan por simetría; las fuerzas originadas por las presiones sobre las bases, cuyos módulos son iguales al valor de las presiones por ser las bases de área unidad, y por último, el peso  $-P$  del cilindro. Para que éste permanezca en equilibrio es necesario que la suma de las fuerzas hacia abajo, sea igual a la fuerza hacia arriba:

$$P + p_B = p_A \Rightarrow p_A - p_B = P$$

que es lo que se pretendía demostrar. Esta condición se cumple igualmente para los líquidos en equilibrio relativo.

Como consecuencia de lo anterior, probemos la siguiente afirmación: «Dentro de un líquido en equilibrio y en todos los puntos de una superficie horizontal hay la misma presión» (esto no se cumple en general para líquidos en equilibrio relativo). Sean los puntos A y A' y consideremos otros dos B y B' situados en la superficie del líquido y en las respectivas verticales de los primeros. El peso  $-P$  de las columnas representadas en la figura XII-15 es el mismo por tener la misma base y altura y estar formadas por el mismo líquido. Como:  $p_A - p_B = P$  y  $p_{A'} - p_{B'} = P$ , y además:  $p_B = p_{B'}$ , por ser ambas presiones las que ejerce la atmósfera, obtenemos:

$$\boxed{p_A = p_{A'}}$$

que es lo que se quería demostrar.

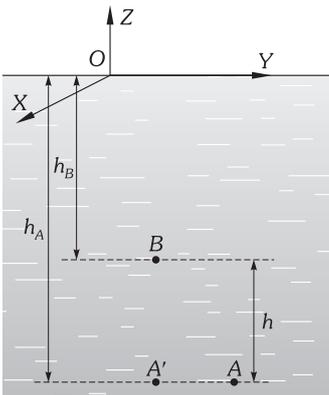


Fig. XII-13.- Teorema fundamental de la hidrostática.

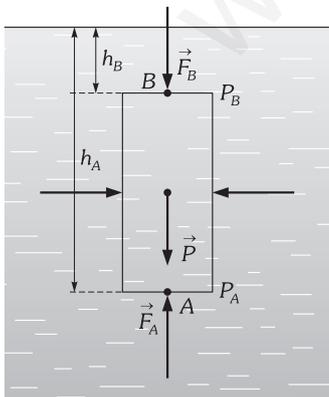


Fig. XII-14.- Para demostrar que el teorema fundamental de la hidrostática se cumple para puntos situados en la misma vertical.

Como consecuencia de lo anterior, la diferencia de presión entre los puntos A' y B (Fig. XII-12), es la misma que entre A y B y por tanto corresponde al peso de la columna indicada en el teorema general, que ha quedado, así generalizado para una pareja cualquiera de puntos, aunque no estén situados en la misma vertical.

Matemáticamente, expresamos el teorema general por:

$$p_A - p_B = (h_A - h_B) \rho g$$

ya que el volumen de la columna indicada (área de la base por la altura) es  $h_A - h_B$ , por ser la base unidad; al multiplicar el volumen por la masa específica  $\rho$ , obtenemos la masa, que multiplicada por la intensidad de la gravedad  $g$ , nos da el peso de la columna de líquido de base unidad y altura la diferencia de las alturas de los puntos A y B.

«La PRESIÓN HIDROSTÁTICA en un punto de un líquido en equilibrio debida únicamente a él, es igual al peso de una columna de líquido de base unidad y de altura la distancia del punto a la superficie».

Considerando  $h_B = 0$ , es decir que el punto B está en la superficie del líquido, se verificará que la presión hidrostática en B ( $p_B$ ) es nula, puesto que el propio líquido no ejerce presión en su superficie. La aplicación de la fórmula general conduce a:  $p_A = h_A \rho g$ , expresión matemática del enunciado.

«Un mismo líquido en reposo se coloca a la misma altura en VASOS COMUNICANTES, cualquiera que sea la forma de ellos», (Fig. XII-16), puesto que la superficie de los líquidos en reposo es plana y horizontal. (Pozos artesianos, surtidores, depósitos de agua en las ciudades, nivel de agua, etc.).

«Si en vasos comunicantes se ponen líquidos no miscibles de distinta densidad, las alturas contadas a partir de la superficie de separación, son inversamente proporcionales a las densidades».

Así por ejemplo: teniendo mercurio en los vasos comunicantes, añadimos agua por una de sus ramas; quedarán los líquidos en la disposición de la Fig. XII-17, bajando el mercurio por una rama y subiendo por la otra.

En efecto: tomemos dos puntos, A y B, en la misma superficie horizontal de separación de los líquidos. Por estar los dos puntos en el mismo líquido y éste en reposo se verifica:

$$p_A = p_B \Rightarrow h_A \rho_A g + H = h_B \rho_B g + H$$

en la que hemos añadido a la presión hidrostática la presión atmosférica H, por estar el líquido en vasija abierta. De donde:

$$h_A \rho_A = h_B \rho_B \Rightarrow \frac{h_B}{h_A} = \frac{\rho_A}{\rho_B}$$

**PROBLEMAS: 6 al 26.**

**XII - 10. Fuerza ejercida por un líquido sobre un área plana**

«La fuerza ejercida por un líquido en el fondo o pared plana de un embalse es igual al peso de una columna de líquido que tiene por base el área del fondo o pared y por altura la distancia desde el centro de gravedad del fondo o pared hasta la superficie libre del líquido».

$$F = \rho g h_G A \tag{5}$$

en la que  $h_G$  toma el valor:

$$h_G = \frac{\int_A h dA}{A}$$

En efecto: considerando una porción de pared de cualquier forma (BC de la Fig. XII-18 la presión no es la misma para cada uno de los puntos de tal superficie ya que, unos y otros, están a distinta profundidad. La presión en cada punto del área dA situada a distancia h de la superficie libre del líquido si será la misma, y quedará determinada por:  $p = dF/dA \Rightarrow dF = p dA$ . La fuerza sobre la superficie A (BC) será:

$$F = \int_A p dA = \int_A h \rho g dA = \rho g \int_A h dA \tag{6}$$

ya que la masa específica  $\rho$  es constante, prácticamente, por la pequeña compresibilidad de los líquidos, y también es prácticamente constante la intensidad de la gravedad.

Definiendo la POSICIÓN DEL CENTRO DE GRAVEDAD (CG) DE UNA SUPERFICIE CUALQUIERA A QUE SE ENCUENTRA EN EL INTERIOR DE UN LÍQUIDO RESPECTO A SU SUPERFICIE LIBRE (distancia del CG de área de la pared o fondo considerados a la superficie libre del líquido) como:

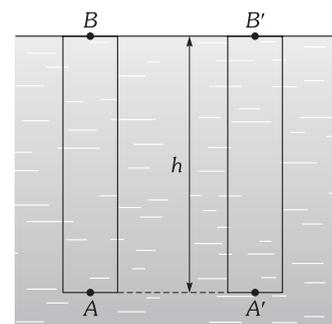


Fig. XII-15.- Dentro de un líquido en equilibrio bajo la acción de la gravedad, en todos los puntos de una misma superficie horizontal hay la misma presión.

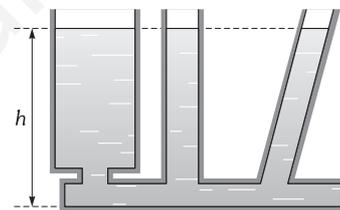


Fig. XII-16.- Un mismo líquido se coloca a la misma altura en vasos comunicantes cualquiera que sea la forma de éstos.

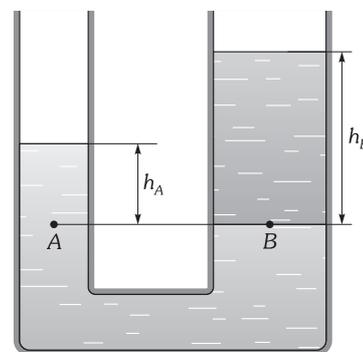


Fig. XII-17.- Si en vasos comunicantes se ponen líquidos no miscibles de distinta densidad, las alturas, contadas a partir de la superficie de separación, son inversamente proporcionales a las densidades.

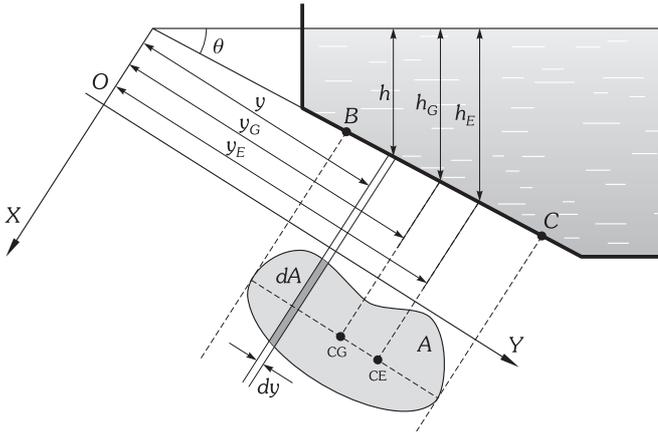


Fig. XII-18.- Fuerza ejercida por un líquido en una pared plana. Centro de empuje o de presiones.

$$h_G = \frac{\int_A h dA}{A} \Rightarrow \int_A h dA = h_G A$$

que sustituida en (6) nos da la expresión (5) que pretendíamos demostrar.

De la Fig. XII-18 deducimos que:

$$h_G = y_G \text{ sen } \theta \Rightarrow F = \rho g y_G A \text{ sen } \theta$$

en la que  $y_G$  es la distancia del CG de área al eje OX determinado por la intersección del plano del área A y la superficie libre del líquido. En el caso en que la pared sea vertical entonces  $h_G = y_G$  (Fig. XII-19).

Considerando vasijas del mismo fondo horizontal, de distinta forma y llenas del mismo líquido a igual altura (Fig. XII-20), la aplicación de la fórmula (5) nos determina que la fuerza sobre el fondo es la misma; hecho que se conoce con el nombre de PARADOJA HIDROSTÁTICA.

**PROBLEMAS: 27 al 30.**

**XII - 11. Centro de empuje o presiones en una pared plana**

Las fuerzas originadas por las presiones, en los distintos puntos de una pared, son mayores conforme los puntos considerados son más profundos (Fig. XII-21). Al punto de aplicación de la resultante total de todas ellas lo llamaremos CENTRO DE EMPUJE O CENTRO DE PRESIONES y la distancia de éste a la superficie libre del líquido la designaremos por  $h_E$  (Fig. XII-18).

Supongamos una compuerta de forma cualquiera, en la pared de un embalse. La fuerza elemental que actúa sobre una superficie  $dA$  comprendida entre dos paralelas al eje OX determinada por el plano de la compuerta con la superficie libre, es:

$$dF = \rho g h dA = \rho g y \text{ sen } \theta dA$$

perpendicular al área A, en la que  $h$  es la distancia de  $dA$  a la superficie libre del líquido e  $y$  la distancia de tal área al eje OX.

El momento de esta fuerza con respecto al eje X es en módulo:

$$dN = y dF = \rho g y^2 \text{ sen } \theta dA$$

luego el momento de la fuerza total que actúa sobre el área A con respecto al eje OX, será:

$$N = \rho g \text{ sen } \theta \int_A y^2 dA = \rho g I \text{ sen } \theta \quad \boxed{I = \int_A y^2 dA}$$

$I$  es, por tanto, el MOMENTO DE INERCIA DEL ÁREA A de la pared con respecto al eje OX, que se determina de la misma forma que el momento de inercia para sólidos (párrafo X-6), aplicando las fórmulas generales de éstas y sin más que sustituir masas por superficies.

Como la fuerza total, como ya hemos demostrado, es:  $F = \rho g h_G A = \rho g y_G A \text{ sen } \theta$ , el momento obtenido también lo podremos escribir:  $N = h_E F$ , que junto con que  $h_E = y_E \text{ sen } \theta$ , e igualando nos queda:

$$\rho g I \text{ sen } \theta = \rho g y_G y_E A \text{ sen } \theta \Rightarrow \boxed{y_E = \frac{I}{A y_G}} \Leftrightarrow \boxed{h_E = \frac{I}{A h_G} \text{ sen }^2 \theta}$$

que por la aplicación del teorema de Steiner la podremos escribir:

$$y_E = \frac{I_G + A y_G^2}{A y_G} \Rightarrow \boxed{y_E = \frac{I_G}{A y_G} + y_G}$$

si la pared (o compuerta) está vertical en el embalse entonces  $h_E$  coincide con  $y_E$  (Fig. XII-19) y  $h_G$  con  $y_G$ .

Obsérvese que el centro de empuje está siempre por debajo del centro de gravedad de área ya que  $I_G$  es siempre positivo.

**PROBLEMAS: 31 al 39.**

**XII - 12. Teorema de Pascal**

Blaise Pascal (1623-1662), enunció para los líquidos incompresibles lo que se llamó el Principio de Pascal, ya que fue enunciado de forma empírica; actualmente es un demostrable por lo que constituye un teorema que se enuncia:

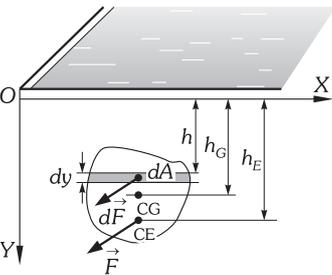


Fig. XII-19.- Centro de empuje o de presiones en una pared plana y vertical.

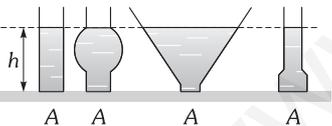


Fig. XII-20.- Paradoja hidrostática.

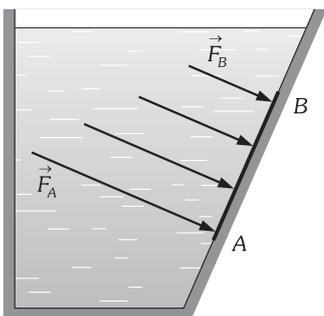


Fig. XII-21.- Fuerza contra una pared debida a la presión hidrostática.

«La presión ejercida en un punto de un líquido se transmite íntegramente a todos sus puntos».

En efecto: supongamos una vasija indeformable, llena de un líquido y provista de un cilindro con un émbolo que ajusta herméticamente (Fig. XII-22). Consideremos dos puntos, A y B, en el líquido; por el teorema general se verifica:  $p_A - p_B = h\rho g$ . Si la presión en B la aumentamos en  $\Delta p$ , haciendo fuerza sobre el émbolo, la presión en A aumentará en  $\Delta p$ , puesto que su diferencia no puede variar, ya que el segundo miembro de la igualdad anterior, permanece constante por no variar la distancia entre los puntos, ni la masa específica por la incompresibilidad del líquido.

Una aplicación importante en la industria de este teorema es la PRENSA HIDRÁULICA, consta de dos depósitos, de superficies muy distintas, que se comunican por su fondo (Fig. XII-23). Si en un émbolo, que cierra al menor, ejercemos una presión  $p_B$ , se transmitirá, íntegramente, al émbolo que cierra el depósito mayor, verificándose:  $p_A = p_B$ . Es decir:

$$\frac{F_A}{S_A} = \frac{F_B}{S_B}$$

«Las fuerzas aplicadas y transmitidas en una prensa hidráulica, son directamente proporcionales a las superficies de los émbolos».

Si el émbolo B tiene, por ejemplo, 1 dm<sup>2</sup> de superficie y el A 1 m<sup>2</sup>, ejerciendo en el primero la fuerza de 1 N se produce en el segundo otra de 100 N. La fuerza en el émbolo pequeño se suele ejercer por medio de una palanca de segundo género.

**PROBLEMAS: 40 al 42.**

### XII - 13. Teorema de Arquímedes. Valor del empuje. Centro de empuje

Arquímedes (287-212 a.C), físico, ingeniero y matemático griego, fue quizás el científico más grande de la antigüedad, entre otros trabajos, enunció el principio que lleva su nombre y que no pasó a ser teorema hasta el año 1586 en que Stevin lo demostró mediante su «Principio de solidificación», al igual que el «Principio de Pascal». Se enuncia:

«Todo cuerpo, sumergido en un fluido (parcial o totalmente), experimenta un empuje vertical y hacia arriba igual al peso del fluido desalojado».

En efecto: imaginemos una porción de fluido parcialmente solidificada, es decir, conservando sus propiedades pero diferenciada idealmente de él. Para que esta parte de fluido esté en equilibrio en su propio seno, se ha de verificar que la resultante de las acciones exteriores (fuerzas originadas por las presiones hidrostáticas), sea igual y de sentido contrario al peso.  $P = E$  (Fig. XII-24). Si sustituimos esta porción de fluido por un cuerpo, el empuje resultante de las acciones exteriores es el mismo y, por lo tanto, será vertical hacia arriba e igual al peso de un volumen de fluido igual al del cuerpo, como queríamos demostrar.

En consecuencia, el peso del líquido desalojado por un cuerpo sumergido, mide el VALOR DEL EMPUJE, y es:

$$E = V_S \rho_0 g$$

en la que  $V_S$  es el volumen sumergido del cuerpo (que en el caso de encontrarse totalmente sumergido coincide con su volumen) y  $\rho_0$  es la densidad del líquido; el producto de estos dos primeros factores es la masa de líquido desalojada que multiplicada por la aceleración de la gravedad (g) nos da el peso de líquido desalojado por el cuerpo sumergido.

En la demostración que hemos hecho se ha sustituido el cuerpo sólido por un volumen de fluido idéntico, sufriendo ambos el mismo empuje. Si el cuerpo es homogéneo el centro de gravedad del fluido reemplazado coincide con el centro de gravedad del cuerpo, entonces decimos que el centro de gravedad del cuerpo y el centro de empuje coinciden; si el cuerpo no es homogéneo los puntos anteriores no coinciden. Para distinguir ambos llamaremos:

«CENTRO DE EMPUJE al centro de gravedad del volumen de fluido desplazado (reemplazado) por el sólido».

**PROBLEMAS: 43 al 48.**

### XII - 14. Equilibrio de los cuerpos sumergidos

En un cuerpo sumergido puede verificarse:

Peso > Empuje (El cuerpo va al fondo). Peso = Empuje (Equilibrio). Peso < Empuje (El cuerpo asciende).

Si  $\rho$  y  $\rho_0$  son la densidad media del cuerpo y la del líquido, el peso y el empuje son, respectivamente:  $P = V\rho g$  y  $E = V\rho_0 g$ . En consecuencia, las condiciones anteriores se expresan:  $\rho > \rho_0$  (El cuerpo va al fondo);  $\rho = \rho_0$  (Equilibrio);  $\rho < \rho_0$  (El cuerpo asciende).

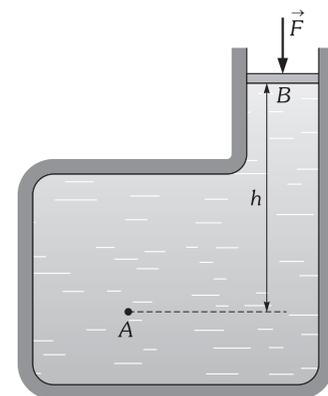


Fig. XII-22.- Teorema de Pascal.

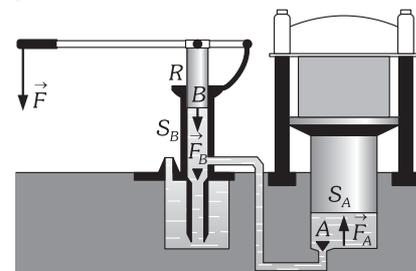


Fig. XII-23.- Prensa hidráulica.

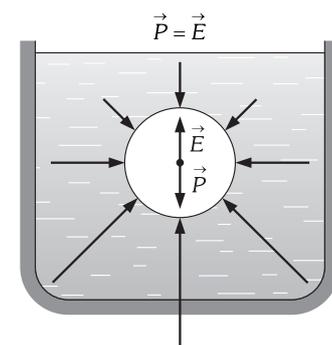


Fig. XII-24.- Teorema de Arquímedes.

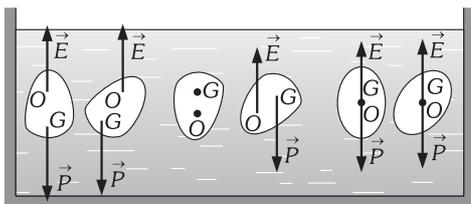


Fig. XII-25.- Equilibrio en cuerpos sumergidos.

El equilibrio existe cuando el centro de gravedad del cuerpo sumergido y el centro del empuje están en la misma vertical, pues en caso contrario, se origina un par de fuerzas que hace girar al cuerpo, hasta que las verticales correspondientes al peso y al empuje coincidan (Fig. XII-25).

Para el estudio de la estabilidad basta considerar las tres posiciones siguientes de G (centro de gravedad) y O (centro de empuje). 1. G debajo de O: equilibrio estable. (El par **EP** hace retornar al cuerpo a su posición primitiva). 2. G encima de O: equilibrio inestable. (El par **EP** hace girar al cuerpo  $180^\circ$ ). 3. G coincide con O: equilibrio indiferente. (No se origina ningún par).

## XII - 15. Equilibrio de los cuerpos flotantes

Cuando un cuerpo está en equilibrio, flotando en la superficie de un líquido, se verifica que su peso y el empuje, han de ser iguales:  $P = E$ . Siendo  $P = Mg$ , y  $E = V_S \rho_0 g$  ( $V_S$  = volumen sumergido;  $\rho_0$  = densidad del fluido). Se ha de verificar, que:

$$M = V_S \rho_0$$

Conocida la masa del cuerpo y la densidad del líquido, podemos determinar el volumen de la parte sumergida.

«El CENTRO DE EMPUJE para los cuerpos flotantes estará localizado en el centro de gravedad del volumen de fluido desplazado (reemplazado) por la porción de sólido sumergida».

La condición general de equilibrio de los cuerpos flotantes es la misma que la de los cuerpos sumergidos, es decir, que «el centro de gravedad y el de empuje han de estar en la misma vertical».

La condición de estabilidad es distinta que la de los cuerpos sumergidos, pudiendo ocurrir que el centro de gravedad, G, esté encima del de empuje, O, y ser equilibrio estable.

Al apartarse un cuerpo flotante de su posición de equilibrio, el centro de gravedad no modifica su posición en el cuerpo, pero el centro de empuje (centro de gravedad de la figura sumergida) se desplaza, al variar de forma la parte introducida en el líquido. El par de fuerzas que se origina con el peso y el empuje, puede volver al cuerpo a su posición primitiva (equilibrio estable) o hacerlo girar, volcándolo (equilibrio inestable).

Se llama «METACENTRO» al punto de intersección de la vertical que pasa por el centro de gravedad y el de empuje en la posición de equilibrio, y la vertical que pasa por éste último en una posición cualquiera.

La condición de equilibrio estable es que el centro de gravedad, G, esté debajo del metacentro, M, ya que a éste podemos considerarlo como punto de aplicación del empuje, por ser las fuerzas vectores deslizantes.

Los distintos metacentros, para diversas posiciones del cuerpo flotante originan la CURVA METACÉNTRICA.

DETERMINACIÓN DE DENSIDADES DE LÍQUIDOS: AERÓMETROS Y DENSÍMETROS. La fórmula que rige el fenómeno de la flotación, es:  $M = V_S \rho_0$ . Conocida la masa del cuerpo y el volumen de la parte sumergida podremos determinar la densidad absoluta del líquido. En esto, se basan los aerómetros, flotadores de masa conocida, graduados, que, introducidos en los líquidos y determinando el volumen sumergido, nos permiten calcular la densidad del líquido problema (Fig. XII-27).

En vez de estar graduados en  $\text{cm}^3$  suelen estarlo en números que nos expresan, directamente, la densidad (densímetros), ya que ésta, para la misma masa del aerómetro es inversamente proporcional al volumen sumergido.

Al disolver en un líquido (disolvente), por ejemplo agua, otra sustancia (soluta), la densidad experimenta variaciones que pueden observarse por la mayor o menor inmersión de un aerómetro. Si éste se gradúa en números que nos expresan la proporción de soluto en la disolución (concentración), para lo cual se va introduciendo, sucesivamente, en diversas muestras de concentración conocida, tendremos un aparato apto para medir la riqueza en soluto de una disolución. Reciben estos aerómetros los nombres de alcoholómetros, sacarímetros, etc., según las finalidades a que se destinan.

**PROBLEMAS: 49 al 67.**

## C) AEROSTÁTICA

### XII - 16. Aerostática. Presión atmosférica

Los gases son sustancias que, por su estructura, se acercan más que los líquidos a las condiciones ideales de un fluido perfecto ya que las fuerzas de cohesión son, en realidad, casi nulas.

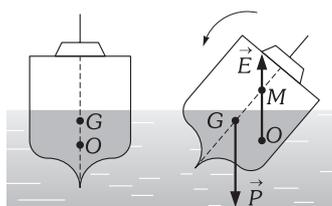


Fig. XII-26.- Estabilidad de cuerpos flotantes.

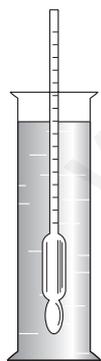


Fig. XII-27.- Densímetro.

Los gases gozan de la propiedad de la expansión, es decir, ocupar el volumen y adoptar la forma de la vasija en que están contenidos; a diferencia de los líquidos, son altamente compresibles.

Los mismos teoremas y consecuencias estudiados en la hidrostática, considerando los líquidos como fluidos perfectos, son aplicables a los gases, constituyendo esta parte de la mecánica la AEROSTÁTICA o estudio de los gases en equilibrio.

La atmósfera terrestre está formada por una mezcla de gases, cuya composición media en las capas más bajas indicamos en la tabla adjunta; existen además pequeñísimas cantidades de otros gases nobles y de ozono, así como cantidades variables de vapor de agua.

Para los gases llamaremos DENSIDAD RELATIVA a la relación entre la masa de un gas y la masa del mismo volumen de otro, que se toma como tipo de comparación, en las mismas condiciones de presión y temperatura.

Se suele tomar como gas de referencia el aire. De la definición anterior obtenemos:

$$d_r = \frac{\text{masa gas}}{\text{masa aire}} = \frac{V\rho}{V\rho_{\text{aire}}} = \frac{\rho}{\rho_{\text{aire}}} \Rightarrow \rho = d_r \rho_{\text{aire}}$$

Si consideramos los gases en condiciones normales (0° C de temperatura y 1 atm de presión) al ser la masa específica normal del aire;  $\rho_{\text{aire}} = 1,293 \text{ kg/m}^3$  queda finalmente:  $\rho_0 = d_r \times 1,293 \text{ kg/m}^3$ .

El valor de la densidad relativa de un gas es independiente de la presión y la temperatura ya que el cociente  $\rho/\rho_{\text{aire}}$ , es siempre el mismo para un determinado gas si está a la misma presión y temperatura que el aire.

**PRESIÓN ATMOSFÉRICA:** Un cuerpo cualquiera en la atmósfera está sometido a fuerzas perpendiculares a su superficie en todos sus puntos y de sentido hacia el interior del cuerpo, originadas por el aire que rodea la Tierra.

Evangelista Torricelli (1603-1647) en 1643 realizó la experiencia que lleva su nombre, y que describimos a continuación, de la que derivó el descubrimiento del barómetro y con él la medida de la presión atmosférica.

Se toma un tubo de más de 76 cm de longitud, de cualquier sección, abierto por un extremo y cerrado por el otro; se llena completamente de mercurio y tapando su extremo abierto, se invierte y se introduce en una cubeta con mercurio. Al destapar la parte inferior se observa un descenso en la columna de mercurio (Fig. XII-28) hasta quedar a una altura de aproximadamente 76 centímetros con respecto al nivel del mercurio en la cubeta, si la experiencia se ha hecho al nivel del mar. Consideremos dos puntos A y B; el primero en la superficie del mercurio externo y el segundo al mismo nivel dentro del tubo. Por el teorema general de hidrostática tenemos:  $p_A = p_B$ . Pero siendo  $p_A$  la presión atmosférica, queda demostrado que la presión atmosférica normal, es igual al peso de una columna de mercurio, que tiene por base un  $\text{cm}^2$  y por altura 76 cm. Su valor es:  $H = 0,76 \times 13\,600 \times 9,8 \text{ Pa} = 101\,300 \text{ Pa}$ .

Si extendemos horizontalmente la mano, sobre cada uno de los centímetros cuadrados de ella actúa una fuerza de más de un kilogramo; por pequeña que sea la mano, sobre ella gravitarán más de 50 kp. Se puede sostener tal peso puesto que la fuerza debida a la presión atmosférica actúa en todas las direcciones y sentidos y 50 kp de arriba a abajo, vienen contrarrestados por 50 kp de abajo a arriba (Fig. XII-29).

Por tal razón se puede invertir un vaso lleno de agua, en cuya boca se ha puesto una cartulina y soltar ésta sin que se caiga el agua ni la cartulina. La presión atmosférica actuando de abajo a arriba sostiene a la cartulina y al agua (Fig. XII-29).

Para la medida de la presión atmosférica en cualquier lugar se emplean los BARÓMETROS.

El barómetro de Fortin es análogo al aparato empleado en la experiencia de Torricelli, con pequeñas variaciones que facilitan la observación. Para efectuar la medida de la altura de la columna barométrica, lleva una escala de latón. Con objeto de enrasar el cero de la escala con el nivel del mercurio de la cubeta, el fondo de ésta es de gamuza y se acciona por medio de un tornillo. Se consigue el enrase perfecto cuando una punta de marfil (Fig. XII-30) toca justamente con su vértice al mercurio exterior. Verificado el enrase, se hace la lectura en la escala.

El barómetro metálico de Bourdon (Fig. XII-31) es un tubo metálico encorvado, en cuyo interior se ha hecho el vacío, que se curva más o menos cuando aumenta o disminuye la presión atmosférica. En el barómetro de Vidi (Fig. XII-32), el centro de la tapa ondulada de la caja A (en cuyo interior se ha hecho el vacío), asciende o desciende según disminuya o aumente la presión atmosférica. Las variaciones de la curvatura del tubo o de la altura del centro de la caja, modifican la posición de una aguja, que señala en un limbo graduado, el valor de la presión atmosférica.

Generalmente la graduación de los limbos se hace en divisiones equivalentes a la presión de un cm o un mm de mercurio en el barómetro de cubeta.

El barógrafo, sirve para registrar las presiones correspondientes a un lapso de tiempo; es un barómetro metálico, cuya aguja termina en una plumilla, que se apoya en un cilindro, sobre el cual se enrolla un papel; el cilindro gira movido por un aparato de relojería y la plumilla dibuja las presiones correspondientes a cada instante.

**PROBLEMAS: 68 al 72.**

COMPOSICIÓN MEDIA DEL AIRE EN LA ATMÓSFERA EN SUS CAPAS MÁS BAJAS

ELEMENTO	% PESO
Nitrógeno	75,529
Oxígeno	20,932
Argón	0,933
CO <sub>2</sub>	0,033

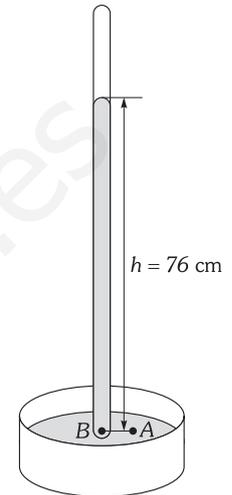


Fig. XII-28.- Experiencia de Torricelli.

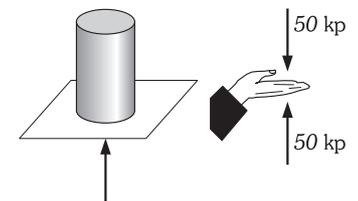


Fig. XII-29.- Experiencias que ponen de manifiesto la fuerza debida a la presión atmosférica.

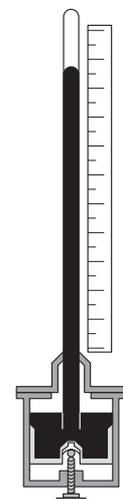


Fig. XII-30.- Barómetro de Fortin.

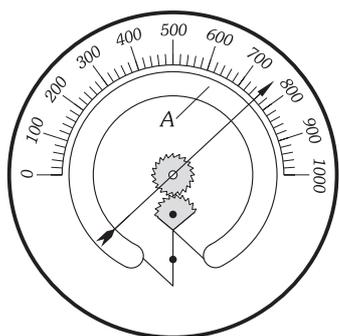


Fig. XII-31.- Barómetro de Bourdon.

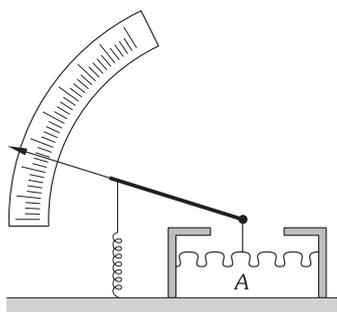


Fig. XII-32.- Barómetro de Vidi.

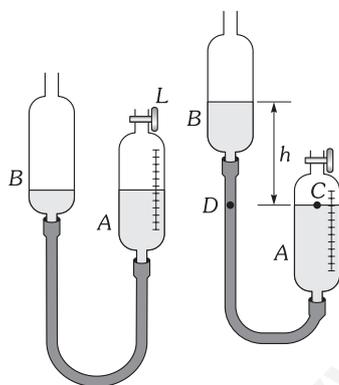


Fig. XII-33.- Tubo de Mariotte que se emplea para la comprobación del principio que lleva su nombre.

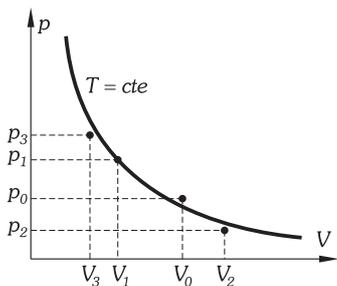


Fig. XII-34.- Los valores obtenidos experimentalmente y representados en el diagrama de Clapeyron «casi» coinciden con la hipérbola equilátera teórica.

**XII - 17. Ley de Boyle-Mariotte**

El físico irlandés Robert Boyle (1627-1691) y prácticamente a la vez y separadamente el francés Edme Mariotte (1620-1684) en el año 1660 enunciaron la ley que lleva sus nombres y que se enuncia:

«A temperatura constante y para la misma masa de gas, las presiones son inversamente proporcionales a los volúmenes»\*

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1} \Leftrightarrow p_1 V_1 = p_2 V_2 = cte$$

Esta ley es experimental y su comprobación se hace con el tubo de Mariotte (Fig. XII-33). El depósito A de este tubo se llena de un gas, aire por ejemplo, abriendo su llave; cerrada ésta, el nivel del mercurio del interior de A y el depósito B quedan a la misma altura, lo que nos indica que la presión del gas interior es la atmosférica, la cual determinaremos con un barómetro. El volumen del gas se conoce por la graduación de la bureta A.

Elevemos B y el mercurio quedará en una posición como en la de la figura. Esperamos el tiempo suficiente para que la temperatura del gas se iguale a la del medio exterior (temperatura de la experiencia) puesto que en su compresión se ha calentado\*\* y hacemos las medidas. La presión en el punto C (presión del gas) es igual a la del D (teorema general de hidrostática), siendo ésta la atmosférica más la hidrostática correspondiente a la altura h. (Si la atmosférica se ha medido en cm de mercurio, basta sumarle el número de cm de h). El volumen, en esta segunda experiencia, queda determinado igual que en la anterior.

Realizando cuantas experiencias deseemos, observamos que, muy aproximadamente, obtenemos:  $p_1 V_1 = p_2 V_2 = p_3 V_3 = \dots$ , con lo que comprobamos la ley de Boyle Mariotte.

La representación gráfica en el llamado «diagrama de Clapeyron» (V, p) de los valores obtenidos para los diferentes volúmenes y presiones para una determinada temperatura T del gas coinciden sensiblemente con una hipérbola equilátera cuyas asíntotas son los ejes (Fig. XII-34). Para diversas temperaturas se obtendrá una familia de hipérbolas (isotermas) que representamos en la Fig. XII-35.

**PROBLEMAS: 73 al 76.**

**XII - 18. Variación de la densidad con la presión**

«A temperatura constante la densidad de un gas es directamente proporcional a la presión».

Si  $p_1, V_1$  y  $\rho_1$  son la presión, el volumen y la densidad de un gas y  $p_2, V_2$  y  $\rho_2$  los correspondientes después de una expansión o compresión a temperatura constante, se verificará:  $m = \rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$ , ya que la masa ha permanecido invariable. De la ecuación anterior obtenemos:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{V_2}{V_1}$$

y teniendo en cuenta la ley de Boyle-Mariotte, que representamos en la Fig. XII-35:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

igualdad que nos demuestra la ley enunciada. Obedeciendo a ella, la densidad del aire disminuye con la altura ya que con ella disminuye la presión.

**PROBLEMAS: 77 y 78.**

**XII - 19. Variación de la presión atmosférica con la altura para las capas bajas de la atmósfera**

Supongamos que en las capas inferiores de la atmósfera se cumple la condición isoterma; llamando H y  $\rho$  a la presión atmosférica y a la densidad del aire a una altura h, respecto de un nivel  $h_0$  (generalmente el nivel del mar) en el que estas magnitudes toman los valores  $H_0$  y  $\rho_0$  (a 0°C  $\rho_0 = 1,293 \text{ kg/m}^3$ ), para una pequeña variación de altura se cumple:

$$dH = - \rho g dh \tag{7}$$

\* La ley enunciada no se cumple más que aproximadamente. Nos imaginamos unos gases, llamados «ideales» (también llamados «perfectos» a los que nosotros denominaremos generalmente como «ideales» para distinguirlos de los fluidos perfectos), los cuales, si existiesen, la cumplirían con toda exactitud (ver capítulo XIV).

\*\* En Terminología veremos que una compresión de un gas lleva consigo una elevación de temperatura del mismo, así como una expansión le produce una disminución de temperatura.

en la que el signo menos nos indica que a un aumento de la altura le corresponde una disminución de la presión atmosférica. La condición isoterma nos conduce:

$$H_0 V_0 = HV \quad \left| \quad \frac{H_0}{H} = \frac{V}{V_0} = \frac{\rho_0}{\rho} \right. \Rightarrow \quad \rho = \frac{H}{H_0} \rho_0$$

$$M = V_0 \rho_0 = V \rho$$

y sustituida en (7), obtenemos:

$$dH = - \frac{H}{H_0} \rho_0 g dh \Rightarrow \frac{dH}{H} = - \frac{\rho_0 g}{H_0} dh \Rightarrow \int_{H_0}^H \frac{dH}{H} = \frac{\rho_0 g}{H_0} \int_{h_0}^h dh$$

$$\Rightarrow \ln \frac{H}{H_0} = - \frac{\rho_0 g}{H_0} (h - h_0) = - \frac{\rho_0 g}{H_0} \Delta h \Rightarrow \boxed{H = H_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{H_0} \Delta h}}$$

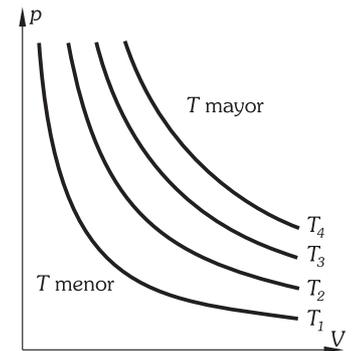


Fig. XII-35.- Familia de «isotermas» para diferentes temperaturas.

**XII - 20. Manómetros**

Son aparatos destinados a medir la presión de un gas encerrado en un recinto.

**MANÓMETRO DE AIRE LIBRE** (Fig. XII-36): es un tubo en U, abierto por los dos extremos, uno de ellos —A— comunicado con el aire y el otro —B— con el recinto que contiene el gas. El tubo contiene mercurio u otro «líquido manométrico». Siendo p la presión del recinto y H la atmosférica: a) Si p > H, el mercurio queda más alto en A que en B. b) Si p = H, el mercurio queda en los dos tubos a la misma altura. c) Si p < H, el mercurio queda más alto en B que en A.

Si el «líquido manométrico» es mercurio, expresando la presión en cm de mercurio, se tiene: a) p = H + h. b) p = H. c) p = H - h.

**MANÓMETRO DE AIRE COMPRIMIDO** (Fig. XII-37): es un tubo en U que contiene mercurio, cerrado por un extremo y abierto por el otro en comunicación con el recinto que contiene el gas. En la rama cerrada se ha introducido aire a la presión de una atmósfera. Si el gas del recinto tiene esta presión, el mercurio de las dos ramas queda al mismo nivel. Si el volumen contenido en A se reduce a la mitad, nos indica que su presión es de dos atmósferas, (Ley de Boyle-Mariotte). Si el volumen de aire se reduce a una cuarta parte, la presión es cuatro atmósferas, etcétera; el tubo A se gradúa de acuerdo con estas presiones.

Realmente hemos medido la presión del aire en A; la del gas contenido en R, es p = p<sub>A</sub> + h, siempre que se expresen las presiones en cm de mercurio.

En la práctica, la graduación de A se hace de forma que la correlación h esté ya incluida en los números señalados en las divisiones, leyéndose así, directamente, la presión del gas encerrado en el recinto.

**MANÓMETRO TRUNCADO** (Fig. XII-38): es un tubo idéntico al anterior, que contiene mercurio; al comunicar A con la atmósfera el líquido llena totalmente la rama cerrada (a) ya que el desnivel h es bastante menor de 76 cm y en tal rama no existe aire. Comunicado A con un recinto cuya presión en cm sea menor que h, el mercurio bajará en el tubo de la derecha del dibujo, estableciéndose un desnivel h', que mide, en centímetros de mercurio, el valor de la presión en R (b).

Los manómetros metálicos son análogos a los barómetros metálicos del tipo Bourdon. El tubo encurvado se pone en comunicación con el recinto que contiene el gas.

**XII - 21. Bombas neumáticas**

La máquina neumática sirve para extraer gas (generalmente aire), de un recinto, produciendo en él un vacío nunca perfecto.

**BOMBA NEUMÁTICA DE PISTÓN:** El movimiento de vaivén del émbolo (Fig. XII-39), dentro de un cilindro, produce el siguiente efecto: al mover el émbolo hacia la izquierda cierra la válvula D y se abre la C; el gas del recinto R se expansiona ocupando el volumen de R (que ya tenía) más el del cilindro B. Al moverlo hacia la derecha se cierra C y se abre D; el gas, comprimido en B, pasa a A. Al ir de nuevo hacia la izquierda además del efecto ya descrito, el gas que hay en A sale al exterior por T. Si V es el volumen del recinto y v del cilindro, cuando está el émbolo en su posición extrema, p la presión inicial y p<sub>1</sub> la presión después de la primera expansión, la aplicación de la ley de Boyle-Mariotte conduce a:

$$pV = p_1 (V + v) \Rightarrow p_1 = p \frac{V}{V + v}$$

Eliminado el gas de la parte derecha del cilindro en la primera compresión, queda en el recinto a la presión p<sub>1</sub>, ocupando el volumen V. En la segunda expansión el volumen pasa a V + v y la presión a p<sub>2</sub>:

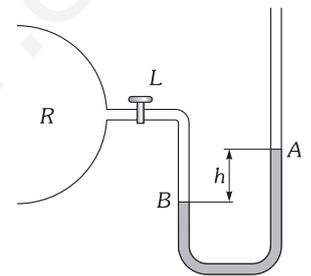


Fig. XII-36.- Manómetro de aire libre.

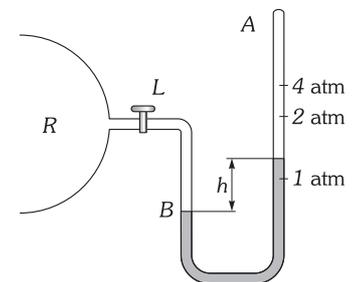


Fig. XII-37.- Manómetro de aire comprimido.

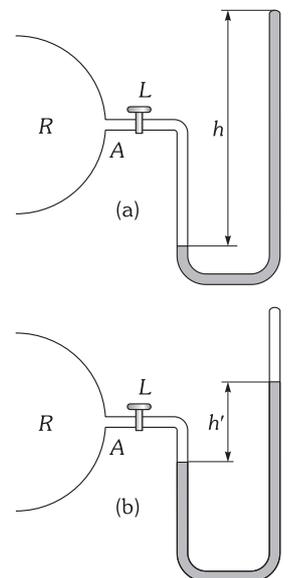


Fig. XII-38.- Manómetro truncado.

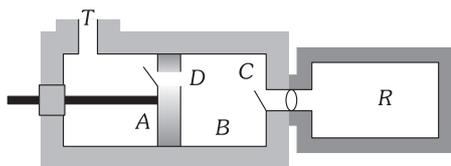


Fig. XII-39.- Máquina neumática de pistón.

$$p_1 V = p_2 (V + v) \Rightarrow p \frac{V}{V + v} V = p_2 (V + v) \Rightarrow p_2 = p \left( \frac{V}{V + v} \right)^2$$

En general la presión teórica del recinto, al cabo de  $n$  emboladas completas, es:

$$p_n = p \left( \frac{V}{V + v} \right)^n$$

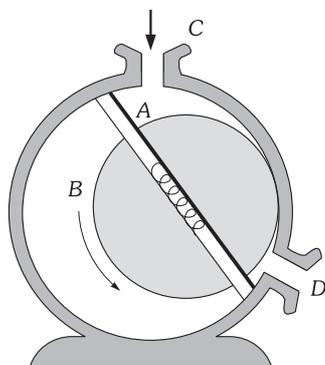


Fig. XII-40.- Bomba rotatoria de Gaede.

**BOMBA ROTATORIA DE GAEDE.** Es un cilindro hueco dentro del cual, y excéntricamente, gira otro con unas paletas que están en contacto constante con las paredes del primero (Fig. XII-40). Al girar el cilindro interior, en el sentido de la flecha, el gas se expansiona en A y al disminuir su presión penetra gas por el conducto C, comunicado con el recinto que se desea hacer el vacío. Por otra parte, el gas comprimido en B sale por D a la atmósfera.

**PROBLEMA: 79.**

### XII - 22. Bombas hidráulicas

**BOMBA HIDRÁULICA ASPIRANTE** (Fig. XII-41a). Está destinada a elevar agua a alturas no superiores a 10 m. El movimiento de vaivén del émbolo produce efectos análogos a los de la máquina neumática. El agua sube al recinto B por la depresión en él producida en la elevación del émbolo y pasa a la región A durante el descenso, saliendo por el tubo C al exterior, en un nuevo ascenso.

Si el líquido fuese mercurio la altura máxima a que podría subir sería 76 cm. La altura máxima para una elevación de agua es:  $76 \times 13,6 = 1\,033 \text{ cm} = 10 \text{ m}$ . Esta altura máxima varía con la presión atmosférica del lugar. Conforme la presión disminuye, la altura máxima de la elevación de agua disminuye.

**BOMBA IMPELENTE** (Fig. XII-41b). Al ascender el émbolo penetra el agua en el cilindro, y luego, por efecto de la presión originada en el descenso, asciende por el tubo, hasta una altura, dependiente de la fuerza  $F$  aplicada al émbolo:  $F/A = h\rho g$

**BOMBA ASPIRANTE IMPELENTE** (Fig. XII-41c). El tubo de aspiración puede tener, a lo sumo, una altura de 10 metros. La del tubo de impulsión depende de la fuerza aplicada al émbolo durante su descenso.

### XII - 23. Aerostación

Para que un aeróstato se eleve es necesario que su peso sea menor que el empuje del aire. Se llama fuerza ascensional a la diferencia entre el empuje y el peso de un globo:

$$F = E - P$$

Si  $V$  es el volumen de gas que llena el globo,  $\rho$  su densidad y  $M$  la masa del aerostato sin gas, su peso total es:  $P = V\rho g + Mg$ . Considerando que  $V$  es, prácticamente, el volumen total, el empuje es:  $E = V\rho'g$  ( $\rho'$  = densidad del aire). En consecuencia, la fuerza ascensional viene expresada por:

$$F = V\rho'g - (V\rho g + Mg) = Vg(\rho' - \rho) - Mg$$

Conforme se asciende, la densidad del aire ( $\rho'$ ) disminuye y, por consiguiente la fuerza ascensional se hace menor; cuando llega a ser cero el globo se detiene. Entonces se verifica:

$$Vg(\rho' - \rho) - Mg = 0 \Rightarrow V(\rho' - \rho) = M$$

Para descender, se disminuye el volumen, por salida de gas, haciéndose entonces la fuerza ascensional negativa (fuerza descensional).

**PROBLEMAS: 80 al 84.**

## D) DINÁMICA DE FLUIDOS EN RÉGIMEN DE BERNOUILLI

### XII - 24. Hipótesis y definiciones

La DINÁMICA DE FLUIDOS estudia a los líquidos y gases en movimiento. Caracterizamos el movimiento de los fluidos por un CAMPO VECTORIAL DE VELOCIDADES  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$  correspondiente a la velocidad que posee cada partícula del fluido en cada punto del espacio que ocupa, y por un CAMPO ESCALAR DE PRESIONES  $p = p(x, y, z, t)$  referido solamente a los puntos del mismo. Un fluido puede discurrir fundamentalmente en dos tipos de regímenes:

El RÉGIMEN LAMINAR es aquel en el que la función que define el campo de velocidades de sus partículas es de la forma  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ , siendo única su velocidad para cada instante y en cada punto del espacio y recíprocamente; las capas de fluido en tal régimen se deslizan unas sobre otras como si se tratase de verdaderas láminas fluidas (Fig. XII-42). El régimen laminar es además ESTACIONARIO cuando cualquiera que se el instante considerado, en cada punto del espacio ocupado por el fluido la velocidad de la partícula que en él se encuentra es la misma, aunque varíe de unos puntos a otros; en consecuencia el vector velocidad que nos define el campo en dicho punto es independiente del tiempo  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z)$ .

El RÉGIMEN TURBULENTO es aquel en el que en cada punto del espacio ocupado por el fluido la velocidad de la partícula que en él se encuentra toma más de un valor a medida que transcurre el tiempo, y en su corriente hay formación de torbellinos o remolinos (Fig. XII-43).

Se llaman LÍNEAS DE CORRIENTE a las líneas que en todos sus puntos son tangentes a la velocidad del fluido; una partícula, en régimen estacionario, sigue la trayectoria marcada por las líneas de corriente no cruzándose entre sí, y representándolas de tal modo que estén más próximas unas de otras en los lugares en que sea mayor la velocidad de la corriente del fluido, y más alejadas donde el fluido se desplaza con más lentitud.

TUBO DE CORRIENTE es el espacio limitado por las líneas de corriente que pasan por el contorno de una superficie, situada en el seno del líquido (Fig. XII-44). Todas las partículas que se encuentran en el interior de un tubo de corriente, al desplazarse no salen del mismo; de la misma manera, ninguna partícula del exterior se introduce dentro del tubo.

Consideraremos en general a los líquidos como *incompresibles*, es decir, su densidad permanecerá constante en todas sus partes; mientras que los gases pueden comportarse como *compresibles* cuando su velocidad sea lo suficientemente alta y como *incompresibles* para bajas velocidades (menores que la velocidad del sonido; en las ondas sonoras las variaciones de densidad en los fluidos en que se propagan, son pequeñas pero importantes).

El movimiento de los fluidos puede ser de dos tipos ROTACIONAL e IRROTACIONAL. El movimiento es irrotacional si no existe un momento angular neto de las partículas del fluido en ninguno de los puntos que ocupa (una pequeña rueda de paletas colocada en cualquier lugar del fluido no rotaría); en caso contrario el movimiento sería rotacional.

En los fluidos reales existen fuerzas de resistencia al deslizamiento de unas capas sobre otras, que hacen que la energía mecánica se transforme en calor y por tanto el fluido se calienta. A la resistencia opuesta por los fluidos al movimiento en su seno de alguna de sus partes se le llama VISCOSIDAD.

Finalmente, decir que el estudio que realizamos de la dinámica de fluidos quedará reducido en su mayor parte al movimiento de los mismos en *régimen laminar estacionario e irrotacional* con las condiciones de *incompresibilidad* y la *no existencia de viscosidad*; a tal fluido ideal que se mueve con tales restricciones diremos que circula en RÉGIMEN DE BERNOUILLI y a pesar de todas las simplificaciones que hacemos en su análisis, tiene una amplia aplicación en la práctica, como veremos a continuación.

### XII - 25. Ley de continuidad

La «LEY DE CONTINUIDAD» establece que el producto de la velocidad de la corriente de un fluido que discurre en régimen de Bernouilli por la sección transversal del tubo de corriente, es una magnitud constante para el tubo de corriente considerado.

En efecto: Supongamos una masa  $M$  de fluido de densidad  $\rho$ , limitado por las secciones  $A_1, A_2$  y el tubo de corriente (Fig. XII-44); en un tiempo  $dt$  por la sección  $A_1$  penetra una masa  $M_1$  de fluido cuyo volumen (sombreado en la figura) es  $A_1 dl_1$ ; mientras que otra masa  $M_2$  que ocupa el volumen  $A_2 dl_2$  sale por la sección  $A_2$ , y como la masa  $M$  permanece invariable, por considerar al fluido como incompresible, todo el fluido que en ese tiempo ha entrado por  $A_1$  sale por  $A_2$ , es decir:

$$M_1 = M_2 \Rightarrow \rho A_1 dl_1 = \rho A_2 dl_2 \Rightarrow A_1 \frac{dl_1}{dt} = A_2 \frac{dl_2}{dt} \Rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2 \Leftrightarrow \boxed{\frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1}}$$

igualdad que demuestra la ley de continuidad puesto que esta relación se cumple para dos secciones cualesquiera del tubo de corriente. En una tubería por la que pasa un fluido con régimen laminar, la superficie de contacto del fluido con el tubo es un *tubo de corriente*, cumpliéndose en la tubería, por lo tanto, la «ley de continuidad», y en los lugares en que la tubería es de mayor diámetro el fluido se desplaza con más lentitud que en los lugares de menor diámetro.

Llamamos GASTO o CAUDAL ( $G$ ) de una tubería al volumen de fluido que pasa por la sección transversal en la unidad de tiempo:

$$\boxed{G = \frac{dV}{dt}}$$

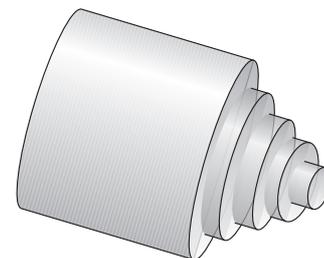


Fig. XII-42.- Régimen estacionario y laminar en un tubo de sección circular.

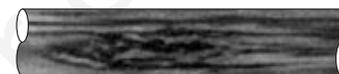


Fig. XII-43.- Régimen turbulento.

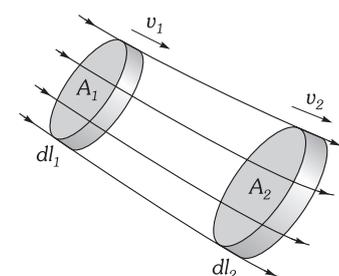


Fig. XII-44.- Líneas y tubos de corriente. Ley de continuidad.

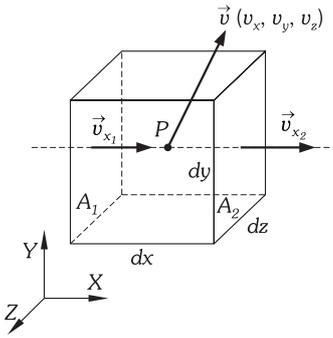


Fig. XII-45.- Volumen elemental de fluido en movimiento centrado en un punto P.

y como  $dV = A dl$  y  $v = dl/dt$ , entonces:

$$G = Av$$

que para distintas secciones de una canalización por la que circula un fluido en régimen de Bernouille permanecerá constante.

Una forma general de la ecuación de continuidad como fenómeno local (en cada punto del fluido), y sin ser necesario considerar al fluido como incompresible, se obtiene de la siguiente manera: consideremos un volumen elemental,  $d\tau = dx dy dz$ , en el que no existen ni fuentes ni sumideros, centrado en P como en la Fig. XII-45 y en el interior de un fluido en movimiento.

Si es  $\mathbf{v}(v_x, v_y, v_z)$  la velocidad del fluido en P, las componentes según el eje X de la velocidad sobre las caras  $A_1$  y  $A_2$  serán respectivamente:

$$v_{x1} = v_x - \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \quad v_{x2} = v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{2}$$

y la masa que en un tiempo  $dt$  entra por la cara  $A_1$ :  $dm_1 = \rho v_{x1} dt A_1$ , con lo que:

$$\frac{dm_1}{dt} = \rho \left( v_x - \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz$$

De la misma forma, la masa del fluido que en el tiempo  $dt$  sale por la cara  $A_2$  es:  $dm_2 = \rho v_{x2} dt A_2$ , y por tanto:

$$\frac{dm_2}{dt} = \rho \left( v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz$$

El aumento con el tiempo de la masa de fluido en el volumen  $d\tau$  debida al flujo en la dirección del eje X es:

$$\left( \frac{dm}{dt} \right)_x = \frac{dm_1}{dt} - \frac{dm_2}{dt} = -\rho \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dy dz - \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} d\tau$$

Con un cálculo análogo para las restantes caras de  $d\tau$  se obtiene la variación temporal de la masa que resulta:

$$\frac{dm}{dt} = - \left[ \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] d\tau$$

Por otro lado, la masa contenida en  $d\tau$  en un instante  $t$ , es  $dm = \rho d\tau$ , y si la densidad cambia con el tiempo las variaciones de la masa y de la densidad vendrán relacionadas por la expresión:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$

Igualando las dos expresiones tenemos:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{div}(\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

que es la ECUACIÓN DE CONTINUIDAD para fluidos en movimiento. (En el caso en que dentro del volumen considerado  $d\tau$  existiera alguna fuente o sumidero esta ecuación sería distinta de cero). Si la suma de los tres primeros términos es negativa existe un flujo de masa neto hacia el interior del volumen, en consecuencia la masa en el interior del elemento se «amontona». Para líquidos, que consideraremos incompresibles, la densidad es constante y la ecuación se reduce a:  $\text{div} \mathbf{v} = 0$  y aplicando el teorema de Ostrogradsky-Gauss\*:

$$\int_A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \text{div} \mathbf{v} d\tau = 0$$

y como en régimen de Bernouilli  $d\mathbf{A}$  y  $\mathbf{v}$  son paralelos entonces:

$$\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = d(vA) = 0 \quad \Rightarrow \quad Av = \text{cte}$$

**PROBLEMAS: 85 al 88.**

**XII - 26. Alturas geométricas, piezométrica y cinética. Carga de un fluido**

Supongamos un fluido en movimiento y consideremos una porción de él limitada por líneas de corriente (Fig. XII-46). En un punto A, en el que la sección normal a la línea de corriente que pasa

\*\* Ver párrafo VII-10.

por  $A$  es  $A_1$ , el líquido tiene una velocidad  $v_1$ , y está sometido a una presión  $p_1$  y, por tanto, a una fuerza:  $p_1 A_1$ .

ALTURA GEOMÉTRICA ( $h_1$ ) es la altura del punto sobre un plano horizontal arbitrario ( $X$ ).

ALTURA PIEZOMÉTRICA ( $h'_1$ ) es la altura de fluido que sería necesaria para producir la presión hidrostática  $p_1$ . Por el teorema general de hidrostática  $p_1$  y  $h'_1$  vienen ligados por la ecuación:

$$p_1 = h'_1 \rho g \Rightarrow h'_1 = \frac{p_1}{\rho g}$$

ALTURA CINÉTICA ( $h''_1$ ) es la altura que sería necesaria para producir, en caída libre, la velocidad  $v_1$ . Por consiguiente:

$$v_1 = \sqrt{2gh''_1} \Rightarrow h''_1 = \frac{v_1^2}{2g}$$

La suma de las tres alturas es llamada en ingeniería «CARGA DEL FLUIDO» que se mide en unidades de longitud como lo indica la ecuación dimensional de cada término.

### XII - 27. Teorema de Bernoulli. Presión hidrodinámica

El teorema de Bernoulli fue presentado por primera vez por Daniel Bernoulli (1700-1782) en su obra Hydrodynamica (1738) enunciándose de la siguiente manera:

«En un fluido incompresible y no viscoso en movimiento en régimen estacionario bajo la acción de la gravedad, la suma de las alturas geométricas, piezométricas y cinética es constante para los diversos puntos de una línea de corriente».

En efecto: consideremos el tubo de corriente de la Fig. XII-46 limitado por líneas de corriente y por las secciones  $A_1$  y  $A_2$ , y supongamos que en un tiempo  $dt$  se ha trasladado a la posición sombreada de la figura. La porción central no habrá experimentado ningún cambio de energía. Las porciones extremas, de igual volumen, han sufrido los siguientes cambios energéticos:

1. La fuerza  $p_1 A_1$  que actúa sobre la sección  $A_1$  habrá realizado un trabajo, en el tiempo  $dt$ , de valor:  $p_1 A_1 dl_1$ , siendo  $dl_1$  el camino que se ha trasladado la sección  $A_1$ . También la fuerza que actúa sobre la sección  $A_2$ , habrá realizado un trabajo, en el mismo tiempo, igual a:  $-p_2 A_2 dl_2$ , el signo menos nos indica que la fuerza y el camino recorrido son de sentido contrario.

Siendo  $dM_1$  y  $dM_2$  las masas iguales contenidas y llamando  $dV$  al volumen ocupado por ellas, se verifica que:

$$dM_1 = dM_2 \Rightarrow \rho A_1 dl_1 = \rho A_2 dl_2 \Rightarrow A_1 dl_1 = A_2 dl_2 = dV$$

Luego el trabajo total realizado por las fuerzas exteriores será:

$$dW = p_1 dV - p_2 dV = (p_1 - p_2) dV$$

2. Las masas  $dM_1$  y  $dM_2$ , experimentan en el tiempo  $dt$  una variación de energía potencial, cuyo valor es la diferencia de la energía potencial en el estado final ( $gh_2 dM_2$ ) menos la inicial ( $gh_1 dM_1$ ), es decir:

$$dU = gh_2 \rho A_2 dl_2 - gh_1 \rho A_1 dl_1 = \rho g (h_2 - h_1) dV$$

3. La variación de energía cinética al pasar tal masa de fluido de la velocidad inicial  $v_1$  a la final  $v_2$ , será:

$$dT = \frac{1}{2} \rho dV v_2^2 - \frac{1}{2} \rho dV v_1^2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) dV$$

Siendo el trabajo de las fuerzas exteriores igual a la variación total de energía (teorema de la energía mecánica) se debe verificar:

$$dW = dU + dT \Rightarrow (p_1 - p_2) dV = \rho g (h_2 - h_1) dV + \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) dV \Rightarrow$$

$$p_1 dV + \rho g h_1 dV + \frac{1}{2} \rho v_1^2 dV = p_2 dV + \rho g h_2 dV + \frac{1}{2} \rho v_2^2 dV$$

Los tres términos del trinomio representan la energía del volumen  $dV$ ,  $\rho g h_1 dV$  es la energía potencial de posición en el campo gravitatorio terrestre, por el hecho de estar la masa  $dM = \rho dV$  a una cierta altura ( $h_1$ ) sobre un plano de referencia;  $\frac{1}{2} \rho v_1^2 dV$  es la energía cinética que en tal posición posee tal masa;  $p_1 dV$  es la energía correspondiente al hecho de estar sometido al volumen  $dV$  a una presión  $p_1$ . Cuando no hay rozamientos en el movimiento de los líquidos, esta suma de energías se mantiene constante, como ya hemos deducido matemáticamente en la expresión anterior. Dividiendo tal expresión por  $dV$  obtenemos:

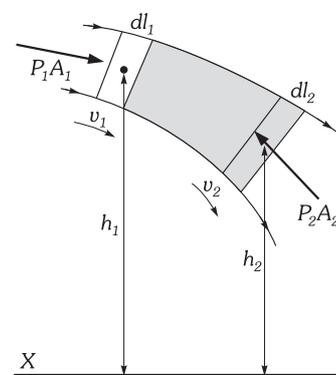


Fig. XII-46.- Teorema de Bernoulli.

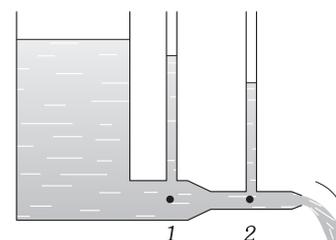


Fig. XII-47.- Caída de presión en un tubo en el que la sección disminuye, al ser recorrido por un líquido.

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (8)$$

representando cada término las energías que corresponden a cada unidad de volumen. Dividiendo por  $\rho g$ , se obtiene:

$$h_1 = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \quad (9)$$

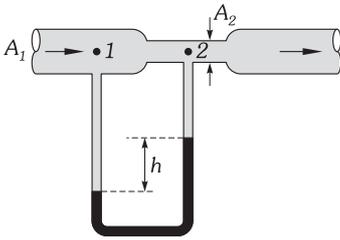


Fig. XII-48.- Medidor de Venturi.

Igualdad que demuestra el teorema de Bernoulli.

Convendremos en llamar «PRESIÓN HIDRODINÁMICA» a la suma de la presión estática  $p$  y la energía cinética de la unidad de volumen. Como la masa de la unidad de volumen es la densidad del cuerpo, la presión hidrodinámica viene expresada por:

$$p_H = p + \frac{1}{2} \rho v^2$$

El teorema de Bernoulli, fundamental de la Dinámica de Fluidos, se puede enunciar de la siguiente forma:

*En dos puntos de la misma línea de corriente de un fluido en movimiento, bajo la acción de la gravedad, se verifica que la diferencia de las presiones hidrodinámicas es igual al peso de una columna de fluido que tiene por base la unidad de superficie y por altura la diferencia de alturas entre los dos puntos.*

Para dos puntos del fluido podremos expresar matemáticamente el anterior teorema por la fórmula:

$$\left( p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \right) - \left( p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 \right) = (h_1 - h_2) \rho g$$

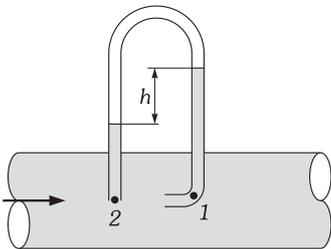


Fig. XII-49.- Tubo de Pitot (líquidos).

$h_1$  y  $h_2$  son las alturas de los puntos sobre un plano horizontal de referencia, X (Fig. XII-46). El segundo miembro expresa el peso de la columna indicada en el enunciado. El teorema de Bernoulli, se reduce al fundamental de hidrostática en cuanto consideremos al fluido en equilibrio.

### XII - 28. Consecuencias y aplicaciones del teorema de Bernoulli

PRESIÓN HIDRODINÁMICA EN LOS PUNTOS DE UNA SUPERFICIE HORIZONTAL:

*«En todos los puntos de una misma línea de corriente situada en superficie horizontal del mismo fluido en régimen de Bernoulli, existe la misma presión hidrodinámica».*

Al hacer en la igualdad anterior  $h_1 = h_2$  se verifica:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

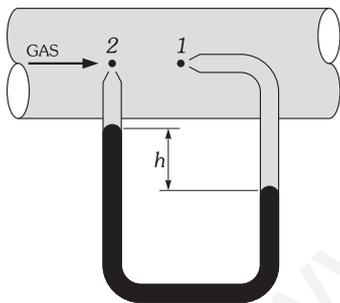


Fig. XII-50.- Tubo de Pitot (gases).

Esta igualdad se cumple con suficiente aproximación en los gases aunque los puntos 1 y 2 no estén a la misma altura, para el caso en que la diferencia de nivel sea pequeña y el producto  $(h_1 - h_2) \rho g$  sea despreciable.

VARIACIONES DE LA PRESIÓN POR CAMBIOS DE VELOCIDAD. EFECTO VENTURI: si en la igualdad anterior es  $v_1 < v_2$ , para que persista la igualdad se ha de verificar que  $p_1 > p_2$ .

A todo aumento de velocidad en una línea de corriente horizontal de un fluido en movimiento, corresponde una disminución de presión. (EFECTO VENTURI).

En la experiencia de la Fig. XII-47 la velocidad en el punto 2 es mayor (menor sección) que en el 1. Para que la ecuación anterior se cumpla es necesario que  $p_2 < p_1$  y el líquido queda a una menor altura en el tubo manométrico 2 que en el 1.

EL MEDIDOR DE VENTURI. El manómetro diferencial de la Fig. XII-48 nos indica una diferencia de presiones  $\Delta p$ , entre la parte ancha y estrecha del tubo horizontal, por el que circula un líquido de densidad  $\rho$ . Conocidas las secciones del tubo ( $A_1$  y  $A_2$ ) se puede determinar el gasto de líquido en la tubería. En efecto:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad \left| \begin{array}{l} \Rightarrow p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 \frac{A_1^2}{A_2^2} \\ v_1 A_1 = v_2 A_2 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left[ \frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right] = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2} \Rightarrow \text{Gasto} = v_1 A_1 = A_1 A_2 \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho (A_1^2 - A_2^2)}}$$

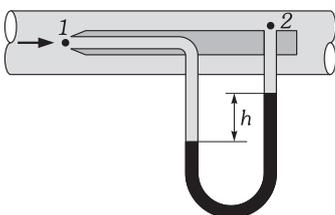


Fig. XII-51.- Sonda de Prandtl.

**TUBO DE PITOT:** para la medida de la velocidad de la corriente de un líquido, basta introducir en él un tubo de vidrio doblado como en la Fig. XII-49 en el que podamos efectuar una medida de las distancias entre los niveles superiores del líquido en sus dos ramas. Una vez que está en equilibrio el líquido del interior del tubo, queda en la disposición de la figura, aplicando el teorema de Bernoulli a los puntos 1 y 2 situados al mismo nivel y teniendo en cuenta que el punto 1 no tiene velocidad con respecto al tubo, la ecuación de Bernoulli se transforma en:

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v^2 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} v = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} \\ p_1 - p_2 = \rho gh \end{array} \right| \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Para la medida de la velocidad de gases, el tubo tiene la forma de la Fig. XII-50. La medida de  $p_1 - p_2$ , queda determinada por  $\rho_1 gh$ , siendo  $\rho_1$  la densidad del líquido del manómetro (que hemos supuesto mucho mayor que la del gas), quedándonos en este caso:

$$v = \sqrt{2gh \frac{\rho_1}{\rho}}$$

Puede emplearse el tubo de Pitot en la medida de velocidades de canoas, aviones, etc. ya que la velocidad obtenida es la «relativa» entre el tubo y el fluido en cuyo seno está.

Un dispositivo muy parecido al anterior es la **SONDA DE PRANDTL** (Fig. XII-51) utilizándose para los mismos fines; aplicando los mismos razonamientos expuestos se deduce para  $v$  el mismo valor que el de la fórmula anterior.

**INHALADORES:** en los inhaladores o pulverizadores, al insuflar una corriente de aire por  $AB$  (Fig. XII-52), el líquido asciende por  $C$ , y al llegar al nivel de la corriente de aire choca con ella y sale pulverizado por el extremo. En efecto: consideremos dos puntos 1 y 2 al mismo nivel y escogido el 2 lo suficientemente lejos para que las corrientes de aire originadas no le afecten; por el teorema de Bernoulli, obtenemos:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = H$$

( $H$ : presión atmosférica). En consecuencia, la presión en el punto 1, es menor que la atmosférica, produciéndose en el tubo  $C$  una depresión (efecto de succión) que hace ascender al líquido.

**TROMPA DE AGUA:** consideremos una corriente de agua que pasa por un tubo que se estrecha en su extremo para aumentar la velocidad del líquido (Fig. XII-53). El gas exterior penetra por la parte abierta y es arrastrado por la corriente. Si este conjunto se pone en comunicación con un recinto cerrado, se produce en él un vacío. En efecto: considerando un punto 1 de gas en contacto con la vena líquida, a una velocidad  $v$ , y otro exterior a ella al mismo nivel, obtendremos:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 \Rightarrow p_1 < p_2$$

originándose una corriente de aire de 2 a 1 que vacía parcialmente el recipiente  $R$ .

**MECHERO DE BUNSEN:** el gas inflamable que penetra por  $A$  (Fig. XII-54), sale a gran velocidad por un estrecho orificio, verificándose una succión del aire exterior por los orificios  $C$  debido a un fenómeno idéntico al descrito en los anteriores párrafos. La abertura de los orificios  $C$ , de admisión de aire, puede ser variada a voluntad para modificar la proporción de aire según la combustión que se desee.

**ORIGEN DE LAS FUERZAS SUSTENTADORA DE UN AVIÓN:** las alas de los aviones producen, en su avance en el aire, líneas de corriente que se aproximan entre sí en la parte superior del ala más de lo que están en la parte inferior (Fig. XII-55). Los tubos de corriente superiores son, por lo tanto, de menor sección que los inferiores; en los primeros la velocidad que lleva el aire, en relación con el ala, es mayor que en los segundos.

Considerando dos puntos  $A$  y  $B$ , cuya diferencia de alturas en el seno del fluido, podemos despreciar, se verificará:

$$p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

Al ser  $v_A > v_B$ , se ha de cumplir que:  $p_A < p_B$ . La fuerza debida a la presión en  $B$  —hacia arriba— es mayor que en  $A$  —hacia abajo— originándose una **FUERZA SUSTENTADORA** que compensa al peso. El fenómeno es, en realidad, más complicado por la formación de torbellinos.

**PARADOJAS:** soplando por un tubo (un carrete de hilo, por ejemplo Fig. XII-56) en una de cuyas bocas se ha colocado una ligera cartulina atravesada por un alfiler, se adhiere la cartulina al tubo, en vez de separarse de él, como parece a primera vista. Ello es debido a que el aire sale a gran ve-

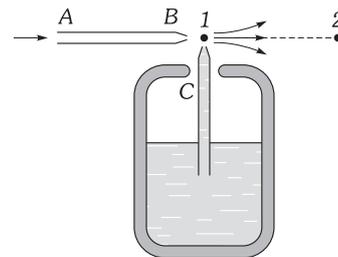


Fig. XII-52.— Inhalador.

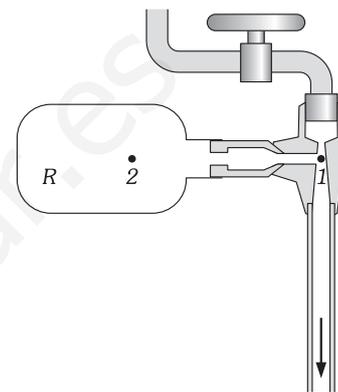


Fig. XII-53.— Trompa de agua.

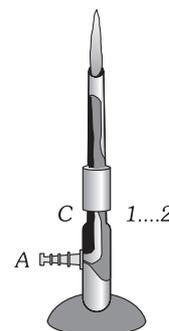


Fig. XII-54.— Mechero Bunsen.

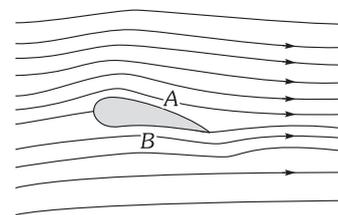


Fig. XII-55.— Origen de la fuerza sustentadora de un avión.

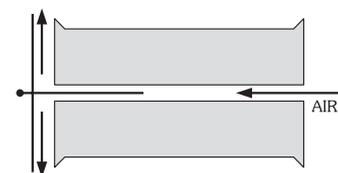


Fig. XII-56.— Paradoja.

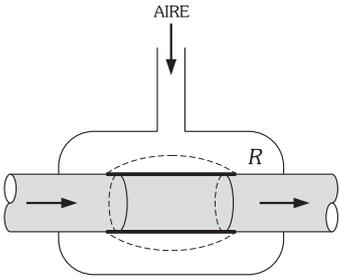


Fig. XII-57.- Paradoja de Banki.

locidad por el estrecho espacio comprendido entre la cartulina y el tubo, provocando en el interior de éste un descenso de presión (efecto de succión) que sostiene a la cartulina.

La paradoja de Banki, consiste en hacer circular un líquido por un tubo al que se ha hecho un corte y se han unido sus extremos próximos por un tubo de goma. Encerrado tal tubo en un recinto *R* se insufla aire a presión, *aumentando* la sección del tubo de goma (Fig. XII-57). Ello es debido a que el aumento de presión, transmitido al líquido por el tubo de goma, corresponde, necesariamente, una disminución de velocidad y a ésta, un aumento de sección (ley de continuidad). Si se disminuye la presión en *R*, el tubo de goma se estrecha.

**PROBLEMAS: 89 al 95.**

**XII - 29. Salida de líquidos y gases por orificios**

TEOREMA DE TORRICELLI:

«La velocidad de salida de un líquido en vasija abierta, por un orificio practicado en pared delgada, es la que tendría un cuerpo cualquiera cayendo libremente en el vacío desde el nivel del líquido hasta el centro de gravedad del orificio».

Esta velocidad es:

$$\left. \begin{matrix} v = \sqrt{2gh} \\ p = \rho gh \end{matrix} \right\} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2p}{\rho}}$$

En efecto: consideremos una vasija con un orificio de sección muy pequeña en comparación con la superficie libre del líquido que contiene (Fig. XII-58). Al salir líquido por el orificio, podremos considerar con suficiente aproximación, que la superficie libre está en reposo. Aplicando el teorema de Bernouilli, a los puntos 1 y 2 obtendremos:

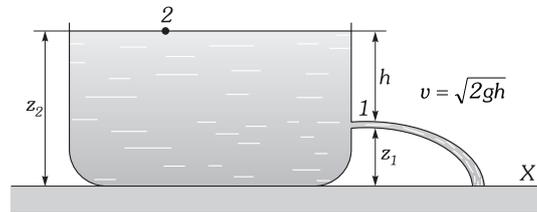


Fig. XII-58.- Teorema de Torricelli.

$$\left( p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 \right) - \left( p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \right) = \rho g (z_2 - z_1)$$

*p*<sub>1</sub> y *p*<sub>2</sub> son las presiones atmosféricas en los puntos 1 y 2, prácticamente iguales, *v*<sub>2</sub> es la velocidad de la superficie libre, prácticamente nula, y *z*<sub>2</sub> - *z*<sub>1</sub> = *h* es la distancia vertical del orificio a la superficie libre. Por lo tanto:

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 = \rho gh \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh}$$

que es lo que se pretendía demostrar.

GASTO DE UN ORIFICIO:

Se llama GASTO de un orificio, al volumen de líquido que sale por él en la unidad de tiempo.

Es, por tanto, el volumen de una figura que tiene por base la sección y por altura la velocidad (espacio recorrido cada segundo).

$$G = Av = A \sqrt{2gh}$$

El gasto práctico es menor que el teórico, debido a una contracción de la vena líquida. Si el orificio es circular, el gasto práctico es, aproximadamente, el 61 por ciento del teórico, es decir:

$$G = 0,61 A \sqrt{2gh}$$

FRASCO DE MARIOTTE: se emplea para conseguir una velocidad de salida constante de un líquido por un orificio. Es un frasco cerrado por un tapón al que atraviesa un tubo cuya boca inferior dista del orificio de salida (practicado en el frasco) una altura *h* (Fig. XII-59). En el nivel *AB* existe una presión igual a la atmosférica (*H*), que es la que hay en la boca inferior, 1, del tubo. Aplicando el teorema de Bernouilli a los puntos 1 y 2 y tomando como nivel de referencia al plano horizontal que pasa por 2, obtenemos:

$$H + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + h\rho g = H + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Consideramos la sección *AB* enorme comparada con la del orificio de salida, por lo cual la velocidad del líquido (*v*<sub>1</sub>) en tal sección es prácticamente nula; por tanto:

$$h\rho g = \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh}$$

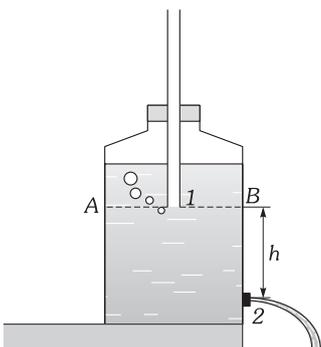


Fig. XII-59.- Frasco de Mariotte.

como  $h$  es constante, la velocidad  $v$  lo es, mientras el líquido no baja del nivel  $AB$ .

**SALIDA DE LOS GASES POR ORIFICIOS. LEYES DE GRAHAM Y BUNSEN:** supongamos un gas a presión  $p$  en el interior de un recinto en cuyas paredes hay practicado un orificio (Fig. XII-60); la presión exterior es  $p'$ , que suponemos menor que  $p$ . Imaginemos dos puntos  $A$  y  $B$ , situados en la misma horizontal; el primero lo suficientemente alejado del orificio de salida para suponer que no existe en él corriente de gas (velocidad nula), y el segundo en la parte exterior del orificio e infinitamente próximo a él. La aplicación del teorema de Bernoulli conduce a:

$$p = p' + \frac{1}{2}\rho v^2 \Rightarrow p - p' = \Delta p = \frac{1}{2}\rho v^2 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}}$$

**LEY DE GRAHAM:** La velocidad de salida de un gas por un orificio es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de su densidad y directamente proporcional a la raíz cuadrada de la sobrepresión.

Si suponemos que la sobrepresión se mantiene constante, el volumen que fluye por un orificio de sección  $A$  en el tiempo  $t$  es:

$$V = v At = At \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

Si consideramos volúmenes iguales de dos gases (1 y 2) y la misma sobrepresión, y saliendo por orificios de la misma sección, se habrá de verificar:

$$At_1 \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho_1}} = At_2 \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho_2}} \Rightarrow \boxed{\frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}}$$

**LEY DE BUNSEN:** A la misma sobrepresión y saliendo por orificios de idéntica sección, se verifica para iguales volúmenes de gases, que los tiempos de salida son directamente proporcionales a las raíces cuadradas de las densidades.

**PROBLEMAS: 96 al 105.**

**E) DINÁMICA DE LOS FLUIDOS REALES**

**XII – 30. Viscosidad. Ecuación de Bernoulli para fluidos reales**

**VISCOSIDAD** es la resistencia opuesta por los fluidos al movimiento, en su seno, de alguna de sus partes.

Por el fenómeno de viscosidad la velocidad de los fluidos por los tubos crece de las paredes al centro del tubo, ya que en los puntos de contacto con la pared, el fluido se adhiere a ella y las restantes capas son frenadas, unas con otras, por su viscosidad o frotamiento interno.

Por efecto del rozamiento interno o viscosidad hay una pérdida de carga a lo largo del tubo, que se puede observar por la experiencia de la Fig. XII-61 siendo la tubería  $ABC$  de sección constante; en efecto, los términos de la expresión (8) del teorema de Bernoulli representan, como allí decíamos, energías de cada unidad de volumen del fluido; pero éste, en su recorrido, ha de realizar un trabajo venciendo a las fuerzas de rozamiento, a costa de la energía piezométrica o de presión ( $p$ ), disminuyendo ésta y, por tanto, la altura del líquido en los tubos manométricos.

Por esta razón introducimos en la ecuación (9), que está expresada en términos de alturas o cargas, un nuevo término en el segundo miembro que llamaremos  $h_f$  y es la pérdida de carga debida al frotamiento, quedándonos la ecuación de la forma:

$$\boxed{h_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_f}$$

$h_f$  se determina mediante el experimento descrito en la (Fig. XII-61).

**XII – 31. Coeficiente de viscosidad. Hipótesis de Navier**

**GRADIENTE DE VELOCIDAD** entre dos láminas de fluido en movimiento es la relación entre la diferencia de velocidades de las láminas y la distancia entre ellas. Si  $\Delta v$  es la diferencia de velocidad y  $\Delta e$  la distancia entre las láminas del fluido;  $\Delta v/\Delta e$  es el gradiente de velocidad.

Para hacer que una capa líquida se deslice sobre otra, o que una superficie se deslice sobre otra cuando entre ellas hay una capa de líquido (régimen laminar), tendremos que ejercer una fuerza  $F$  que venza el rozamiento debido a la viscosidad entre ellas. Esta fuerza tiende a arrastrar al fluido y también a la lámina inferior hacia la derecha, luego para mantenerla en reposo o con la

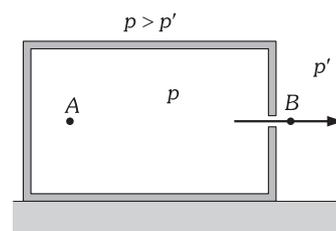


Fig. XII-60.- Salida de gas por un orificio.

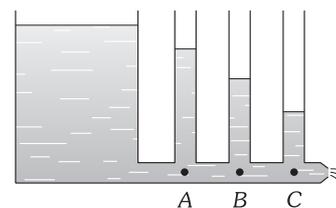


Fig. XII-61.- Caída de presión (pérdida de carga) en un tubo de sección constante al ser recorrido por un líquido viscoso

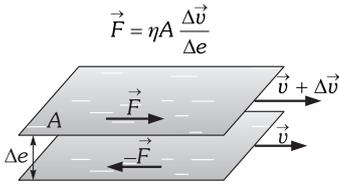


Fig. XII-62.- Hipótesis de Navier.

$$F = \eta A \frac{\Delta v}{\Delta e}$$

$\eta$  es el coeficiente de viscosidad, cuyo concepto físico lo deducimos haciendo  $A$ ,  $\Delta v$  y  $\Delta e$ , iguales a la unidad, y podremos, así, definir:

COEFICIENTE DE VISCOSIDAD es la fuerza necesaria para comunicar a la unidad de superficie del líquido la velocidad constante unidad, estando tal superficie a la distancia unidad de otra, en reposo, del mismo líquido.

La unidad CGS de viscosidad es el POISE ( $P$ ) o viscosidad de un fluido tal que para comunicar a una capa de  $1 \text{ cm}^2$  de él, la velocidad constante de  $1 \text{ cm/s}$ , con relación a otra capa distante de la primera  $1 \text{ cm}$  hay que aplicarse la fuerza de una dina. (La viscosidad del agua es, aproximadamente  $1$  centipoise). La unidad en el sistema internacional es el Pascal por segundo ( $1 P = 0,1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ).

Al coeficiente  $\eta$  se le llama en ocasiones COEFICIENTE DE VISCOSIDAD DINÁMICA, para distinguirlo del llamado COEFICIENTE DE VISCOSIDAD CINEMÁTICA  $\nu$ , que se define como  $\nu = \eta/\rho$ , donde  $\rho$  es la densidad del fluido, y que se mide en  $\text{m}^2/\text{s}$ .

VISCOSIDADES (en cP a 20° C)

Agua .....	1,00
Benceno .....	0,65
Glicerina .....	830
Mercurio .....	1,55
Aire .....	$18,2 \times 10^{-3}$
Hidrógeno .....	$8,8 \times 10^{-3}$

### XII - 32. Ley de Poiseuille

Como veremos a continuación, Jean León Poiseuille (1799-1869), demostró la siguiente ley que lleva su nombre:

El caudal de fluido (volumen por unidad de tiempo) que circula por un tubo cilíndrico en régimen laminar, es directamente proporcional a la cuarta potencia del radio ( $R$ ) y a la diferencia de presiones entre la parte anterior y posterior del tubo ( $\Delta p$ ), e inversamente proporcional a la longitud de éste ( $l$ ) y al coeficiente de viscosidad del líquido ( $\eta$ ).

$$G = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8 \eta l} \tag{10}$$

En efecto: Consideremos un tubo de longitud  $l$  y radio  $R$ , por cuyo interior circula un fluido viscoso en régimen laminar; las capas de fluido circularán en su interior con distintas velocidades, siendo nula la velocidad de la que se encuentra en contacto con él, puesto que queda adherida a la pared; ésta a su vez «tira» hacia atrás de la capa más próxima a ella y así sucesivamente; la velocidad será máxima en el centro del tubo.

Si tomamos un pequeño cilindro de radio  $r$ , concéntrico en el tubo (Fig. XII-63), que se mueve a velocidad constante y por tanto se encuentra en equilibrio de fuerzas; la fuerza motora debida a la diferencia de presión entre sus extremos tendrá que igualarse a la fuerza retardadora de viscosidad que actúa sobre su superficie lateral, y por tanto:

$$(p_1 - p_2) \pi r^2 = - \eta A \frac{dv}{dr} = - \eta 2\pi r l \frac{dv}{dr}$$

siendo  $dv/dr$  el gradiente de velocidad a una distancia  $r$  del eje, y ponemos el signo menos para indicar que la velocidad disminuye a medida que  $r$  aumenta; agrupando términos se obtiene:

$$-dv = \frac{p_1 - p_2}{2 \eta l} r dr \Rightarrow - \int_v^0 dv = \frac{p_1 - p_2}{2 \eta l} \int_r^R r dr \Rightarrow v = \frac{p_1 - p_2}{4 \eta l} (R^2 - r^2)$$

la ecuación  $v = f(r)$  es la de una parábola y decimos que el flujo tiene un perfil de velocidades parabólico (Fig. XII-64).

Para hallar el caudal (volumen de fluido que atraviesa la sección del tubo por unidad de tiempo) calculemos el volumen  $d^2V$  de fluido que atraviesa el elemento de sección recta comprendido entre las circunferencias de radio  $r$  y  $r + dr$  (Fig. XII-65) en un tiempo  $dt$ , que valdrá:

$$d^2V = dA v dt = 2\pi r dr \frac{p_1 - p_2}{4 \eta l} (R^2 - r^2) dt$$

el volumen que fluye a través de toda la sección en un tiempo  $dt$  se obtiene integrando entre  $r = 0$  y  $r = R$  y nos queda:

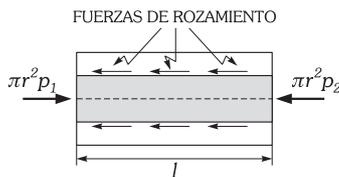


Fig. XII-63.- Tubo de corriente que se mueve a velocidad constante y por tanto se encuentra en equilibrio.

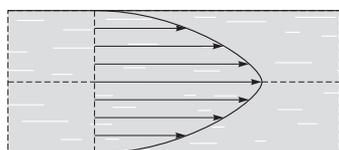


Fig. XII-64.- Perfil de velocidades parabólico.

$$dV = \frac{\pi (p_1 - p_2)}{2 \eta l} dt \int_0^R (R^2 - r^2) dr = \frac{\pi R^4}{8 \eta} \frac{p_1 - p_2}{l} dt$$

dividiendo por  $dt$  y llamando  $\Delta p = p_1 - p_2$ , se obtiene para el gasto  $G$  la ecuación (10) que es la que queríamos demostrar.

**XII - 33. Viscosímetros**

A un tubo capilar ( $T$ ) (Fig. XII-66) se han soldado dos bolas de vidrio, unidas entre sí por otro tubo. Este conjunto se instala en un frasco de dos bocas, como indica la figura. En el frasco se pone el líquido cuya viscosidad se trata de determinar, hasta una cierta altura ( $h$ ). Soplando por  $C$  se llena el depósito descrito hasta el ensanchamiento superior y se deja después, caer libremente el líquido, contando el tiempo  $t$  que tarda en pasar su superficie libre desde el engrase  $A$  al  $B$ . La operación se repite con agua destilada, midiendo el tiempo  $t'$ . Los gastos de salida del líquido y del agua vendrán expresados por:

$$G = Av = \frac{\pi R^4}{8 \eta} \frac{\Delta p}{l} \quad G' = Av' = \frac{\pi R^4}{8 \eta'} \frac{\Delta p'}{l}$$

por división se obtiene:

$$\frac{v}{v'} = \frac{\Delta p}{\Delta p'} \frac{\eta'}{\eta}$$

Pero las sobrepresiones, para las mismas alturas en cada punto del capilar, son directamente proporcionales a las densidades de los líquidos:

$$\frac{\Delta p}{\Delta p'} = \frac{\rho}{\rho'}$$

y las velocidades de salida para el mismo volumen de líquido son inversamente proporcionales a los tiempos empleados:

$$\frac{v}{v'} = \frac{t'}{t}$$

por sustitución llegamos a:

$$\frac{t'}{t} = \frac{\rho}{\rho'} \frac{\eta'}{\eta} \Rightarrow \eta = \eta' \frac{\rho}{\rho'} \frac{t}{t'}$$

Pudiéndose determinar el coeficiente de viscosidad del líquido  $\eta$ , conociendo el del agua  $\eta'$ , las densidades de los dos líquidos y los tiempos de salida por el capilar.

**XII - 34. Efecto Magnus**

Gustav Magnus (1802-1870), enunció:

*Un cuerpo que gira en el seno de un fluido viscoso en movimiento, cuyas líneas de corriente son perpendiculares al eje de giro, queda sometido a una fuerza, perpendicular al eje y a las líneas de corriente.*

Dejemos caer una pelota habiendo producido en ella un rápido movimiento de rotación, según un eje horizontal (Fig. XII-67). Podemos imaginar que la pelota giratoria conserva su lugar en el aire y es éste el que se mueve hacia arriba. La velocidad de un punto  $A$  del aire es mayor que la de  $B$ , ya que la pelota en su movimiento «arrastra», en cierto modo, a las partículas del aire que están en su contacto, y la velocidad de arrastre se suma a la del aire en  $A$  y se resta en  $B$ . La aplicación del teorema de Bernoulli a  $A$  y  $B$  –igualdad de presiones aerodinámicas– conduce a:

$$p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

al ser  $v_A > v_B \Rightarrow p_A < p_B$ . Estas presiones, originan fuerzas perpendiculares a la superficie de la pelota en  $A$  y en  $B$ , haciendo caer a ésta desviándose hacia la izquierda, en el caso de la figura. Este fenómeno es la causa de las extrañas trayectorias de las pelotas en el tenis, cuando la raqueta las despide con «efecto».

**XII - 35. Cálculo de la pérdida de carga**

La ley de Poiseuille nos permite calcular la pérdida de carga por rozamiento en un tubo cilíndrico y en régimen laminar. En la expresión (10),  $\Delta p$  es la caída de presión debida a la existencia del rozamiento ligado a la viscosidad; esa caída de presión produce la pérdida de carga  $h_f$ , de tal forma que:  $h_f = \Delta p / \rho g$ , y de (10), podemos poner:

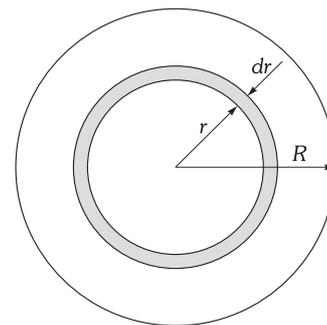


Fig. XII-65.- Para calcular el caudal del tubo.

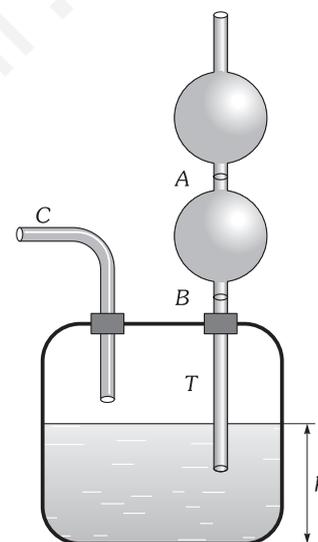


Fig. XII-66.- Viscosímetro.

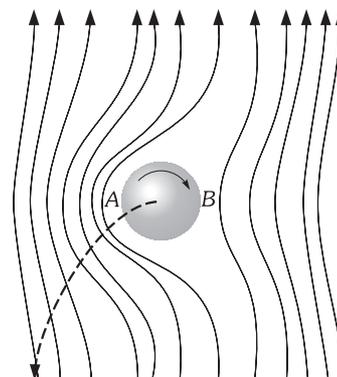


Fig. XII-67.- Efecto Magnus.

$$h_f = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{8 \eta l G}{\pi R^4 \rho g}$$

Se llama VELOCIDAD MEDIA DEL LÍQUIDO EN UNA SECCIÓN DEL TUBO, a la velocidad constante que deberían tener sus diversas capas para producir idéntico gasto que el que se produce en realidad. En función de ella dicho gasto se expresará:  $G = Av_m = \pi R^2 v_m$ , con lo que:

$$h_f = \frac{8 \eta l v_m}{\rho g R^2} \tag{11}$$

PROBLEMAS: 106 al 109.

**XII – 36. Régimen turbulento. Módulo de Reynolds**

Hemos visto que en régimen laminar el fluido se desplaza por láminas paralelas entre sí y al eje de conducción; el vector velocidad de una partícula en un punto determinado es paralelo al eje de la tubería y por tanto no tiene componentes normales a dicho eje, siendo además constante con el tiempo para todas las partículas que pasan por el mismo punto.

Decimos que un fluido se mueve por un tubo con RÉGIMEN TURBULENTO cuando aparecen componentes de la velocidad normales a la dirección de propagación, que originan movimientos de rotación en forma de torbellinos. Además, el vector velocidad, no permanece constante para un mismo punto del espacio, considerando tiempos distintos, sino que varía.

Los experimentos realizados por Osborne Reynolds (1842-1912) con venas líquidas coloreadas confirman la existencia de estos dos regímenes; éstos se resumen en la Fig. XII-68 en la que representamos los valores medidos de  $\log h_f$  frente a los de  $\log v$  para un mismo líquido en el mismo tubo.

Conforme aumenta la *velocidad media* partiendo de valores bajos se obtiene la recta ABC, de pendiente igual a uno, lo que confirma la proporcionalidad entre  $h_f$  y  $v_m$  de la expresión (11). Al régimen de flujo que muestra esta dependencia es al que se llama LAMINAR O DE POISEUILLE. Al alcanzar el fluido la velocidad  $v_C$  cambia la pendiente de la gráfica, adquiriendo un valor aproximadamente igual a dos; en este caso  $h_f$  es proporcional a  $v_m^2$ , perdiendo influencia las características viscosas del fluido. El valor de  $v_C$  resulta dependiente de las características del fluido, de las del tubo y de la temperatura. El régimen de flujo en que  $h_f$  es proporcional al cuadrado de la velocidad es el RÉGIMEN TURBULENTO O DE VENTURI.

Si la variación de la velocidad se hace partiendo de valores altos, las medidas recorren la misma gráfica en el sentido ED, pero al dependencia con  $v_m^2$  se mantiene hasta una velocidad  $v_B$ , en la que pasa a ser con  $v_m$ . A los valores  $v_B$  y  $v_C$  se les llama *velocidades críticas* y a la región BCD REGIÓN DE TRANSICIÓN O CRÍTICA.

Reynolds llamó VELOCIDAD CARACTERÍSTICA  $v_0$  de un fluido en circulación por un tubo, al cociente:

$$v_0 = \frac{\eta}{2\rho_0}$$

( $\eta$  = coeficiente de viscosidad;  $\rho$  = densidad;  $r$  = radio del tubo), que tiene dimensiones de velocidad, y dedujo empíricamente que se puede determinar el régimen de flujo expresando su velocidad en unidades de  $v_0$  mediante el MÓDULO O NÚMERO DE REYNOLDS:

$$R = \frac{v}{v_0} = \frac{2 v \rho r}{\eta}$$

Se comprueba experimentalmente que, salvo pequeñas variaciones debidas al pulimiento de las paredes del tubo, para cualquier fluido el flujo es laminar si  $R < 2000$ ; para valores entre 2000 y 4000 el régimen es de transición, y para  $R > 4000$  el flujo es claramente turbulento. Es una buena aproximación considerar como valor crítico del número de Reynolds el de 2400.

**XII – 37. Resistencia al movimiento de los cuerpos en un fluido viscoso. Ley de semejanza**

La experiencia nos comprueba la existencia de una fuerza de resistencia que se opone al movimiento de los cuerpos en el seno de los fluidos. Para estudiar esta fuerza de resistencia es independiente considerar el movimiento del cuerpo estando el fluido en reposo que el caso inverso, ya que las velocidades que intervienen en este fenómeno son las relativas entre el cuerpo y el fluido. El estudio de los fenómenos originados en el movimiento de cuerpos en fluidos es complicado y en la práctica se recurre a los ensayos efectuados en túneles aerodinámicos y canales hidrodinámicos. En los túneles aerodinámicos las maquetas de los aviones están quietas y es el aire el que se lanza contra ellas con una velocidad contraria a la que debería llevar el avión; por el contrario en los ca-

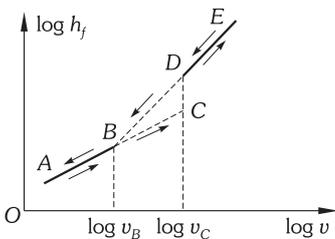


Fig. XII-68.- Curva experimental obtenida por Reynolds.

nales hidrodinámicos el agua está quieta y son las maquetas de los barcos y submarinos los que se mueven.

Ya sea el cuerpo o el fluido el que se mueve, el régimen de este último puede ser laminar o turbulento, según sean las fuerzas de resistencia, deformándose las líneas de corriente; estas deformaciones son fácilmente observables y fotografiables mediante la cubeta de Pohl.

*La resistencia al movimiento en un fluido con movimiento laminar es directamente proporcional a la velocidad y al coeficiente de viscosidad del medio. Para cuerpos de figura semejante e igualmente orientados, la resistencia es directamente proporcional a sus dimensiones lineales (LEY DE SEMEJANZA).*

$$R = C v \eta l \quad (12)$$

*La resistencia al movimiento en un fluido con movimiento turbulento, es proporcional al cuadrado de la velocidad; es, prácticamente, independiente de la viscosidad del medio y proporcional a la densidad de éste. Para cuerpos de figura semejante e igualmente orientados, la resistencia es directamente proporcional a las secciones normales a la dirección del movimiento.*

$$R = \frac{K}{2} \rho v^2 A \quad (13)$$

$K$  es el COEFICIENTE DE FORMA del cuerpo.

### XII – 38. Resistencia al movimiento de una esfera. Ley de Stokes\*

La LEY DE STOKES (Sir George Gabriel 1819-1903) es un caso particular de las leyes, ya estudiadas, que rigen el movimiento de un cuerpo en un fluido cuando el régimen es laminar:

*La resistencia al movimiento de los cuerpos esféricos en un fluido viscoso, es directamente proporcional al radio del cuerpo, a su velocidad y al coeficiente de viscosidad del medio.*

La fórmula (12) del párrafo anterior aplicada a la esfera se transforma en:

$$R = 6 \pi v \eta r \quad (14)$$

La fuerza que hace caer a un cuerpo esférico es su peso menos el empuje del fluido; si  $\rho$  y  $\rho_0$  son las densidades del cuerpo y del fluido, tal fuerza es:

$$F = Mg - E = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho - \rho_0) g \quad (15)$$

Esta fuerza provoca un movimiento de caída acelerado; al aumentar la velocidad aumenta la resistencia al movimiento dada por la fórmula (14) cuando ambas se igualan el cuerpo se mueve con velocidad constante, cuyo valor obtendremos igualando las expresiones (14) y (15):

$$\frac{4}{3} \pi r^3 (\rho - \rho_0) g = 6 \pi \eta v r \quad \Rightarrow \quad v = \frac{2}{9} \frac{r^2 (\rho - \rho_0) g}{\eta}$$

Si el cuerpo esférico cae produciendo una estela de torbellinos (régimen turbulento) la fórmula (13) del párrafo anterior se transforma en:

$$R = \frac{K}{2} \rho v^2 \pi r^2$$

ya que  $A = \pi r^2$ .

### XII – 39. Resistencia que oponen los fluidos al movimiento de una lámina: Ley de Joessel

*La resistencia que oponen los fluidos al movimiento de una lámina plana en ellos con régimen turbulento es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad, a la superficie y al seno del mínimo ángulo formado por la superficie y la velocidad (caso particular de la fórmula 13).*

$$R = \frac{K}{2} \rho v^2 A \operatorname{sen} \varphi$$

La resistencia es perpendicular a la superficie y de sentido contrario al movimiento.

\* Ver el estudio del movimiento hecho en los problemas V-81 y 82.

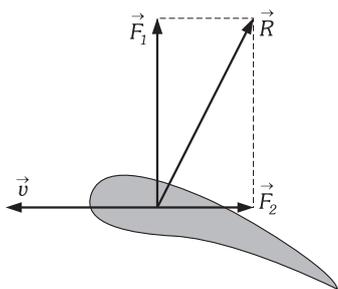


Fig. XII-69.- Resistencia al avance en las alas de un avión. La componente  $F_1$ , sumada a la estudiada en el párrafo 28, produce la «fuerza sustentadora» de los aviones.

Las alas de un avión forman un pequeño ángulo  $\varphi$  con la horizontal (Fig. XII-69), al avanzar el aparato con velocidad  $v$  se origina la resistencia  $R$ , que se puede considerar descompuesta en dos fuerzas; una vertical  $F_1$  y otra horizontal  $F_2$ ; ésta se anula por la fuerza propulsora del avión. La  $F_1$  es de sentido contrario al peso y sumada a la fuerza debida a la presión en la parte superior del aparato estudiada en el párrafo XII-28 produce la total «fuerza sustentadora». La fuerza correspondiente a la resistencia del aire es, aproximadamente,  $1/3$  de la provocada por la disminución de presión.

**PROBLEMAS: 110 al 115.**

## PROBLEMAS

### A) ESTUDIO BÁSICO DE LA ESTRUCTURA DE LA MATERIA

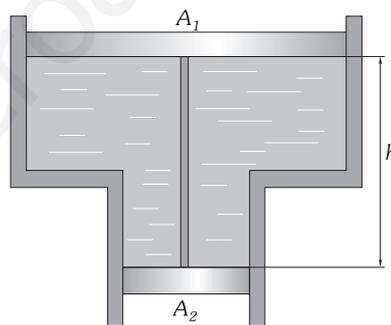
- Si  $P_4$  es la fórmula del fósforo, determinar: 1) Número de moles de 22,46 g del mismo. 2) Número de átomos en tal masa. Masa atómica del fósforo: 30,97 u. Número de Avogadro:  $6,022 \times 10^{23}$ .
- Una cucharada de azúcar (sacarosa:  $C_{12}H_{22}O_{11}$ ) contiene 3,5 g. Calcular: 1) Número de moles de azúcar. 2) Número de moles de átomos de carbono. 3) Número de moléculas de azúcar. Las masas atómicas del hidrógeno, carbono y oxígeno 1, 12 y 16 u respectivamente. Número de Avogadro:  $6,022 \times 10^{23}$ .
- Calcular la masa en kilogramos de una molécula de nitrógeno y de una de plata. Masas atómicas del nitrógeno y de la plata 14,011 u y 107,870 u.  $N_A = 6,022 \times 10^{23}$ .
- Calcular la masa en kg de la siguiente mezcla de gases: 1,23 moles de oxígeno,  $6,24 \times 10^{24}$  átomos de helio y  $3,624 \times 10^{23}$  moléculas de vapor de agua. Masas atómicas del hidrógeno, helio y oxígeno 1, 4 y 16 u respectivamente.
- Un cubo de hierro de 10 cm de arista tiene una densidad de 7,9 g/cm<sup>3</sup>. Determinar el número de átomos que contiene y el valor aproximado del radio medio de éstos. DATOS:  $N_A = 6,022 \times 10^{23}$  átomos/mol y la masa atómica del hierro: 55,85 g/mol.

### B) HIDROSTÁTICA

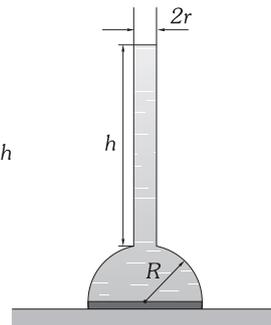
- En un recipiente cúbico de 10 cm de lado se encuentra un gas a la presión de 15 atm; si la presión exterior (la atmosférica) es de 750 mm de Hg, ¿cuál es la fuerza total que soporta una pared del recipiente?
- Calcular la presión que ejerce sobre su base un cilindro de oro de 20 cm de alto. Densidad del oro: 19,3 g/cm<sup>3</sup>.
- 1) Calcular la presión debida al agua (presión hidrostática) a una profundidad de 20 m. 2) Calcular la presión absoluta en tal lugar si la lectura barométrica fuera del agua (presión atmosférica) es de 74,5 cm de Hg.
- Si la presión manométrica del agua en la tubería a nivel del depósito de un edificio es de 500 kPa, ¿a qué altura se elevará el agua?
- En unos vasos comunicantes hay agua y mercurio. La diferencia de alturas de los niveles del mercurio en los vasos es  $h = 1$  cm. Calcular la altura de aceite que se debe añadir por la rama de mercurio para que el nivel de éste en los dos casos sea el mismo. Densidad del mercurio = 13,6 g/cm<sup>3</sup>. Densidad del aceite = 0,9 g/cm<sup>3</sup>.
- Un recipiente de secciones transversales  $A_1$  y  $A_2$  (ver figura) se encuentra abierto a la atmósfera, contiene un líquido de densidad  $\rho$  y está herméticamente cerrado por dos émbolos sin peso unidos entre sí por un alambre muy fino de longitud  $h$ . Si el sistema se encuentra en equilibrio, calcúlese la tensión del alambre. (No considerar el rozamiento de los émbolos con las paredes del recipiente.)
- Un émbolo de 1 kg tiene forma de disco de 5 cm de radio y ajusta perfectamente y sin rozamiento en un cilindro. El émbolo es atravesado por un tubo de paredes muy finas de 1 cm de radio e inicialmente se encuentra en el fondo del recipiente cilíndrico. Echamos por el

tubo 1 l de agua; determínese la altura a que se elevará el émbolo en el recipiente.

- Un depósito está formado por una semiesfera de radio  $R$  que tiene adosado en su parte más alta un cilindro de radio  $n$  veces menor que  $R$  y de altura  $h$  (ver figura); se llena el depósito con un líquido de densidad  $\rho$ . Despreciando el peso del depósito frente al del líquido, calcular: 1) La fuerza que actúa sobre la base circular del depósito. 2) La reacción del suelo. 3) El valor de la fuerza total que se ejerce sobre la cúpula semiesférica.



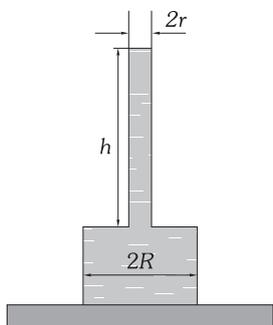
Problema XII-11.



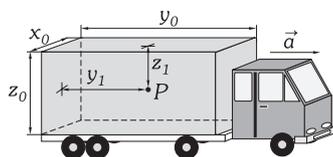
Problema XII-13.

- El depósito sin fondo de la figura tiene una masa  $M$ , está formado por dos cilindros acoplados de radios  $R$  y  $r$  y se encuentra sobre una superficie plana que cierra al depósito herméticamente. Introducimos un líquido en él y cuando alcanza el nivel de éste una altura  $h$ , el depósito se separará del suelo por la acción del líquido sobre él. Determinar la densidad del líquido introducido.
- Desde una superficie horizontal apoyamos boca abajo un recipiente de 9 kg de peso que tiene forma de semiesfera abierto por su plano diametral. En la parte superior tiene un agujero por el que se introduce agua. Hallar la altura máxima que puede alcanzar el agua para que la semiesfera no se despegue del plano. Suponemos que el plano cierra herméticamente al recipiente, y que su radio es lo suficientemente grande para que se despegue antes de llenarse.
- La densidad de un líquido varía con la presión según la ley  $\rho = A + Bp$  ( $A$  y  $B$  constantes). Calcular la presión y la densidad en un punto de él a una profundidad  $h$  de su superficie libre, en la que la presión atmosférica es  $H$ .
- Hacemos descender verticalmente un recipiente que contiene un líquido de densidad  $\rho$  con una aceleración  $a < g$ . Determinar la presión hidrostática en un punto del líquido en función de la profundidad.
- Mostrar que para grandes extensiones de agua en el campo gravitatorio terrestre las isobaras en su interior son superficies esféricas.
- Un camión transporta una cisterna llena de un aceite de densidad 0,73 g/cm<sup>3</sup> y que tiene forma de paralelepípedo rectángulo de dimensiones  $x_0 = z_0 = 3$  m e  $y_0 = 8$  m (ver figura). En un momento determina-

do el camión se mueve con una aceleración  $a = 2 \text{ m/s}^2$ . (El depósito es rígido y la tapa no ejerce presión sobre el aceite cuando el camión se mueve con movimiento uniforme.) Calcular: 1) La fuerza con que el aceite actúa sobre el techo de la cisterna. 2) La fuerza que actúa sobre el fondo. 3) La presión en un punto A a una profundidad  $z_1 = 1 \text{ m}$  y a una distancia  $y_1 = 3 \text{ m}$  de la pared trasera.

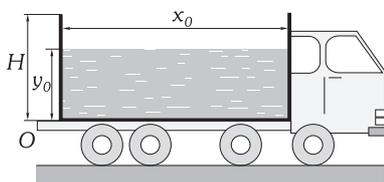


Problema XII-14.

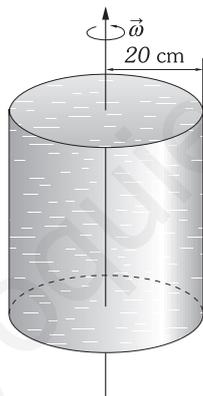


Problema XII-19.

**20.** La cisterna sin tapa en forma de paralelepípedo rectángulo contiene un líquido de densidad  $\rho$  que en reposo (o con movimiento uniforme) alcanza una altura  $y_0$  y es transportada por un camión (ver figura) que en un momento determinado le comunica una aceleración  $a$ . 1) Determinar la ecuación de la curva correspondiente al perfil de la superficie libre del líquido cuando se está moviendo con dicha aceleración (tomar los ejes  $OXY$  con origen en  $O$  y coincidentes con las aristas del depósito). 2) Determinar la aceleración máxima con que puede ir el camión sin que el líquido se salga de la cisterna.



Problema XII-20.



Problema XII-24.

**21.** 1) Determinar la ecuación de la familia de superficies isobaras en el interior del líquido del problema anterior. 2) ¿Cuál es la diferencia de presiones entre dos puntos cualesquiera en el interior del líquido en el mismo problema?

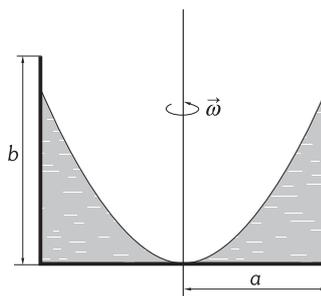
**22.** A un depósito cilíndrico de radio  $a$  y que contiene un líquido de densidad  $\rho$ , se le hace girar alrededor de su eje de simetría con velocidad angular constante  $\omega$ . 1) Determinar la ecuación de la curva correspondiente al perfil de la superficie libre del líquido cuando se encuentra en movimiento (tomar el eje  $OY$  en el eje de simetría y el  $OX$  en el punto de corte de dicho eje con tal superficie). 2) Si la altura del depósito es  $H$  y cuando está en reposo la superficie libre del líquido se encuentra a una altura  $h$  del fondo, ¿cuál es el valor máximo que puede tener la velocidad angular  $\omega$  para que el líquido no se salga?

**23.** 1) Determinar la ecuación de la familia de superficies isobaras en el interior del líquido del problema anterior. 2) ¿Cuál es la diferencia de presiones entre dos puntos cualesquiera en el interior del líquido en el mismo problema?

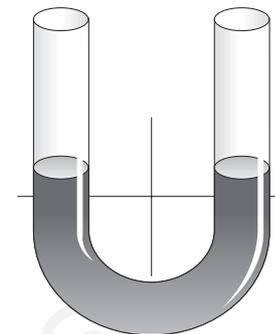
**24.** Un recipiente cilíndrico cerrado de  $20 \text{ cm}$  de radio está lleno de agua y gira a  $1200 \text{ rpm}$  alrededor de su eje. Determinar la diferencia de presiones entre dos puntos pertenecientes al mismo círculo perpendicular al eje y que distan de él  $5$  y  $15 \text{ cm}$  respectivamente.

**25.** La figura nos representa un recipiente cilíndrico de radio  $a = 40 \text{ cm}$  que contiene aceite de densidad  $800 \text{ kg/m}^3$ , que se encuentra girando alrededor de su eje de simetría a razón de  $60 \text{ rpm}$ ; el aceite está a

punto de salirse del recipiente y tiene profundidad nula en el centro del fondo. Calcular: 1) La altura  $b$  del cilindro. 2) La fuerza ejercida por el aceite sobre el fondo.



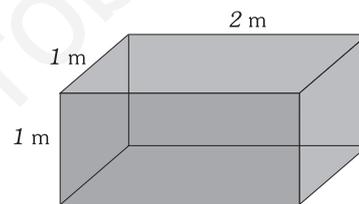
Problema XII-25.



Problema XII-26.

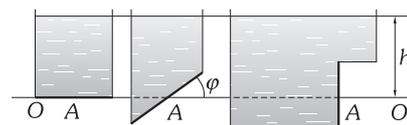
**26.** Determinar el período de las oscilaciones de una masa  $M$  de un líquido de densidad  $\rho$  al ser vertido en un tubo en U (Fig.) de sección circular de radio  $R$ . Despreciar la viscosidad del líquido.

**27.** Un depósito de la forma y dimensiones de la figura está lleno de un líquido de densidad  $0,8 \text{ g/cm}^3$ . Calcular la fuerza que actúa sobre cada una de las paredes y el fondo.



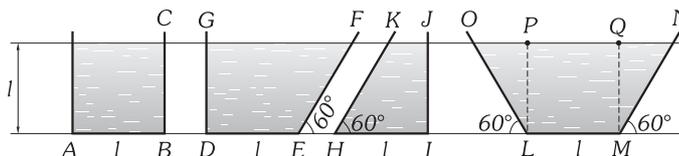
Problema XII-27.

**28.** Supongamos tres recipientes de la forma indicada en la figura en los que las superficies  $A$  son todas rectangulares e idénticas, y la línea  $OO'$  pasa por el centro de ellas, calcular: 1) La fuerza que actúa sobre cada una de ellas. 2) Las componentes horizontal y vertical de dichas fuerzas.



Problema XII-28.

**29.** Supongamos los recipientes de la forma indicada en la figura. El primer recipiente es cúbico, de  $10 \text{ cm}$  de arista; los otros tres recipientes tienen la misma base e igual altura y están llenos de agua. Calcular: 1) El peso del agua en cada recipiente. 2) La fuerza sobre el fondo de cada uno. 3) La fuerza sobre las caras  $BC$ ,  $EF$  y  $HK$ . 4) La fuerza sobre la cara vertical  $LMNO$  del cuarto recipiente.



Problema XII-29.

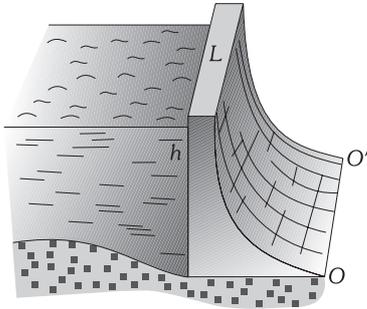
**30.** Un depósito lleno de agua está formado por un cilindro de  $2 \text{ m}$  de radio y  $3 \text{ m}$  de altura y una base en forma semiesférica. Calcular la fuerza que actúa sobre la base semiesférica.

**31.** Calcular el momento de inercia de área de un rectángulo de aristas  $a$  y  $b$  respecto de un eje contenido en su plano, que pasa por su  $CG$ , y es perpendicular a  $b$ .

**32.** Determinar el momento de inercia del área de un triángulo de altura  $h$  respecto de un eje contenido en su plano que pasa por su  $CG$  y es paralelo a una de sus bases  $b$ .

**33.** Calcular el momento de inercia de área de un círculo de radio  $R$  respecto de un eje que contiene a su diámetro.

**34.** La figura nos representa el dique de un embalse en el que el agua alcanza una profundidad  $h = 60$  m en la pared vertical, y tiene una longitud  $L = 250$  m. Calcular: 1) La fuerza resultante que actúa sobre el dique. 2) Momento de la fuerza que tiende a hacer girar el dique alrededor de  $OO'$ . 3) Posición de la línea de acción de la resultante.

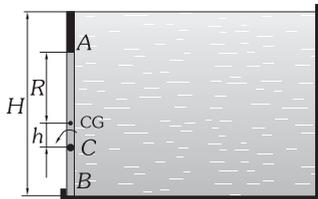


Problema XII-34.

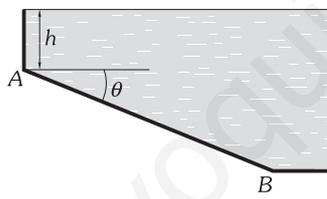
**35.** Una compuerta rectangular vertical de  $1 \times 0,5$  m cierra el desagüe de un embalse, siendo horizontales sus lados mayores. La distancia del borde superior de la compuerta a la superficie libre del agua es 10 m. Calcular la fuerza que actúa sobre la compuerta y la profundidad a la que se encuentra el centro de presiones en ella.

**36.** Hallar el centro de empuje de una compuerta circular de radio  $R$  cuyo centro está a una profundidad  $h$  de la superficie de un líquido, sabiendo que el momento de inercia del área de la compuerta respecto a un eje diametral es  $I_G = AR^2/4$ .

**37.** En el depósito de la figura la compuerta homogénea circular  $AB$  es de radio  $R = 1$  m, y sólo puede girar alrededor del eje horizontal  $C$  y en el sentido antihorario. El eje  $C$  se encuentra a  $h = 20$  cm por debajo del centro de la compuerta (CG). Determinar hasta qué altura  $H$  puede ascender el líquido sin que se abra la compuerta.



Problema XII-37.



Problema XII-38.

**38.** En el depósito de la figura el fondo plano  $AB$  es un triángulo isósceles que está inclinado  $\theta = 30^\circ$  con respecto a la horizontal, el vértice  $A$  se encuentra a  $h = 1$  m de profundidad y la base y altura miden 2 m y 3 m respectivamente. Calcular: 1) La fuerza resultante sobre su superficie debida al agua. 2) La posición (profundidad) a que se encuentra el centro de empuje.

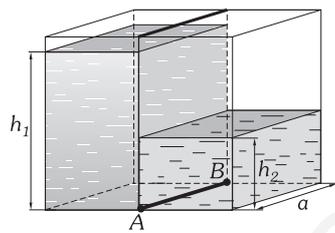
**39.** El depósito de anchura  $a$  de la figura se encuentra dividido en dos por una compuerta. 1) La compuerta se encuentra ensartada en unas guías verticales (como una tajadera); vertemos en un lado del depósito un líquido de densidad  $\rho_1$  hasta una altura  $h_1$  y, en el otro lado, un líquido de densidad  $\rho_2$  hasta una altura  $h_2$ ; calcular la fuerza que actúa sobre la compuerta. 2) Si la compuerta está articulada en su parte inferior pudiendo girar alrededor del eje  $AB$ , indicado en la figura, y procedemos de la misma manera que en el apartado anterior, ¿qué relación tiene que haber entre las alturas de los líquidos para que la compuerta se encuentre vertical en equilibrio?

**40.** Las secciones de los émbolos de un gato hidráulico son circulares y de radio  $r_B = 5$  cm y  $r_A = 50$  cm. La longitud total de la palanca que acciona el émbolo pequeño es de 1 m, y la distancia entre el punto de aplicación de la potencia al de la resistencia, 75 cm. Aplicando a la palanca una fuerza de un kilopondio, ¿qué fuerza se transmite al émbolo mayor? 1) Si los émbolos están al mismo nivel. 2) Si el pistón grande se encuentra a 1 m por debajo del pequeño. El líquido en el gato es agua.

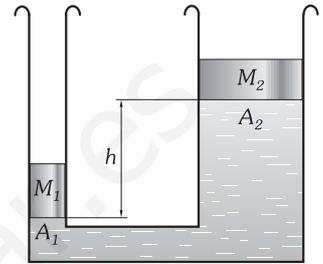
**41.** Los dos pistones de una prensa hidráulica tienen por sección  $A = 5$  cm<sup>2</sup> y  $A' = 2$  dm<sup>2</sup>; la palanca de segundo género que sirve para

maniobrar la bomba tiene por brazos longitudes de 10 cm y 1 m. Se ejerce en el extremo de la palanca una fuerza de 1 kp. Se pide: 1) ¿Qué peso podrá levantar la prensa? 2) ¿Cuál es el desplazamiento del pistón mayor cuando el pequeño se baja 10 cm? 3) ¿Cuál es la relación entre el trabajo motor y el trabajo resistente?

**42.** El esquema de la figura representa dos vasos comunicantes conteniendo un líquido y cerrados herméticamente con dos émbolos de masas  $M_1$  y  $M_2 = M_1/3$ ; en la posición de equilibrio  $h = 3$  cm. Colocamos sobre el émbolo de la derecha una pesa de masa  $M = 2M_1$ , entonces en el equilibrio los dos émbolos se sitúan a la misma altura. Determinar la diferencia de alturas en el equilibrio cuando se coloca la misma pesa en el émbolo de la izquierda.



Problema XII-39.



Problema XII-42.

**43.** Nos encontramos sobre una balsa de madera flotando sobre una piscina que soporta además un gran bloque de cemento. Arrojamos el bloque de cemento a la piscina. Razónese cómo variará el nivel del agua en la piscina.

**44.** Calcular el peso aparente de una piedra de 10 kg cuando se encuentra sumergida en agua. Densidad de la piedra: 2,6 g/cm<sup>3</sup>.

**45.** Una esfera metálica hueca de densidad 7 g/cm<sup>3</sup>, pesa en el aire 1 kp y sumergida en agua 0,8 kp. Calcular: 1) El volumen de la esfera. 2) El volumen de su cavidad interior.

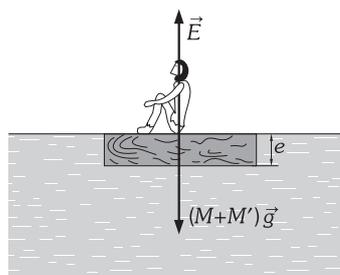
**46.** Para medir la densidad de un cuerpo se pesa en el aire y en el agua y da 130 g y 97 g, respectivamente. ¿Cómo se procede al cálculo de ésta? ¿Cuál es su volumen?

**47.** El peso aparente de un cuerpo en el agua es  $P_1 = 4$  kp y en un aceite de densidad  $\rho_2 = 0,8$  g/cm<sup>3</sup> es  $P_2 = 4,4$  kp. Calcular el peso real  $P$  del cuerpo.

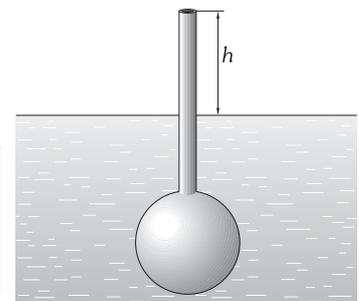
**48.** Una barra homogénea y de sección constante, de 1 m de longitud, dividida en centímetros, se apoya por la división 50 sobre una cuña, en la cual se mantiene en equilibrio. Colgada una masa metálica en la división 80, hay que colocar un determinado contrapeso en la división 10 para que siga manteniendo el equilibrio. Introducida la masa metálica en agua, para seguir manteniendo el equilibrio hay que colocar el mismo contrapeso en la división 15. ¿Cuál es la densidad de la sustancia metálica?

**49.** ¿Qué fracción de volumen de un iceberg sobresale del agua? Densidad del agua del mar: 1,03 g/cm<sup>3</sup>. Densidad del hielo: 0,92 g/cm<sup>3</sup>.

**50.** Disponemos de una plancha de corcho de 1 dm de espesor; calcular la superficie mínima que se debe emplear para que flote en agua sosteniendo a un náufrago de 70 kg (ver figura). Masa específica del corcho: 0,24 g/cm<sup>3</sup>.



Problema XII-50.



Problema XII-51.

**51.** Un palo cilíndrico de densidad 0,7 g/cm<sup>3</sup>, de 4 cm<sup>2</sup> de sección y 1 m de largo se sumerge en el agua hasta que sobresalen  $h = 10$  cm lastrando su parte inferior con una bola de cobre de densidad 8,8 g/cm<sup>3</sup>. Hállese el volumen de la bola (ver figura).

**52.** Un buque tiene una masa total de 2000 t cuando lleva su carga máxima en el mar. ¿Qué masa debe quitarse al navegar por un río? Densidad del agua del mar:  $1,03 \text{ g/cm}^3$ . Tener en cuenta que, en los dos casos, el volumen sumergido debe ser el mismo.

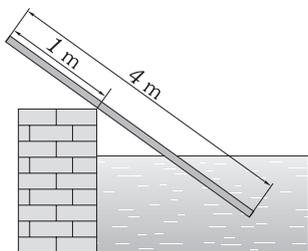
**53.** Con una madera de densidad  $0,7 \text{ g/cm}^3$  se talla un cubo de 1 dm de arista. Este cubo flota en el agua y en un aceite de densidad  $0,9 \text{ g/cm}^3$ . ¿Qué altura tiene la porción sumergida en cada caso? ¿Qué fuerza hay que ejercer sobre el cubo, cuando está en el aceite, para que se sumerja por completo?

**54.** Una esfera metálica hueca de 30 cm de diámetro flota en un aceite de densidad  $0,9 \text{ g/cm}^3$  y se encuentra sumergida hasta su plano diametral. Determinése: 1) Peso de la esfera. 2) Peso de lastre que hay que poner dentro para que la esfera quede totalmente sumergida.

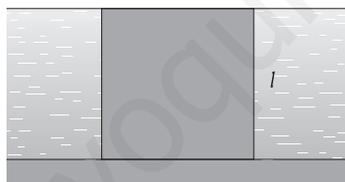
**55.** 1) Del platillo A de una balanza se suspende un cubo macizo de hierro de 7 cm de arista, y del platillo B se suspende un cubo macizo de aluminio de 10 cm de arista. En estas condiciones la balanza está en equilibrio. Calcúlese la densidad del aluminio. 2) Sumergimos ahora el cubo de hierro en aceite y el cubo de aluminio en alcohol. En estas condiciones es preciso añadir al platillo B 496 g para equilibrar la balanza. Calcúlese la densidad del aceite. 3) En una tercera experiencia sustituimos el alcohol de la experiencia anterior por agua, dejando en el platillo B los 496 g como antes. Vamos añadiendo el agua poco a poco hasta que se restablece el equilibrio, de manera que en el lado A el cubo de hierro estará sumergido en el aceite, mientras que en el B el cubo de aluminio flotará en el agua. Se pide calcular la relación entre el volumen de aluminio sumergido y el volumen total. DATOS: Densidad del hierro =  $7,8 \text{ g/cm}^3$ . Densidad del alcohol =  $0,81 \text{ g/cm}^3$ .

**56.** Un bloque cúbico de acero flota sobre mercurio. Siendo la densidad del acero  $\rho_{ac} = 7,8 \text{ g/cm}^3$  y la densidad del mercurio  $\rho_m = 13,6 \text{ g/cm}^3$ , calcular: 1) ¿Qué fracción del volumen del bloque sobresale del mercurio? 2) Si vertemos agua sobre el mercurio, ¿qué fracción de arista cubrirá el agua si el bloque queda justamente cubierto por ella?

**57.** Un tablón homogéneo de densidad  $0,7 \text{ g/cm}^3$ , de longitud 4 m y de sección constante, se apoya en el borde de una piscina con agua como se indica en la figura; desde el punto de apoyo hasta el extremo no sumergido hay 1 m. Calcular la longitud sumergida de tablón.



Problema XII-57.



Problema XII-66.

**58.** Dos esferas muy pequeñas, de igual volumen y densidades  $1,2 \text{ g/cm}^3$  y  $1,4 \text{ g/cm}^3$ , están unidas a los extremos de una cuerda de masa y volumen despreciables, y de tal forma que cuando se encuentra estirada la distancia entre sus centros es de 10 cm; el conjunto así formado se arroja a una solución salina cuya densidad varía con la profundidad  $h$  según la ecuación escrita en el sistema CGS:  $\rho = 1 + 10^{-2} h$ . Calcular la profundidad a que se encontrarán ambas esferas cuando alcancen el equilibrio.

**59.** En un recipiente de  $5 \text{ dm}^2$  de sección que contiene agua hasta una altura de 30 cm, se introduce un cubo de madera de 20 cm de arista y  $0,70 \text{ g/cm}^3$  de densidad. Calcular: 1) La presión hidrostática en el fondo del recipiente después de introducir el cubo. 2) La fuerza sobre el fondo debida a tal presión.

**60.** Dentro del agua y a una altura sobre el fondo de 5,1 m soltamos un cuerpo de masa 100 g. Calcular la velocidad y la energía cinética cuando llega al fondo, así como el tiempo que tarda en la caída, suponiendo que la densidad del cuerpo es  $2,75 \text{ g/cm}^3$ . (Se desprecia toda influencia de rozamiento y sólo se tendrá en cuenta el empuje de Arquímedes.)

**61.** Un objeto de corcho se deja caer desde una altura de 5 m sobre la superficie de un lago. Considerando que sólo se opone al movimiento el empuje del agua y que la densidad del corcho es  $0,2 \text{ g/cm}^3$ , calcular: 1) ¿Cuánto se hunde el objeto en el agua? 2) ¿Cuánto tiempo tarda en llegar a esa profundidad y volver a la superficie?

**62.** Desde un punto situado a una altura de 10 m sobre la superficie de un estanque lleno de agua y de profundidad 5 m se deja caer una esferita de 0,2 cm de radio. Considerar que sólo se opone al movimiento el empuje del agua. 1) La esferita es de hierro de densidad  $7,5 \text{ g/cm}^3$ . Calcular: a) Lo que tarda en llegar al fondo del estanque. b) La energía cinética con que llega al fondo. 2) La esferita es de madera de densidad  $0,7 \text{ g/cm}^3$ . Calcular: a) La profundidad hasta la que llega a hundirse en el estanque. b) La velocidad con que emerge a la superficie.

**63.** Un trozo de madera de 1 kg de peso y densidad 0,6 se lanza verticalmente hacia abajo con una velocidad de  $\sqrt{2} \text{ m/s}$  desde un punto situado a 5 m de altura sobre la superficie de un depósito de aceite de densidad 0,9. Si se desprecian las resistencias del aire y del aceite, calcular: 1) La velocidad con que llega a la superficie del líquido. 2) El empuje que sufre una vez sumergido. 3) La aceleración con que se mueve en el interior del líquido. 4) La profundidad a que desciende y el tiempo invertido en dicho descenso.

**64.** Calcular el trabajo que se realiza al subir en el interior de un estanque lleno de agua un cuerpo de 100 kg de masa y  $2 \text{ g/cm}^3$  de densidad, desde 10 m a 1 m de profundidad. Se desprecia la resistencia del agua.

**65.** Se sumerge en el agua un cubo de madera de densidad  $0,7 \text{ g/cm}^3$  y 30 cm de arista, hasta que queda totalmente sumergido, de modo que la superficie libre del líquido coincide con una de las caras del cubo. Soltamos el cuerpo y después de realizado un movimiento armónico amortiguado queda en reposo, flotando en el líquido. Calcular el trabajo realizado por el agua sobre el cubo desde que se soltó hasta que queda en reposo.

**66.** Un bloque cúbico de piedra de 1 m de lado y densidad  $2,7 \text{ g/cm}^3$  está justamente sumergido en agua, como se indica en la figura. Calcular el trabajo que se realiza al sacarlo hasta que su cara inferior coincida con el nivel del agua.

**67.** Un cuerpo cilíndrico de radio 1 cm flota verticalmente en el agua. Ejerciendo una fuerza vertical sobre la base situada en el aire, lo introducimos un poco más que en la posición de equilibrio. 1) Demostrar que al soltar el cuerpo adquiere un movimiento vibratorio armónico y determinar la ecuación del movimiento. 2) Si el período de la vibración es 1 s, hallar la masa del cuerpo.

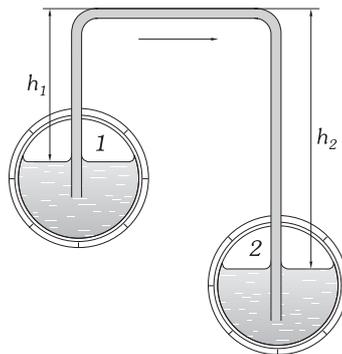
### C) AEROSTÁTICA

**68.** Calcular la fuerza debida a la presión atmosférica ( $H = 1 \text{ atm}$ ) que soporta un hombre que tiene  $1,5 \text{ m}^2$  de piel.

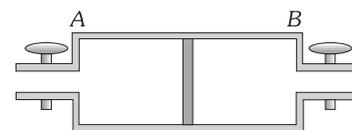
**69.** Una cámara en la que se ha hecho un vacío perfecto está cerrada por una puerta cuadrada que ajusta herméticamente, cuyo lado es 1/2 m. Calcular el número de hombres que, ejerciendo una fuerza de 80 kp, son necesarios para abrir la puerta.

**70.** Un alumno quiso reproducir en su casa la experiencia de Torricelli con un tubo de 1 m de longitud; al no tener mercurio, llenó el tubo de agua y, una vez invertido sobre una cubeta con agua, observó que ésta no bajaba en el tubo. ¿Por qué? ¿Qué longitud mínima debería tener el tubo si la presión exterior era la normal?

**71.** Para «trasegar el vino» (pasarlo de un recipiente a otro en un nivel más bajo, ver figura) se emplea una goma que hace de «sifón». Explicar este proceso.



Problema XII-71.



Problema XII-78.

**72.** 1) Calcular la altura que tendría la atmósfera si no variase la densidad del aire con la altura ni la aceleración de la gravedad (densidad del aire:  $1,293 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3$ ). 2) Con las mismas condiciones, de-

terminar la altura a que se encuentra un avión cuando registra una presión atmosférica que es inferior en 13 cm de Hg a la que hay en ese instante en la superficie terrestre.

**73.** Un tubo cilíndrico graduado, de 1 m de longitud y abierto por sus dos extremos, se introduce verticalmente hasta la mitad de su altura en un líquido. Se tapa su extremo libre con el dedo y se saca, observando que el líquido se vierte hasta quedar ocupando una altura de 25 cm. Calcular con estos datos la densidad del líquido. Presión exterior = 76 cm de mercurio.

**74.** En un tubo cilíndrico de 4 mm de radio, en el que el mercurio marcaba 740 mm de altura, quedando 15 cm de cámara barométrica, ha entrado aire, y como consecuencia ha bajado la columna a 715 mm. Calcular: 1) El volumen de aire que ha entrado a la presión atmosférica. 2) Si se pone ahora la cámara en comunicación con un globo vacío de litro y medio de volumen, ¿cuál es la nueva presión del aire y la altura marcada por el mercurio?

**75.** Un tubo cilíndrico de sección A que tiene forma de U contiene un líquido de densidad  $\rho$  y la distancia desde el nivel del líquido hasta la boca del tubo es  $h_1$ . Uno de sus ramales se cierra herméticamente con un pistón que puede deslizarse sin rozamiento por el tubo; el pistón desciende comprimiendo al aire y el líquido asciende por la otra rama una altura  $h_2$ . Si la presión atmosférica es H, calcular la longitud que desciende el pistón por el tubo y su peso.

**76.** Un vaso cilíndrico de paredes muy finas pesa 75 g, tiene una altura de 15 cm y un diámetro de 6 cm; se pone boca abajo sobre la superficie del agua y lentamente se va metiendo en ella manteniéndolo vertical. La presión atmosférica en el momento de la experiencia es de 750 mm de Hg. Determinar la profundidad mínima a que tendremos que sumergir el vaso para que se hunda. (Despreciamos el empuje del agua sobre las paredes y fondo del vaso, y la tensión de vapor.)

**77.** El tubo de un barómetro tiene 1 m de longitud por encima del mercurio de la cubeta y 1 cm<sup>2</sup> de sección interior. Contiene una columna de mercurio de 0,760 m de altura y cuya temperatura es 0°. Se introduce en la cámara de este barómetro 1 cm<sup>3</sup> de aire medido en las condiciones normales de temperatura y de presión, y sabiendo que la densidad del aire en condiciones normales es 1,293 g/l, se pide: 1) ¿Cuál será la densidad absoluta y relativa de la atmósfera que coronará la columna de mercurio? 2) ¿Cuál será la altura barométrica observada? 3) ¿Cuánto habrá que introducir el tubo barométrico en la cubeta para que la densidad del aire que contiene sea igual a la del aire exterior?

**78.** Un cilindro AB, de 40 cm de longitud y 10 cm<sup>2</sup> de sección interior contiene un pistón de cierre hermético que puede resbalar sin rozamiento, de espesor despreciable y de peso igual a 5 kp. Las bases del cilindro tienen sendas llaves para comunicar con el exterior. Tomamos la presión atmosférica igual a 1 kp/cm<sup>2</sup> y la masa del litro de aire bajo esta presión igual a 1,3 g. 1) Se encuentra el pistón a la mitad del recorrido y las llaves están abiertas. Se cierra la llave correspondiente a la base inferior, se coloca en posición vertical y el pistón desciende. ¿Qué longitud desciende? 2) Partiendo de la misma posición inicial, se cierran simultáneamente las dos llaves. ¿Cuál es el desplazamiento en este caso? 3) Resuelto el primer caso, en la posición de equilibrio se inyecta aire por la llave inferior. ¿Qué masa de aire es preciso inyectar para que el pistón se coloque nuevamente en la mitad de la altura del cilindro?

**79.** Se dan cuatro emboladas de extracción al pistón de una máquina neumática, cuyo cilindro tiene una capacidad de 2 l, siendo la presión del aire en la vasija donde se quiere hacer el vacío de 1 atm y la final, en este mismo recipiente, de 1/81 de atm. Se pide: 1) Calcular el volumen de la vasija en que se hace el vacío. 2) Las masas de aire al comenzar la extracción y al final de ella, o sea, después de las cuatro emboladas. Densidad del aire a la temperatura de la experiencia: 0,001 293 g/cm<sup>3</sup>.

**80.** Se trata de construir un globo cuya masa, prescindiendo del gas interior, sea de 300 kg; el gas interior es helio, cuya densidad es 0,000 196 g/cm<sup>3</sup>, y la del aire, 0,001 293 g/cm<sup>3</sup>. Calcular: 1) El mínimo volumen del aeróstato. 2) La fuerza ascensional si tuviese un volumen de 300 m<sup>3</sup>.

**81.** Conforme un globo asciende la densidad del aire ( $\rho_a$ ) disminuye, haciéndose también menor la fuerza ascensional, hasta que llega un momento en que el aeróstato se detiene. Demostrar que la masa del globo sin gas (M) cuando esto ocurre toma el valor:  $M = V(\rho_a - \rho)$ , siendo V el volumen del gas que llena el globo y  $\rho$  la densidad de dicho gas.

**82.** Un globo de goma tiene de masa 10 g. Se llena de gas helio (densidad a 1 atm: 0,18 g/l) hasta que para una presión interior de 2

atm el globo alcanza un diámetro de 40 cm. Al globo se le ata un cordel muy largo que tiene una masa de 1,5 g/m. Si la densidad de aire es de 1,30 g/l, ¿qué altura alcanzará la parte inferior del globo?

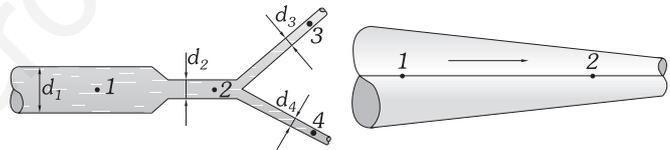
**83.** Encontrar una fórmula general que nos dé la expresión de la masa real de un cuerpo ( $M_c$ ) pesado en el aire (o en el interior de cualquier otro fluido) en función de la masa de las pesas ( $M_p$ ), y de las densidades del cuerpo ( $\rho_c$ ), de las pesas ( $\rho_p$ ) y del aire ( $\rho_a$ ).

**84.** Supóngase que la densidad de la atmósfera varía con la altura según la ley:  $\rho(z) = \rho_0(1 - \alpha z)$  donde  $\alpha$  y  $\rho_0$  son conocidas y  $z$  representa la altura a partir de la superficie de la Tierra. Se supone, además, que la intensidad de la gravedad,  $g$ , es constante y que la viscosidad de la atmósfera es despreciable (fuerza de rozamiento nula): 1) Calcular en función de  $z$ , la fuerza que actúa sobre un pequeño cuerpo de volumen V, constante, cuya densidad es la mitad que la de la atmósfera en  $z = 0$  ( $\rho_0/2$ ). 2) Determinar la altura  $z_e$  a la que el cuerpo podría permanecer en equilibrio. 3) Comprobar que la energía potencial del cuerpo a una altura  $z$  viene dada por:  $U(z) = (z^2/z_e - 2z + z_e) \rho_0 Vg/4$ . 4) Si se abandona el cuerpo sin velocidad inicial en  $z = 0$ , ¿cuál será la altura máxima que alcanzará? 5) Calcular la frecuencia de las oscilaciones del cuerpo en torno a la posición de equilibrio.

**D) DINÁMICA DE FLUIDOS EN RÉGIMEN DE BERNOULLI**

**85.** Por la sección transversal de un tubo de 2 cm de diámetro fluye en régimen de Bernouilli un gas, pasando por ella 1,02 kg de gas en 1 h. Determinése la velocidad con que fluye el gas en el tubo. Densidad del gas 7,5 kg/m<sup>3</sup>.

**86.** Un fluido circula en régimen de Bernouilli por una tubería que primeramente se estrecha y luego se bifurca en las ramas que se indican en la figura. Si los diámetros correspondientes a éstas son:  $d_1 = 20$  cm,  $d_2 = 15$  cm,  $d_3 = 10$  cm y  $d_4 = 5$  cm y las velocidades del fluido en los puntos 1 y 4 son 1 m/s y 3 m/s respectivamente, calcular las velocidades en los puntos 2 y 3.



Problema XII-86.

Problema XII-87 y 90.

**87.** Un fluido de densidad  $\rho$  circula con caudal G y en régimen de Bernouilli por una tubería cuyo diámetro se va reduciendo uniformemente (ver figura). Si en el punto 1 la velocidad del fluido es  $v_1$  y en el 2 es  $v_2$ , determinar la expresión de la variación del momento lineal en la unidad de tiempo entre las dos secciones.

**88.** Suponiendo que la cantidad de agua que sale de un surtidor lanzada hacia arriba a través de una boca de área  $A_1$  en una fuente es constante, ¿qué disminución tendrá que hacerse a la sección  $A_1$  para que el chorro ascienda al doble de altura?

**89.** Calcular en km/h la velocidad de un avión provisto de un tubo de Pitot cuyo líquido manométrico es mercurio, siendo la diferencia de alturas entre los niveles de las dos ramas 49 mm. Suponemos que la densidad del aire es 0,001 293 g/cm<sup>3</sup>.

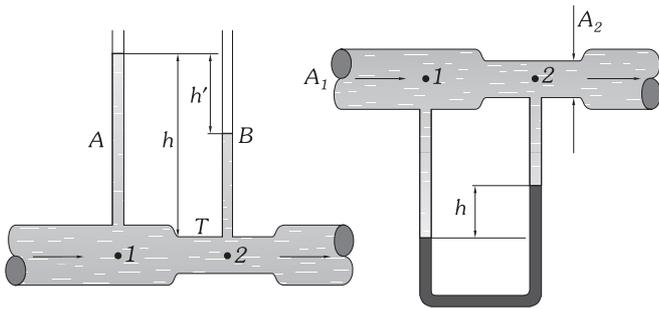
**90.** Un fluido de densidad 0,8 g/cm<sup>3</sup> circula por una tubería horizontal cuyo diámetro se reduce uniformemente de 10 a 6 cm (ver figura). En la sección más ancha su velocidad es de 10 cm/s. Calcular la diferencia de presiones entre dos puntos situados en dichas secciones.

**91.** Para saber la velocidad del agua en una tubería empalmamos en ella un tubo T de menor sección; colocamos tubos manométricos A y B, como indica la figura, y medimos la diferencia de altura (5 cm) entre los niveles superiores del líquido en tales tubos. Sabiendo que la sección T es 10 veces menor que la tubería, calcular la velocidad del líquido en ésta.

**92.** El gasto en una tubería por la que circula agua es 208 l/s. En la tubería hay instalado un medidor de Venturi (ver figura) con mercurio como líquido manométrico. Siendo 800 y 400 cm<sup>2</sup> las secciones en la parte ancha y estrecha de la tubería, calcular el desnivel que se produce en el mercurio.

**93.** Por un tubo circula agua en régimen de Bernouilli, con un gasto de 500 l/s. Calcular la diferencia de presiones manométricas en dos puntos situados a una distancia vertical de 10 m, sabiendo que la sección

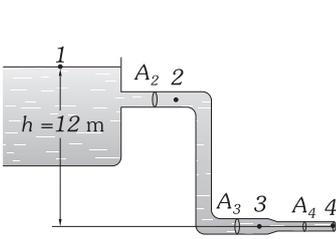
del tubo en la parte más alta es doble que la correspondiente al punto más bajo ( $200 \text{ cm}^2$ ).



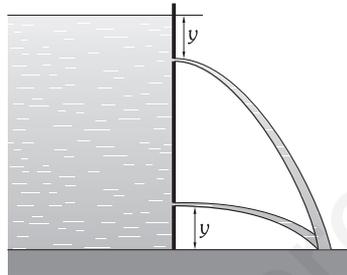
Problema XII-91.

Problema XII-92.

**94.** Desde un depósito de gran extensión fluye agua en régimen de Bernoulli como se indica en la figura. El depósito está abierto a la atmósfera y la presión es  $H = 740 \text{ mm de Hg}$ . La altura del punto 1 es de  $12 \text{ m}$  con respecto a los puntos 3 y 4. La sección transversal de la tubería en los puntos 2 y 3 es  $300 \text{ cm}^2$ , y en el 4 de  $100 \text{ cm}^2$ . Calcular: 1) El caudal de agua que fluye por el punto 4. 2) La presión en el punto 3. 3) La altura del punto 2 para que la presión en él sea de  $1,2 \text{ atm}$ .



Problema XII-94.



Problema XII-97.

**95.** Una fuente diseñada para lanzar una columna de  $12 \text{ m}$  de altura al aire, tiene una boquilla de  $1 \text{ cm}$  de diámetro al nivel del suelo. La bomba de agua está a  $3 \text{ m}$  por debajo del suelo. La tubería que la conecta a la boquilla tiene un diámetro de  $2 \text{ cm}$ . Hallar la presión que debe suministrar la bomba (despreciar la viscosidad del agua) y considerar el movimiento del agua en la manguera en régimen de Bernoulli).

**96.** En una pared de un depósito lleno de un líquido hasta una altura de  $9,8 \text{ m}$  del fondo, se abre un orificio circular de radio  $1 \text{ cm}$  en el punto medio de la altura. Calcular el gasto teórico y práctico y el alcance de la vena líquida hasta el nivel del fondo.

**97.** Tenemos un recipiente de paredes verticales lleno de un líquido hasta una altura  $l$  (ver figura). Demostrar que si abrimos un orificio a una distancia vertical de la superficie ( $y$ ), la vena líquida tiene el mismo alcance que si lo abrimos a la misma distancia ( $y$ ) del fondo.

**98.** En un depósito de gran sección se practica un orificio a  $y = 1 \text{ m}$  del suelo, como se indica en la figura. Colocamos en él un manómetro y nos indica una presión de  $11,6 \text{ cm de Hg}$ ; quitamos el manómetro y dejamos salir el líquido, alcanzando una distancia  $x = 3 \text{ m}$ . Calcular: 1) La densidad del líquido. 2) Altura  $H$  sobre el suelo a que se encuentra el nivel del líquido.

**99.** El tubo de una central hidroeléctrica de montaña presenta un desnivel de  $500 \text{ m}$  y está totalmente lleno de agua. El agua sale en la central por un orificio de  $10 \text{ cm}$  de diámetro y acciona una turbina de rendimiento  $\eta = 0,83$ . Siendo el coeficiente de velocidad  $k = 0,92$  y considerando la sección del tubo lo suficientemente grande para que la velocidad del agua en su interior sea despreciable, calcular: 1) El gasto del tubo o, lo que es lo mismo, el caudal que tiene que tener el manantial que conserva constantemente al tubo lleno de agua. 2) La potencia de la turbina. 3) La fuerza ejercida por el agua sobre la turbina.

**100.** Un depósito de gran sección cerrado contiene agua y sobre ella aire comprimido, ejerciendo una presión de  $5 \text{ atm}$  técnicas. A una distancia vertical de  $2 \text{ m}$  bajo la superficie libre del líquido hay practicado un orificio circular de  $0,4 \text{ cm}$  de diámetro situado a  $1 \text{ m}$  sobre el suelo. Si la presión atmosférica es de  $1 \text{ atm}$  técnica y el coeficiente de con-

tracción de la vena líquida es  $0,61$ , calcular: 1) La velocidad de salida del agua. 2) El gasto teórico y práctico. 3) El alcance horizontal de la vena líquida. 4) La velocidad del líquido al llegar al suelo. 5) El ángulo que forma tal velocidad con la horizontal.

**101.** Destapamos un orificio de radio  $R_1$  que se encuentra en el fondo de un depósito cilíndrico lleno de agua que tiene de radio  $R_2 \gg R_1$  y de altura  $H$ . Si el proceso de vaciado obedece al régimen de Bernoulli, y por tanto prescindimos de la viscosidad, encontrar una fórmula que nos dé el tiempo que tarda el depósito en quedarse sin agua.

**102.** Destapamos un orificio de radio  $R_1$  que se encuentra en el fondo de un depósito cilíndrico lleno de agua que tiene de radio  $R_2$  y de altura  $H$  (considerar la sección del orificio y no tomar como nula la velocidad de la superficie libre). Si el proceso de vaciado obedece al régimen de Bernoulli, y por tanto prescindimos de la viscosidad, encontrar una fórmula que nos dé el tiempo que tarda el depósito en quedarse sin agua.

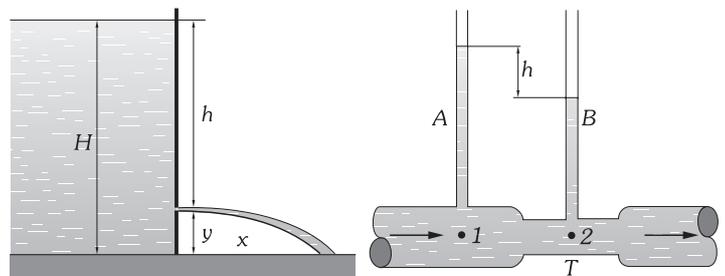
**103.** Un depósito cilíndrico de  $1 \text{ m}^2$  de base, abierto por su extremo superior, contiene  $100 \text{ l}$  de agua y  $500 \text{ l}$  de un aceite de densidad  $0,8 \text{ gr/cm}^3$ . Si en su parte inferior se abre un orificio de  $10 \text{ cm}^2$  de sección, y el proceso de vaciado del agua obedece al régimen de Bernoulli, cuánto tiempo transcurrirá hasta que empiece a salir aceite?

**104.** Comparar las velocidades de salida del oxígeno y el hidrógeno a través de una pared porosa de un recipiente cuando la sobrepresión que origina la salida del gas es la misma; estando sus densidades en la relación  $1/16$ .

**105.** Colocamos un recipiente que contiene gas y tiene una masa total  $M$  sobre una superficie horizontal, y en una de sus paredes laterales le hacemos un orificio circular de sección  $A$  muy pequeño en comparación con el tamaño del recipiente. Si el coeficiente estático de rozamiento entre la superficie y el recipiente es  $\mu$ . ¿Cuál debe de ser la diferencia de presión del gas respecto del exterior para que el recipiente comience a moverse?

**E) FLUIDOS REALES. VISCOSIDAD**

**106.** En una tubería por la que circula agua empalmamos un tubo  $T$  de menor sección, colocando tubos manométricos  $A$  y  $B$  como se indica en la figura y medimos la diferencia de alturas ( $8 \text{ cm}$ ) entre los niveles superiores del líquido en tales tubos. Sabiendo que la velocidad aumenta de  $10 \text{ cm/s}$  hasta  $100 \text{ cm/s}$ , calcular la pérdida de carga.



Problema XII-98.

Problema XII-106.

**107.** Por un tubo cilíndrico de  $50 \text{ cm}$  de longitud y  $2 \text{ mm}$  de diámetro interior circula agua; si la diferencia de presión a lo largo del tubo es de  $10 \text{ cm de Hg}$  y la viscosidad del agua es  $1 \text{ cP}$ , calcúlese la cantidad de agua que fluye por el tubo en  $1 \text{ min}$ .

**108.** El tiempo de derrame del agua en un viscosímetro es  $10 \text{ s}$ . El de un líquido, en el mismo viscosímetro, es de  $2 \text{ h}$ ,  $54 \text{ min}$  y  $18 \text{ s}$ . Calcular la viscosidad del líquido con relación al agua y su viscosidad absoluta. ( $\rho$  del líquido =  $1,26 \text{ g/cm}^3$ ;  $\eta$  del agua =  $0,01 \text{ P}$ ).

**109.** Entre los extremos de un tramo horizontal de  $300 \text{ m}$  de longitud de un oleoducto por el que circulan  $200 \text{ l/s}$  de petróleo, se produce una pérdida de presión en el fluido de  $0,002$  atmósferas. La densidad relativa del petróleo es  $0,8$  y el diámetro del oleoducto,  $50 \text{ cm}$ . 1) ¿Qué inclinación debería tener el oleoducto para que no hubiera ninguna pérdida de presión? En un punto determinado el oleoducto se bifurca en dos ramales de  $25 \text{ cm}$  de diámetro, cada uno. 2) ¿Cuál es la velocidad del fluido en estos ramales? 3) ¿Cuál es la pérdida de presión en cada  $100 \text{ m}$  de longitud de estos ramales?

**110.** En un tubo de vidrio horizontal hemos colocado un cristalito de permanganato potásico y hacemos circular agua por el tubo. Obser-

vamos el régimen laminar al distinguir unos filetes violetas que se forman a partir del cristal. Aumentando la velocidad de paso del agua por el tubo (haciendo que, simplemente, el líquido descienda de una mayor altura), se observa la formación de torbellinos. Calcular la velocidad con que en tal instante discurre el agua por el tubo ( $\eta = 0,01$  P;  $\rho = 1$  g/cm<sup>3</sup>;  $r = 0,5$  cm).

**111.** Por una tubería de 1,3 cm de radio circula petróleo de densidad 0,85 g/cm<sup>3</sup> y 11,4 cP de coeficiente de viscosidad, a una velocidad de 1 m/s. Determinése el régimen con el que circula el petróleo.

**112.** Determinar el radio de una tubería de 3 m de longitud con una depresión de 500 b entre sus extremos, para que circule agua con la velocidad crítica. Coeficiente de viscosidad del agua: 1 cP.

**113.** Por una tubería cilíndrica, horizontal, de 6 cm de radio y 25 m de longitud, pasa un líquido de densidad 1076 kg/m<sup>3</sup> y un coeficiente de viscosidad de 180 cP. Si tiene un caudal de 1 l/s, calcular: 1) El número de Reynolds. 2) Pérdida de presión en tal longitud. 3) Potencia que consumiría una bomba si hiciese circular ese caudal.

**114.** Calcular la máxima velocidad que adquiere una gota de mercurio de 1 mm de radio en el seno de glicerina. (Densidad del mercurio y la glicerina, 13,6 y 1,26 g/cm<sup>3</sup>; viscosidad de la glicerina, 8,3 P).

**115.** Calcular la máxima velocidad que adquiere una burbuja de aire de 1 mm de radio en el seno de glicerina y de agua. (Densidad del aire = 0,001 293 g/cm<sup>3</sup>. Tomar los demás datos de los problemas anteriores.)

www.yoquieroaprobar.es

# CAPÍTULO XIII

## ELASTICIDAD. FENÓMENOS MOLECULARES EN LOS LÍQUIDOS

### A) ELASTICIDAD

#### XIII – 1. Comportamiento elástico e inelástico. Límites de elasticidad y ruptura. Ley de Hooke

Si sobre una barra de un sólido hacemos un esfuerzo moderado de tracción o de compresión, se alargará o comprimirá hasta una situación en que las fuerzas internas entre sus partículas (átomos o moléculas) anulen la acción exterior. Estas fuerzas interiores son atractivas si compensan una tracción o repulsivas si se somete el sólido a una compresión, y tenderán a hacer que aquél vuelva a su situación original al cesar la fuerza exterior.

Pero esto no siempre ocurre, para cada sólido existe un valor máximo de la fuerza aplicada por debajo del cual tiene un COMPORTAMIENTO ELÁSTICO: *al retirar la fuerza aplicada al sólido recupera su forma primitiva*. Ahora bien si se sobrepasa el citado valor máximo de la fuerza exterior, en el sólido se producen deformaciones que ya no son recuperables; se dice entonces que tiene un COMPORTAMIENTO INELÁSTICO: *al cesar la acción exterior no recupera su volumen o forma primitivos*.

Se llama LÍMITE DE ELASTICIDAD a la mínima fuerza, por unidad de sección capaz de producir en el sólido una cierta modificación permanente. Si aumentamos gradualmente la fuerza exterior por encima del límite de elasticidad, el sólido sigue deformándose hasta romperse. El LÍMITE DE RUPTURA es la mínima fuerza, por unidad de sección, capaz de producir la ruptura del cuerpo. Este valor, que se mide experimentalmente para cada tipo de material, es solamente representativo, el valor real para un determinado objeto puede variar de forma considerable en función de sus defectos internos, de su historia e incluso de circunstancias ambientales; por ello se emplea frecuentemente el llamado COEFICIENTE DE SEGURIDAD (S): *cociente entre la fuerza aplicada por unidad de sección y el límite de ruptura (R)*:

$$S = \frac{F}{AR}$$

El inverso de este coeficiente es el FACTOR DE SEGURIDAD.

La ley que regula el comportamiento elástico es la LEY DE HOOKE, que ya fue enunciada en estática:

«Las deformaciones o cambios de volumen producidos en los cuerpos, son directamente proporcionales a las fuerzas o momentos de pares que los produjeron, siempre que no se rebase el límite de elasticidad».

$$F = Kx$$

$$N = K\varphi$$

LÍMITES DE ELASTICIDAD DE ALGUNOS MATERIALES			
MATERIAL	ESFUERZO DE TRACCIÓN (N/m <sup>2</sup> )	COMPRESIBILIDAD (N/m <sup>2</sup> )	CIZALLADURA (N/m <sup>2</sup> )
Acero	$500 \times 10^6$	$500 \times 10^6$	$250 \times 10^6$
Aluminio	$200 \times 10^6$	$200 \times 10^6$	$200 \times 10^6$
Hierro fundido	$170 \times 10^6$	$550 \times 10^6$	$170 \times 10^6$
Latón	$250 \times 10^6$	$250 \times 10^6$	$200 \times 10^6$
Hormigón	$2 \times 10^6$	$20 \times 10^6$	$2 \times 10^6$
Mármol	–	$80 \times 10^6$	–
Granito	–	$170 \times 10^6$	–
Nilón	$500 \times 10^6$	–	–
Hueso (Brazos y piernas)	$130 \times 10^6$	$170 \times 10^6$	–

#### XIII – 2. Elasticidad por tracción

Al fenómeno de la variación temporal de la longitud de un cuerpo, por efecto de una fuerza, se llama ELASTICIDAD POR TRACCIÓN.

Experimentalmente se comprueba que el aumento de longitud ( $\Delta l$ ) que sufren alambres o varillas de distintas longitudes y secciones debido a esfuerzos de tracción, obedecen a la ley:

$$\Delta l = \frac{1}{E} \frac{Fl}{A}$$

$F$ : Fuerza que produce la deformación.  $l$ : Longitud inicial del cuerpo.  $A$ : Sección.  $E$ : Una constante característica de la sustancia que se llama MÓDULO DE YOUNG y tiene por ecuación de dimensiones en el CGS y SI:  $ML^{-1}T^{-2}$  y en el TÉCNICO:  $FL^{-2}$ ; por lo que se mide en  $\text{dyn/cm}^2$  (CGS),  $\text{N/m}^2$  (SI) y en  $\text{kp/m}^2$  (TÉCNICO).

El alargamiento de longitud ( $\Delta l/l$ ) o variación que corresponde a la unidad de longitud, es:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{F}{A} = \frac{1}{E} p \tag{1}$$

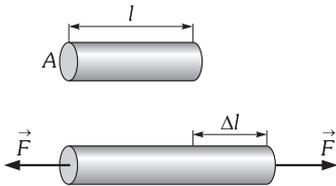


Fig. XIII-1.- Por efecto de la fuerza de tracción  $F$ , el alambre se alarga una longitud  $\Delta l$ .

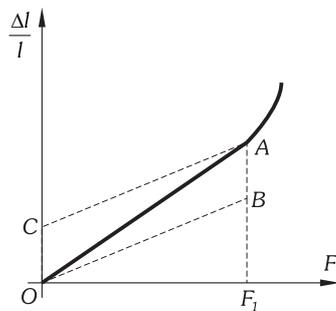


Fig. XIII-2.- Representación gráfica de los alargamientos relativos sufridos por un alambre al aplicarle fuerzas diferentes.

siendo  $p$  la fuerza que actúa sobre la sección unidad o ESFUERZO DE TRACCIÓN.

Si al alambre de la Fig. XIII-1 le aplicamos fuerzas gradualmente mayores, se producen en él alargamientos crecientes. Representando en abscisas la fuerza (Fig. XIII-2), y en ordenadas los aumentos relativos de longitud (variación que experimenta cada unidad de longitud), obtendremos, en principio, una línea recta hasta que, al rebasar una determinada fuerza ( $F_1$ ),  $\Delta l/l$  deja de ser proporcional a la fuerza y se obtiene una línea curva en la representación gráfica. La fuerza ( $F_1$ ) referida a la unidad de sección, es el límite de elasticidad. Si en vez de hacer la fuerza gradualmente, se hace toda a la vez, el alargamiento es menor (línea  $OB$ ); con el tiempo, el cuerpo adquiere los valores correspondientes a los alargamientos expresados en la línea  $OA$ . Si se va disminuyendo la fuerza gradualmente la barra va disminuyendo de longitud (línea  $OA$ ); si la descarga se hace toda a la vez, queda a la barra un ALARGAMIENTO REMANENTE  $OC$ ; la línea  $CA$  indica los alargamientos que quedan en la barra, tras las descargas bruscas, con el tiempo la barra va adquiriendo la longitud que corresponde a los valores representados en  $OA$ .

Si aplicamos a una varilla fuerzas en sentido contrario al descrito anteriormente le producimos un acortamiento que llamamos COMPRESIÓN UNILATERAL que sigue las mismas leyes que la tracción pero con signo negativo, con la condición de que no se produzca flexión.

Si a un cuerpo no perfectamente elástico se le aplican tracciones y compresiones consecutivas se producen las desviaciones de la ley de Hooke que se representan en la curva de HISTÉRESIS ELÁSTICA de la Fig. XIII-3. La primera deformación (recta  $OA$ ), no se recupera al hacer nula la tracción, el cuerpo tiene *remanencia* (punto  $B$ ). Al comprimir se reduce primero la longitud hasta la original (punto  $C$ ) y continúa reduciéndose hasta la compresión máxima (punto  $D$ ). Cuando se anula la compresión queda la deformación representada por  $OE$ , que desaparece con una nueva tracción, para así completar el ciclo.

Por otra parte la energía que se consume al producir una deformación es devuelta totalmente por el cuerpo al cesar la acción exterior solamente si éste es perfectamente elástico, en caso contrario la energía gastada, en la extensión de  $O$  hasta  $A$ , proporcional al área  $OAP$  (Fig. XIII-3), es mayor que la devuelta al volver el cuerpo de  $A$  a  $B$  en una cantidad proporcional al área sombreada en la misma figura; la diferencia de energía se ha disipado en calor.

**PROBLEMAS: 1 al 9.**

**XIII - 3. Contracción lateral**

Al estirarse un cuerpo sus dimensiones lineales transversales ( $l'$ ) disminuyen (Fig. XIII-4), siendo su variación relativa proporcional a la longitudinal:

$$\frac{\Delta l'}{l'} = -\sigma \frac{\Delta l}{l} = -\frac{\sigma}{E} \frac{F}{A} \Rightarrow \frac{\Delta l'}{l'} = -\frac{\sigma}{E} p \tag{2}$$

Al coeficiente de proporcionalidad entre las dos variaciones, se le llama COEFICIENTE DE POISSON ( $\sigma > 0$ ) y es una magnitud adimensional. El signo menos de la fórmula nos indica disminuciones de las dimensiones longitudinales transversales ( $l'$ ), cuando aumenta la longitud ( $l$ ).

En la descripción de las propiedades elásticas, siempre que se trate de materiales homogéneos e isótopos, son suficientes los dos módulos que hemos definido, los cuales dependen única y exclusivamente de la naturaleza del material y no de sus parámetros geométricos.

Consecuencia de la tracción y la contracción es la variación experimentada por la sección y el volumen del cuerpo, el cálculo de estas variaciones es el que sigue: un  $\text{cm}^2$  situado en un plano perpendicular a la dirección de tracción se habrá transformado en:  $(1 + \Delta l/l)^2$  y  $A \text{ cm}^2$  en  $A(1 + \Delta l/l)^2$ ; la nueva superficie transversal ( $A + \Delta A$ ) será:

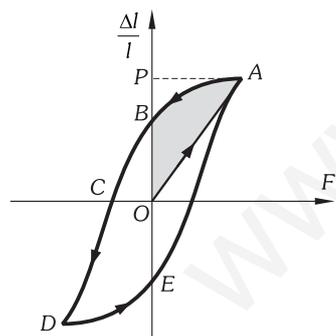


Fig. XIII-3.- Curva de histéresis de un material no perfectamente elástico.

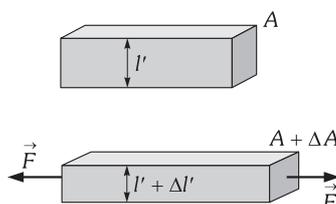


Fig. XIII-4.- Las fuerzas de tracción aplicadas a la barra disminuyen sus dimensiones transversales.

\* A esta unidad de presión la hemos llamado pascal (Pa).

$$A + \Delta A = A \left( 1 + \frac{\Delta l'}{l'} \right)^2 = A \left( 1 + 2 \frac{\Delta l'}{l'} \right)$$

las variaciones relativas  $\Delta l/l$ , normalmente tienen valores muy pequeños, del orden de  $10^{-3}$ , por ello podemos, en primera aproximación despreciar sus cuadrados. Así en la expresión anterior  $(\Delta l'/l')^2 \ll \Delta l'/l'$ , obteniéndose en definitiva:

$$\frac{\Delta A}{A} = 2 \frac{\Delta l'}{l'} = - 2 \frac{\sigma}{E} p \tag{3}$$

Un  $\text{cm}^3$  de la sustancia, considerando una de sus aristas en la dirección de la tracción, se habrá transformado en:

$$\left( 1 + \frac{\Delta l}{l} \right) \left( 1 + \frac{\Delta l'}{l'} \right)^2$$

el volumen final de  $V \text{ cm}^3$  será:

$$V + \Delta V = V \left( 1 + \frac{\Delta l}{l} \right) \left( 1 + \frac{\Delta l'}{l'} \right)^2 = V \left( 1 + \frac{\Delta l}{l} \right) \left( 1 + 2 \frac{\Delta l'}{l'} \right) = V + V \left( \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta l'}{l'} \right)$$

hemos despreciado en los desarrollos  $(\Delta l'/l')^2$  y  $2\Delta l/l \cdot \Delta l'/l'$ . De la anterior obtenemos:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{2 \Delta l'}{l'} = \frac{p}{E} - 2\sigma \frac{p}{E} \Rightarrow \Delta \left[ \frac{V}{V} = \frac{1 - 2\sigma}{E} p \right] \tag{4}$$

Las expresiones (1), (2), (3) y (4) nos indican la proporcionalidad de las variaciones relativas de  $l, l', A$  y  $V$  con la fuerza que actúa sobre cada unidad de sección o esfuerzo de tracción.

Teniendo en cuenta que en la tracción de un cuerpo, su volumen aumenta entonces  $\Delta V$  es siempre positivo, luego:

$$1 - 2\sigma > 0 \Rightarrow \sigma < \frac{1}{2}$$

### XIII - 4. Compresibilidad

COMPRESIBILIDAD es el fenómeno de disminución del volumen de un cuerpo al aplicar a su superficie externa, presiones hacia el interior del cuerpo.

Si las presiones son iguales en todas las direcciones, la variación relativa de volumen queda determinada por:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{B} p \tag{5}$$

$B$ : MÓDULO DE COMPRESIBILIDAD de la sustancia, que se mide en  $\text{dyn/cm}^2$  (CGS),  $\text{N/m}^2$  (SI) y en  $\text{kp/m}^2$  (TÉCNICO). El valor de  $B$  para los gases es enorme en comparación con el que corresponde a líquidos y sólidos.

Los módulos de Young, de Poisson y compresibilidad, quedan ligados por la expresión:

$$E = 3 B (1 - 2\sigma) \tag{6}$$

Para la demostración de las fórmulas anteriores, supongamos a un cuerpo sometido a una compresión uniforme  $p$  (por ejemplo, lo tenemos sumergido en un fluido), al que podemos imaginar dividido en paralelepípedos de aristas  $a, b$  y  $c$ , sobre cada cara actuarán fuerzas normales de compresión. La variación de longitud de cualquier arista, la de  $a$  por ejemplo, es debida a dos causas:

1) Una disminución de longitud debida a las presiones que actúan sobre las caras paralelas al plano  $YZ$  en la Fig. XIII-5 (COMPRESIÓN UNILATERAL); el valor de esta disminución por unidad de longitud es:  $p/E$ .

2) Un alargamiento de longitud debida a las compresiones de los otros dos pares de caras (CONTRACCIÓN de signo negativo); el valor de este aumento por unidad es:  $2\sigma p/E$ .

Luego la arista de longitud inicial  $a$  tendrá una longitud:

$$a + \Delta a = a \left[ 1 + \frac{2\sigma}{E} p - \frac{1}{E} p \right] = a \left[ 1 + \frac{2\sigma - 1}{E} p \right]$$

Razonando de la misma forma con las otras dos aristas obtendremos:

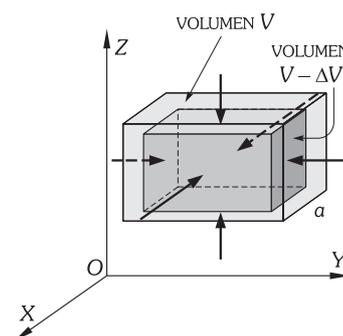


Fig. XIII-5.- Compresibilidad.

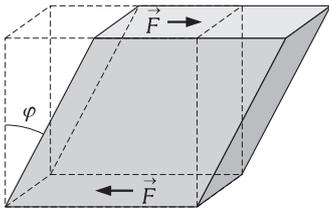


Fig. XIII-6.- Cizalladura.

$$b + \Delta b = b \left[ 1 + \frac{2\sigma - 1}{E} p \right] \quad c + \Delta c = c \left[ 1 + \frac{2\sigma - 1}{E} p \right]$$

luego el valor del volumen será:

$$V + \Delta V = abc \left[ 1 + \frac{2\sigma - 1}{E} p \right]^3$$

desarrollando y despreciando infinitésimos:

$$V + \Delta V = V \left[ 1 + 3 \frac{2\sigma - 1}{E} p \right] \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{3(2\sigma - 1)}{E} p$$

Si llamamos:

$$\frac{1}{B} = \frac{3(\sigma - 1)}{E}$$

obtenemos las (5) y (6) que son las que queríamos demostrar.

### XIII - 5. Elasticidad por deslizamiento o cizalladura

«UNA FUERZA DE DESLIZAMIENTO O CIZALLADURA es la que actúa tangencialmente al plano al que se le aplica».

Al aplicar al paralelepípedo de la (Fig. XIII-6) fuerzas tangenciales a una de las caras y uniformemente distribuidas sobre ella, cada uno de los planos paralelos a tal cara desliza con respecto al anterior obteniéndose como resultado una deformación, medida por el ángulo  $\varphi$  de la figura. El cuerpo conserva su base y altura y, por tanto, su volumen. La deformación, medida por el ángulo  $\varphi$  es:

$$\varphi = \frac{1}{G} \frac{F}{A} = \frac{1}{G} p$$

G: MÓDULO DE DESLIZAMIENTO O CIZALLADURA, que se mide en dyn/cm<sup>2</sup> (CGS), N/m<sup>2</sup> (SI) y en kp/m<sup>2</sup> (TÉCNICO).

Los módulos de Young, de Poisson y de cizalladura, quedan ligados por la expresión:

$$G = \frac{1}{2} \frac{E}{1 + \sigma}$$

Para demostrar las dos fórmulas anteriores, estudiemos previamente la variación de longitud de las aristas de un cubo sometido a los esfuerzos indicados en la Fig. XIII-7. El problema es parecido al descrito en el párrafo anterior, en éste, el cubo está sometido a presiones verticales y tracciones horizontales y tendremos para la variación experimentada por la arista horizontal:

$$\Delta l + l = l \left[ 1 + \frac{1}{E} p + \frac{\sigma}{E} p \right] \Rightarrow \frac{\Delta l}{l} = \frac{1 + \sigma}{E} \frac{F}{A} \quad (7)$$

la variación vertical será la misma pero de signo opuesto.

Si sometemos al cubo a esfuerzos tales como los de la Fig. XIII-7, una vez producida la deformación, el cuerpo se encuentra en equilibrio y por tanto todas las fuerzas que actúan sobre él son iguales, con el fin de no producir pares resultantes no nulos. Considerando la mitad del cubo, mentalmente aislada por la diagonal AC (Fig. XIII-8), el equilibrio exige que las dos fuerzas  $F$  sean compensadas por otra ejercida por la mitad suprimida del cubo, ésta por tanto vale  $F\sqrt{2}$  y es normal al plano diagonal que pasa por BD, y siendo este plano de área  $l^2\sqrt{2} = A\sqrt{2}$ , la fuerza por unidad de superficie a la que se ve sometido es  $F\sqrt{2}/A\sqrt{2} = F/A$ . La situación para la otra mitad del cubo que no hemos considerado es simétrica a la anterior.

Supongamos ahora dentro del cubo no deformado un pequeño paralelepípedo de caras paralelas a los planos diagonales (Fig. XIII-9), el efecto de las tracciones y compresiones sobre el cubo producen un efecto de cizalladura sobre el paralelepípedo.

Una vez deformado el sistema, la situación será la de la Fig. XIII-10 en la que el ángulo  $\varphi$  mide la cizalladura, y de la que deducimos:

$$\beta = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}$$

$$\operatorname{tag} \beta = \frac{l - \Delta l}{l + \Delta l} = \frac{1 - \Delta l/l}{1 + \Delta l/l}$$

de ambas, y por ser el ángulo  $\varphi$  pequeño:

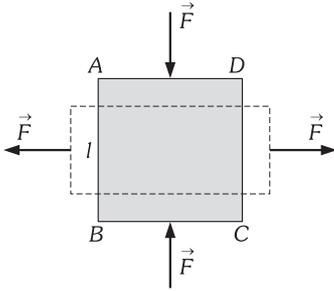


Fig. XIII-7.

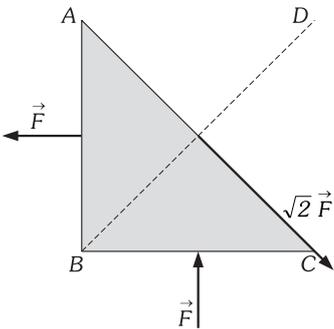


Fig. XIII-8.- La fuerza  $\sqrt{2}F$  es de cizalladura y tiene la dirección normal al plano BD.

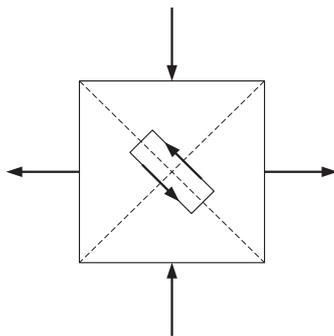


Fig. XIII-9.- Efecto de cizalla producido sobre el paralelepípedo interior por causa de tracciones y compresiones externas.

$$\operatorname{tag} \frac{\varphi}{2} = \frac{\varphi}{2} = \frac{\Delta l}{l} \Rightarrow \varphi = 2 \frac{\Delta l}{l}$$

teniendo en cuenta (7), se obtiene:

$$\varphi = 2 \frac{1 + \sigma}{E} p = \frac{1}{G} p$$

donde  $G = E/2(1 + \sigma)$ , como queríamos demostrar.

### XIII - 6. Elasticidad por torsión

TORSIÓN es la deformación producida a un cuerpo causada por un par de fuerzas sin que varíe el volumen.

Si a una barra cilíndrica (Fig. XIII-11) de longitud  $l$  y radio  $R$ , fija por un extremo, le aplicamos un par de fuerzas de momento  $N$ , la deformación viene medida por lo que llamaremos ÁNGULO DE TORSIÓN ( $\alpha$ ) y su valor es:

$$\alpha = \frac{1}{G} N \frac{2l}{\pi R^4}$$

en la que  $G$  es el módulo de cizalladura de la sustancia estudiado en el párrafo anterior.

En efecto: en la barra cilíndrica de la Fig. XIII-11, al ser aplicado al extremo libre el par de fuerzas de momento  $N$ , se «retuerce» de tal forma que el extremo de  $A$  de la generatriz  $BA$  se sitúa en  $A'$ . El ángulo  $AOA'$  nos mide la torsión.

Considerando un elemento de volumen de la barra comprendido entre dos cilindros concéntricos de radios  $r$  y  $r + dr$  (Fig. XIII-12), al desarrollarlo nos da una figura prismática de la forma expresada en la Fig. XIII-13. La deformación producida es equivalente a una cizalladura de ángulo  $\varphi$ , cuyo valor es:

$$\varphi = \frac{1}{G} \frac{dF}{dA} \Rightarrow dF = \varphi G dA$$

siendo:  $dA = 2\pi r dr$ , y con suficiente aproximación:  $\varphi = \operatorname{tg} \varphi = \frac{r\alpha}{l}$ ; el momento de  $dF$  respecto al eje del cilindro será:

$$dN = r dF = r\varphi G dA = r \frac{r\alpha}{l} G 2\pi r dr \Rightarrow dN = \frac{2\pi G \alpha}{l} r^3 dr$$

luego el valor del momento total es:

$$N = \frac{2\pi G \alpha}{l} \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi G \alpha}{2l} R^4 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{G} N \frac{2l}{\pi R^4} \quad (8)$$

como queríamos demostrar. Llamando  $D$  al diámetro del cilindro, esta expresión la podemos escribir:

$$\alpha = \frac{32}{\pi G} \frac{1}{D^4} N = \frac{1}{\gamma} \frac{l}{D^4} N = \frac{1}{K} N \Rightarrow N = K \alpha$$

en la que  $K$  la llamamos *módulo de rigidez*, siendo:

$$K = \gamma \frac{D^4}{l} \quad \left[ \gamma = \frac{\pi G}{32} \right]$$

$\gamma$ : COEFICIENTE DE COULOMB, proporcional al módulo de cizalla e independiente de los parámetros geométricos del sólido. De (8) se obtiene:

$$\frac{N}{\alpha} = K = \gamma \frac{D^4}{l}$$

expresión que nos da las leyes de la torsión que fueron encontradas por Coulomb experimentalmente y que dicen:

1. El par de torsión es proporcional al ángulo girado.
2. La relación entre el par de torsión y el ángulo girado es directamente proporcional a la cuarta potencia del diámetro e inversamente proporcional a la longitud.

Teniendo en cuenta la primera ley y las conclusiones obtenidas en el párrafo X-13 para el oscilador armónico de rotación; si de un hilo resistente a la torsión colgamos un cuerpo y lo giramos, al dejar el sistema en libertad, el par causante de las oscilaciones de torsión toma el valor:  $N = -K\alpha$ , proporcional y de signo contrario al desplazamiento angular, luego el movimiento será vibratorio armónico de rotación de período:

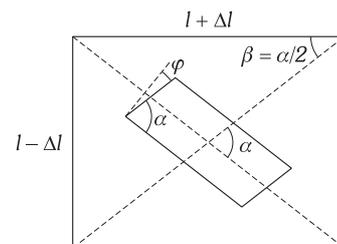


Fig. XIII-10.- El ángulo  $\varphi$  mide la cizalladura.

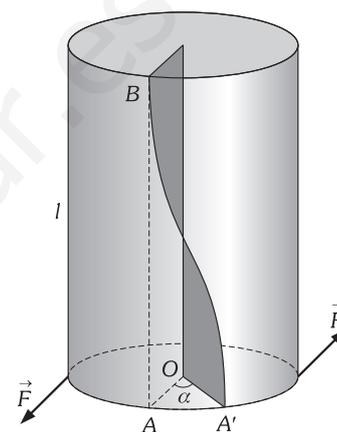


Fig. XIII-11.- Torsión.

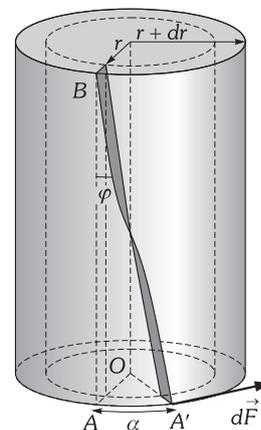


Fig. XIII-12.- Torsión.

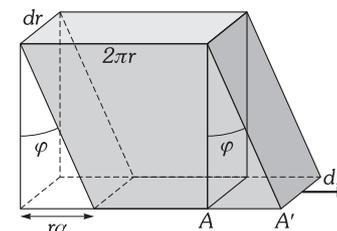


Fig. XIII-13.- Deformación de cizalladura.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{K}} = 2\pi \sqrt{\frac{II}{\gamma D^4}} = 2\pi \sqrt{\frac{32 II}{\pi G D^4}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{R^3} \sqrt{\frac{2 II}{\pi G}}$$

proporcionándonos un método práctico para medir G.

**XIII – 7. Elasticidad por flexión**

FLEXIÓN es el fenómeno de deformación de un cuerpo por efecto de una fuerza proporcional a su dimensión mayor, y el sólido se deforma de tal modo que el sistema de láminas planas paralelas se encorvan formando un haz de superficies curvas.

La deformación *d* (FLECHA) para una barra de la forma de la Fig. XIII-14 1.<sup>a</sup> tiene por valor:

$$d = \frac{4F}{E} \frac{l^3}{ah^3}$$

*F* = peso o fuerza; *l*, *a*, *h*: longitud, anchura y altura; *E* = módulo de Young.

Si la barra está apoyada en dos puntos (Fig. XIII-14 2.<sup>a</sup>) la fórmula de la deformación es la misma, salvo que el factor numérico 4 aparece en el denominador.

En la flexión las superficies que quedan en el lado convexo se alargan y las del lado cóncavo se contraen, luego en la región intermedia las habrá que no han modificado su valor (ZONA NEUTRA).

Para las distintas secciones que puede tener el material que sufre flexión, la flecha *d* además de depender de la longitud, depende de lo que llamamos MOMENTO DE INERCIA GEOMÉTRICO DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL con relación a un eje que pasa por el centro de gravedad y es perpendicular al plano de simetría; de tal forma que si descomponemos la sección transversal en elementos de superficie *dA* paralelos al eje *e*, se tiene por definición:

$$I = \int_A z^2 dA$$

por lo que el valor de *I* será mayor cuanto más lejos posible de dicho eje se distribuya el material, y como en general:

$$d = k \frac{l^3}{EI} F$$

siendo *k* un número dependiente de dónde está localizada *F*, para que la flexión sea pequeña nos interesa que *I* sea lo mayor posible, razón por la que vigas, carriles... etc. se construyen de la forma indicada en la Fig. XIII-15.

**PROBLEMAS: 10 al 15.**

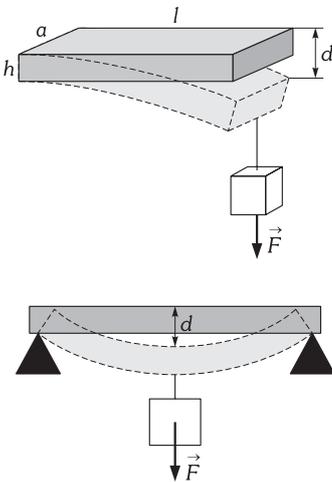


Fig. XIII-14.- Flexión.

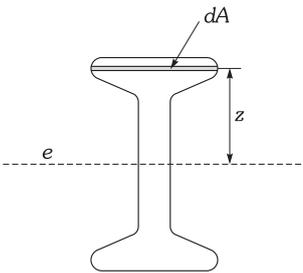


Fig. XIII-15.- Sección de una viga.

MÓDULOS DE ELASTICIDAD EN N/m <sup>2</sup> (Pa)			
	MÓDULO DE YOUNG	MÓDULO DE RIGIDEZ	MÓDULO DE COMPRESIBILIDAD
Acero	19-21 × 10 <sup>10</sup>	8 × 10 <sup>10</sup>	16 × 10 <sup>10</sup>
Aluminio	7 × 10 <sup>10</sup>	2,4 × 10 <sup>10</sup>	7 × 10 <sup>10</sup>
Cobre	10-12 × 10 <sup>10</sup>	4 × 10 <sup>10</sup>	12 × 10 <sup>10</sup>
Hierro fundido	8-10 × 10 <sup>10</sup>	-	9,6 × 10 <sup>10</sup>
Latón	10 × 10 <sup>10</sup>	3,5 × 10 <sup>10</sup>	8 × 10 <sup>10</sup>
Plomo	1,5 × 10 <sup>10</sup>	0,5 × 10 <sup>10</sup>	0,8 × 10 <sup>10</sup>
Hormigón	2 × 10 <sup>10</sup>	-	-
Mármol	5 × 10 <sup>10</sup>	-	4,5 × 10 <sup>10</sup>
Granito	4,5 × 10 <sup>10</sup>	-	-
Nilón	0,5 × 10 <sup>10</sup>	-	-
Hueso (brazos y piernas)	1,5 × 10 <sup>10</sup>	8 × 10 <sup>10</sup>	-
Agua	-	-	0,2 × 10 <sup>10</sup>
Glicerina	-	-	0,45 × 10 <sup>10</sup>
Mercurio	-	-	2,6 × 10 <sup>10</sup>

**B) FENÓMENOS MOLECULARES EN LOS LÍQUIDOS**

**XIII – 8. Cohesión**

En el capítulo anterior, hemos llamado *r*<sub>0</sub> la distancia a la que la fuerza de enlace entre dos moléculas (monoatómicas o no) es nula por ser iguales las fuerzas de atracción y de repulsión entre ellas y tal que a distancias menores que *r*<sub>0</sub> la fuerza de repulsión es tan intensa que no puede haber ninguna molécula en tal lugar, por lo que atribuimos a una distancia aproximadamente igual a ella el valor de «radio medio» en la dimensión de tal molécula. También se dijo que en toda sustancia en reposo las moléculas que la componen se encuentran en su mayor parte (exceptua-



mos a las que se encuentran a la distancia  $r_0$ ) a distancias  $r > r_0$  interaccionando entre sí por las fuerzas de atracción que llamamos de COHESIÓN, por cuyo efecto permanecen unidas para el caso de sólidos y líquidos.

En consecuencia, una molécula cualquiera en el interior de un líquido en reposo atrae, y a su vez es atraída por todas las moléculas que la rodean, acciones que se manifiestan en un espacio llamado campo de fuerzas. Si dentro de este campo hay homogeneidad, las acciones iguales en todas las direcciones y sentidos se equilibran (Fig. XIII-16, molécula A).

Pero las fuerzas de cohesión disminuyen rápidamente al aumentar la distancia y, prácticamente, solo se tendrán en cuenta las acciones de aquellas moléculas que se encuentran lo suficientemente próximas a ella; definiendo:

*El RADIO DE ACCIÓN MOLECULAR ( $R$ ) es la distancia en la cual son sensibles las fuerzas de cohesión, y a la esfera de radio  $R$  la llamamos ESFERA DE ACCIÓN MOLECULAR.*

Dentro de la esfera de acción molecular trazada alrededor de una molécula cualquiera A en el interior de un líquido en reposo, hay un gran número de moléculas, las fuerzas debidas a ellas sobre la A están dirigidas en los distintos sentidos y en promedio se compensan y, por tanto, la fuerza resultante sobre ella es nula.

Si la homogeneidad material no existe en el campo de fuerzas, la homogeneidad en la cohesión tampoco existe, originándose la serie de fenómenos que a continuación se describen.

### XIII – 9. Presión molecular

Supongamos que sobre la superficie libre de un líquido, que también hace de separación entre dos medios, existe un gas muy expansionado y las acciones moleculares de éste sobre las del líquido son despreciables por su pequeña concentración.

En estas condiciones, sobre la molécula B (Fig. XIII-16) que se encuentra separada de la superficie libre del líquido una distancia menor que el radio de acción molecular, también sobre la C perteneciente a tal superficie, actúan un número diferente de moléculas por cada lado (en la Fig. XIII-16 no están compensadas las acciones de las moléculas con sombreado más intenso), y en consecuencia las fuerzas que ejercen sobre B o C no se compensan entre sí, dando lugar a una fuerza resultante  $F$  dirigida hacia el interior del líquido y perpendicular a su superficie libre.

En consecuencia: sobre toda la capa próxima a la superficie libre del líquido en equilibrio y que tiene un espesor igual al radio de acción molecular, actúan fuerzas normales a ella y hacia el interior del líquido, luego:

*La capa superficial de un líquido en equilibrio, ejerce sobre el resto del líquido una presión que llamamos PRESIÓN MOLECULAR.*

Esta presión existe independientemente de las causadas por las fuerzas exteriores, por ejemplo: la presión hidrostática debida a las fuerzas de gravitación.

Las fuerzas causantes de la presión molecular, hacen que las moléculas del líquido se aproximen, compensándose en el equilibrio por las fuerzas de repulsión que aparecen por este acercamiento.

Debido a que las fuerzas de atracción molecular en la capa superficial de un líquido están dirigidas hacia su interior, existe la tendencia de las gotas de líquido a adquirir forma esférica; las fuerzas gravitacionales se oponen a esa tendencia pero, para las gotas pequeñas estas fuerzas influyen poco y la forma de las gotas es casi esférica. Si sobre el líquido no actúa ninguna fuerza externa, la posición de equilibrio de su superficie será aquella en que las fuerzas causantes de la presión molecular sean normales a ella, adoptando la forma esférica. Así por ejemplo, una gota de agua en caída libre (téngase en cuenta que sus moléculas están en ingravidez y en equilibrio relativo), toma la forma esférica; en una disolución de alcohol en agua con una proporción tal que adquiera una densidad igual a la de un determinado aceite no miscible con la disolución, al ser introducido en ella, la acción gravitatoria sobre el aceite queda compensada con el empuje de Arquímedes y flotará en el interior de la mezcla adaptando forma esférica.

### XIII – 10. Fenómeno de superficie: tensión superficial

Para comprender y cuantificar los fenómenos de superficie en líquidos, los comparamos con un símil mecánico que consiste en identificar una membrana elástica estirada y en equilibrio con la película superficial del líquido, también resistente a la ruptura y, así por ejemplo, se observa cómo partículas más densas que el agua (polvo, insectos y aun un alfiler colocado cuidadosamente) flotan en su superficie. Esta analogía deja de corresponderse al estirar la membrana, por cuyo efecto la tensión aumenta, en cambio la fuerza de tensión superficial permanece constante con el aumento de superficie del líquido.

Consideremos una molécula C (Fig. XIII-16), en la superficie del líquido. Estará sometida a las atracciones del propio líquido, que actúan en una semiesfera de acción produciendo una resultante vertical y hacia abajo  $F$ , y una serie de fuerzas superficiales  $f$  cuyas acciones se compensan (Fig. XIII-17).

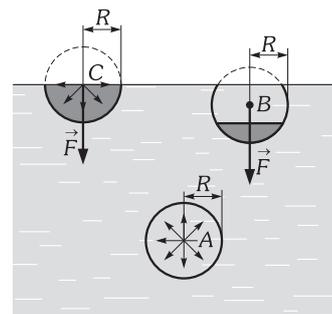


Fig. XIII-16.– Fenómenos moleculares en los líquidos.

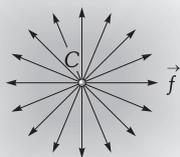


Fig. XIII-17.- La superficie del líquido coincide con el plano del papel. Representamos las fuerzas que causan la tensión superficial.

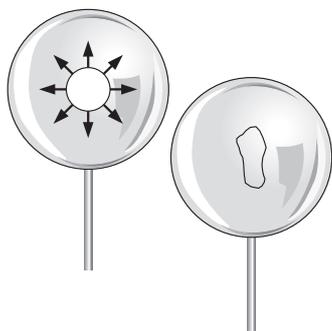


Fig. XIII-18.- Experiencia que pone de manifiesto las fuerzas debidas a la tensión superficial.

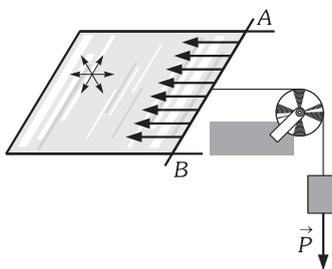


Fig. XIII-19.- Para la medida del coeficiente de tensión superficial.

Las fuerzas de atracción entre las moléculas de la superficie de un líquido, considerada en una unidad de longitud, constituyen su constante de TENSIÓN SUPERFICIAL ( $\sigma$ ).

Si se consiguen desequilibrar las acciones de la tensión superficial, se pone ésta de manifiesto claramente, lo que se logra poniendo un borde a la superficie del líquido, ocurriendo lo mismo que para una membrana elástica, la tensión se manifiesta al hacerle un corte.

Estas fuerzas se observan claramente en la experiencia que se describe a continuación: si colocamos un bucle formado por un hilo sobre una membrana jabonosa (Fig. XIII-18), tomará una forma cualquiera. Si pinchamos en su interior adopta una forma perfectamente circular, pues al eliminar la membrana jabonosa correspondiente a la parte interior del bucle, la tensión superficial tira de cada uno de sus puntos con la misma intensidad, en la dirección de los radios.

Una forma de medir la tensión superficial consiste en introducir en un líquido (por ejemplo agua jabonosa) un rectángulo de alambre, uno de cuyos lados es móvil, se forma una membrana, en cuyos puntos las acciones superficiales estarán anuladas por la simetría de las fuerzas, excepto en el contacto de la membrana con el alambre, pues las fuerzas estarán distribuidas en un semicírculo y darán, en cada punto, una resultante perpendicular al alambre y hacia el interior (Fig. XIII-19). El conjunto de fuerzas, actuando sobre el lado móvil (sin rozamiento con las guías), hacen que éste retroceda; para evitarlo se coloca un pequeño peso  $P$ , pendiente de una poleita. La tensión actúa sobre cada centímetro del lado  $AB$ ; sobre los  $l$  centímetros de su longitud, la fuerza es  $\sigma l$ . Pero considerando la existencia de dos superficies libres, superior e inferior, la fuerza es:

$$2\sigma l = Mg \Rightarrow \sigma = \frac{Mg}{2l}$$

De esta forma se puede medir la tensión superficial, que en el SI se expresa en N/m.

La inmovilidad de los lados fijos del rectángulo de la figura nos indica la existencia de fuerzas de reacción iguales y contrarias a las de la tensión superficial, ya que si no existiesen estas fuerzas se realizaría una contracción de la superficie.

Las fuerzas intermoleculares dependen de la temperatura disminuyendo con ella, por lo que le sucederá lo mismo al coeficiente de tensión superficial.

Es evidente que el coeficiente de tensión superficial dependerá además del material que se encuentre por encima de la superficie, pero el efecto es, en general, pequeño si éste último es un gas diluido (por ejemplo aire a 1 atm de presión). Debido a este efecto las tensiones superficiales se especifican para la frontera entre dos materiales; si el segundo material no se menciona de forma explícita, se supone que se trata de aire a la presión atmosférica, como ocurre en los valores dados en las tablas al margen.

La existencia de las fuerzas de tensión superficial nos dan la explicación a la formación de espuma en la superficie de los líquidos, puesto que al agitarlo e introducir aire en su interior, al pretender salir del líquido en forma de burbuja, no puede romper la membrana superficial permaneciendo bajo la superficie del líquido; un gran número de estas burbujas forman la espuma.

### XIII - 11. Energía superficial

Al pretender aumentar la superficie de un líquido tenemos que llevar moléculas del interior a la capa superficial, para lo cual necesitamos vencer las fuerzas que originan la presión molecular y, por lo tanto, realizar un trabajo que quedará almacenado en dicha región en forma de energía potencial y, en consecuencia, la energía de las moléculas de la capa superficial será diferente que las del interior del líquido.

Llamamos ENERGÍA SUPERFICIAL a la diferencia de energía que existe entre las moléculas pertenecientes a la película superficial y las que tendrían éstas moléculas de hallarse en el interior del líquido.

Es evidente que la energía superficial es proporcional al área  $A$  de la superficie del líquido, de forma muy sencilla y basándonos en la experiencia de la Fig. XIII-19, podemos encontrar la relación entre ellas; para lo cual, suponemos que el pesito  $P$  hace recorrer al lado móvil del rectángulo un camino  $dl'$ , el trabajo realizado contra las fuerzas de tensión superficial, será:

$$dW = 2\sigma l dl' = \sigma dA$$

ya que  $2l dl'$  es el aumento  $dA$  que ha experimentado el área de la membrana ( $l dl'$  aumento de la superficie de cada cara). Por tanto:

$$\sigma = \frac{dW}{dA}$$

y podremos definir la CONSTANTE DE TENSIÓN SUPERFICIAL como el trabajo necesario para aumentar la superficie de un líquido en una unidad.

VALORES DEL COEFICIENTE DE TENSIÓN SUPERFICIAL  $\sigma$

LÍQUIDO	$\sigma$ EN N/m A 20 °C
Agua	$73 \times 10^{-3}$
Octano	$22 \times 10^{-3}$
Etanol	$23 \times 10^{-3}$
Ácido acético	$28 \times 10^{-3}$
Glicerina	$65 \times 10^{-3}$
Mercurio	$540 \times 10^{-3}$
Benceno	$29 \times 10^{-3}$
Éter	$17 \times 10^{-3}$

Según la anterior definición  $\sigma$  se medirá en  $J/m^2$  (si) equivalentes a los  $N/m$  antes indicados. La energía acumulada para incrementar una superficie  $A_0$  de líquido hasta un valor  $A$ , quedará determinada por el trabajo realizado contra las fuerzas de tensión superficial:

$$W = \int_{A_0}^A \sigma dA = (A - A_0) \sigma$$

La energía total acumulada en una superficie  $A$ , se calculará imaginando nula la superficie inicial  $A_0$ :

$$W = \sigma A$$

«En la superficie de los líquidos existe una ENERGÍA POTENCIAL SUPERFICIAL cuyo valor es directamente proporcional a la superficie y a la tensión superficial».

De la Mecánica sabemos que las fuerzas siempre actúan sobre las sustancias de manera que adquieren el estado de mínima energía; ocurre lo mismo con la energía superficial que, al ser proporcional a la superficie, su tendencia a hacerse mínima nos da otra razón, diferente a la expuesta en el párrafo 10 de este capítulo, del por qué las gotas de líquido tienden a ser esféricas, por poseer éstas la mínima superficie para un volumen determinado.

De lo anteriormente dicho se deduce que el coeficiente  $\sigma$  es siempre positivo, ya que si no lo fuera, los medios en contacto no podrían existir independientemente puesto que las superficies de separación tenderían a aumentar indefinidamente, es decir, ambos medios tenderían a mezclarse entre sí; y viceversa, la superficie divisoria entre dos medios siempre tenderá a disminuir por ser  $\sigma$  siempre positivo.

**XIII - 12. Presión en las superficies curvas. Fórmula de Laplace**

Hemos dicho que la película superficial de los líquidos produce fuerzas semejantes a cuando se estira una membrana elástica; al adaptarla a un contorno plano, tiende a adoptar la forma plana; pero si por ejemplo queremos adaptarla a un cilindro (Fig. XIII-20), para que exista equilibrio hemos de hacer fuerzas tangenciales contra las fuerzas elásticas de contracción de la membrana elástica que, como las fuerzas debidas a la tensión superficial, tiran tangencialmente a ella en todos sus puntos existiendo, por lo tanto, componentes de ella dirigidas hacia el interior de la superficie.

En consecuencia, si la superficie es convexa presionará a las capas líquidas que se encuentran debajo de ella (Fig. XIII-21 a), mientras que si es cóncava tira de ellas (Fig. XIII-21 b).

Vamos a demostrar que si la superficie tiene una sola curvatura (líquidos entre láminas paralelas próximas) es decir, para meniscos en forma de teja (Fig. XIII-22), el valor de la presión es:

$$p = \frac{\sigma}{r}$$

( $r$  = radio curvatura). En efecto imaginemos una película cilíndrica de líquido entre dos planos paralelos y rígidos situados a una distancia  $l$ , de radio  $r$  y de espesor infinitamente estrecho (Fig. XIII-23). Introduzcamos gas en el interior del cilindro imaginario y éste aumentará de radio, pasando del valor  $r$  a  $r + dr$ . El trabajo realizado contra las fuerzas existentes hacia el eje del cilindro será:

$$dW = Fdr = p A dr = p 4\pi r l dr \tag{9}$$

ya que la superficie considerada es el doble del área lateral del cilindro por considerar las superficies interna y externa. El aumento de superficie es:

$$dA = 4\pi (r + dr) l - 4\pi r l = 4\pi l dr$$

y el incremento de energía superficial igual al trabajo realizado por  $F$ , es:

$$dW = \sigma dA = \sigma 4\pi l dr \tag{10}$$

Igualando las expresiones (9) y (10) obtenemos para valor de la presión:  $p = \sigma/r$ , como queríamos demostrar.

Si la figura tiene dos curvaturas (forma, por ejemplo, de un trozo de cámara de automóvil) de radios  $r_1$  y  $r_2$ , a cada una de ellas corresponde una presión (que origina fuerzas hacia el centro de curvatura), cuyo valor es el calculado. La presión total será:

$$p = \sigma \left[ \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right] \text{ FÓRMULA DE Pierre Simon LAPLACE (1749-1827)}$$

En el caso de una superficie esférica, una gota de líquido, ( $r_1 = r_2$ ) el valor de la presión debida a la curvatura es:

$$p = \frac{2\sigma}{r}$$

VALORES DEL COEFICIENTE DE TENSIÓN SUPERFICIAL DEL AGUA PARA DIVERSAS TEMPERATURAS

TEMPERATURA EN °C	$\sigma$ EN N/M
0	$756 \times 10^{-4}$
5	$749 \times 10^{-4}$
10	$742 \times 10^{-4}$
15	$735 \times 10^{-4}$
20	$728 \times 10^{-4}$
25	$720 \times 10^{-4}$
30	$712 \times 10^{-4}$
40	$696 \times 10^{-4}$
50	$679 \times 10^{-4}$
60	$662 \times 10^{-4}$
70	$644 \times 10^{-4}$
80	$626 \times 10^{-4}$
90	$608 \times 10^{-4}$
100	$589 \times 10^{-4}$

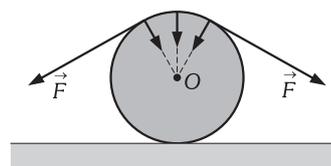


Fig. XIII-20.- Símil para la explicación del fenómeno de tensión superficial.

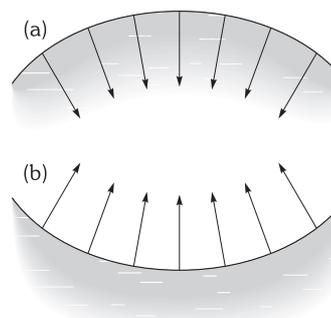


Fig. XIII-21.- Fuerzas debidas a la tensión superficial que producen presiones en el interior de los líquidos limitados por superficies curvas.

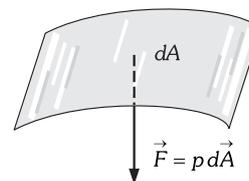


Fig. XIII-22.- En toda superficie curva de líquido existen presiones que originan fuerzas hacia el centro de curvatura.

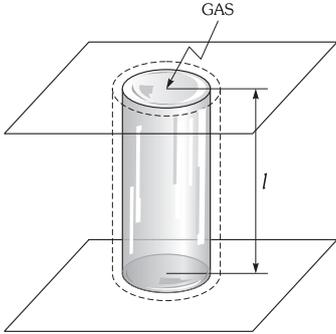


Fig. XIII-23. Película cilíndrica de líquido de radio  $r$  y de espesor despreciable, situada entre dos planos paralelos y rígidos, distantes entre sí  $l$ , en la que introducimos gas haciendo aumentar su radio.

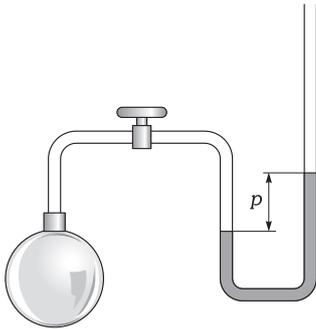


Fig. XIII-24. En el interior de una bomba de jabón existe un exceso de presión del gas interior sobre la presión atmosférica.

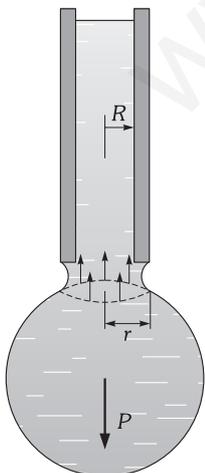


Fig. XIII-25. Cuentagotas. Ley de Tate.

Si en el extremo de un tubo formamos una pompa de jabón, y tal tubo lo comunicamos con un manómetro muy sensible, al abrir la llave de paso (Fig. XIII-24) observamos un *exceso de presión del gas interior de la burbuja*, sobre la presión atmosférica; ello es debido a que para que exista equilibrio la presión del gas interior ha de ser igual a la suma de la presión atmosférica y la debida a la curvatura, siendo ésta  $2\sigma/r$  para cada una de las dos superficies externa e interna que constituyen la pared de la pompa, ya que sus radios son prácticamente iguales:

$$p_{\text{gas}} = H + \frac{4\sigma}{r}$$

Si  $p$  es la sobrepresión medida por el manómetro, o *presión manométrica*, obtendremos:

$$p = p_{\text{gas}} - H = \frac{4\sigma}{r}$$

**PROBLEMAS: 16 al 27.**

**XIII - 13. Tamaño de una gota. Ley de Tate**

En un tubo estrecho cuyo interior está lleno de líquido una gota cuelga de su extremo abierto (Fig. XIII-25), hasta que «rompe» y cae por su peso. En el instante del desprendimiento, la gota está sujeta al propio líquido debido a la tensión superficial que actúa sobre un perímetro de valor  $2\pi r$ , siendo  $r$  proporcional al radio del tubo:  $r = kR$ ; por lo que la fuerza sustentadora toma el valor:  $2\pi r \sigma = 2\pi kR\sigma$ ; en estas condiciones su peso se iguala a ésta, es decir:

$$P = 2\pi kR\sigma \Rightarrow \boxed{P = K R \sigma}$$

expresión de la LEY DE TATE que nos dice:

«El peso de una gota que sale por el extremo de un tubo, es directamente proporcional al radio de éste».

Aproximadamente  $k = 1$ , es decir que el radio del «cuello» de la bolsa en el momento de «romper» para formarse la gota es igual al radio del tubo ( $r = R$ ), por lo que  $K = 2\pi$ , y si además tenemos en cuenta que el peso de la gota es:  $P = V\rho g$ , obtenemos para su tamaño el valor:

$$\boxed{V = \frac{2\pi R\sigma}{\rho g}}$$

en consecuencia cuanto más grueso sea el tubo mayores serán las gotas. Para el agua con un tubo de radio de 1 mm, obtenemos gotas de un volumen aproximado de  $0,043 \text{ cm}^3$ .

Puede servir un cuentagotas para efectuar la medida del coeficiente de tensión superficial de un líquido, conociendo el de otro, por ejemplo el del agua ( $75 \times 10^{-3} \text{ N/m}$ ) y el peso de una gota de líquido y de agua, verificándose:

$$\begin{matrix} P_1 = K R \sigma_1 \\ P_2 = K R \sigma_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \sigma_2 = \sigma_1 \frac{P_2}{P_1}$$

En la práctica se procede haciendo fluir por el cuentagotas dos volúmenes iguales de los líquidos, si  $n_1$  y  $n_2$  son el número de gotas obtenidas de cada líquido entonces:

$$\begin{matrix} n_1 P_1 = V \rho_1 g \\ n_2 P_2 = V \rho_2 g \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{n_2 \rho_1}{n_1 \rho_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \Rightarrow \sigma_2 = \frac{n_2 \rho_1}{n_1 \rho_2} \sigma_1$$

lo que nos resuelve el problema conocidas las densidades de los líquidos y contando gotas.

**PROBLEMAS: 28 al 32.**

**XIII - 14. Adherencia**

Cuando un líquido está en contacto con un sólido, a la mutua fuerza de atracción entre las moléculas de uno y otro se le llama ADHERENCIA.

Consideremos una molécula de líquido A (Fig. XIII-26), en contacto con la pared de un vaso. Será atraída por el líquido por fuerzas de cohesión en la dirección de los radios de una semiesfera cuyo centro es la propia molécula. La resultante de estas acciones,  $F$ , es perpendicular a la pared y hacia el interior.

Las paredes del vaso la atraen por un sistema de fuerzas análogo al anterior y cuya resultante,  $F'$ , es perpendicular a la pared y hacia el exterior.

Si  $F > F'$ , el líquido no moja al sólido.

Si  $F < F'$ , el líquido moja al sólido.

En cualquier caso, excepto cuando  $F = F'$  y razonando de la misma manera que como hemos hecho en el párrafo 9 de este capítulo, sobre toda la capa de líquido próxima a la superficie de separación del líquido y sólido (pared del recipiente), y con un espesor igual al radio de acción molecular, actúan fuerzas normales a ella y dirigidas hacia el interior del líquido (*el líquido no moja*) o hacia el exterior (*el líquido moja*) causando la que llamábamos presión molecular, que al tender a acercar las moléculas se ve compensada por el aumento de la fuerza repulsiva de cohesión.

**XIII – 15. Formación de meniscos en la superficie de los líquidos por contacto líquido-sólido. Ángulo de contacto**

En el límite de la superficie de un líquido contenido en un recipiente concurren tres medios líquido, sólido y gas; prescindiendo del gas por considerarlo muy expansionado (poco denso) y por tanto prácticamente no producir ningún efecto sus fuerzas de cohesión sobre las moléculas de líquido en tal límite, analicemos la zona de contacto líquido-sólido.

Consideremos la molécula A (Fig. XIII-27), sobre ella actuarán las fuerzas de atracción del sólido que constituye la pared que tendrán una resultante  $F'$  perpendicular a ella y hacia el exterior del recipiente, y la fuerza  $F$  resultante de las de cohesión del líquido que se manifiestan únicamente para fuerzas que se encuentran en un cuarto de esfera. La resultante  $R$  de ambas fuerzas tiene que ir, como ya hemos razonado, en la dirección perpendicular a la superficie del líquido. Así, para que la superficie sea horizontal (el ángulo que forma el líquido y la pared sea de  $\pi/2$ ) (Fig. XIII-28 a) la resultante  $R$  tiene que ser vertical, lo cual se verifica cuando  $F = F'\sqrt{2}$ , ya que en este caso la fuerza  $F$  dirigida hacia el líquido forma con la pared del vaso un ángulo de  $\pi/4$ .

En el caso de la Fig. XIII-28 b en el que la resultante  $R$  está dirigida hacia el interior del líquido, la superficie perpendicular a  $R$  forma un menisco convexo mirado desde el exterior causado por la tensión superficial, puesto que en la dirección de la tangente en los puntos de contacto de dicha superficie con la pared sólida actuarán dichas tensiones y, se dice que el líquido no moja a la pared. La Fig. XIII-28 c nos muestra el caso en que el líquido moja al sólido y la resultante  $R$  está dirigida hacia el exterior del líquido.

Se llama **ÁNGULO DE CONTACTO** (de CONJUNCIÓN o de CAPILARIDAD), al que forma la dirección de la fuerza debida a la tensión superficial (siempre tangente a la superficie del líquido en los puntos de contacto con el sólido), con la superficie del sólido que no está en contacto con el líquido.

Cuando el líquido *no moja* al sólido el ángulo de contacto es mayor que  $\pi/2$  (obtuso); si es menor que  $\pi/2$  (agudo) el líquido *moja* al sólido; de acuerdo con lo dicho anteriormente. Cuando el ángulo de conjunción es  $\pi$  diremos que el líquido *no moja en absoluto* al sólido y, si es 0 entonces *moja perfectamente*.

Las Fig. XIII-28 b y XIII-29 representan como se ubica un líquido que no moja cuando se encuentra en un recipiente con pared vertical y, el aspecto de una gota de líquido sobre un suelo horizontal que no moja. En las Fig. XIII-28 c y XIII-30 representamos lo mismo pero para el caso en que el líquido moja.

Un mismo líquido puede mojar unos cuerpos sólidos y no mojar a otros. Así, por ejemplo, el agua puede decirse que en la práctica moja perfectamente la superficie limpia del vidrio, pero no moja a la parafina; el mercurio no moja al vidrio, pero moja a una superficie limpia de hierro, ... etc.

**XIII – 16. Fenómenos capilares**

Los líquidos que mojan a las paredes de un tubo muy estrecho ascienden en su interior, quedando el líquido a mayor altura que el nivel externo. Por el contrario, los líquidos que no mojan descienden en los tubos capilares.

Ejemplo claro de capilaridad es un terrón de azúcar, una de cuyas puntas mojamos y se moja todo él; la subida de la savia en las plantas por vasos capilares, etc.

La causa de los fenómenos de capilaridad es la reacción a la tensión superficial, que actúa tangencialmente a los meniscos y en los puntos de contacto del líquido con la pared del tubo (Fig. XIII-31). A tal fuerza por unidad de longitud la podemos suponer des-

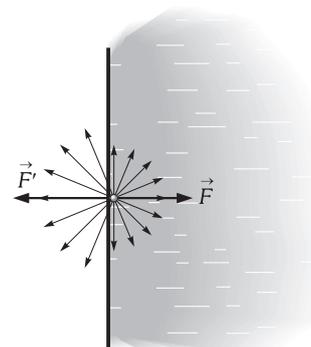


Fig. XIII-26.– Adherencia.

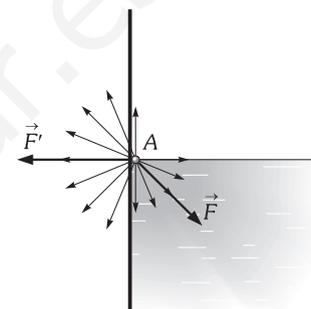


Fig. XIII-27.– Fuerzas que actúan sobre una molécula de líquido situada en contacto con la pared de un vaso y en la superficie del líquido.

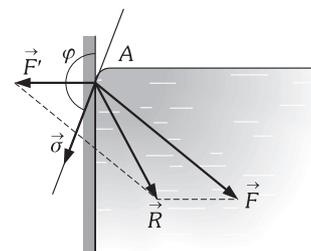
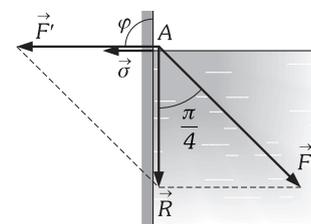


Fig. XIII-28.– Formación de meniscos en el contacto líquido-sólido y en la superficie del líquido.

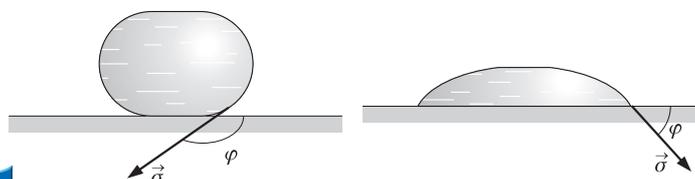


Fig. XIII-29.– El líquido no moja al sólido.

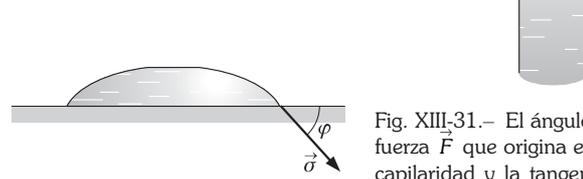


Fig. XIII-30.– El líquido moja al sólido.

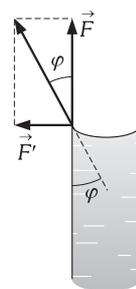


Fig. XIII-31.– El ángulo que forma la fuerza  $F$  que origina el fenómeno de capilaridad y la tangente al menisco en el punto de contacto del líquido con la pared se llama «ángulo de conjunción».

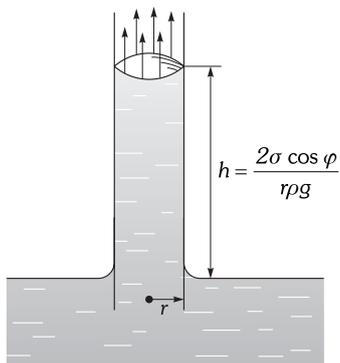


Fig. XIII-32.- Ley de Jurín

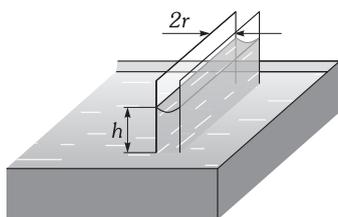


Fig. XIII-33.- Capilaridad en láminas plano-paralelas.

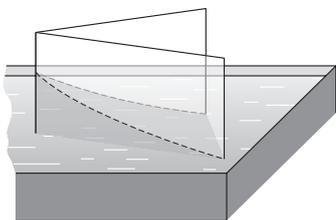


Fig. XIII-34.- Capilaridad en láminas en ángulo.

compuesta en otras dos: una perpendicular a la pared  $F'$  y anulada por la reacción de ésta, y otra  $F$  en la propia dirección de la pared y cuyo valor es:

$$F = \sigma \cos \varphi$$

siendo  $\varphi$  el ÁNGULO DE CONJUNCIÓN. Esta componente, actuando en cada unidad de longitud en el contacto del líquido con la pared, origina los fenómenos capilares (Fig. XIII-32).

**XIII - 17. Tubos capilares. Ley de Jurín**

«Los ascensos o descensos de los líquidos por tubos capilares, son inversamente proporcionales a los radios de los tubos».

En efecto: en los tubos capilares las fuerzas descritas actúan sobre los  $2\pi r$  centímetros de la circunferencia del tubo, dando una resultante en la dirección del eje y de valor:  $2\pi r \sigma \cos \varphi$ , que habrá de equilibrar el peso del cilindro de base  $\pi r^2$  y de altura la correspondiente al ascenso del líquido dentro del tubo; si  $\rho$  es su densidad, se verificará:

$$\pi r^2 h \rho g = 2\pi r \sigma \cos \varphi \Rightarrow h = \frac{2\sigma \cos \varphi}{r \rho g}$$

fórmula que demuestra la LEY DE James JURIN (1684-1750). Interpretando la fórmula anterior, observamos que:

«Los ascensos o descensos son directamente proporcionales a la tensión superficial y al coseno del ángulo de conjunción, e inversamente proporcionales a la densidad del líquido».

**XIII - 18. Capilaridad en láminas paralelas y en ángulo**

«La altura alcanzada por un líquido entre dos LÁMINAS PARALELAS es la mitad de la que alcanzaría en un tubo que tuviese por diámetro la separación de las láminas».

En efecto: Consideremos unas láminas paralelas introducidas parcialmente en un líquido y cuya distancia  $2r$  (Fig. XIII-33), es la misma que el diámetro de un tubo introducido en el mismo líquido. La fuerza  $\sigma \cos \varphi$ , actúa en cada unidad de longitud de la lámina a lo largo de su contacto con el líquido; la fuerza que actúa sobre los dos lados de longitud  $l$ , será:  $2l \sigma \cos \varphi$ . Esta fuerza equilibra al peso del paralelepípedo de líquido que tiene por base  $2rl$  y por altura  $h$ :

$$2rlh\rho g = 2l\sigma \cos \varphi \Rightarrow h = \frac{\sigma \cos \varphi}{r\rho g}$$

Esta igualdad no demuestra la ley expresada.

En las LÁMINAS EN ÁNGULO, parcialmente introducidas en un líquido, éste asciende tanto más cuanto más cercanos están a la arista los puntos considerados (Fig. XIII-34). La línea de contacto del líquido con las paredes es una hipérbola.

**PROBLEMAS: 33 al 48.**

**PROBLEMAS**

**A) ELASTICIDAD**

1. Deducir la ecuación de dimensiones y las unidades de medida en los sistemas CGS, SI y TÉCNICO de los módulos de Young, de deslizamiento y de compresibilidad.
2. Calcular la anchura ( $l$ ) que habría que dar a una correa sin fin de espesor  $e = 1$  cm y de límite de ruptura  $R = 10^3$  N/cm<sup>2</sup> si se acopla a un motor que funciona a la potencia de 50 CV, que le comunica una velocidad de 3 m/s. Se quiere que el factor de seguridad sea 6.
3. De un alambre de cobre de 1,5 m de longitud y 2 mm de diámetro se cuelga un peso de 8 kg. Se pregunta: 1) ¿Hemos rebasado el límite de elasticidad? 2) ¿Se romperá el alambre? 3) En caso de ser negativas las respuestas a las preguntas anteriores, ¿cuál es su alargamiento? (Módulo de Young =  $12 \times 10^3$  kp/mm<sup>2</sup>; límite de elasticidad = 3 a 12 kp/mm<sup>2</sup>; límite de ruptura = 20 a 50 kp/mm<sup>2</sup>.)
4. A un alambre de acero de 3 m de longitud y 2 mm de radio le colgamos un peso de 350 kg y se produce un alargamiento de 4 mm. Calcular el módulo de Young de ese acero.
5. Sobre un tubo vertical de acero, de 20 m de largo y 16 cm de diámetro exterior y 1 cm de espesor, se pone un bloque de granito de

- 14 t. Si el módulo de Young del acero es de  $1,9 \times 10^6$  atm, determinar el acortamiento experimentado por el tubo.
6. Se tiene una barra cilíndrica de aluminio de 1 m de longitud. Si se la somete a una tracción longitudinal, calcular el período de las oscilaciones elásticas que experimentará al cesar la tracción.  $\rho_{Al} = 2,7$  g/cm<sup>3</sup>; módulo de Young del aluminio =  $7 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>.
7. A un cable de aluminio de 3 m de longitud y 1 mm<sup>2</sup> de sección que pende del techo se le sujeta en su extremo libre una esfera de 20 kg. Si se separa el sistema de la vertical un ángulo de 30° y se suelta, calcular la longitud máxima que adquirirá el cable durante las oscilaciones. Módulo de Young del aluminio =  $7 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>.
8. El anclaje de la parte superior y el bloque de 300 kg de la figura son perfectamente rígidos, soportando al bloque tres cables verticales de la misma sección, siendo los laterales de acero y el central de hierro fundido. Determinar las fuerzas que ejercen cada uno de los cables sobre el bloque.  $E$  (acero) =  $2,0 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>;  $E$  (hierro fundido) =  $8,7 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>.
9. Se cuelga una viga de 8 m de longitud de 2000 kg de dos cables de la misma longitud y sección, uno de aluminio situado a 1 m de uno de sus extremos, y otro de acero. Al suspenderla, ambos cables se estiran lo mismo. Calcular la tensión que soporta cada uno y la distancia

entre ellos. Módulos de Young: acero =  $2 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>; aluminio =  $7 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>.

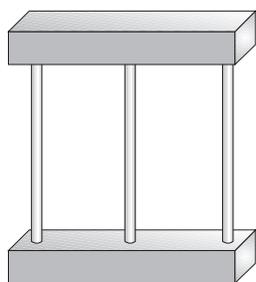
10. El módulo de Young del bronce es  $9 \times 10^{11}$  dyn/cm<sup>2</sup> y el de torsión es  $3,5 \times 10^3$  kp/mm<sup>2</sup>. Calcular: 1) El coeficiente de Poisson. 2) El módulo de compresibilidad.

11. A un cuerpo de cobre de forma cúbica de 1 dm de arista se le somete a una compresión uniforme, perpendicularmente a cada una de sus caras, actuando sobre cada una de ellas la fuerza de 1 t. Determinar la variación de volumen. (Módulo de compresibilidad:  $13,8 \times 10^3$  kp/mm<sup>2</sup>.)

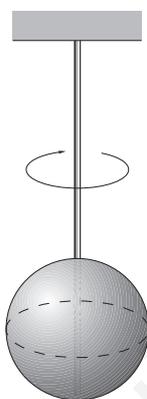
12. La presión hidrostática en las profundidades oceánicas de una sima es de  $10^8$  Pa. Determinar la densidad de un trozo de Fe en tal lugar. DATOS: densidad del Fe en la superficie: 7890 kg/m<sup>3</sup>; módulo de compresibilidad del Fe:  $9,6 \times 10^{10}$  Pa.

13. Se somete a un cuerpo de cobre de forma cúbica y de 1 dm de arista a una fuerza de 1 t tangencialmente a la superficie de una de sus caras. Averiguar el ángulo de deslizamiento. (Módulo de deslizamiento:  $1,6 \times 10^3$  kp/mm<sup>2</sup>.)

14. Un péndulo de torsión está formado por una esfera de 10 cm de radio y 10 kg de masa que cuelga de un alambre cilíndrico de 2 mm de radio y 1 m de longitud; si el período de oscilación es 2 s, calcúlese el módulo de torsión G del alambre.



Problema XIII-8.



Problema XIII-14

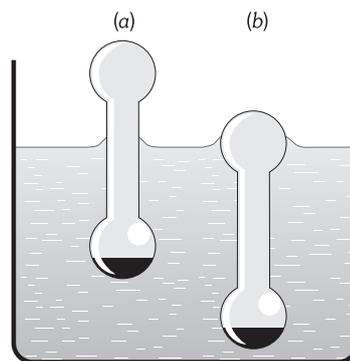
15. Una barra de acero de sección cuadrada de 5 cm de lado tiene una longitud de 3 m. El módulo de Young de ese acero es  $20 \times 10^3$  kp/mm<sup>2</sup>. Calcular la flecha cuando se le suspende un cuerpo de 80 kg: 1) En un extremo, estando la barra horizontal y fija por el otro. 2) Del punto medio, estando la barra horizontal y fija, apoyándose en sus extremos.

**B) FENÓMENOS MOLECULARES EN LOS LÍQUIDOS**

16. Colgamos de un resorte de constante  $K = 2$  N/m un anillo en posición horizontal de radio interior y exterior 12 y 13 mm respectivamente, lo ponemos en contacto con un líquido contenido en un vaso, y al hacer descender el recipiente, el anillo se desprende de la superficie en el momento en que el resorte se ha alargado 5,2 mm. Calcular el coeficiente de tensión superficial del líquido (suponemos al ángulo de conjunción, en el momento en que se desprende, cero grados).

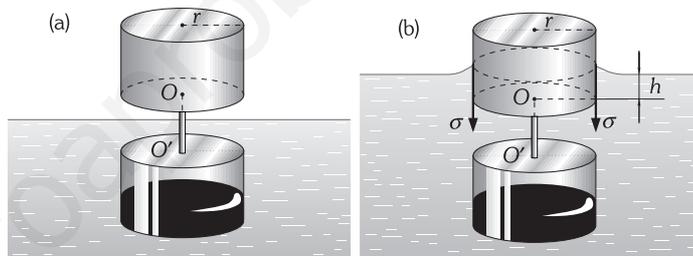
17. Del platillo de una balanza se cuelga un cuerpo cilíndrico de vidrio cerrado por su base inferior, de 1 cm de radio y 4 cm de altura, y se pone tara en el otro platillo hasta conseguir el equilibrio. Se sumerge el cuerpo en agua destilada a 4 °C hasta la mitad de su altura exactamente. Para restablecer el equilibrio hace falta poner en el platillo del cuerpo pesas por valor de 5,8 g. Calcular el coeficiente de tensión superficial del agua. El ángulo de conjunción se supone de cero grados, es decir, que el menisco es tangente a la superficie lateral del cilindro.

18. Tenemos unas ampollitas de vidrio de paredes muy estrechas, en la forma indicada en la figura. La ampollita va lastrada en su parte inferior con mercurio para que se mantenga en la posición de la figura (a) al dejarla sobre el nivel de un recipiente con agua. Sumergimos el sistema hasta la posición de la figura (b). Debería recobrar la posición a, pero se queda en la b. ¿Por qué? El ángulo de contacto se supone de cero grados.



Problema XIII-18.

19. Los cilindros huecos y cerrados de la figura son de vidrio y están unidos por la varilla OO'; el inferior se ha lastrado con el mercurio necesario para que el sistema flote en un líquido, con el cilindro inferior sumergido. Sumergimos el sistema hasta que quede también flotando en la forma de la figura (b), sin recobrar la primitiva posición (a). Demostrar que se debe cumplir:  $rh = 2\sigma/\rho g$  ( $\sigma$  y  $\rho$ , tensión superficial y densidad del líquido, respectivamente). Se supone que la varilla OO' es infinitamente delgada, que el líquido moja al vidrio y que el ángulo de contacto es nulo.



Problema XIII-19

20. Ocho gotas de mercurio de radio r se unen para formar una sola. ¿Qué relación existe entre las energías superficiales antes y después de la unión?

21. Calcular el exceso de presión debido a la tensión superficial que se puede producir en el interior de una vena líquida de agua («chorro cilíndrico») si tiene 5 mm de diámetro y cae verticalmente. (La tensión superficial del agua es 0,0728 N/m).

22. Determinar el diámetro que tiene una gota de agua ( $\sigma = 75 \times 10^{-3}$  N/m), cuando su presión interna excede a la atmosférica en 1 kPa.

23. Determinar la presión del aire de una burbuja de 1 cm de diámetro que se encuentra a 10 m de profundidad bajo la superficie del agua. La presión atmosférica en la superficie es:  $H = 758$  mm de Hg y el coeficiente de tensión superficial del agua a la temperatura de la burbuja (4 °C) es:  $\sigma = 75 \times 10^{-3}$  N/m.

24. El aceite de oliva tiene una tensión superficial respecto del aire de 32 mN/m. Una gota esférica tiene un diámetro de 4 mm. Calcular: 1) Presión a que está sometida. 2) Fuerza total a la que está sometida, debida a la tensión superficial que actúa sobre su superficie. 3) Energía potencial de superficie.

25. Calcular la energía superficial de una pompa de agua jabonosa de 1 cm de radio y la presión debida a su curvatura. Consideramos el espesor de la película líquida como despreciable. Tensión superficial =  $35 \times 10^{-5}$  N/cm.

26. En un dispositivo como el de la figura se han conseguido dos pompas de agua jabonosa en los extremos D y E de los tubos. La llave A incomunica el aire interior de las dos pompas. Abierta tal llave, la pequeña se achica y la grande aumenta de volumen. ¿Por qué?

27. Calcular el trabajo necesario para aumentar el tamaño de una pompa de jabón de 3 cm a 5 cm de radio. Tensión superficial del agua jabonosa  $35 \times 10^{-5}$  N/m.

28. De un tubo vertical de 1 mm de radio interior gotea agua ( $\sigma = 72,8 \times 10^{-3}$  N/m); suponiendo que el radio del «cuello» de la bolsa es igual al radio interior del capilar en el momento en que la gota se desprende y considerando a esta última como esférica, calcular su radio.

29. El estalagmómetro, aparato destinado a la medida de tensiones superficiales, es una pipeta de la que se vierte gota a gota, en una primera experiencia, el líquido problema, contándose el número de gotas  $n$  correspondientes a un determinado volumen; se repite el recuento para el mismo volumen de agua, obteniéndose  $n'$  gotas. Determina la tensión superficial del líquido ( $\sigma$ ) conocida la del agua ( $\sigma'$ ) y las densidades ( $\rho$  y  $\rho'$ ) de ambos líquidos.

30. En el platillo izquierdo de una balanza se coloca una tara; en el derecho, un vasito y pesas de masa  $M_1$  hasta equilibrarla. Se quitan las pesas y se vierte en el vaso, con un cuentagotas,  $n$  gotas de un líquido; se vuelve a equilibrar la balanza (la misma tara) con pesas de masa  $M_2$ . Se quitan éstas y se vierten en el vasito, sobre el líquido,  $n$  gotas de agua. Se consigue de nuevo el equilibrio con pesas de masa  $M_3$ . Conocida la constante de tensión superficial del agua  $\sigma'$  determinar la del líquido ( $\sigma$ ).

31. En el fondo de un recipiente con un líquido se ha soldado un tubo de 1 mm de diámetro interior por el que sale en promedio 1 gota por segundo; si en 13 minutos se han recogido 10 g de líquido, determínese su coeficiente de tensión superficial a la temperatura de la experiencia. El radio del «cuello» de la gota se supone igual al radio interior del tubo en el momento en que ésta se desprende.

32. Encontrar una ecuación que nos relacione el coeficiente de tensión superficial a una temperatura  $t$  ( $\sigma_t$ ) con el del mismo líquido a temperatura  $t'$  ( $\sigma_{t'}$ ), la variación de la masa de las gotas  $\Delta m$  y el radio interior del capilar del estalagmómetro ( $r$ ) con que se ha medido tal variación. Tómese el radio del «cuello» de la gota igual al radio interior del tubo en el momento en que ésta se desprende y no tomar en consideración la variación de tal radio del tubo con la temperatura (dilatación). Hacer aplicación de esta fórmula para calcular el coeficiente de tensión superficial del agua a 80 °C sabiendo que a 20 °C es  $72,8 \times 10^{-3}$  N/m, que el radio interior del tubo capilar del estalagmómetro es de 1 mm, y que  $\Delta m = 7,694 \times 10^{-6}$  kg.

33. Entre dos láminas planas de vidrio introducimos una gota de mercurio de 2 g de masa que no mojan en absoluto al vidrio; calcular la fuerza que debe ejercerse sobre las láminas para que la gota de mercurio tome forma de «galleta» de radio 10 cm. Coeficiente de tensión superficial del mercurio a la temperatura de la experiencia:  $\sigma = 540 \times 10^{-3}$  N/m. Densidad del mercurio:  $\rho = 13600$  kg/m<sup>3</sup>.

34. Entre dos láminas planas de vidrio introducimos una gota de agua de  $10^{-2}$  g de masa que moja perfectamente al vidrio; en estas condiciones la distancia entre ellas es de 1  $\mu$ m. Determinar la fuerza de atracción entre las láminas. Coeficiente de tensión superficial del agua a la temperatura de la experiencia:  $\sigma = 72 \times 10^{-3}$  N/m.

35. Sabiendo que la tensión superficial del agua es  $72 \times 10^{-3}$  N/m, calcular la altura a que asciende el agua en un tubo de 1 mm de diámetro y en unas láminas cuadradas paralelas cuya distancia es 0,05 mm. Se supone el ángulo de contacto igual a cero.

36. El tubo de un barómetro de mercurio (tensión superficial  $547 \times 10^{-3}$  N/m; ángulo de conjunción  $125^\circ$ ) tiene 3 mm de diámetro. ¿Qué error introduce en las medidas la tensión superficial?

37. Sabiendo que la tensión superficial del mercurio es 547 dyn/cm y que el ángulo de contacto con un tubo de 1 mm de diámetro y con unas láminas paralelas separadas 0,05 mm es de  $125^\circ$ , calcular la altura que desciende el mercurio al introducir tubo y láminas en una cubeta con dicho líquido.

38. El fondo de un vaso cilíndrico es un filtro poroso, echamos mercurio (que no moja en absoluto al material de que está hecho el filtro y que tiene una tensión superficial de  $547 \times 10^{-3}$  N/m), hasta que cuando alcanza la altura de 4,5 cm empieza a calarse a través de los canales del filtro; determinar el radio máximo que pueden tener éstos.

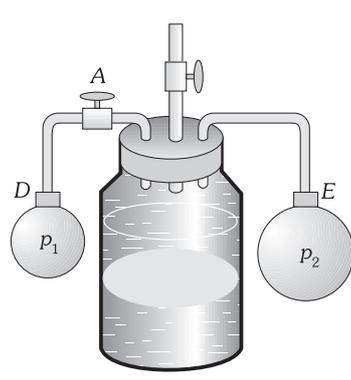
39. Determinar la cantidad de mercurio que queda en un recipiente que tiene un fondo de 50 cm<sup>2</sup> en el cual se ha practicado un orificio circular de 0,2 mm de radio. Tensión superficial del mercurio  $547 \times 10^{-3}$  N/m.

40. Demostrar la ley de Jurin para ascensos en tubos capilares partiendo de la ley de Laplace, suponiendo que el menisco formado en el tubo es una superficie esférica.

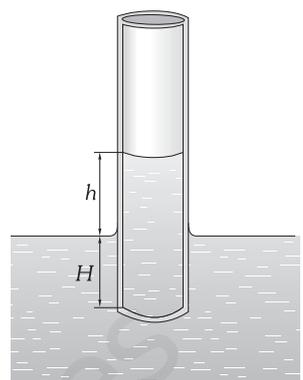
41. En un tubo en U cuyas ramas son de 0,6 mm y 0,6 cm de diámetro se introduce un líquido de densidad 1,8 g/cm<sup>3</sup> y de 32 dyn/cm de tensión superficial. ¿Cuál será la diferencia de nivel del líquido en las dos ramas del tubo, si éste se encuentra en posición vertical y el ángulo de conjunción es  $32^\circ$ ?

42. Se introduce verticalmente un tubo capilar en un líquido a una profundidad  $H$  como se indica en la figura y el líquido asciende por él

hasta una altura  $h$ . Cerramos el extremo inferior y se saca del líquido; al abrirlo de nuevo en el aire (fuera del líquido) ¿qué longitud tendrá el líquido que queda en el tubo?



Problema XII-26.

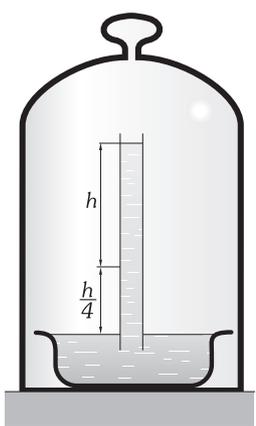


Problema XIII-42.

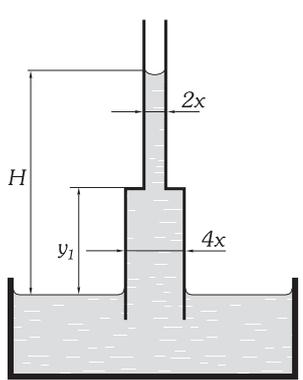
43. Calcular la presión que debe ejercer el aire sobre el líquido que hay dentro de un tubo capilar de radio interior 0,20 mm, que se encuentra en posición vertical introducido en un recipiente con agua ( $\sigma = 72 \times 10^{-3}$  N/m), para que el nivel del líquido en el recipiente en el que se ha introducido sea el mismo que en el tubo. La presión externa es  $H = 750$  mm de Hg y se supone que el agua moja perfectamente.

44. Cerramos el extremo superior de un tubo capilar y lo introducimos dentro de un recipiente con agua ( $\sigma = 72 \times 10^{-3}$  N/m); para que el nivel del líquido sea el mismo en el interior del tubo y en el recipiente tenemos que introducir en el líquido hasta el 1,5 % de la longitud del tubo. Siendo la presión atmosférica de 750 mm de Hg y considerando que el agua moja perfectamente al vidrio del que está hecho el tubo, determinar el radio interior del capilar.

45. A un recipiente que contiene aceite (tensión superficial  $\sigma$  y ángulo de contacto  $\phi < \pi/2$ ) se le introduce un tubo capilar en posición vertical; el conjunto lo metemos dentro de una campana en la que se hace el vacío (la tensión de vapor del aceite es muy baja y por tanto despreciable); el aceite se eleva una altura  $h$  por el capilar y por encima del nivel en el recipiente. Calcular la presión en un punto, en el interior del aceite y a una distancia  $h/4$  de la superficie del aceite en el recipiente.



Problema XIII-45.



Problema XIII-47

46. 1) ¿Hasta qué altura puede ascender el agua ( $\sigma = 72,8 \times 10^{-3}$  N/m) por un xilema de un árbol (delgados tubos que llevan hacia arriba los nutrientes de las plantas), si los más delgados tienen como mínimo un radio interno de  $2,5 \times 10^{-2}$  cm? Suponer que el ángulo de contacto es cero. 2) ¿Qué presión negativa haría falta para que el agua ascienda por un xilema hasta la copa de un árbol de 60 m de altura?

47. En la figura representamos dos tubos capilares soldados; el superior de radio  $x$  y el inferior de radio  $2x$  y altura  $y_1$ . Si la tensión superficial del líquido, de densidad  $\rho$  y ángulo de contacto  $\phi$ , cumple con la condición:  $\sigma > 2xy_1\rho g/\cos\phi$ , calcular la altura  $H$  alcanzada por el líquido.

48. Demostrar que la línea de contacto de un líquido con dos láminas de vidrio verticales que forman entre sí un ángulo diedro muy pequeño es una hipérbola equilátera.

# CAPÍTULO XIV

## TEMPERATURA Y DILATACIÓN. TEORÍA CINÉTICO MOLECULAR

### XIV – 1. Hipótesis y definiciones

No sólo el calor y la temperatura se encuentran estrechamente ligados entre sí, sino también, a las cuestiones a que nos vamos a referir en este y sucesivos capítulos, tales como dilatación, cambios de estado, teoría cinética, termodinámica... El análisis de estos temas lo vamos a realizar desde dos puntos de vista: el *macroscópico* que lo efectuamos en términos más o menos detectables por nuestros sentidos (TERMODINÁMICA) y el *microscópico* que se realiza teniendo en cuenta el movimiento de los átomos y moléculas que componen el sistema en estudio (TEORÍA CINÉTICO MOLECULAR Y MECÁNICA ESTADÍSTICA). Ambos puntos de vista se complementan formando un todo único, ya que si, por ejemplo, decimos a nivel microscópico que las moléculas de cualquier sustancia se hallan en continuo movimiento desordenado no existiendo ninguna dirección preferente para éste, su intensidad de movimiento depende de la magnitud macroscópica temperatura, cantidad que está incluida entre las fundamentales de la Termodinámica.

Llamaremos SISTEMA TERMODINÁMICO a cualquier cantidad de materia, cualquier objeto, cualquier parte del universo... que aislamos (mentalmente) de todo lo demás y que sea lo suficientemente grande para poder medir en él magnitudes macroscópicas tales como presión, temperatura, energía interna..., y no tendremos en cuenta la estructura detallada de la materia que lo forma (estructura atómica o molecular); la superficie que encierra a un sistema puede ser *real*, como por ejemplo un gas encerrado en un recipiente, una gota de agua *imaginaria* como una porción de líquido dentro de un depósito. En cualquier caso *los sistemas que normalmente vamos a utilizar son homogéneos, isotrópicos, sin cargas y químicamente inertes, no estando afectados por campos gravitatorios, eléctricos, ni magnéticos.*

Los sistemas termodinámicos pueden tener intercambios de *materia y energía (calor y trabajo)* desde ellos hacia el *medio exterior (o medio ambiente)* y a la inversa.

Denominaremos SISTEMA AISLADO, si las condiciones son tales que no existe intercambio con el exterior ni de materia ni de energía, para lo cual es necesario que el sistema se encuentre térmicamente aislado, de modo que el flujo de calor sea nulo y que además no realice ni reciba trabajo.

Llamaremos SISTEMA CERRADO a aquel que no puede cambiar materia con el exterior pero sí energía (puede intercambiar con el exterior un flujo de calor y además puede realizar o recibir trabajo).

Llamaremos SISTEMA ABIERTO a aquel que puede intercambiar con el exterior materia y energía.

Los límites o paredes de un sistema pueden ser: *MÓVILES* cuando existe un cambio de volumen e *INMÓVILES* o *RÍGIDAS* cuando no existe cambio de volumen; *DIATÉRMICAS* cuando existe un flujo de calor a su través y *ADIABÁTICAS* cuando no existe tal cambio; *PERMEABLES* cuando existe un intercambio de materia con el exterior e *IMPERMEABLES* cuando no lo existe.

Llamaremos ESTADO de un sistema termodinámico al conjunto de valores de todas las propiedades macroscópicas observables y medibles que nos definen la configuración del sistema; a tales magnitudes las llamaremos *coordenadas termodinámicas* o *variables de estado*; son ejemplos de estas últimas la presión, la densidad, la temperatura, la energía interna...

Considerando a un sistema aislado, en el que las variables termodinámicas que definen su estado no varían con el tiempo se dice que está en EQUILIBRIO.

*Una hipótesis básica de la Termodinámica es que todo sistema aislado adquiere espontáneamente el equilibrio.*

El equilibrio termodinámico de un sistema conlleva que sea *térmico, mecánico y químico*, es decir, que en todos los puntos del sistema existe la misma temperatura, presión y composición química.

Cuando un sistema interacciona con otros o simplemente con el exterior modificándose alguna de sus variables termodinámicas diremos que se ha realizado un PROCESO o TRANSFORMACIÓN TERMODINÁMICA.

Llamamos variables termodinámicas INTENSIVAS de un sistema a aquellas cuyo valor no depende de la masa ni del volumen (en realidad del número de partículas que lo forman). Por ejemplo la presión, la temperatura, la densidad, la concentración de una disolución... Estas variables son las mismas para todo el sistema que para una parte de él, así por ejemplo si aislamos la mitad del sistema, las dos tendrán la misma presión, la misma temperatura...

Se denominan variables termodinámicas EXTENSIVAS (o aditivas) a aquellas cuyo valor depende de las dimensiones del sistema y con frecuencia son proporcionales a la cantidad de sustancia con-

siderada. Por ejemplo el volumen, la masa, la energía interna, la entalpía... Es evidente que al tomar una fracción de un sistema, las variables extensivas quedan divididas por la misma fracción.

Al dividir una variable extensiva por la masa o por el número de moles de un sistema, obtenemos una variable intensiva, pasando a llamarse *valor específico* y *valor específico molar* de esta variable. Así por ejemplo al dividir el volumen por la masa de un sistema obtenemos el volumen específico, que evidentemente es intensiva por ser la inversa de la magnitud densidad.

En muchos casos es conveniente utilizar las ecuaciones termodinámicas en función de las magnitudes intensivas, ya que estas ecuaciones resultantes serán independientes de la masa del sistema correspondiente.

Para un sistema termodinámico que contiene una sustancia llamamos ECUACIÓN DE ESTADO a una ley en la que están relacionadas su masa ( $m$ ) o su número de moles ( $n$ ), su presión ( $p$ ), su volumen ( $V$ ) y su temperatura ( $T$ )

$$F(n, p, V, T) = 0$$

podemos también expresar la ley utilizando en vez de la masa o número de moles y la totalidad del volumen, la magnitud intensiva volumen específico ( $v$ ), su expresión en tal caso será:

$$f(p, v, T) = 0$$

Trabajando experimentalmente cada sustancia homogénea (sólido, líquido o gas) y haciendo representaciones gráficas de los valores obtenidos de las variables indicadas, obtenemos un análisis detallado del comportamiento de cualquier sustancia; al aproximarlos para expresar tales datos en una ecuación de estado, en general, se obtiene una ecuación extremadamente complicada que contiene una serie de potencias de dichas variables. Las leyes generalizadas que vamos a obtener son en su mayoría aproximaciones más o menos eficaces según la sustancia y sus condiciones termodinámicas, pero constituyen una muy buena información para su aplicación tecnológica.

## A) TERMOMETRÍA

### XIV – 2. Principio cero de la termodinámica. Concepto de temperatura

En primer lugar, demos tener muy claro, que el calor y la temperatura son magnitudes diferentes; *la temperatura es una manifestación del calor que no puede identificarse con él*. Así por ejemplo, *cuerpos sometidos a focos caloríficos idénticos pueden adquirir distinta temperatura*; tomemos dos recipientes, uno con hielo a  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  y otro con agua a  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ; comuniquémosles calor con focos idénticos: un termómetro, colocado en cada uno, nos indicará que en el primero la temperatura no se eleva y en el segundo sí. El calor se emplea en dos efectos diversos: fusión y calentamiento. *Cuerpos con la misma temperatura pueden ceder o captar distinta cantidad de calor*; calentamos bolas de diversos metales a la misma temperatura; colocadas sobre un bloque de cera funden distinta cantidad de ella.

*El calor es una forma de energía\** en tránsito que se nos manifiesta por muy diversos efectos. Pongamos un puchero con agua al fuego y vamos a observar los fenómenos que ocurren. Por de pronto, al tocar las paredes del puchero notamos cómo se *calienta*. Eso no es todo; al poco rato de calentar se observa que la tapa de nuestro recipiente se mueve; es que el calor se ha manifestado como una *energía*, produciendo el trabajo necesario para mover la tapadera del puchero. Al mismo tiempo veremos cómo de la superficie del agua salen unos humos blancos: es que el agua líquida, se está transformando en vapor (*cambio de estado*). Si en el interior del puchero se hubiera introducido una bola de metal, que pasaba justamente por un anillo podríamos comprobar que, después del calentamiento, la bola ya no puede pasar por el anillo; ha sufrido por lo tanto un aumento de volumen (*dilatación*)...

Hasta ahora nos han sido suficientes tres magnitudes fundamentales, la longitud, la masa y el tiempo, en función de las cuales hemos definido otras, que hemos llamado derivadas, en el estudio que nos ocupa se requiere la utilización de la cantidad de sustancia definida en el capítulo XII, y de una nueva magnitud fundamental: la temperatura. *Llegaremos a la comprensión de la magnitud temperatura en dos fases; primero debemos definir lo que entendemos por mayor, igual o menor temperatura que otra y a continuación definir un procedimiento de medida estableciendo una unidad patrón*. Con estas dos nuevas magnitudes fundamentales la base del sistema dimensional, representado por  $N$  a la cantidad de sustancia y por  $\theta$  la temperatura será:  $MLTN$  y  $\theta$ .

*Decimos que un «sistema termodinámico» está en «contacto» con otro, cuando puede pasar calor (energía térmica) del uno al otro*. Es evidente que nuestro puchero del ejemplo anterior se encuentra en «contacto térmico» con el fuego al que le hemos sometido. *Se dice que una sustancia está más «caliente» (tiene un nivel térmico más alto) que otra, cuando al ponerlas en contacto el calor pasa de la primera a la segunda, de la misma forma que en los vasos de la Fig. XIV-1, que se comunican por un tubo, el líquido pasa del vaso que tiene un nivel más alto al de nivel más bajo*. Este concepto nos conduce a la primera fase para analizar el concepto de temperatura:

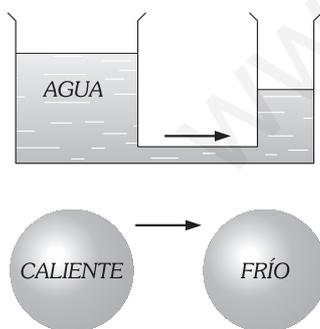


Fig. XIV-1.– El calor siempre pasa de los sistemas de nivel térmico más alto a los de nivel térmico más bajo; de la misma forma que en los vasos comunicantes el líquido pasa del vaso que tiene un nivel más alto, al nivel más bajo.

\* Como se verá más detalladamente cuando se estudien las investigaciones realizadas por Joule.

«Cuando entre dos sistemas no existe ninguna transferencia de calor, al ponerlos en contacto, se encuentran en EQUILIBRIO TÉRMICO y decimos que tienen la misma TEMPERATURA».

«TEMPERATURA es el nivel térmico de las sustancias; la temperatura produce en nuestro tacto la sensación de frío o calor. El calor pasa de las sustancias de mayor a los de menor temperatura».

Es también observable, en perfecto acuerdo con todo lo anteriormente dicho, que:

«Cuando dos sistemas a distintas temperaturas se ponen en contacto, el caliente cede calor al frío hasta quedar ambos a la misma temperatura».

Para realizar una medida de la temperatura no se puede recurrir a nuestras sensaciones, por darnos éstas una apreciación meramente personal, sujeta a errores; así, si tenemos nuestras manos introducidas una en agua fría y otra en agua caliente y haciendo el cambio con rapidez, las introducimos en agua templada, la que estuvo en agua caliente nos da la sensación de frío y la que estuvo en la fría, sensación de calor, aunque las dos estén sumergidas en el mismo medio.

Para medir la temperatura de dos sustancias, necesitamos establecer que una de ellas tiene la misma temperatura que una tercera sustancia que se toma como patrón de referencia de un valor fijo de temperatura. Este hecho constituye el fundamento del llamado PRINCIPIO CERO DE LA TERMODINÁMICA:

«Si dos sistemas están en equilibrio térmico con un tercero, entonces, ambos están en equilibrio térmico entre sí».

Como consecuencia de lo anterior deducimos que para realizar medidas de temperatura debemos aprovechar las variaciones que experimenta alguna propiedad de una sustancia al calentarla o enfriarla y utilizar dicha propiedad para indicar cuándo se alcanza cierta temperatura de referencia. Entonces, mediante el principio cero, podemos comprobar si se encuentran otras sustancias a la misma temperatura colocándolas en contacto con la patrón y observando el efecto resultante sobre su propiedad termométrica cuando se alcance el equilibrio térmico. Al aparato que realiza esta misión lo llamamos TERMÓMETRO.

Aunque sea repetir en parte lo anteriormente dicho, y como resumen para mejor comprender cómo se establece el patrón de temperatura, diremos que los hechos en que se basa la termometría son:

- Una sustancia caliente, en contacto con otra fría, le cede calor, hasta adquirir ambas la misma temperatura.
- Si introducimos una sustancia de pequeña masa en un ambiente y luego en otro y en el segundo adquiere el mismo volumen que en el primero, es que los dos ambientes tienen la misma temperatura.
- Siempre que el hielo funde lo hace a la misma temperatura, si permanece constante la presión.
- El vapor que emite el agua hirviendo tiene, siempre, la misma temperatura, si la presión permanece constante.

Estos últimos hechos se comprueban observando cómo una sustancia adquiere siempre el mismo volumen al introducir en hielo fundente o vapor de agua hirviendo, siendo la presión la misma en todas las experiencias.

#### XIV – 3. Intervalo fundamental de temperatura. Termómetros

Se llama INTERVALO FUNDAMENTAL DE TEMPERATURA, al comprendido entre la temperatura de fusión del hielo y la del vapor de agua hirviendo a la presión de 760 mm de mercurio; estas temperaturas constituyen los puntos fijos.

Se mide una magnitud física de una sustancia a las temperaturas extremas del intervalo fundamental. Si  $a$  y  $b$  son los números que expresan las medias,  $b - a = \Delta x$  es la variación de la magnitud en el intervalo fundamental. Esta variación se divide en un cierto número  $n$  de partes iguales y al incremento de temperatura correspondiente a cada una de ellas le llamamos «GRADO».

A una variación de la propiedad  $\Delta x'$  corresponderá una variación de temperatura  $\Delta t$  que podemos deducir por la siguiente proporción:

$$\begin{array}{l} \text{Si a } \frac{\Delta x}{n} \text{ corresponde 1 grado} \\ \text{a } \Delta x' \text{ corresponderá } \Delta t \text{ grados} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta t = \frac{\Delta x'}{\Delta x} n} \quad (1)$$

#### XIV – 4. Escala centígrada o Celsius. Escala absoluta o Kelvin

Para la medida de la temperatura definiendo la escala centígrada se emplea el TERMÓMETRO DE MERCURIO.

La magnitud variable que se emplea en este termómetro es el volumen de una masa de mercurio encerrada en un depósito prolongado por un tubo capilar vacío. Al aumentar o disminuir la temperatura el mercurio asciende o desciende por el capilar.

Supongamos que la longitud de la columna termométrica sea  $l_0$  a la temperatura de fusión de hielo, y  $l_{100}$  la longitud correspondiente a la temperatura de vapor de agua en ebullición a 76 cm de mercurio;  $l_{100} - l_0$  es el aumento de longitud; si dividimos este intervalo en 100 partes:  $(l_{100} - l_0)/100$  es la variación de longitud que corresponde a un grado.

Siendo  $l_t$  la longitud a otra temperatura, la diferencia  $l_t - l_0$  es la variación de longitud desde la temperatura de fusión del hielo a la  $t$ . La aplicación de la fórmula (1) nos da para valor del intervalo de temperatura comprendido entre el punto de fusión del hielo hasta  $t$ :

$$\Delta t = \frac{l_t - l_0}{l_{100} - l_0} 100$$

Si a la temperatura de fusión del hielo la llamamos «cero grados»,  $\Delta t = t - 0$  nos indica que el valor de la temperatura  $t$  es en este caso:

$$t = \frac{l_t - l_0}{l_{100} - l_0} 100$$

fórmula aplicable al TERMÓMETRO CENTÍGRADO o CELSIUS (Anders, 1701-1744).

El límite inferior de temperatura en el termómetro de mercurio está determinado por la temperatura de solidificación de éste ( $-38,87^\circ\text{C}$ ). Para la medida de temperaturas más bajas se emplean como líquidos termométricos, alcohol, pentano, etc., cuyas temperaturas de solidificación son inferiores a la del mercurio.

El GRADO KELVIN (Sir Wiliam Thomson. Desde 1982 Lord Kelvin, 1824-1907) es la unidad patrón y es la que se emplea en el SI. La ESCALA KELVIN o ABSOLUTA de temperatura se relaciona con la escala centígrada por medio de la ecuación:

$$T = t + 273,16 \tag{2}$$

En la mayoría de los cálculos en Termodinámica se emplean las temperaturas absolutas.

La relación entre la temperatura centígrada ( $t$ ) y la absoluta ( $T$ ) se ve claramente en la Fig. XIV-2.

El intervalo de temperatura correspondiente a uno cualquiera en la escala Kelvin es idéntico en la centígrada:  $\Delta T = \Delta t$ .

A la temperatura centígrada  $t = -273,16^\circ\text{C}$  le corresponde el CERO ABSOLUTO DE TEMPERATURA ( $T = 0\text{ K}$ ), llegar a esta temperatura o por debajo de ella no es posible, es un límite impuesto por la Naturaleza.

#### XIV - 5. Escalas termométricas

Se diferencian las diversas escalas en los números que indican los puntos fijos del termómetro y en el número de partes en que se ha dividido su intervalo fundamental.

En la escala	Celsius o centígrada Kelvin Réaumur Fahrenheit	el punto de fusión del hielo a la presión normal es el
0 273,16 0 32	y el de ebullición del agua es	100 373,16 80 212
100 100 80 180	grados.	

Las fórmulas de paso de una escala a otra son la (2) y:

$$\frac{C}{100} = \frac{R}{80} = \frac{F - 32}{180} \Rightarrow \frac{C}{5} = \frac{R}{4} = \frac{F - 32}{9}$$

Las escalas Fahrenheit (Gabriel Daniel, 1686-1736) y Réaumur (René Antoine, 1683-1757) son casi exclusivamente de interés histórico; definiéndolas pretendemos mostrar la naturaleza arbitraria de la elección de los puntos fijos. La escala Celsius se usa casi con exclusividad en todo el mundo.

**PROBLEMAS: 1 al 6.**

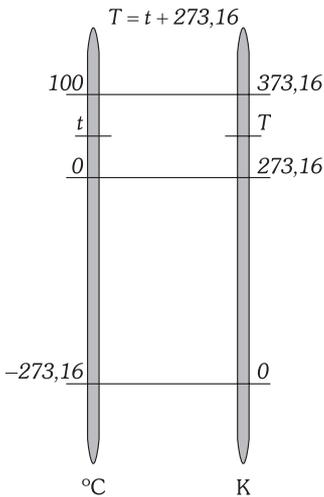


Fig. XIV-2.- Escala Kelvin de temperatura.

#### XIV - 6. Otros tipos de termómetros

**TERMÓMETRO DE MÁXIMA Y MÍNIMA.** Sirve este termómetro para marcar la temperatura máxima y mínima de un lapso de tiempo. Es un tubo en U, de vidrio, provisto de dos ensanchamientos en sus extremos, los cuales contienen alcohol; uno de ellos (A) lleno completamente y el otro (B) sólo en parte. El tubo contiene mercurio en su parte media (Fig. XIV-2).

Sumergidos en el alcohol, y en las dos ramas, hay dos índices metálicos que rozan las paredes lo suficiente para que el alcohol pase a través de ellos, pero no el mercurio, por su mayor tensión superficial y densidad. La posición más alta que adquiere el extremo inferior del índice de la rama D, posición en la cual se estabiliza, indica la temperatura máxima. La posición más alta del índice C indica la *mínima*.

Pasado el intervalo de tiempo en el que interesa conocer las temperaturas extremas, se bajan los índices, accionando desde el exterior con un imán, hasta que el extremo inferior de ellos quede en contacto con la superficie del mercurio.

**TERMÓMETRO CLÍNICO.** Sirve para determinar la temperatura del cuerpo humano. Es un termómetro de máxima, graduado de 35° a 42°. Para evitar el descenso de la columna termométrica al ponerlo en contacto con el medio ambiente, lleva un estrangulamiento en la unión del depósito de mercurio y el tubo capilar (Fig. XIV-4). Al contraerse el mercurio la columna termométrica se rompe por la estrangulación, indicando el nivel superior del mercurio la temperatura del individuo. Para unir las dos porciones se dan al termómetro unas brascas sacudidas poniéndolo así a punto para funcionar de nuevo.

**TERMÓMETRO DE GAS.** Miden variaciones de presión que, a volumen constante, se traducen en diferencias de nivel en una columna de mercurio. Los gases más empleados son hidrógeno y helio por la baja temperatura a la que se licúan. Se pueden emplear hasta temperaturas del orden de 200 °C, a las que el gas se difunde apreciablemente a través de las paredes del depósito que lo contienen. Su complicado manejo los restringe a los casos en que se necesitan medidas muy precisas o cuando se desea verificar otros tipos de termómetro.

**TERMÓMETRO DE SÓLIDOS.** Se aprovecha la distinta dilatación de dos láminas metálicas íntimamente unidas. El calentamiento o enfriamiento de una lámina bimetálica hace que ésta se curve en un sentido u otro. Se emplean como reguladores de temperatura conectando el extremo móvil al interruptor de un circuito de calefacción.

**PAR TERMOELÉCTRICO.** Consta de dos conductores de diferentes metales soldados en dos puntos (ver XX-29). Poniendo una unión a temperatura conocida (hielo fundente por ejemplo) y la otra a la temperatura que se desea medir, se origina entre ambas una fuerza electromotriz cuya medida nos proporciona la diferencia de temperatura entre las uniones. El par Cromel (90% Ni + 10% Cr) alumel (95% Ni + 5% Al) se usa hasta 1 200 °C, a 1 000 °C da una FEM de unos 41 mV.

**TERMÓMETRO DE RESISTENCIA.** Se basa en el aumento de la resistividad de los metales con la temperatura. En el intervalo 0 °C - 100 °C es válida, con buena aproximación, la relación  $\rho(t) = \rho_0(1 + \alpha_0 t)$ , donde  $\rho_0$  es la resistividad a 0 °C y  $\alpha_0$  el coeficiente de temperatura. Para el platino, que es el más usado, se tiene  $\rho_0 = 9,81 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$  y  $\alpha_0 = 0,0039 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ . El coeficiente de temperatura  $\alpha_t$  a la temperatura  $t$  puede ser calculado con la expresión  $1/\alpha_t - 1/\alpha_0 = t$ . Midiendo la resistividad de un hilo de platino introducido en un recinto se puede conocer la temperatura de éste.

**PIRÓMETROS.** Se basan en el hecho de que la intensidad con que radia calor un cuerpo negro, u otro de poder emisivo conocido, es función de su temperatura. Hay dos tipos, el de *radiación total* que toma principalmente la radiación infrarroja y que puede usarse tanto a cualquier temperatura, y el *pirómetro óptico*, en el que la imagen de una parte de la superficie del objeto cuya temperatura se desea medir se proyecta en el plano del filamento de una lámpara; variando la intensidad de corriente que atraviesa el filamento se consigue que éste desaparezca sobre el fondo que forma la imagen del objeto caliente y la intensidad medida se relaciona con la temperatura del filamento. Los pirómetros ópticos se usan por encima de 500 °C, temperatura en que los objetos empiezan a emitir radiación visible; su precisión depende de la práctica que se tenga en el uso, pero se pueden conseguir aproximaciones de  $\pm 3 \text{ } ^\circ\text{C}$  en 1 500 °C.

**TERMÓMETROS MAGNÉTICOS.** Son imprescindibles para medir temperaturas próximas a los -273 °C, y se basan en las variaciones de la susceptibilidad magnética de las sales paramagnéticas (ver ley de Curie en el párrafo XXI-65).

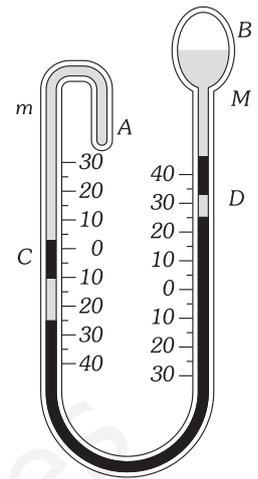


Fig. XIV-3.- Termómetro de máxima y mínima.



Fig. XIV-4.- Termómetro clínico de máxima.

### B) DILATACIÓN DE SÓLIDOS

#### XIV - 7. Dilatación

DILATACIÓN es el aumento de volumen que experimentan las sustancias cuando se eleva su temperatura.

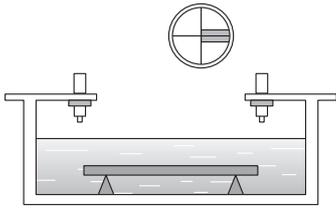


Fig. XIV-5.- Dilatómetro.

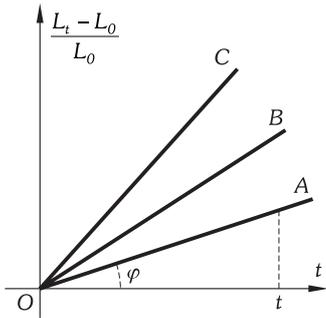


Fig. XIV-6.- Representación gráfica de las variaciones relativas de la longitud de tres barras metálicas con la temperatura.

Se puede medir la dilatación de una barra metálica introduciéndola en agua a una cierta temperatura y enfocando a sus extremos sendos microscopios (Fig. XIV-5), que se pueden deslizar a lo largo de unos soportes horizontales que dan la medida del desplazamiento. El ocular de los microscopios lleva un retículo (dos hilos cruzados). Se colocan los microscopios en posición tal que no de los hilos del retículo coincidan justamente con el extremo correspondiente de la barra. Al calentar el agua del depósito hay que mover horizontalmente los microscopios para conseguir una nueva coincidencia; la suma de los dos desplazamientos da la dilatación lineal de la barra.

**XIV - 8. Coeficiente de dilatación lineal, superficial y cúbica**

Tomemos barras de distintos metales A, B y C y partiendo de 0 °C, por ejemplo, calentémoslas un pequeño intervalo de temperatura (20 ó 30 grados). Realicemos las medidas de la dilatación con el comparador del párrafo anterior, y representemos los resultados obtenidos en ejes de coordenadas (Fig. XIV-6). En ordenadas señalaremos las «variaciones relativas de longitud» o *variación media que corresponde a cada unidad de longitud*. (Si  $L_t$  y  $L_0$  son las longitudes a  $t^\circ$  y  $0^\circ\text{C}$  ( $L_t - L_0$ )/ $L_0$  nos represente tal «variación relativa»). En abscisas señalaremos la temperatura.

Realizando diversas observaciones para distintas temperaturas, obtenemos como diagrama de dilatación de cada metal una línea que será *sensiblemente una recta* si el intervalo de temperatura es relativamente pequeño.

La característica que diferencia la dilatación de cada metal es el coeficiente angular o pendiente de su diagrama de dilatación:

$$\text{tg } \varphi = \frac{L_t - L_0}{L_0 t}$$

A tal magnitud, característica de la sustancia, para el intervalo de temperatura considerado, la llamamos **COEFICIENTE DE DILATACIÓN**.

Los mismos resultados obtendríamos realizando medidas de superficie o volúmenes, en muestras de diversas sustancias.

El concepto físico de los coeficiente de dilatación es:

Coeficiente de dilatación  $\left\{ \begin{array}{l} \text{LINEAL} \\ \text{SUPERFICIAL} \\ \text{CÚBICO} \end{array} \right\}$  es el aumento medio que experimenta la unidad de longitud superficial volumen al aumentar un grado su temperatura.

COEFICIENTE DE DILATACIÓN LINEAL (EN  $\text{K}^{-1}$ )

Platino	$8,9 \times 10^{-6}$
Hierro	$12,2 \times 10^{-6}$
Oro	$14,0 \times 10^{-6}$
Cobre	$16,7 \times 10^{-6}$
Aluminio	$23,0 \times 10^{-6}$
Sodio	$69,6 \times 10^{-6}$
Invar	$1...3 \times 10^{-6}$
Acero inox.	$9,6 \times 10^{-6}$
Constantán	$14,9 \times 10^{-6}$
Poliéster	$1,8...3 \times 10^{-5}$
Plexiglás	$5...9 \times 10^{-5}$
Teflón	$6...10 \times 10^{-5}$
Nylon	$8 \times 10^{-5}$

Si  $\left\{ \begin{array}{l} L_0 \\ S_0 \\ V_0 \end{array} \right\}$  es la longitud la superficie el volumen a  $0^\circ\text{C}$  y  $\left\{ \begin{array}{l} L_t \\ S_t \\ V_t \end{array} \right\}$  a  $t^\circ\text{C}$ ,  $\left\{ \begin{array}{l} L_t - L_0 \\ S_t - S_0 \\ V_t - V_0 \end{array} \right\}$  es el aumento para el intervalo de  $0^\circ$  a  $t^\circ$ , y:

$$\alpha = \frac{L_t - L_0}{L_0 t}$$

$$\beta = \frac{S_t - S_0}{S_0 t}$$

$$\gamma = \frac{V_t - V_0}{V_0 t}$$

es el aumento medio que corresponde a cada unidad de longitud, superficie o volumen, al aumentar la temperatura un grado (COEFICIENTES DE DILATACIÓN).

De la primera fórmula se obtiene:

$$L_t - L_0 = L_0 \alpha t \Rightarrow L_t = L_0 + L_0 \alpha t \Rightarrow L_t = L_0 (1 + \alpha t)$$

Igualmente de las otras dos:

$$S_t = S_0 (1 + \beta t)$$

$$V_t = V_0 (1 + \gamma t)$$

Para relacionar las dimensiones a  $t$  y a  $t'$  basta dividir entre sí las expresiones anteriores referidas a las dos temperaturas:

$$\frac{L_t}{L'_t} = \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t'} \quad \frac{S_t}{S'_t} = \frac{1 + \beta t}{1 + \beta t'} \quad \frac{V_t}{V'_t} = \frac{1 + \gamma t}{1 + \gamma t'}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Las longitudes} \\ \text{Las superficies} \\ \text{Los volúmenes} \end{array} \right\}$  son directamente proporcionales a sus binomios de dilatación.

Más prácticas son las fórmulas que nos relacionan, muy aproximadamente, longitudes, superficies o volúmenes a  $t$  y  $t'$ :

$$L'_t = L_t (1 + \alpha \Delta t)$$

$$S'_t = S_t (1 + \beta \Delta t)$$

$$V'_t = V_t (1 + \gamma \Delta t)$$

$\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son los coeficientes de dilatación medios en el intervalo de  $t$  a  $t'$  °C.

En todo el estudio anterior hemos considerado que los coeficientes de dilatación son constantes en el intervalo de  $0^\circ$  a  $t^\circ$ . Como esto no ocurre normalmente, la expresión analítica del coeficiente de dilatación lineal (y análogamente de los demás coeficientes) sería:

$$\alpha = \frac{1}{L_0} \frac{dL}{dt}$$

siendo  $L_0$  la longitud inicial. En consecuencia:

$$dL = L_0 \alpha dt$$

y para obtener la variación de longitud de  $0^\circ$  a  $t^\circ$ , integraremos entre tales límites:

$$\int_{L_0}^{L_t} dL = L_0 \int_0^t \alpha dt \Rightarrow L_t - L_0 = L_0 \int_0^t \alpha dt$$

Para realizar esta integración tenemos que conocer la forma de la función  $\alpha = \alpha(t)$ . En el caso de considerar constante el coeficiente en el intervalo considerado:

$$L_t - L_0 = L_0 \alpha \int_0^t dt = L_0 \alpha t \Rightarrow L_t = L_0 (1 + \alpha t)$$

obteniendo la misma fórmula que en el estudio elemental.

En el caso de grandes variaciones de temperatura en que  $\alpha$  no lo podemos considerar constante, la resolución de la integral en estudio es:

$$L_t = L_0 (1 + at + bt^2 + ct^3 + \dots)$$

en los que  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , etc. son coeficientes característicos de la sustancia, que se determinan por un número adecuado de observaciones experimentales.

**XIV - 9. Relación entre los coeficientes de dilatación lineal, superficial y cúbica**

Cualquier superficie homogénea cuando sufre una variación de temperatura pasando de cero a  $t$  grados centígrados, si su valor después de la dilatación es  $S_t$ , será semejante a  $S_0$ , superficie a cero grados antes de la dilatación. Considerando que «las áreas de superficie semejantes son proporcionales a los cuadrados de las dimensiones lineales homólogas», se obtiene:

$$\frac{S_t}{S_0} = \frac{L_t^2}{L_0^2} = \frac{L_0^2 (1 + \alpha t)^2}{L_0^2} = 1 + 2\alpha t + \alpha^2 t^2 \approx 1 + 2\alpha t$$

ya que  $\alpha^2 t^2$  se escapa de los límites perceptibles, pues siendo  $\alpha$  muy pequeño, su cuadro es mucho menor. Por igualación de las dos expresiones de  $S_t$  se obtiene:

$$S_0 (1 + \beta t) = S_0 (1 + 2\alpha t) \Rightarrow \beta = 2\alpha$$

«El coeficiente de dilatación superficial, es prácticamente, el doble del lineal».

Verificando el mismo estudio para volúmenes  $V_0$  y  $V_t$ , antes y después de la dilatación, obtenemos:

$$\frac{V_t}{V_0} = \frac{L_t^3}{L_0^3} = \frac{L_0^3 (1 + \alpha t)^3}{L_0^3} = 1 + 3\alpha t + 3\alpha^2 t^2 + \alpha^3 t^3 \approx 1 + 3\alpha t \Rightarrow V_0 (1 + \gamma t) = V_0 (1 + 3\alpha t) \Rightarrow \gamma = 3\alpha$$

«El coeficiente de dilatación cúbica es, prácticamente, el triple del lineal».

**PROBLEMAS: 7 al 12.**

**XIV - 10. Variación de la densidad con la temperatura**

Al calentar los cuerpos sólidos aumenta su volumen y disminuye su densidad, cumpliéndose:

«Las densidades son inversamente proporcionales a los binomios de dilatación cúbica».

Ello es debido a que la masa de un cuerpo es independiente de la temperatura y, por tanto, es idéntica en frío que en caliente. Si  $\rho_0$  y  $\rho_t$  son las densidades a  $0^\circ$  y  $t^\circ$ , la masa del cuerpo es:  $M = V_0 \rho_0 = V_t \rho_t$ , sustituyendo  $V_t$  por su valor:

$$V_0 \rho_0 = V_0 (1 + \gamma t) \rho_t \Rightarrow \rho_t = \frac{\rho_0}{1 + \gamma t}$$

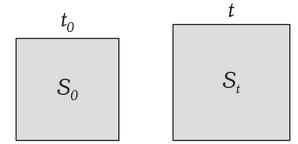


Fig. XIV-7.- En la dilatación de superficies homogéneas se cumple que son semejantes antes y después de su dilatación.

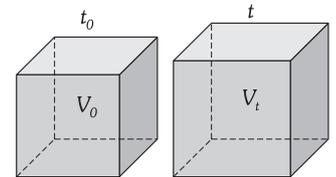


Fig. XIV-8.- Los volúmenes, semejantes, son proporcionales a los cubos de las dimensiones lineales homólogas.

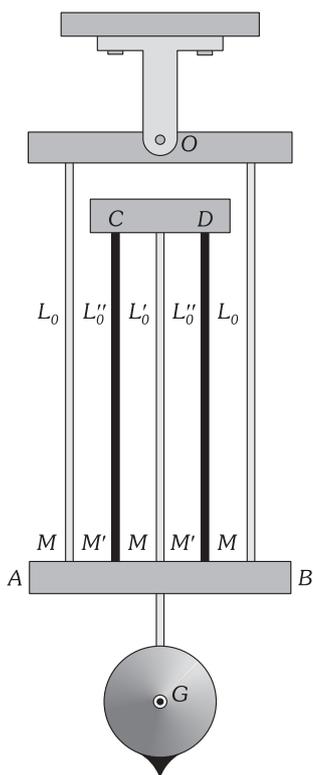


Fig. XIV-9.- Péndulo compensado.

Para relacionar las densidades a  $t$  y  $t'$  grados basta dividir entre sí las expresiones correspondientes a las dos temperaturas:

$$\frac{\rho_t}{\rho_{t'}} = \frac{1 + \gamma t'}{1 + \gamma t}$$

#### XIV - 11. Péndulos compensados

La dilatación de la longitud de un péndulo por elevación de la temperatura, hace el siguiente efecto: un aumento de  $L$  produce un aumento del período, realizándose oscilaciones más lentas que antes de la dilatación. El número de oscilaciones correspondientes a un día es menor en caliente que en frío y el reloj se retrasa al elevarse la temperatura.

Para evitar las variaciones de la longitud equivalente de un péndulo de reloj, se emplean los péndulos compensados representados en la Fig. XIV-9.  $O$  es el punto de suspensión. Las varillas de longitud  $L_0$  y  $L_0'$  a  $0^\circ$ , son de un metal  $M$ ; la  $L_0''$  son de otro metal  $M'$ .

Supongamos una elevación de temperatura en las varillas  $L_0$ . Como el punto  $O$  es fijo, el extremo  $AB$  habrá descendido al pasar de  $0^\circ$  a  $t^\circ$  una distancia igual a  $L_0 \alpha t$  ( $\alpha$  = coeficiente dilatación). La pieza  $CD$  y el centro de gravedad de la lenteja habrán descendido lo mismo. Como la elevación de temperatura afecta también a la varilla de longitud  $L_0'$ ,  $G$  habrá descendido por esta causa:  $L_0' \alpha t$ . El descenso total de  $G$  es, en consecuencia:  $(L_0 + L_0') \alpha t$ . La elevación de temperatura afecta a las varillas  $L_0''$ , que habrán hecho ascender a  $CD$  y, por tanto, a  $G$ :  $L_0'' \beta t$  ( $\beta$  coeficiente dilatación lineal de  $M'$ ). Si:  $(L_0 + L_0') \alpha t = L_0'' \beta t \Rightarrow (L_0 + L_0') / L_0'' = \beta / \alpha$ , el centro de gravedad del péndulo no modifica su posición y el reloj no se adelanta o atrasa por efecto de los cambios de temperatura ambiente.

#### XIV - 12. Fuerzas provocadas por la dilatación

Cuando una barra cuyos extremos están fijos se calienta debería dilatarse, si lo impiden sus apoyos se ejerce sobre ellos una fuerza de origen térmico igual y de sentido contrario a la que los soportes ejercen sobre la barra, resultando sobre ésta una *compresión*. En caso de enfriamiento, las fuerzas de origen térmico, provocan sobre la barra una *tracción*. El coeficiente de dilatación lineal es:

$$\alpha = \frac{1}{l} \frac{\Delta l}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta l}{l} = \alpha \Delta t$$

y la fuerza  $F$ , que estiraría  $\Delta l$  a la barra de longitud  $l$ , está relacionada con tales magnitudes (ver «Elasticidad», párrafo XIII-2) por la expresión:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{F}{S}$$

siendo  $E$  el módulo de Young de la sustancia. Al no poderse estirar la barra los soportes ejercen la compresión  $F$ , sobre ella (o *tracción* en el caso de enfriamiento). Igualando las expresiones anteriores obtenemos para el valor de  $F$ :

$$F = ES \alpha \Delta t$$

Lo mismo ocurre cuando se calienta un cuerpo, al que no permite aumentar de volumen la resistencia del medio que le rodea, y que origina, por tanto, compresiones hacia el interior del cuerpo. Procediendo como en el caso anterior (ver «Elasticidad», párrafo XIII-4) y considerando valores absolutos, obtenemos para valores de la presión  $p$  de origen térmico:

$$\gamma = \frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \gamma \Delta t \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{B} p \Rightarrow p = \gamma B \Delta t$$

$B$  es el módulo de compresibilidad del cuerpo.

**PROBLEMAS: 13 al 15.**

### C) DILATACIÓN DE LÍQUIDOS

#### XIV - 13. Dilatación de los líquidos

En los líquidos se considera, únicamente, la dilatación cúbica que obedece a las mismas leyes que las de los sólidos.

Con respecto a las variaciones de la densidad con la temperatura, el agua es una excepción a la ley general, ya que tiene su máxima densidad y mínimo volumen a  $4^\circ\text{C}$ . Así, de  $0^\circ$  a  $4^\circ\text{C}$  la densidad del agua aumenta y el volumen disminuye; de  $4^\circ\text{C}$  en adelante la densidad disminuye y el volumen aumenta.



Fig. XIV-10.- Barra con los extremos fijos.

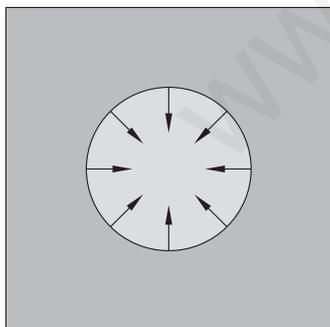


Fig. XIV-11.- Cuerpo encerrado dentro de un medio.

**XIV - 14. Medida del coeficiente de dilatación del mercurio: método de Dulong y Petit. Dilatómetros**

En vasos comunicantes, unidos por un tubo capilar horizontal (Fig. XIV-12), se introduce mercurio. Uno de los vasos se enfría hasta 0°, por ejemplo, y el otro se calienta hasta t°. La densidad del mercurio a 0° es mayor que a t°, estableciéndose en consecuencia, un desnivel en la superficie del mercurio de las dos ramas. El capilar impide las rápidas corrientes de convección. Si aplicamos la ley de los vasos comunicantes obtenemos:

$$\frac{h_t}{h_0} = \frac{\rho_0}{\rho_t} = 1 + \gamma t \Rightarrow \gamma = \frac{\frac{h_t}{h_0} - 1}{t} = \frac{h_t - h_0}{h_0 t}$$

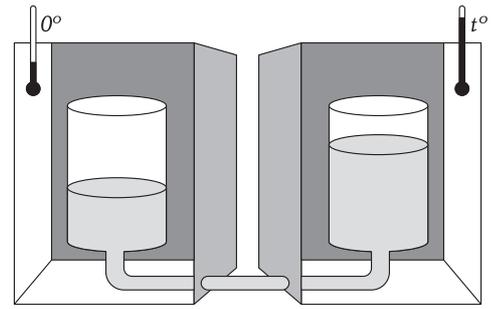


Fig. XIV-12.- Método de Dulong y Petit para la medida del coeficiente de dilatación del mercurio.

midiendo estas alturas quedará determinado el coeficiente de dilatación cúbica del mercurio.

Para el estudio de la dilatación de los líquidos se emplean los DILATÓMETROS, matracitos de vidrio de cuello muy estrecho y graduado. Para calibrar un dilatómetro se llena de mercurio a 0 °C, hasta el cero de su escala. La masa de mercurio dividida por su densidad, da el volumen interior del aparato hasta el cero de su graduación. Se añade mercurio hasta una división n. La diferencia de masas medidas en las dos experiencias da la masa correspondiente a n divisiones. El volumen de una división a 0 °C es:

$$V = \frac{M' - M}{n\rho}$$

Al calentar un líquido introducido en un dilatómetro observamos un ascenso de nivel. El volumen aumentado, leído en el cuello, da la dilatación aparente ya que la verdadera es algo mayor debido a la mayor capacidad de la vasija por efecto de su dilatación.

«El coeficiente de DILATACIÓN REAL de un líquido es igual al aparente más el coeficiente de dilatación de la vasija».

En efecto, si el volumen de líquido introducido en el dilatómetro es 1 cm<sup>3</sup> y el aumento de temperatura es un grado, el volumen leído después de la dilatación es 1 + a, siendo a el coeficiente aparente; el verdadero volumen es 1 + γ, siendo γ el coeficiente real. La dilatación verdadera (γ) es:

$$\gamma = a + K(1 + a) = a + K + Ka$$

siendo K el aumento de 1 cm<sup>3</sup> de la vasija, y Ka el aumento de a cm<sup>3</sup> de la misma. Despreciando el último término por lo pequeño de los dos factores, obtenemos:

$$\boxed{\gamma = a + K} \quad \text{c.q.d.} \quad (3)$$

Para conocer K se introduce mercurio en el dilatómetro; si al calentarlo t° su volumen pasa de V a V' (V' = volumen aparente) el coeficiente aparente es:

$$a = \frac{V' - V}{Vt} \quad (4)$$

El coeficiente real del mercurio se conoce (Pier Luis Dulong, 1785-1838 y Alexis Thérèse Petit, 1791-1820) quedando K (coeficiente de dilatación de la vasija) determinado por la ecuación (3).

Conocido K se puede saber el coeficiente real de cualquier líquido, habiendo determinado previamente el aparente, por medio de una experiencia con el dilatómetro y aplicando la fórmula (4).

**PROBLEMAS: 16 al 18.**

**XIV - 15. Reducción de las lecturas barométricas a cero grados**

Se conviene, para comparar lecturas barométricas, en reducirlas a cero grados centígrados; es decir: ¿qué altura marcaría el nivel superior del mercurio del barómetro si la temperatura fuese 0 °C? Cada milímetro que marca la escala de latón tiene por verdadera longitud a t°, 1 mm (que tenía a 0°, temperatura a que se ha graduado la escala) más su dilatación, que es Kt, siendo K el coeficiente de dilatación lineal del latón. La longitud que leemos (H milímetros) será en realidad: H (1 + Kt). Esta altura del mercurio a t° la reduciremos a 0° considerando que las alturas, para ejercer la misma presión, son inversamente proporcionales a las densidades. Si H es la altura de la columna barométrica a 0°, ρ<sub>t</sub> y ρ<sub>0</sub> sus densidades y γ el coeficiente de dilatación cúbica del mercurio, tendremos:

$$\frac{H_0}{H(1+Kt)} = \frac{\rho_t}{\rho_0} = \frac{1 + \gamma t}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0} \Rightarrow H_0 = H \frac{1 + Kt}{1 + \gamma t} = H(1 + Kt)(1 + \gamma t)^{-1} = H(1 + Kt)(1 - \gamma t)$$

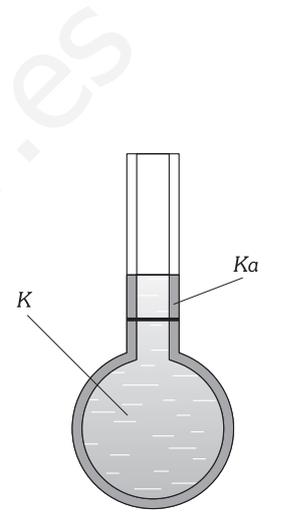


Fig. XIV-13.- Dilatómetro.

COEFICIENTES DE DILATACIÓN CÚBICA DE ALGUNOS LÍQUIDOS (EN °C<sup>-1</sup>)

Mercurio	18,2 × 10 <sup>-5</sup>
Agua (a 20°)	20,7 × 10 <sup>-5</sup>
Glicerina	51 × 10 <sup>-5</sup>
Ácido acético	107 × 10 <sup>-5</sup>
Alcohol etílico	110 × 10 <sup>-5</sup>
Octano	114 × 10 <sup>-5</sup>
Benceno	121 × 10 <sup>-5</sup>
Acetona	143 × 10 <sup>-5</sup>
Éter	163 × 10 <sup>-5</sup>

habiendo desarrollado el binomio  $(1 + \gamma t)^{-1}$  y despreciando las potencias de  $\gamma t$ , del cuadrado en adelante. Desarrollando:

$$H_0 = H [1 - t(\gamma - K)]$$

en donde no se ha incluido el término  $K\gamma t^2$ , por ser  $K\gamma$  despreciable en comparación con los demás términos. Por lo tanto:

$$H_0 = H - Ht(\gamma - K)$$

Al ser  $\gamma > K$  la corrección es «sustractiva» por encima de  $0^\circ\text{C}$  y «aditiva» por debajo de  $0^\circ\text{C}$ . Como  $\gamma$  y  $K$  son constantes, la corrección depende, exclusivamente, de la lectura barométrica realizada ( $H$ ) y de la temperatura ambiente ( $t$ ). Por ello, en la práctica, se hace la corrección buscándola en unas tablas de doble entrada en las que, en función de  $H$  y  $t$  queda ya determinada.

## D) DILATACIÓN DE GASES IDEALES

### XIV – 16. Hipótesis de Avogadro. Volumen molar

El conde italiano Amadeo de Avogadro (1776-1856), profesor en Turín, basándose en la observación de reacciones químicas entre gases, emite la siguiente ley empírica:

«A igualdad de presión, volumen y temperatura, todos los gases tienen el mismo número de moléculas».

Como recíproca de esta ley se puede afirmar que si varios gases tienen idénticos  $p$ ,  $t$  y  $n$  (número de moléculas) su volumen es el mismo.

Llamamos VOLUMEN MOLAR ( $v$ ) al volumen ocupado por un mol de un gas.

Si tomamos un mol de varios gases ( $N_A = 6,022\,045 \times 10^{23}$ ) en condiciones normales ( $t_0 = 0^\circ\text{C}$  y  $p_0 = 760$  mm de Hg) el volumen molar es el mismo para todos ellos, siendo su valor:

$$v_0 = 22,4 \text{ litros/mol}$$

Es de hacer observar que los gases tienen tan sólo *aproximadamente* este volumen molar en condiciones normales, como se muestra en la tabla adjunta para los volúmenes molares de varios gases obtenidos en el laboratorio. Se denominan GASES IDEALES o PERFECTOS a los que tuvieran exactamente tal volumen molar; las condiciones en las que los gases se aproximan al comportamiento ideal se enuncian en el párrafo siguiente.

GAS	MASA MOLECULAR (g/mol)	VOLUMEN MOLAR EN C.N. (l/mol)
H <sub>2</sub>	2,0	22,43
N <sub>2</sub>	28,0	22,40
O <sub>2</sub>	32,0	22,39
CO <sub>2</sub>	44,0	22,26
CH <sub>4</sub>	16,0	22,36
NH <sub>3</sub>	17,0	22,09

### XIV – 17. Transformaciones isothermas, isobaras e isocoras. Gases ideales. Cero absoluto de temperatura

Se llaman ISOTERMAS a las transformaciones realizadas a temperatura constante.

La ley que las regula es la de Boyle-Mariotte cuyo estudio y representación gráfica en el diagrama de Clapeyron ( $V$ ,  $p$ ) se hizo en el párrafo XII-17.

$$pV = \text{constante}$$

Se llaman ISOBARAS a las transformaciones realizadas a presión constante.

En 1810 los franceses Louis Joseph Gay-Lussac (1778-1850) y Jacques Alexandre Charles (1746-1823), encontraron una ecuación de estado aplicada bajo la condición de presión constante para los gases, estableciendo empíricamente la ley que lleva sus nombres LEY DE GAY-LUSSAC Y CHARLES y que incluye dos afirmaciones:

1. El volumen de un gas ideal aumenta linealmente con la temperatura.
2. El COEFICIENTE DE DILATACIÓN ISOBÁRICA ( $\alpha$ ) es el mismo para todos los gases ideales y vale  $1/273,16$ .

Se tiene por tanto:

$$V = V_0 (1 + \alpha t)$$

$$\alpha = \frac{V - V_0}{V_0 t} = \frac{1}{273,16} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

en las que  $V$  es el volumen del gas a la temperatura  $t$  expresada en grados centígrados y  $V_0$  el volumen del gas a  $0^\circ\text{C}$ .

Para relacionar volúmenes a  $t^\circ$  y  $t'^\circ$ , basta dividir entre sí las expresiones correspondiente a las dos temperaturas:

$$\frac{V_t}{V_{t'}} = \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t'}$$

Se llaman ISOCORAS a las transformaciones realizadas a volumen constante.

La ecuación de estado que rige el aumento de la presión, calentado un gas ideal a volumen constante y obtenida empíricamente, se escribe:

$$p = p_0 (1 + \beta t)$$

$p$  es la presión del gas a  $t$  grados centígrados,  $p_0$  es la presión del gas a  $0^\circ\text{C}$  y  $\beta$  lo llamamos COEFICIENTE DE COMPRESIÓN TÉRMICA ISOCORA, que posee un valor constante para todos los gases ideales e igual al valor del coeficiente de dilatación isobara, es decir:

$$\beta = \frac{p - p_0}{p_0 t} = \frac{1}{273,16} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} = \alpha$$

Para relacionar presiones a  $t^\circ$  y  $t' ^\circ\text{C}$ , basta con dividir entre sí las expresiones correspondientes a las dos temperaturas:

$$\frac{p_t}{p_{t'}} = \frac{1 + \beta t}{1 + \beta t'}$$

En el cuadro adjunto hemos puesto los valores reales de  $\alpha$  y  $\beta$  al calentar los gases de  $0^\circ\text{C}$  a  $100^\circ\text{C}$ , partiendo de las presiones indicadas: se detecta claramente que las leyes de Gay-Lussac y Charles son una aproximación que en ocasiones es muy estimable.

Llamamos GASES IDEALES o PERFECTOS a aquellos que cumplen exactamente la Hipótesis de Avogadro, la ley de Boyle-Mariotte y las leyes de Gay-Lussac y Charles.

Los gases que más se acercan al comportamiento ideal son aquellos que se encuentran muy expansionados (enrarecidos), es decir, cuanto menor sea la densidad que poseen y menor presión ejerzan.

CERO ABSOLUTO DE TEMPERATURA es aquella a la cual los gases, si cumplieren exactamente las leyes de Boyle-Mariotte, Gay-Lussac y Charles, dejarían de ejercer presión en las paredes de la vasija que los contiene.

Para que  $p_t = 0$ , en la fórmula  $p_t = p_0 (1 + \alpha t)$ , es necesario que  $1 + \alpha t = 0$ , puesto que  $p_0$ , presión ejercida por un gas a  $0^\circ\text{C}$ , nunca es nula:

$$1 + \alpha t = 0 \Rightarrow \alpha t = -1 \Rightarrow t = -\frac{1}{\alpha} = -273,16^\circ\text{C}$$

TEMPERATURAS ABSOLUTAS O KELVIN son las contadas a partir del cero absoluto.

En el párrafo XIV-4 hemos estudiado las relaciones entre las temperaturas absolutas o Kelvin y las centígradas o Celsius.

#### XIV - 18. Ecuación de los gases ideales

Tomemos  $n$  moles de un gas en condiciones normales, es decir a  $0^\circ\text{C}$  y a la presión de 1 atm, los valores de sus variables los representamos por:  $p_0, V_0, 0^\circ$ . Realizando una transformación isobara ( $p_0 = \text{constante}$ ), los valores de las variables son:  $p_0, V', t^\circ$ . Realizando una transformación isoterma ( $t = \text{constante}$ ) obtenemos:  $p_t, V_t, t^\circ$ .

Entre el primero y el segundo estado es aplicable la primera de las leyes de Gay-Lussac (presión constante):  $V' = V_0 (1 + \alpha t)$ . Entre el segundo y el tercero (Boyle-Mariotte):  $p_t V_t = p_0 V'$ . Sustituyendo  $V'$  por su valor anterior:

$$p_t V_t = p_0 V_0 (1 + \alpha t)$$

«El producto de la presión por el volumen es directamente proporcional al binomio de dilatación».

Sustituyendo  $\alpha$  por su valor, obtenemos:

$$p_t V_t = p_0 V_0 \left(1 + \frac{t}{273,16}\right) = p_0 V_0 \frac{t + 273,16}{273,16} = \frac{p_0 V_0}{273,16} T = \frac{p_0 V_0}{T_0} T \Rightarrow \frac{p_t V_t}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0}$$

ya que:  $t + 273,16 = T$ . Hemos llamado  $T_0$  a la temperatura en la escala Kelvin correspondiente a  $0^\circ\text{C}$ . Si en vez de ser el estado final  $p_t V_t T_1$  hubiera sido  $p_1 V_1 T_1$  (Fig. XIV-14), empleando las mismas leyes obtendremos:

$$p_1 V_1 = \frac{p_0 V_0}{T_0} T_1 \Leftrightarrow \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_0 V_0}{T_0}$$

GAS	$p_0$	$\alpha_0^{100} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$\beta_0^{100} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
He	1 mm de Hg	1/273,4	1/273,15
H <sub>2</sub>	1 mm de Hg	1/273,2	1/273,0
CH <sub>4</sub>	1 atm	1/272,0	1/271,7
CO <sub>2</sub>	1 atm	1/268,7	1/269,5
SO <sub>2</sub>	1 atm	1/256,4	1/260,4

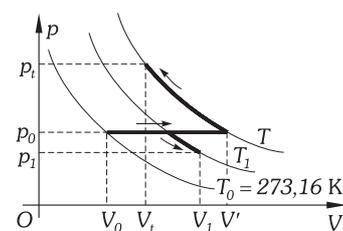


Fig. XIV-14.- Desde cualquier punto del diagrama de Clapeyron se puede alcanzar otro cualquiera del mismo diagrama realizando una transformación isobara y luego una transformación isoterma. En el caso de la figura partimos de  $n$  moles de un gas en condiciones normales.

igual pasaría para un estado final  $p_2V_2T_2$  ... obteniéndose:

$$\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2} = \dots$$

Si dividimos todas estas igualdades por el número de moles  $n$ , obtenemos una serie de ecuaciones en las que intervienen los volúmenes específicos molares, y en consecuencia *la constante universal* que designamos por  $R$ , siendo su valor:

$$R = \frac{p_0v_0}{T_0} = \frac{p_1v_1}{T_1} = \frac{p_2v_2}{T_2} = \dots = \frac{1 \times 22,4}{273,16} = 0,082 \frac{\text{atm} \cdot \text{l}}{\text{K} \cdot \text{mol}} = 8,341 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{mol}} = 2 \frac{\text{cal}}{\text{K} \cdot \text{mol}}$$

Hemos expresado el producto  $pv$  en unidades de trabajo ya que tiene la misma ecuación de dimensiones que éste:  $[p][v] = [F][v]/[A] = \text{MLT}^{-2}\text{L}^3/\text{L}^2 = \text{ML}^2\text{T}^{-2}$ .

La ecuación de los gases ideales se escribirá para un mol:

$$pv = RT$$

siendo  $v$  el *volumen molar*.

Multiplicando los dos miembros de la ecuación anterior por  $n$  (número de moles) y considerando que  $nv = V$  (volumen total del gas) la ecuación se escribirá en su forma general:

$$pV = nRT$$

**PROBLEMAS: 19 al 33.**

#### XIV – 19. Mezcla de gases. Ley de Dalton. Fracción molar

«La presión que ejerce una mezcla de gases es la suma de las presiones que ejercerían cada uno de ellos, independientemente, en el mismo recinto».

En efecto: consideremos un recinto cerrado en el que hay una mezcla de gases ideales; si llamamos  $n_1, n_2, n_3$ , etc., al número de moles de cada gas, el número total de moles ( $n$ ), es:  $n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots$  y se habrá de cumplir para el conjunto:

$$pV = nRT = (n_1 + n_2 + n_3 + \dots) RT \quad \wedge \quad n = \sum n_i$$

Si cada uno de los gases, él sólo, hubiese estado contenido en el recinto a la misma temperatura, cumpliría:

$$p_1V = n_1RT \quad p_2V = n_2RT \quad p_3V = n_3RT \quad \dots$$

Por suma de las anteriores, obtenemos  $(p_1 + p_2 + p_3 + \dots)V = (n_1 + n_2 + n_3 + \dots)RT$  que, comparada con la anterior, nos da:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots$$

expresión que nos demuestra la ley de John Dalton (1776-1844).

Llamando **FRACCIÓN MOLAR** al cociente entre el número de moles ( $n_j$ ) de un componente y el número de moles de la mezcla:

$$x_j = \frac{n_j}{\sum n_i} = \frac{n_j}{n}$$

y teniendo en cuenta que:

$$\begin{array}{l} p_jV = n_jRT \\ pV = nRT \end{array} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p_j = \frac{n_j}{n} \quad p = x_j p}$$

podemos enunciar:

«La presión parcial de un gas en una mezcla es igual a la fracción molar de dicho gas multiplicada por la presión total de ella».

Si consideramos el volumen  $V_j$  que ocuparían los  $n_j$  moles de un componente de una mezcla de gases a la misma  $p$  y  $T$ , para éste sería:

$$V_j = \frac{n_jRT}{p}$$

para la totalidad de la mezcla:  $V = \frac{nRT}{p} \quad \wedge \quad n = \sum n_i$

por división de ambas:  $p$

$$\frac{V_j}{V} = \frac{n_j}{n} = x_j$$

«La composición en volumen de una mezcla de gases es igual a su fracción molar».

#### XIV – 20 Aplicaciones de la ecuación de los gases ideales

REDUCCIÓN DE UN GAS A CONDICIONES NORMALES. Se trata de conocer el volumen ( $V_0$ ) de un gas a  $0^\circ$  y 760 mm de presión conocido su volumen  $V$  y su presión  $p$  a  $t^\circ$ . Por división de las expresiones a  $t^\circ$  y  $0^\circ\text{C}$  de la ecuación de estado:

$$\frac{pV = nRT}{p_0V_0 = nRT_0} \Rightarrow \frac{pV}{p_0V_0} = \frac{T}{T_0} \quad (5)$$

expresión que resuelve el problema.

PASO DE UN GAS DE UNAS CONDICIONES A OTRAS. Se trata de pasar un gas a presión, volumen y temperatura conocidas ( $p, V, t$ ) a otras condiciones ( $p', V', t'$ ) de las cuales se desconoce una de ellas. Por división de las dos ecuaciones de estado:  $pV = nRT$ ,  $p'V' = nRT'$  obtenemos:

$$\frac{pV}{p'V'} = \frac{T}{T'}$$

ecuación que resuelve el problema.

VARIACIÓN DE LA DENSIDAD CON LA PRESIÓN Y TEMPERATURA. La masa de un gas es la misma a  $0^\circ$  que a  $t$ , es decir:

$$m = V_0\rho_0 = V_t\rho_t \Rightarrow \rho_t = \rho_0 \frac{V_0}{V_t}$$

obteniendo el valor de  $V_0/V_t$  de la (5), se tiene:

$$\rho_t = \rho_0 \frac{p_t}{p_0} \frac{T_0}{T}$$

Relacionando densidades a distintas temperaturas, se obtiene:

$$\frac{\rho_t}{\rho_t'} = \frac{p_t}{p_t'} \frac{T'}{T}$$

Las densidades de los gases son directamente proporcionales a las presiones e inversamente proporcionales a las temperaturas absolutas.

DETERMINACIÓN DE LA MASA MOLECULAR DE UN GAS. Sabiendo que un mol de gas en condiciones normales tiene un volumen de 22,4 l, para determinar su masa molecular ( $M_m$ ) podemos aplicar la siguiente proporción, conocido el volumen de gas en condiciones normales ( $V_0$ ) y su masa ( $m$ ):

$$\frac{M_m}{m} = \frac{22,4}{V_0} \quad M_m = 22,4 \frac{m}{V_0}$$

PROBLEMAS: 34 al 42.

### E) TEORÍA CINÉTICO MOLECULAR

#### XIV – 21. Teoría cinético molecular

Las moléculas de todos los cuerpos están animadas de un constante movimiento en los espacios vacíos que existen entre ellas.

En los gases la energía cinética interna de las moléculas (referida al CM del sistema de partículas que lo constituyen) es tan enorme que la fuerza de atracción molecular (*cohesión*) no se manifiesta prácticamente, chocando contra las paredes de la vasija que las contiene, originando estos últimos choques una fuerza contra las paredes que, considerada por unidad de superficie, determina la presión del gas. Los espacios que existen entre las moléculas son tan inmensos en comparación con el diámetro de las propias moléculas, que el volumen real de éstas (COVOLUMEN) es despreciable en comparación con el intermolecular. El MOVIMIENTO CAÓTICO, desordenado, explica la propiedad de expansión, adoptando los gases la forma y el volumen de la vasija en que están contenidos.

**XIV – 22. Caos molecular**

Se admite, en la teoría cinética de los gases, que sus moléculas se mueven con respecto a su CM en un caos o *perfecto desorden*; ello quiere decir que no existen direcciones privilegiadas; es decir, que el número de moléculas que se mueven con una cierta velocidad es, por término medio, el mismo para todas las direcciones. Ello no es cierto en un determinado instante; pero si se realizan muchos recuentos de las moléculas que se mueven con cierta velocidad en una serie de direcciones y se hallase la media aritmética correspondiente a cada dirección, esta media sería igual para todas las direcciones que se consideren. La afirmación es tanto más cierta cuanto mayor sea el número de recuentos realizados. Si la velocidad de una molécula es  $c$ , y sus componentes son  $c_x$ ,  $c_y$  y  $c_z$ , de forma que:  $c^2 = c_x^2 + c_y^2 + c_z^2$ , la definición de caos molecular exige que:  $c_x = c_y = c_z$ , y por tanto:

$$c^2 = 3c_x^2 \Rightarrow c_x^2 = \frac{1}{3} c^2 \tag{6}$$

**XIV – 23. Velocidad cuadrática media**

Si las velocidades reales de las moléculas de un gas referidas a su CM son  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , la velocidad cuadrática media queda definida mediante la expresión:

$$\overline{c^2} = \frac{c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2}{n}$$

La VELOCIDAD CUADRÁTICA MEDIA para las moléculas de un gas, es una velocidad cuyo cuadrado es la media aritmética de los cuadrados de las velocidades reales, referidas al CM como origen, del sistema formado por éstas.

Si consideramos una cierta dirección  $\varphi$ , en la que se mueven con determinada velocidad  $c_\varphi$ , un cierto número de moléculas  $n_\varphi$ , la expresión:

$$\overline{c^2} = \frac{\sum n_\varphi c_\varphi^2}{n} \tag{7}$$

(siendo  $n$  el número total de moléculas), nos indica el valor del cuadrado de la velocidad cuadrática media, ya que significa la suma de todos los cuadrados de las velocidades existentes en todas las direcciones, dividido por el número total de moléculas que poseen tales velocidades.

**XIV – 24. Cálculo de la presión de un gas**

Al ser presión  $p$  la fuerza que actúa sobre la unidad de superficie:  $p = F/S$ , y teniendo en cuenta:

$$F = \frac{\Delta(Mv)}{\Delta t} \Rightarrow p = \frac{1}{S} \frac{\Delta(Mv)}{\Delta t} \tag{8}$$

Para determinar la presión que las moléculas ejercen por choque contra una pared, hay que calcular la variación del momento lineal de las moléculas que chocan por unidad de tiempo en cada unidad de superficie.

Supongamos una molécula de masa  $m$  con una velocidad  $\mathbf{c}_\varphi$ , referida al CM del sistema en estudio, en la dirección  $\varphi$  que choca contra una pared  $Y$ , obedeciendo a las leyes del choque perfectamente elástico. La componente en la dirección del eje  $Y$  de la velocidad  $\mathbf{c}_\varphi$  (Fig. XIV-15) no se modifica y la normal a la pared  $\mathbf{c}_{\varphi x}$ , se hace igual y de signo contrario. La variación del momento lineal en el choque es:

$$mc_{\varphi x} - (-mc_{\varphi x}) = 2mc_{\varphi x} \tag{9}$$

En la superficie  $S$  de pared (Fig. XIV-16) chocarán en el tiempo  $\Delta t$ , «la mitad» de las moléculas contenidas en un cilindro oblicuo de generatriz  $c_\varphi \Delta t$ ; ya que una molécula exterior al cilindro, al hacer el recorrido  $c_\varphi \Delta t$ , no habrá llegado a la superficie  $S$  y las interiores a él habrán llegado a tal superficie. Y decimos «la mitad» porque la no existencia de direcciones privilegiadas obliga a que «la mitad» de las moléculas tengan componente normal a la pared en el sentido del choque, es decir, que vayan hacia ella y la otra «mitad» tendrán componente normal que las aleje.

Al ser la altura del cilindro  $c_{\varphi x} \Delta t$ , su volumen será;  $S c_{\varphi x} \Delta t$ , y si  $n_\varphi$  es el número de moléculas por unidad de volumen que se mueven con tal velocidad en tal dirección, el número de moléculas con velocidad  $c_\varphi$  que chocan será:

$$\frac{1}{2} n_\varphi S c_{\varphi x} \Delta t \tag{10}$$

y la variación del momento lineal correspondiente a tales moléculas será el producto de la variación del momento lineal de cada una de ellas (9) por el número de las moléculas que chocan (10);

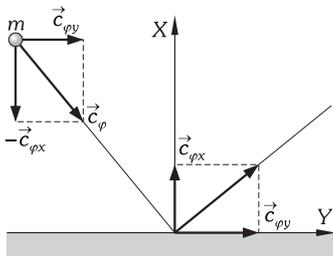


Fig. XIV-15.- La componente de la velocidad  $\vec{c}_{\varphi y}$  en el choque de la partícula  $m$  contra una pared no se modifica, y la componente normal  $\vec{c}_{\varphi x}$  se hace igual y de sentido contrario.

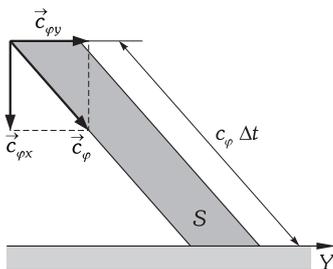


Fig. XIV-16.- Cilindro oblicuo de generación  $c_\varphi \Delta t$ .

matemáticamente:  $mc_{\varphi x} n_{\varphi} S c_{\varphi x} \Delta t = mn_{\varphi} c_{\varphi x}^2 S \Delta t$ , y considerando la (5), la variación del momento lineal de las moléculas consideradas (dirección  $\varphi$ , velocidad  $c_{\varphi}$ ) será:

$$\frac{1}{3} mn_{\varphi} c_{\varphi}^2 S \Delta t \quad (11)$$

Aplicando la fórmula (8), cuyo numerador es la expresión (11), obtenemos para la presión parcial ejercida por tales moléculas:

$$p_{\varphi} = \frac{1}{3} mn_{\varphi} c_{\varphi}^2$$

Para obtener la presión total, realizaremos la suma de las correspondientes a las moléculas que se mueven en cada dirección con todas las velocidades:

$$p = \sum p_{\varphi} = \frac{1}{3} m \sum n_{\varphi} c_{\varphi}^2$$

y considerando la expresión (7) obtenemos:

$$p = \frac{1}{3} m n \overline{c^2} \quad (12)$$

Teniendo en cuenta que el producto de la masa de una molécula ( $m$ ) por el número de moléculas de la unidad de volumen ( $n$ ) es la densidad ( $\rho$ ), la anterior expresión se puede escribir:

$$p = \frac{1}{3} \rho \overline{c^2}$$

#### XIV - 25. Relación entre la temperatura y la energía cinética

Si  $E$  es la energía cinética interna media de una molécula, la fórmula general (12) podemos expresarla:

$$p = \frac{2}{3} n \frac{1}{2} m \overline{c^2} = \frac{2}{3} nE \quad (13)$$

multiplicando los dos miembros por el volumen molar ( $v$ ):  $pv = \frac{2}{3} nvE = \frac{2}{3} N_A E$  (14)

ya que el producto del número de moléculas existentes en la unidad de volumen por el volumen de un mol ( $v$ ) indica el número de moléculas del mol, o número de Avogadro ( $N_A$ ).

Comparada la expresión anterior con la ecuación general de los gases, referida a un mol:  $pv = RT$ , obtenemos, por igualación:

$$\frac{2}{3} N_A E = RT \Rightarrow E = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{2}{3} kT \quad (15)$$

Siendo  $k$  una nueva constante universal (CONSTANTE DE BOLZMANN), cuyo significado es «la constante de los gases ideales referida a una molécula».

La última expresión nos indica que «la temperatura absoluta y la energía cinética interna media, son magnitudes directamente proporcionales».

Si un capricho del azar, que rige el movimiento molecular caótico, hiciera que las moléculas rápidas del aire se desplazasen en un instante a un lado de una habitación y las lentas a otro, existiría, en aquel momento, una enorme diferencia de temperatura entre los dos lugares. La probabilidad de que ocurran hechos como éste es extraordinariamente pequeña, debido al enorme número de moléculas que existen en todo el volumen gaseoso.

La expresión (15) nos permite conocer la velocidad cuadrática media de las moléculas de un gas midiendo su temperatura. En efecto:

$$E = \frac{1}{2} m \overline{c^2} = \frac{3}{2} kT$$

y llamando  $c = \sqrt{\overline{c^2}}$  a dicha velocidad tenemos:

$$c = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3kN_A T}{mN_A}} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{3RT}{M_m}}$$

en donde  $M_m$  es la masa molar del gas.

#### XIV - 26. Leyes de los gases

La ecuación (14) compendia las leyes de los gases al ser el producto de la presión por el volumen, proporcional a la energía cinética y, por lo tanto, a la temperatura absoluta.

Si consideramos masas cualesquiera de gases, en los que su número total de moléculas sea  $N_1$  y  $N_2$  la aplicación a cada uno de ellos de la expresión (14) nos da:

$$p_1 V_1 = \frac{2}{3} N_1 E_1 \quad p_2 V_2 = \frac{2}{3} N_2 E_2$$

y si:  $p_1 = p_2$ ,  $V_1 = V_2$ ,  $E_1 = E_2$ , es decir:  $T_1 = T_2$ , se habrá de verificar que:  $N_1 = N_2$ , quedando, así, demostrada la ley de Avogadro (párrafo XIV-16).

Si consideramos una mezcla de gases, el número de moléculas que hay en la unidad de volumen será la suma del número de moléculas por unidad de volumen de cada gas:  $n = n_1 + n_2 + \dots$ . Sustituyendo este valor en la (13) y considerando que  $E$  es la misma para todos los gases por la constancia de su temperatura en la mezcla, obtenemos:

$$p = \frac{2}{3} E n = \frac{2}{3} E n_1 + \frac{2}{3} E n_2 + \dots$$

Cada uno de los términos del último miembro es según la expresión (13), la presión que ejercerían las moléculas de cada gas independiente, o presión parcial; por tanto:  $p = p_1 + p_2 + \dots$ , quedando así demostrada la ley de Dalton (párrafo XIV-19).

#### XIV - 27. Principio de equipartición de la energía\*

Consideradas las moléculas como puntos materiales son, únicamente, capaces de realizar movimientos de traslación y por tanto tienen *tres grados de libertad*; las tres posibilidades de movimiento a lo largo de las tres direcciones del espacio.

Al ser  $c^2 = c_x^2 + c_y^2 + c_z^2$  y estas componentes iguales entre sí (caos molecular), la energía cinética media de una molécula es:

$$E = \frac{1}{2} m c^2 = \frac{3}{2} m c_x^2 = \frac{3}{2} m c_y^2 = \frac{3}{2} m c_z^2$$

igualada esta expresión a la (15): 
$$E = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} m c_x^2 = \frac{3}{2} m c_y^2 = \frac{3}{2} m c_z^2$$

Es decir:

$$\frac{1}{2} m c_x^2 = \frac{1}{2} m c_y^2 = \frac{1}{2} m c_z^2 = \frac{1}{2} kT$$

*La energía cinética interna se distribuye por igual entre los grados de libertad de la molécula, correspondiendo a cada grado de libertad:  $kT/2$ .*

En las moléculas monoatómicas, tan sólo se concibe la traslación; en las biatómicas además de la traslación (3 grados de libertad) pueden existir rotaciones alrededor de los dos ejes perpendiculares al que une los átomos que la forman (2 grados de libertad), siendo por tanto la energía total de la molécula  $5kT/2$ . En las moléculas triatómicas los tres ejes coordenados pueden ser de rotación y traslación, existiendo, así, 6 grados de libertad. La energía cinética interna de la molécula es  $6kT/2 = 3kT$ .

La posibilidad de vibraciones de los átomos en el sistema que constituye la molécula, puede hacer mayor de 6 al número de grados de libertad al tenerse en cuenta las energías cinética y potencial asociadas a dicha vibración.

Al considerar *energías medias molares* hay que multiplicar la expresión de la energía media de la molécula, por el número de Avogadro; por cada grado de libertad corresponde, entonces, una energía  $kN_A T/2 = RT/2$ , ya que  $k = R/N_A$ . Es decir, la energía molar será:

$$E = \frac{l}{2} RT$$

siendo  $l$  el número de grados de libertad de la molécula.

**PROBLEMAS: 43 al 51.**

\* El estudio de los calores molares de los gases se realiza más adelante, en el capítulo XVI.

### PROBLEMAS

#### A) TERMOMETRÍA

1. En una ocasión que el «premier» inglés padeció cierta infección vírica, «The Times» comunicaba al país que el señor Blair sufría una fiebre de 104 grados. ¿Es posible?

2. ¿A qué temperatura coinciden las indicaciones del termómetro centígrado y el Fahrenheit? ¿Y las del Fahrenheit y Reaumur?

3. Calcular en grados Fahrenheit el intervalo de temperatura equivalente a una diferencia de 55° en el termómetro centígrado.

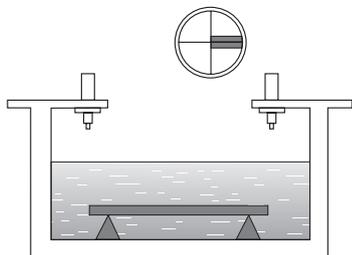
4. El cero absoluto de temperatura (escala Kelvin) equivale a -273,16 °C. Calcular: 1) La temperatura del cero absoluto en grados Fahrenheit. 2) El intervalo que existe entre el cero absoluto y el punto de fusión del hielo en la escala Fahrenheit.

5. En un lugar en que la presión atmosférica es 760 mm de mercurio introducimos un termómetro centígrado en hielo fundente y luego en vapor de agua hirviendo. El termómetro, mal graduado, marca 2° para el primero y 102,5° para el segundo. ¿Qué fórmula de reducción deberemos emplear para calcular la temperatura real en todos los casos? Si el termómetro marca 50°, ¿cuál es la verdadera temperatura? ¿A qué temperatura sería correcta la lectura del termómetro?

6. Un termómetro centígrado mal graduado marca 8° en el punto de fusión del hielo y 99° en el de ebullición del agua, en un lugar en que la presión atmosférica es 760 mm. Resolver para este termómetro las cuestiones del problema anterior.

**B) DILATACIÓN DE SÓLIDOS**

7. En el comparador de la figura se mide la dilatación de una barra de hierro, de 1 m de longitud a 0 °C, obteniéndose para los 50 °C una dilatación de 0,06 cm. Calcular: 1) El coeficiente de dilatación lineal del hierro. 2) Si tiene una sección de 10 cm<sup>2</sup> a 0 °C, ¿cuáles son su sección y su volumen a 100 °C?



Problema XIV-7.



Problema XIV-44.

8. Un herrero ha de colocar una llanta circular de 1 m de diámetro a una rueda de madera de igual diámetro. Con objeto de poder ajustarla, calienta la llanta hasta conseguir que su radio supere en 2 mm al de la rueda. Sabiendo que la temperatura ambiente es de 20 °C y su coeficiente de dilatación lineal  $12,2 \times 10^{-6} \text{ °C}^{-1}$ , calcular la temperatura en grados centígrados a que debe calentarse la llanta para cumplir las condiciones expuestas.

9. Un aro circular de alambre de hierro de radio 1 m está cruzado por un diámetro de alambre de cobre soldado al aro. ¿Seguirá siendo circular al calentarlo de 0° a 100 °C? Calcular las nuevas longitudes de los dos alambres. (Coeficiente de dilatación del hierro =  $12 \times 10^{-6} \text{ °C}^{-1}$ . Coeficiente de dilatación del cobre =  $19 \times 10^{-6} \text{ °C}^{-1}$ ).

10. Un anillo de acero, de 75 mm de diámetro interior a 20 °C, ha de ser calentado e introducido en un eje de latón de 75,05 mm de diámetro a 20 °C. 1) ¿A qué temperatura ha de calentarse el anillo? 2) ¿A qué temperatura tendríamos que enfriar el conjunto para que el anillo saliera él solo del eje? (Coeficiente de dilatación del acero:  $12 \times 10^{-6} \text{ °C}^{-1}$ ; coeficiente de dilatación del latón:  $20 \times 10^{-6} \text{ °C}^{-1}$ ).

11. La varilla de un reloj de lenteja sin compensar, que bate segundos a 0 °C, es de latón. Averiguar cuánto se retrasa el reloj en 1 d si se introduce en un ambiente a 200 °C. Coeficiente de dilatación del latón:  $\alpha = 17 \times 10^{-6} \text{ °C}^{-1}$ . (Considerar el péndulo como simple, de longitud la misma que la varilla).

12. Una varilla de cobre de densidad uniforme y de sección constante oscila como un péndulo colgada de uno de sus extremos, con un período de 1,6 s cuando se encuentra a una determinada temperatura ambiente. Siendo el coeficiente de dilatación lineal del cobre  $19 \times 10^{-6} \text{ °C}^{-1}$ , determínese el incremento de temperatura que habría que darle al ambiente para que el período aumente en 3 milésimas de s.

13. El límite de ruptura de una barra de cobre es  $2,3 \times 10^8 \text{ Pa}$ . Calentamos una barra de tal metal a 300 °C y se sujeta con los extremos fijos de tal forma que no puede contraerse. Siendo  $\alpha = 1,67 \times 10^{-5} \text{ °C}^{-1}$  el coeficiente de dilatación lineal y  $E = 1,2 \times 10^{11} \text{ Pa}$  el módulo de Young para el cobre, determinar la temperatura a la que se producirá la ruptura al enfriarse.

14. Enfriamos una barra de acero (coeficiente de dilatación lineal  $\alpha = 1,1 \times 10^{-5} \text{ °C}^{-1}$ ; módulo de compresibilidad  $B = 5 \times 10^8 \text{ Pa}$ ) metiéndolo en nitrógeno líquido hasta la temperatura de -201 °C. La introducimos en una cavidad rígida del mismo material que se encuentra a 20 °C y que ajusta con la barra enfriada. Determinar la presión que ejercerá la barra sobre la abrazadera cuando el conjunto se caliente hasta la temperatura de 20 °C.

15. Una cinta bimetalica de 5 cm de longitud está formada por dos láminas soldadas entre sí, una de acero y otra de aluminio de 0,5 mm de espesor cada una. Sabiendo que el coeficiente de dilatación lineal del acero es  $1,1 \times 10^{-5} \text{ °C}^{-1}$  y el del aluminio  $2,4 \times 10^{-5} \text{ °C}^{-1}$ , determinar el radio de flexión de la lámina cuando experimenta una variación de temperatura de 10°.

**C) DILATACIÓN DE LÍQUIDOS**

16. La densidad del mercurio a 0 °C es 13,6 g/cm<sup>3</sup>; su coeficiente de dilatación,  $1,82 \times 10^{-4} \text{ °C}^{-1}$ . Calcular la densidad del mercurio a 100 °C.

17. Una vasija de cinc (coeficiente de dilatación lineal:  $2,9 \times 10^{-5} \text{ °C}^{-1}$ ) está llena de mercurio a 100 °C, teniendo entonces una capacidad de 10 l. Se enfría hasta 0 °C. Calcular la masa de mercurio, medida a 0 °C, que hay que añadir para que la vasija quede completamente llena (coeficiente de dilatación del mercurio:  $1,82 \times 10^{-4} \text{ °C}^{-1}$ ). Densidad del mercurio a 0 °C, 13,6 g/cm<sup>3</sup>.

18. Una vasija de Zn está llena de mercurio a 0 °C, teniendo una capacidad de 5 l. Calcular el volumen de mercurio que se derrama a 100 °C por efecto de la mayor dilatación de este último. (Tomar los datos necesarios del problema anterior).

**D) DILATACIÓN DE GASES IDEALES**

19. En un tubo de vidrio de sección uniforme, cerrado por su extremo inferior, hay aire encerrado bajo una gota de mercurio. A la temperatura de 20 °C el aire encerrado en el tubo alcanza una altura de 25 cm. ¿Qué altura alcanzará cuando el tubo se calienta a 80 °C?

20. En un matraz de 500 ml con un tapón perforado con un orificio muy fino se evaporan a 75 °C un determinado número de centímetros cúbicos de un líquido orgánico. Después de evaporado todo el líquido, se enfrió el matraz y se pesó el líquido condensado, obteniéndose 1,214 g. Si la presión atmosférica era de 750 mm de Hg, calcúlese la masa molecular de dicho líquido.

21. 1) Una vasija de 1 l contiene 0,05 moles de hidrógeno a 20 °C. Calcular la presión a que se encuentra el gas. Se abre un momento la llave y parte del gas sale a la atmósfera. 2) Calcular la masa de hidrógeno que queda en la vasija, siendo la presión exterior exactamente 1 atm. 3) ¿A qué temperatura se debe calentar el gas que ha quedado, cerrada la vasija, para que la presión recobre el valor que tenía inicialmente?

22. Una botella de acero de 10 l de capacidad tiene una llave que permite ponerla en comunicación con la atmósfera. La presión exterior es de 76 cm de mercurio y se supone que la botella no se dilata. Averiguar: 1) Cuánto pesa el aire contenido en la botella si su temperatura es de 0 °C y su presión de 114 cm de mercurio, estando cerrada la llave. 2) Sin abrir la llave se calienta la botella hasta 100 °C. ¿Cuál será entonces la presión del aire interior? 3) Se mantiene la temperatura a 100 °C y se abre la llave. ¿Cuánto pesará el aire que quede dentro de la botella? 4) Finalmente se cierra la llave y se enfría todo a 0 °C. ¿Cuál será entonces la presión del aire interior? Peso específico del aire en condiciones normales: 1,293 g/l.

23. Un tubo en U de sección uniforme de 1 cm<sup>2</sup> está cerrado por una de las ramas, conteniendo mercurio, y en la rama cerrada hay 15 cm de aire. El nivel del mercurio en la abierta está 10 cm más abajo que en la cerrada. Después se echa mercurio hasta que el nivel en la rama abierta se eleve en 10 cm sobre el de la rama cerrada. Entonces el volumen de aire se reduce y su altura es de 11,5 cm. Calcular: 1) La presión del aire en el primer caso. 2) La presión cuando se reduce el volumen. 3) El valor de la presión atmosférica. 4) Si la temperatura durante la experiencia permaneció igual a 20 °C, ¿cuántos moles de aire habrá encerrados en la rama corta?

24. Se tiene un depósito de 54 l de volumen. La presión manométrica es de 14 kg/cm<sup>2</sup>, y la temperatura, de 27 °C, estando lleno de oxígeno dicho depósito. Suponiendo que se cumplen las leyes de los gases ideales, calcular: 1) ¿Cuántos kg de oxígeno contiene el depósito? 2) ¿Cuál es el número de moles de oxígeno contenidos en él? 3) ¿Qué volumen ocuparía este gas si su presión fuese de 1 atm y su temperatura de 50 °C? 4) A esta temperatura y presión, ¿cuál es la densidad del oxígeno?

La presión exterior es de 1 atm. Peso atómico del oxígeno: 16 u.

25. En un recipiente cerrado de 2 l de capacidad hay 3,5 g de oxígeno a 20 °C. La presión atmosférica es de 740 mm y la temperatura exterior de 20 °C. Se abre el recipiente y se quiere saber: 1) ¿Entra o sale gas en el recipiente? 2) Cantidad de oxígeno que sale (o aire que entra) para alcanzar el equilibrio. 3) ¿A qué temperatura debería estar el oxígeno del recipiente para que al abrir éste no entrase ni saliese gas? Un litro de aire en condiciones normales pesa 1,3 g. Masa atómica del oxígeno: 16 u.

26. Un recipiente de 5 l de capacidad contiene 12 g de nitrógeno, siendo la temperatura de 27 °C. La presión atmosférica es de 740 mm de mercurio. Determinar la presión del nitrógeno dentro del recipiente. Se abre éste el tiempo necesario para que se igualen la presión dentro del recipiente con la exterior; indicar si sale nitrógeno o entra aire y, en

un caso u otro, cantidad en g del correspondiente gas que entra o sale. La temperatura no cambia durante la experiencia. Peso de 1 l de aire en condiciones normales = 1,3 g. Masa molecular del nitrógeno = 28 u.

**27.** Un recipiente cerrado de 50 l contiene hidrógeno medido a 15 °C y presión de 1,5 atm. Determinar el peso del hidrógeno contenido en el recipiente. Si se pone en comunicación con el exterior, donde la presión es de 760 mm, determinar el peso y el volumen de hidrógeno medido en condiciones normales que sale del recipiente. La temperatura dentro y fuera de él es de 15 °C.

**28.** Dos muestras de gas kriptón se señalan con las letras A y B. La muestra A ocupa 150 cm<sup>3</sup> a la presión de 300 mm de mercurio y a la temperatura de 15 °C. Se ha determinado su masa y se sabe que es 0,215 g. De la muestra B no se ha determinado su masa, pero se sabe que ocupa 250 cm<sup>3</sup> a la presión de 125 mm de mercurio y temperatura de 80 °C. Con estos datos se desea saber en cuál de las dos muestras hay mayor cantidad de gas y cuál es la densidad del kriptón en condiciones normales.

**29.** Un recipiente cuyo volumen es de 10 l contiene 16 g de oxígeno, siendo su temperatura de 13 °C, y está en comunicación por medio de una llave (inicialmente cerrada) con otro recipiente de volumen 8 l, conteniendo oxígeno a la presión de 700 mm de mercurio y temperatura de 13 °C. Se abre la llave que pone en comunicación ambos recipientes. Determinar: 1) Masa inicial del oxígeno en el segundo recipiente. 2) Indicar de qué a cuál recipiente pasa oxígeno y cantidad del mismo que pasa. 3) Presión final del gas, una vez que se ha alcanzado el equilibrio. Peso atómico del oxígeno: 16 u.

**30.** Dos esferas A y B, de 5 y 10 l de capacidad, contienen gas oxígeno (de masa molar 32 g/mol). La esfera A contiene 96 g de oxígeno, y la B, 64. La temperatura de ambas es de 20 °C. Si se ponen en comunicación, calcular: 1) La presión del equilibrio. 2) Cantidad de oxígeno que pasa de una esfera a otra. 3) Si una vez en equilibrio las dos esferas cerramos la comunicación entre ellas y comunicamos la esfera A con la atmósfera, ¿qué cantidad de oxígeno contendrá en el nuevo equilibrio? [Presión atmosférica: 748 mm (Hg)].

**31.** Un globo esférico de goma de 20 cm de diámetro, que contiene aire a 20 °C y presión de 80 cm de Hg, se lastra con una piedra y se echa a un lago cuya agua está a 4 °C. Al llegar al fondo se comprueba que su diámetro se ha reducido a 18 cm. 1) ¿Qué masa de aire contiene el globo? 2) ¿Qué presión soporta el globo en el fondo del lago? 3) ¿Qué profundidad tiene el lago? DATOS: Densidad del mercurio = 13,6 g/cm<sup>3</sup>. Masa molecular media del aire = 28,8 g/mol.

**32.** El depósito de aire comprimido a 120 atm de presión de un submarino que se encuentra sumergido a 50 m de profundidad en el océano, tiene una capacidad de 2 m<sup>3</sup> y se encuentra a 27 °C de temperatura. Se expande el aire del depósito en la cisterna de agua y queda a 5 °C. Determinar aproximadamente el volumen de agua desalojada.

**33.** Supongamos que en un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , todas las moléculas de aire de una determinada zona se desplazan en una dirección con una velocidad de 72 km/h (vendaval). En tal zona se encuentra un cartel sobre el cual inciden las moléculas de aire formando un ángulo de 30° con la normal a su superficie; el choque lo suponemos perfectamente elástico y el aire en condiciones normales desde el punto de vista de un observador que viaja con él. Sabiendo que la masa molecular promedio del aire es 28,8 g/mol. Calcular la presión ejercida sobre el cartel.

**34.** En un recipiente de volumen 10 l se han introducido 15 g de oxígeno (peso atómico: 16) y 8 g de nitrógeno (peso atómico: 14). La temperatura es de 27 °C. Determinar: 1) La presión parcial del nitrógeno en el recipiente. 2) La presión total de la mezcla gaseosa. 3) ¿A qué temperatura habría que enfriar el recipiente para que la presión de la mezcla gaseosa fuese de 760 mm de mercurio?

**35.** Se tiene un recipiente de 10 l que contiene nitrógeno (masa atómica: 14) medido a 0 °C y 1,5 atm; se introducen en él 5 g de oxígeno (masa atómica: 16), sin cambiar la temperatura. Determinar: 1) Presión final de la mezcla gaseosa. 2) Peso del nitrógeno existente. 3) Presión del oxígeno en la mezcla.

**36.** Se ha obtenido en el laboratorio una muestra de 10,0 litros de una mezcla de H<sub>2</sub> y CO<sub>2</sub> a 0 °C y 1,7 atmósferas, determinándose que la presión parcial de CO<sub>2</sub> era de 0,50 atmósferas. Después se eliminó el CO<sub>2</sub> y el gas restante se comprimió hasta un volumen de 1 litro a

273 °C. Determinar: 1) El número de moles de CO<sub>2</sub> en la mezcla inicial. 2) La presión final del gas hidrógeno.

**37.** En un recipiente de volumen 5 l, en condiciones normales, y que contiene aire seco, se introducen 2 l de nitrógeno (masa atómica: 14) medido a 760 mm y 27 °C, siendo la temperatura final de la mezcla de 10 °C. Determinar: 1) Masa del nitrógeno que se ha introducido. 2) Presión de la mezcla. 3) ¿A qué temperatura hay que enfriar la mezcla para que su presión sea de 1 atm?

**38.** Un cilindro metálico de 2 dm<sup>2</sup> de sección está cerrado por un émbolo de peso despreciable y que se desplaza sin rozamiento, y contiene aire a 0 °C y presión 76 cm de Hg cuando el émbolo está a 50 cm del fondo del cilindro. 1) Calcular la fuerza necesaria sobre el émbolo para mantenerlo a 30 cm del fondo del cilindro, siguiendo la temperatura interior a 0 °C. 2) Calcular la presión del interior del cilindro, si se introducen 6 g de oxígeno (masa atómica: 16), sin dejar salir nada de aire, y se calienta el cilindro hasta 105 °C, siguiendo el émbolo a 30 cm del fondo.

**39.** En una mezcla gaseosa de CO y CO<sub>2</sub> la presión parcial de CO es 0,20 atm y la de CO<sub>2</sub> es de 0,60 atm. 1) ¿Cuál es la fracción molar de cada gas en la mezcla? 2) Si la mezcla ocupa 11,6 litros a 50 °C, calcular cuál es el número total de moles presentes en la mezcla y cuántos gramos hay de cada gas. (Masas atómicas: C = 12; O = 16).

**40.** En un matraz de 10,0 litros, que se encuentra a 25 °C, se introducen 2,0 g de hidrógeno, 8,4 g de nitrógeno y 4,8 g de metano. Calcular: 1) La fracción molar de cada uno de los gases. 2) La presión parcial de cada uno de los gases. 3) Determinar la presión total de la mezcla si la temperatura del matraz se eleva a 100 °C. (Masas atómicas: N = 14,0; H = 1,0; C = 12,0).

**41.** Admitiendo que la composición en peso del aire es: 75,45% de nitrógeno, 23,18% de oxígeno, 1,32% de argón y 0,05% de dióxido de carbono, calcular: 1) La composición del aire en volumen. 2) Su densidad en condiciones normales de presión y temperatura. (Masas atómicas: N = 14; O = 16; Ar = 40; C = 12).

**42.** Un matraz de 250 ml contiene kriptón a la presión de 0,65 atmósferas. Otro matraz de 450 ml contiene helio a 1,25 atmósferas. Se mezcla el contenido de los matraces abriendo la llave que los conecta. Si se mantiene la temperatura constante, calcular: 1) La presión total final. 2) El porcentaje en volumen y en peso de cada gas en la mezcla. (Masas atómicas: kriptón = 83,80; helio = 4,00).

## E) TEORÍA CINÉTICO MOLECULAR

**43.** Calcular la velocidad cuadrática media de las moléculas del gas hidrógeno, en condiciones normales.

**44.** Maxwell soñó con un ser, un demonio, que abriendo y cerrando una compuerta entre dos recipientes con gas a la misma temperatura dejase pasar de B a A las moléculas rápidas y de A a B las lentas. Si existía agua en los dos recipientes, pronto veríamos hervir el agua en A y formarse hielo en B. ¿Por qué?

**45.** ¿Es posible que, colocando un balón frente a una portería de fútbol, actuasen las moléculas del aire, «en calma» aparente, de delante centro y de un fuerte «punterazo» lograsen un gol imparible?

**46.** En dos matraces separados que contienen oxígeno y nitrógeno, sus moléculas se encuentran moviéndose con idéntica velocidad cuadrática media; razonar cuál de los dos gases se encuentra más caliente.

**47.** Calcular la energía cinética interna molar de un gas monoatómico a 0 °C.

**48.** Calcular a qué altura podría ser elevado sobre la Tierra un hombre de 70 kg por la energía cinética interna de 200 g de helio a 100 °C. (No se tiene en cuenta la variación del peso con la altura).

**49.** Determinar la energía cinética interna media de 2,3 moles de argón a 27 °C.

**50.** Calentamos 1 °C a 1 mol de un gas «biatómico». Calcular la variación de energía cinética interna molar.

**51.** Cincuenta y seis gramos de nitrógeno (masa molecular: 28) están a la temperatura de 27 °C. Se pide calcular: 1) La energía cinética interna de sus moléculas ( $R = 8 \text{ J/K} \cdot \text{mol}$ ). 2) Si esta energía cinética se convirtiese totalmente en trabajo en 30 s, ¿cuántos CV desarrollaría? 3) Suponiendo que la masa de nitrógeno ocupa un volumen de 10 l a la citada temperatura, ¿qué presión ejercerá?

# CAPÍTULO XV

## EL CALOR Y SUS EFECTOS

### A) CALORIMETRÍA

#### XV – 1. El calor y su medida

Hasta el siglo XVIII al calor se le describía como un *fluido* que se podía mover de un cuerpo a otro; a tal sustancia, que no se le suponía masa y que gozaba de la invisibilidad, se le llama *calórico*. La teoría del calórico explicaba muchos fenómenos como el flujo de calor de un sistema caliente a otro frío; no pudiendo explicarse otras muchas observaciones como se verá a continuación. De esta teoría del calórico, salió la medida del calor en la unidad que aún perdura y que llamamos CALORÍA (cal):

«Cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de un gramo de agua desde 14,5 °C a 15,5 °C».

Se toma este intervalo de temperatura porque al hallar la media aritmética referida a un grado de las cantidades de calor para elevar un gramo de agua de 0 a 100 °C, coincide con la cantidad de calor expresada en la definición. Es decir:  $Q_0^{100}/100 = Q_{14,5}^{15,5}$ .

La teoría del calórico no podía dar una explicación al porqué del calor que se produce por medio del rozamiento; fue el norteamericano Benjamin Thompson (1753-1814), el que planteó este problema cuando estaba supervisando la perforación para la fabricación del ánima de los cañones, rechazando la teoría del calórico y proponiendo en su lugar que el calor es una clase de movimiento, afirmando que, por lo menos en algunas circunstancias, el calor se produce al realizar trabajo mecánico. Esta idea fue seguida por un cervecero inglés, James Prescott Joule (1818-1889), el cual realizó varios experimentos que se describirán en el tema siguiente y que resultaron cruciales en el establecimiento de nuestra imagen presente de que:

EL CALOR es una forma de energía que se transfiere de un cuerpo a otro debido a una diferencia de temperatura.

Joule, como resultado de sus investigaciones, encontró que determinada cantidad de energía era siempre equivalente a una cierta cantidad de calor; cuantitativamente, 4,186 J de energía son equivalentes a 1 cal de calor, esto se conoce como EQUIVALENTE MECÁNICO DEL CALOR:

$$1 \text{ cal} = 4,186 \text{ J}$$

a partir de este resultado, los científicos interpretaron al calor no como un fluido que se transfiera de uno a otros sistemas con distinto nivel térmico, sino como una forma más de energía.

Para los intercambios de calor  $Q$ , y trabajo  $W$ , de un sistema con el medio exterior convenimos en que (Fig. XV-1):

1. El sistema absorbe calor,  $Q > 0$
2. El sistema cede calor,  $Q < 0$
3. El sistema realiza trabajo,  $W > 0$
4. El sistema recibe trabajo,  $W < 0$

#### XV – 2. Calor específico

«Se llama CALOR ESPECÍFICO medio a la cantidad de calor absorbido o emitido por la unidad de masa de una sustancia cuando su temperatura varía en un grado».

$$c = \frac{\Delta Q}{M \Delta T}$$

siendo  $\Delta Q$  la cantidad de calor necesaria para elevar la masa  $M$  de la sustancia un intervalo de temperatura  $\Delta T$ . Por lo tanto:

$$\Delta Q = Mc \Delta T$$

es la cantidad de calor necesaria para producir una variación de temperatura en cualquier sustancia.

CALOR ESPECÍFICO DEL AGUA

$t$ °C	J/kg·K	cal/g·K
0	4 218	1,007 6
10	4 192	1,001 4
15	4 186	1,000 0
20	4 182	0,999 0
30	4 179	0,998 3
40	4 179	0,998 3
50	4 181	0,998 8
60	4 184	0,999 5
70	4 190	1,001 0
80	4 196	1,002 4
90	4 205	1,004 5
100	4 216	1,007 2

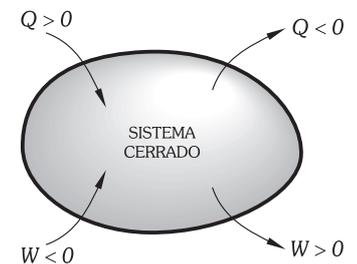


Fig. XV-1.– Convenimos que el calor  $Q$  es positivo si es absorbido del ambiente por el sistema y negativo si es calor cedido por el sistema al ambiente; el trabajo  $W$  es positivo si es realizado por el sistema sobre el medio exterior, y negativo si se considera realizado por el medio exterior sobre el sistema.

CALORES ESPECÍFICOS  
A 20 °C (cal/g·K)

Plomo	0,031
Oro	0,031
Platino	0,032
Mercurio	0,033
Cobre	0,092
Hierro	0,108
Aluminio	0,214
Sodio	0,293
Granito	0,191
Hormigón	0,201
Asfalto	0,220
Benceno	0,414
Hielo (-20 °C)	0,467
Hielo (0 °C)	0,488
Acetona	0,517
Éter	0,553
Alcohol etílico	0,581
Agua de mar (17 °C)	0,940

En todo el estudio anterior se ha supuesto que el calor específico es constante para el intervalo de temperatura  $\Delta T$ ; esto no es así, puesto que el calor específico de todas las sustancias cambia brusca y significativamente cuando se produce un cambio de estado; y aun en ausencia de tales cambios el calor específico disminuye para todas las sustancias cuando disminuye la temperatura (para la mayoría de las sustancias, el calor específico varía muy lentamente con la temperatura, pudiéndose considerar constante dentro de un determinado intervalo de temperatura). Teniendo en cuenta lo anteriormente dicho, el calor específico de una sustancia será:

$$c = \frac{1}{M} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{1}{M} \frac{dQ}{dT} \Rightarrow \boxed{dQ = Mc dT} \Leftrightarrow \boxed{Q = M \int_{T_1}^{T_2} c dT}$$

para realizar la integración necesitamos conocer la forma de la función:  $c = f(T)$ . Si  $c$  es constante de  $T_1$  a  $T_2$  la expresión anterior se reduce a:

$$Q = Mc \int_{T_1}^{T_2} dT = Mc (T_2 - T_1)$$

idéntica a la que hemos hallado en nuestro primer estudio.

Las unidades de calor específico serán: erg/g · K (CGS), J/kg · K (SI) y el kgm/utm · K (TÉCNICO). Una unidad que es muy utilizada y que persiste desde la teoría del calórico es: cal/g · K; su equivalente en el SI lo calcularemos teniendo en cuenta que  $1 \text{ cal} = 4,18 \text{ J}$ , quedándonos:  $1 \text{ cal/g} \cdot \text{K} = 4,18 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ ; que corresponde al calor específico del agua como consecuencia de la definición de caloría.

Debido a que  $1 \text{ }^\circ\text{C}$  es equivalente a  $1 \text{ K}$ , en todo lo anteriormente dicho podemos poner  $\Delta t$  (variación de temperatura en  $^\circ\text{C}$ ) en vez de  $\Delta T$  (variación de temperatura en  $\text{K}$ ).

### XV - 3. Capacidad calorífica de una sustancia

«La CAPACIDAD CALORÍFICA de una sustancia es la cantidad de calor necesaria para elevar un grado centígrado su temperatura».

Si  $M$  es la masa de la sustancia y  $c$  su calor específico, la capacidad calorífica es:

$$\boxed{C = Mc}$$

ya que  $\Delta t$  es  $1 \text{ }^\circ\text{C}$ . A esta magnitud física se llama «EQUIVALENTE EN AGUA» porque para los efectos de absorción o desprendimiento de calor, hace el mismo efecto que una masa de agua igual a su valor siempre que la masa se exprese en gramos y el calor específico en cal/g · K.

### XV - 4. Principio de las mezclas

«Cuando se mezclan dos sustancias a distinta temperatura, la caliente cede calor a la fría hasta quedar ambas a la misma temperatura y, si no hay influencia del medio externo, la cantidad de calor absorbida por una es igual a la desprendida por la otra».

### XV - 5. Determinación de calor específicos de sólidos y líquidos: método de las mezclas

Para hacer la aplicación práctica del anterior principio y determinar calores específicos, se emplean los calorímetros; éstos son unas vasijas de metal, introducida una dentro de la otra (Fig. XV-2), entre las que se pone una materia aislante o simplemente aire, para evitar las influencias térmicas del medio externo. En la vasija interior se pone una masa  $M$  determinada de agua. Un termómetro nos indica su temperatura  $t$ . Se calienta el cuerpo, de masa  $m$ , cuyo calor específico  $c$  se trata de determinar, hasta una temperatura  $t'$  mayor que  $t$ .

Se introduce el cuerpo en el agua y se agita ésta. La temperatura del agua asciende de  $t$  a un valor máximo  $t''$ . La aplicación del principio de las mezclas, expresando los calores específicos en cal/g · K, conduce a:

$$M (t'' - t) = mc (t' - t'') \Rightarrow \boxed{c = \frac{M (t'' - t)}{m (t' - t'')}}}$$

Hay que tener en cuenta, para una determinación precisa, que el vaso calorimétrico, el agitador, la parte sumergida del termómetro, etc., también se calienta, es decir, pasan de la temperatura  $t$  a la  $t''$ . En consecuencia, el principio de las mezclas se expresará:

$$mc (t' - t'') = M (t'' - t) + m_v c_v (t'' - t) + m_a c_a (t'' - t) + \dots = (M + \sum mc) (t'' - t)$$

siendo  $m_v$  y  $m_a$  ... las masas del vaso y el agitador, ...;  $c_v$  y  $c_a$  ... sus calores específicos y  $\sum mc$  la suma de los equivalentes en agua de todos los accesorios del calorímetro y, por tanto, su equiva-

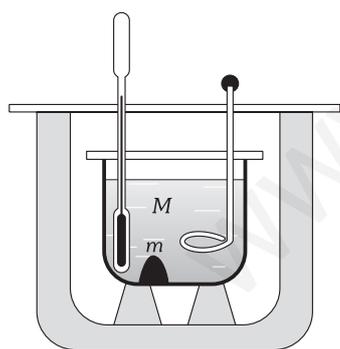


Fig. XV-2.- Calorímetro.

lente en agua. Para hallar éste se hace una previa calorimetría con un cuerpo de calor específico conocido (generalmente se mezclan agua caliente y fría).

Para determinar el calor específico de los líquidos se ponen éstos en el calorímetro en vez del agua empleada en la determinación anterior y se introduce en él un cuerpo sólido de calor específico conocido. También puede emplearse agua en el interior del calorímetro e introducir en ella una ampollita con el líquido siempre que se conozca el equivalente en agua de la ampolla.

**PROBLEMAS: 1 al 7.**

**XV – 6. Calorímetro de Bunsen**

Se basa el calorímetro de Robert Wilhem Bunsen (1811-1899), en la disminución de volumen que experimenta el hielo al fundirse. Un depósito de vidrio en el que ajusta un tubo de ensayo, está lleno de agua y su fondo con mercurio que llena, en parte, el tubo E (Fig. XV-3). Se procede, primeramente, a formar una capa de hielo alrededor de T, para lo cual se pone éter en él y su evaporación produce el enfriamiento necesario. Cuando funde hielo el mercurio retrocede en E.

¿Cuántas calorías hace falta que se desprendan en el tubo para que el mercurio retroceda una de las divisiones de la escala E? Para hacer tal determinación se introduce en el tubo T una masa  $M_1$  de agua conocida, a una temperatura  $t_1$ , la cual se enfriará hasta  $0^\circ\text{C}$  desprendiendo  $M_1 t_1$  calorías. Si el mercurio retrocede en E,  $n_1$  divisiones y Q es el número de calorías que corresponden al retroceso de una división, se habrá de verificar:

$$M_1 t_1 = n_1 Q \Rightarrow Q = \frac{M_1 t_1}{n_1}$$

quedando, así, calibrado el calorímetro.

Introducido en el tubo un cuerpo de masa  $m$ , a temperatura  $t$ , cuyo calor específico queremos determinar, si el mercurio retrocede en E,  $n$  divisiones, se verificará:

$$mct = nQ \Rightarrow c = \frac{nQ}{mt}$$

**XV – 7. Calores específicos de un gas**

Para elevar un grado la temperatura de un gramo de gas, se puede hacer de muy diversas formas: a volumen constante, a presión constante o variando ambas magnitudes de cualquier forma. Un gas tiene infinitos calores específicos de los cuales los más interesantes son:  $c_p$  (a presión constante) y  $c_v$  (a volumen constante); siempre se verifica que  $c_p > c_v$ .

El calentar a un gas un grado, es pasar de la isoterma a temperatura  $T$  a la correspondiente a  $(T + 1)$ ; si los valores particulares de la presión y volumen del gas a calentar son  $p_1$  y  $V_1$ , el calentamiento a presión constante hace pasar de  $V_1$  a  $V_2$  sin modificar  $p_1$ ; y a volumen constante pasar de  $p_1$  a  $p_2$  (paralela al eje  $p$ ) sin modificar  $V_1$ ; en el gráfico observamos la posibilidad de otros infinitos pasos (Fig. XV-4).

CALOR MOLAR DE UN GAS es la cantidad de calor necesaria para elevar a un mol, un grado su temperatura (a presión constante, a volumen constante o en las condiciones que se especifiquen).

con lo que las expresiones de los valores específicos molares a volumen constante ( $c_v$ ) y a presión constante ( $c_p$ ) serán:

$$c_v = \frac{1}{n} \left( \frac{dQ}{dT} \right)_{v = cte} \quad c_p = \frac{1}{n} \left( \frac{dQ}{dT} \right)_{p = cte}$$

luego la expresión de las cantidades de calor, en cada caso, para elevar a  $n$  moles de gas  $T$  grados, es:

$$\Delta Q_p = n c_p \Delta T \quad \Delta Q_v = n c_v \Delta T$$

La determinación del calor específico de un gas a presión constante  $-c_p-$  se realiza de la siguiente forma: un depósito contiene gas comprimido; por un tubo provisto de una llave y un manómetro se deja salir el gas siempre a la misma presión; la llave de paso sirve para graduar la presión del gas que sale, y para mantenerla constante, siguiendo las indicaciones del manómetro. El gas pasa por un serpentín, introducido en agua caliente, que eleva su temperatura hasta un valor determinado; el gas caliente pasa por otro serpentín introducido en un calorímetro con agua fría en el que se determinan las variaciones de temperatura; se gradúa la velocidad de paso del gas para que sus temperaturas inicial y final permanezcan constantes durante el lapso de tiempo en que realizamos las medidas.  $M$  = masa total en agua del calorímetro;  $m$  = masa gas;  $\Delta t$  = variación de temperatura en el calorímetro;  $\Delta t'$  = diferencia entre las temperaturas inicial y final del gas.

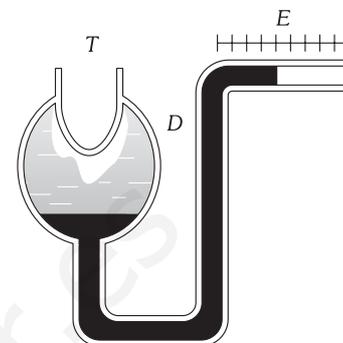


Fig. XV-3.- Calorímetro de Bunsen.

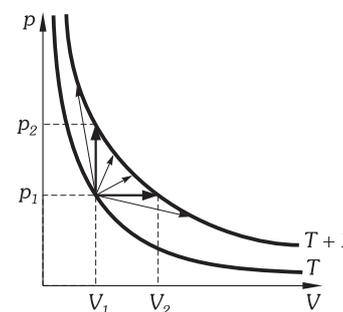


Fig. XV-4.- Calores específicos de un gas.

CALORES ESPECÍFICOS DE GASES A PRESIÓN Y A VOLUMEN CONSTANTE (J/kg·K)

Gas (20 °C)	$c_p$	$c_v$
Cloro	480	356
Oxígeno	917	656
Nitrógeno	1 038	741
Helio	5 230	3 210
Hidrógeno	14 320	10 160
Aire seco	1 005	717
Freón	590	522
Dióxido de carbono	837	647
Acetileno	1 680	1 366
Amoníaco	2 160	1 650
Metano	2 200	1 695

$$M \Delta t = mc_p \Delta t' \Rightarrow c_p = \frac{M \Delta t}{m \Delta t'}$$

El calor específico a volumen constante y cualquier otro calor específico del gas se puede calcular a partir de  $c_p$  por fórmulas que proporciona la Termodinámica.

**PROBLEMAS: 8 al 10.**

**B) CAMBIOS DE ESTADO O DE FASE**

**XV – 8. Cambios de estado o de fase**

Cuando el calor fluye de un sistema a otro, su temperatura generalmente cambia en forma suave y estacionaria. Una excepción importante a esta afirmación es el fenómeno llamado CAMBIO DE ESTADO O DE FASE. En la Fig. XV-5 quedan indicados y definidos los posibles cambios de estado. Se clasifican los cambios en dos grupos.

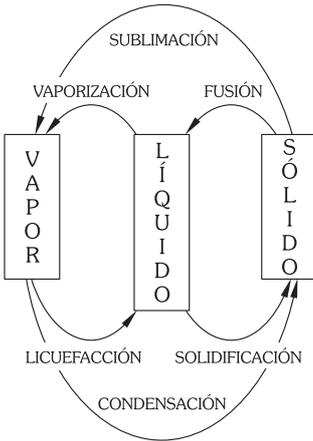


Fig. XV-5.- Cambios de estado.

- a) **PROGRESIVOS:** Son los que se verifican con absorción de calor. Van acompañados, generalmente, de un aumento de volumen: FUSIÓN, VAPORIZACIÓN y SUBLIMACIÓN.
- b) **REGRESIVOS:** Se verifican con desprendimiento de calor y, en general, con disminución de volumen: SOLIDIFICACIÓN, LICUEFACCIÓN y CONDENSACIÓN.

**XV – 9. Calor latente de cambio de estado**

CALOR LATENTE DE CAMBIO DE ESTADO ( $l$ ) para una sustancia determinada, es el número de calorías necesarias para cambiar de estado una unidad de masa, sin variar la temperatura, es decir, a la temperatura característica del cambio de estado.

Para realizar la transformación de  $M$  unidades de masa del cuerpo, harán falta un número de calorías dado por la expresión:

$$Q = Ml$$

Debido a que el flujo de calor que recibe el sistema mientras cambia de estado parece «ir a escondarse» (o sea, no produce cambios de temperatura) se llama calor *latente* (la palabra latente viene del latín *latere* que significa esconder); dependerá éste de la naturaleza del cambio de estado y de las propiedades de la sustancia.

CALORES LATENTES DE FUSIÓN Y DE VAPORIZACIÓN A LA PRESIÓN DE 760 mm de Hg

SUSTANCIA	PUNTO DE FUSIÓN (°C)	CALOR LATENTE DE FUSIÓN (cal/g)	PUNTO DE EBULLICIÓN (°C)	CALOR LATENTE DE VAPORIZACIÓN (cal/g)
Helio	-272,2 ( $p = 25$ atm)	1,25	-268,93	4,99
Nitrógeno	-209,97	6,09	-195,81	48,0
Oxígeno	-218,79	3,30	-182,97	50,9
Alcohol etílico	-114	24,9	78	204
Agua	0,00	79,9	100,00	540
Azufre	119	9,10	444,60	77,9
Mercurio	-39	2,82	357	65
Plomo	327,3	5,85	1 750	208
Aluminio	660	21,5	2 450	2 720
Plata	960,80	21,1	2 193	558
Oro	1 063,00	15,4	2 660	377
Cobre	1 083	32,0	1 187	1 210

**XV – 10. Ecuación de Clapeyron referente a los cambios de estado\***

Determina la ecuación establecida por Benoit Pierre E. Clapeyron (1799-1864) las variaciones que experimenta la temperatura a que se verifica el cambio de estado, cuando varía la presión. La ecuación es:

$$l = (v_2 - v_1) T \frac{\Delta p}{\Delta T} **$$

\* Admitiremos sin demostración esta ecuación que deduciremos en el capítulo XVI.

\*\* El calor latente queda medido en esta expresión en unidades de trabajo/masa. (Cada julio equivale a 0,24 calorías).



$l$  es el calor latente del cambio de estado;  $v_2$  y  $v_1$  son los volúmenes específicos (volumen de la unidad de masa) después y antes del cambio;  $T$  la temperatura absoluta a que éste se verifica;  $\Delta p$  la variación de presión y  $\Delta T$  la variación que experimenta la temperatura de cambio de estado como consecuencia de la variación ( $\Delta p$ ) de presión.

En los fenómenos de fusión, ebullición y sublimación  $l$  es positiva (hay que comunicar calor para realizar el cambio);  $v_2 - v_1$  es en general, positivo (mayor volumen final que inicial);  $T$  es, por naturaleza positiva. En consecuencia  $\Delta p/\Delta T$  debe ser positiva y  $\Delta p$  del mismo signo que  $\Delta T$ ; por lo tanto; a un aumento de presión corresponde un aumento de temperatura de cambio de estado.

En el diagrama  $p, T$  (Fig. XV-7)  $\Delta p/\Delta T$  es la pendiente de la curva. A pendiente positiva corresponden curvas crecientes.

En el caso de la fusión del hielo  $l$  y  $T$  son positivos ( $v_2 - v_1$ ) es negativo, el volumen final (agua) es menor que el inicial (hielo). El cociente  $\Delta p/\Delta T$  es negativo; por lo tanto: a un aumento de presión corresponde una disminución de la temperatura de fusión. Siendo  $\Delta p/\Delta T < 0$ , la curva de fusión es decreciente (Fig. XV-8).

### XV - 11. Fusión y solidificación

La fusión de los cuerpos cristalinos y la de los amorfos tiene diferencias esenciales. En la fusión de los primeros las propiedades del cuerpo sufren un cambio violento; los cuerpos amorfos, por el contrario, pasan por una serie de estados de reblandecimiento, variando sus propiedades gradualmente. Estudiaremos, únicamente, la fusión de los cuerpos cristalinos.

LEYES: 1.<sup>a</sup> Para una presión determinada cada sustancia tiene su temperatura característica de fusión idéntica a la de solidificación. 2.<sup>a</sup> Mientras dura la fusión o la solidificación la temperatura permanece constante.

Si en un calorímetro con hielo a  $-10^\circ\text{C}$  hacemos circular por un serpentín un vapor recalentado y anotamos la variación de temperatura con el tiempo, observamos un ascenso de temperatura hasta que el termómetro marca  $0^\circ\text{C}$  (rama a de la Fig. XV-6). Entonces, se estaciona la temperatura, comienza a fundir el hielo (rama b del gráfico) hasta que desaparece la última partícula de hielo. A partir de tal instante la temperatura del agua líquida asciende (rama c del gráfico).

Si hubiésemos partido del agua líquida por encima de  $0^\circ\text{C}$ , haciendo pasar por un serpentín introducido en el agua, un líquido o gas a temperatura inferior a  $0^\circ\text{C}$ , las temperaturas hubiesen variado inversamente (ramas c, b, a) verificándose a  $0^\circ\text{C}$ , el proceso de la solidificación (rama b) estacionándose la temperatura hasta la desaparición de la última gota de agua líquida.

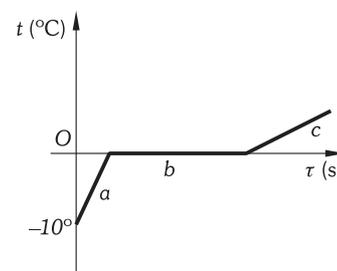


Fig. XV-6.- Variaciones de la temperatura ( $t$ ) con el tiempo ( $\tau$ ) al comunicar calor a un trozo de hielo a  $-10^\circ\text{C}$ .

### XV - 12. Calor de fusión

«CALOR DE FUSIÓN ( $l_f$ ) de una sustancia es el número de calorías necesarias para fundir la unidad de masa de ella, sin variar la temperatura, es decir, a la temperatura de fusión».

La cantidad de calor para fundir  $M$  unidades de masa de una sustancia, sin variar la temperatura, viene expresado por:

$$Q = Ml_f$$

Para determinar el calor de fusión de un cuerpo basta introducir en un calorímetro que contiene una cantidad adecuada de un líquido a temperatura  $t$ , superior a la de fusión del cuerpo problema ( $t_f$ ), una masa  $m$  de tal cuerpo a una temperatura  $t' < t$ . La observación del termómetro indica un descenso de la temperatura de  $t$  a  $t''$  (temperatura final de equilibrio). El calor cedido por el líquido del calorímetro, de masa  $M$  y calor específico  $c$ , es:

$$Q = Mc(t - t'')$$

El calor absorbido por el cuerpo es una suma de tres sumandos: cantidad de calor para elevar su temperatura de  $t'$  a  $t_f$ ; cantidad de calor necesaria para fundir el cuerpo y, por último, cantidad de calor para calentar el cuerpo ya líquido de  $t_f$  a  $t''$ .

Siendo iguales el calor cedido y el absorbido, se verifica:

$$Mc(t - t'') = mc_s(t_f - t') + ml_f + mc_l(t - t_f)$$

$c_s$  y  $c_l$  son los calores específicos en estado sólido y líquido. Conocidos los demás datos, se puede determinar  $l_f$ . (El calor de la fusión del hielo es aproximadamente  $80\text{ cal/g}$ ).

PROBLEMAS: 11 al 15.

### XV - 13. Variación de la temperatura de fusión con la presión

Al fundirse todos los cuerpos aumentan de volumen, excepto el hielo y el hierro de fundición que lo disminuyen. Al comprimir un cuerpo se dificulta el fenómeno de la fusión y, en consecuen-

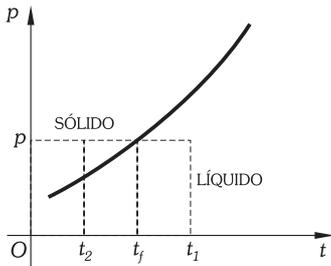


Fig. XV-7.- Variaciones de la temperatura de fusión con la presión.

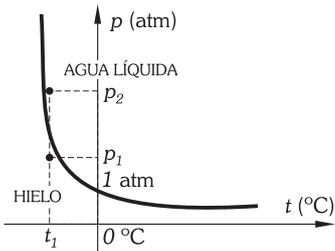


Fig. XV-8.- Variaciones de la temperatura de fusión con la presión para el agua.

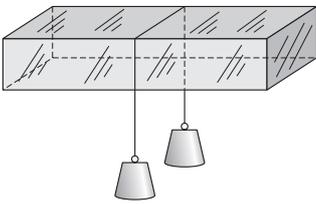


Fig. XV-9.- Rehielo.

cia, la temperatura del cambio de estado aumenta. En el hielo y el hierro, ocurre al revés: al aumentar la presión, la temperatura de fusión disminuye.

El hielo funde a  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  si la presión es  $760\text{ mm}$ . Si la presión es mayor que  $760\text{ mm}$  a menos de  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ; si la presión es menor que  $760\text{ mm}$  a más de  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

En los lugares a mayor altura que el nivel del mar, al ser la presión menor de  $760\text{ mm}$ , la temperatura de fusión del hielo es mayor que  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Estas variaciones de la temperatura de fusión del hielo son prácticamente inapreciables.

Las variaciones de la temperatura de fusión con la presión, estudiadas en la interpretación de la fórmula de Clapeyron, pueden expresarse gráficamente en un diagrama  $(p, t)$  dando, en general, curvas crecientes; para los cuerpos exceptuados son decrecientes (Figs. XV-7 y 8).

Dada una presión  $p$  y una temperatura  $t_1$  mayor que la de fusión, el cuerpo se encuentra en estado líquido (Fig. XV-7) y como de esta propiedad participan todos los puntos situados a la derecha de la curva, esta es la región representativa de tal estado. Si la temperatura dada ( $t_2$ ) es menor que la de fusión, el cuerpo es sólido; los puntos representativos de este estado están a la izquierda de la curva de equilibrio.

**XV - 14. Subfusión y rehielo**

*Los líquidos pueden permanecer como tales a temperaturas inferiores a la de solidificación, si el enfriamiento es lento y reposado; al fenómeno se le llama SUBFUSIÓN.*

El equilibrio inestable que se origina se rompe por una sacudida o la introducción de un cristal sólido del cuerpo, verificándose entonces la solidificación bruscamente y ascendiendo la temperatura hasta el valor correspondiente a la de fusión.

Si el líquido es agua, al aumento de volumen correspondiente a la solidificación brusca, provoca la ruptura de las vasijas cerradas llenas completamente y la disgregación de las rocas en cuyas grietas se verifica la formación de hielo.

Si se pone agua en un tubo de ensayo provisto de termómetro y se introduce en un vaso que contenga una mezcla de hielo y sal (mezcla frigorífica), se verá que la temperatura desciende por debajo de los  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , sin que el agua se congele. Basta entonces, echar un cristalito de hielo al agua, para que ésta se solidifique instantáneamente, a la vez que la temperatura se eleva a  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

*Se llama REHIELO a la formación de hielo al cesar el exceso de presión que lo fundía.*

Supongamos un trozo de hielo a una temperatura  $t_1$  y a una presión  $p_1$  (Fig. XV-8). Si elevamos la presión a  $p_2$ , pasamos a la región del agua líquida y el hielo funde. Al retornar a  $p_1$  (sin variar la temperatura) el agua solidifica (rehielo).

El fenómeno se observa al pretender partir una barra de hielo por la presión de un alambre (Fig. XV-9). La parte de contacto con él se funde por exceso de presión y solidifica de nuevo al cesar ésta, una vez que ha pasado el alambre, soldándose las partes antes separadas.

Los movimientos de los glaciares se explican en virtud de este mismo fenómeno. Una masa de hielo en un valle inclinado puede fluir porque, en las partes donde se comprime contra las rocas de los costados (morrenas laterales), el hielo se funde, amoldándose al obstáculo y una vez rebasado éste, al disminuir la presión, vuelve a solidificarse.

**PROBLEMAS: 11 al 15.**

**XV - 15. Interpretación cinético-molecular de la fusión**

Sabemos que los sólidos tienen estructura cristalina; es decir, el conjunto de fuerzas atractivas y repulsivas, entre átomos, iones y moléculas, determina la posición de los mismos en el espacio, o sea, su ordenación cristalográfica. En estas condiciones, los átomos no se encuentran en estado de reposo, sino que vibran en torno a una posición de equilibrio, con una amplitud que depende de la temperatura. Al aumentar la temperatura, se incrementa la energía cinética y puede ocurrir, que alguno de estos vibradores (átomos, iones o moléculas), no vuelva a su posición primitiva, rompiéndose los «enlaces elásticos» y desmoronándose la configuración cristalina, iniciándose entonces la FUSIÓN.

**XV - 16. Vaporización: sus clases**

*El paso de líquido a vapor, o VAPORIZACIÓN, se puede verificar en la superficie del líquido y a cualquier temperatura (EVAPORACIÓN) o en toda la masa del líquido y a temperatura constante (EBULLICIÓN).*

**XV - 17. Leyes de la ebullición**

1.<sup>a</sup> Para una presión determinada cada sustancia tiene su temperatura característica de ebullición idéntica a la de licuefacción. 2.<sup>a</sup> Mientras dura el fenómeno de la ebullición o la licuefacción, la temperatura permanece constante.

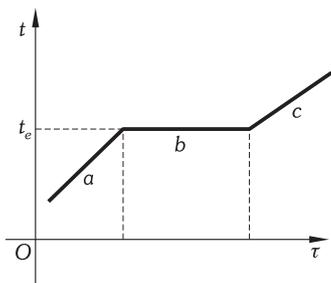


Fig. XV-10.- Variación de la temperatura (t) con el tiempo ( $\tau$ ) para el proceso de ebullición.

Realizando un gráfico de la variación que experimenta, con el tiempo, la temperatura de un líquido al que se calienta, obtendríamos un diagrama como el de la Fig. XV-10, en el que la rama a

representa el ascenso de temperatura del líquido conforme recibe calor; *b* el estacionamiento de la temperatura durante el proceso de la ebullición y la *c* el calentamiento del vapor en una vasija cerrada. El enfriamiento del vapor en vasija cerrada, quedaría representado por el mismo diagrama (ramas *c*, *b* y *a*, sucesivamente) correspondiendo la *b* al proceso de licuefacción a temperatura constante y la *c* y *a* los enfriamientos de vapor y líquido respectivamente.

### XV – 18. Calor de vaporización

CALOR LATENTE DE VAPORIZACIÓN ( $l_v$ ) de una sustancia es el número de calorías necesarias para vaporizar la unidad de masa sin variar la temperatura.

La cantidad de calor para vaporizar  $M$  unidades de masa de una sustancia sin variar su temperatura, es:

$$Q = Ml_v$$

PROBLEMAS: 16 al 19.

### XV – 19. Variación de la temperatura de ebullición con la presión

El agua hierve a  $100^\circ\text{C}$  si la presión es  $760$  mm. Si la presión es mayor que  $760$  mm a más de  $100^\circ\text{C}$ , si la presión es menor de  $760$  mm a menos de  $100^\circ\text{C}$ . En los lugares a mayor altura que el nivel del mar, al ser la presión menor de  $760$  mm, la temperatura de ebullición del agua es menor que  $100^\circ\text{C}$ .

Estas variaciones de la temperatura de ebullición con la presión, estudiadas ya en la interpretación de la fórmula de Clapeyron, puede expresarse gráficamente en un diagrama ( $p, t$ ) dando siempre curvas crecientes a cuya derecha está la región representativa del vapor y a la izquierda del líquido (Fig. XV-11). Razonamiento idéntico al del párrafo XV-13).

Una aplicación muy interesante de la influencia de la presión en el punto de ebullición son los AUTOCLAVES, utilizados en Medicina para esterilizar objetos y en Química para producir ciertas reacciones. Son calderas, cerradas herméticamente (Fig. XV-12) provistas de un Manómetro ( $M$ ) y de una Válvula ( $V$ ) de seguridad regulable. Se coloca agua en su interior y se calienta. El vapor irá aumentando la presión hasta que adquiera la fuerza necesaria para abrir la válvula, que habremos regulado previamente. Podremos pues, tener temperaturas superiores a  $100^\circ\text{C}$ , sin más que ajustar la válvula a la presión correspondiente. Así es como tenemos la seguridad de la esterilización, pues hay microorganismos que a  $100^\circ\text{C}$  todavía pueden conservar la vida debido a que se recubren de una especie de cápsula resistente (*esporulación*).

Debido a este retardo en el punto de ebullición, se consiguen en las máquinas de vapor temperaturas y presiones muy altas, que elevarán la potencia de esas máquinas. En este mismo fenómeno se fundan las llamadas «Ollas-exprés».

### XV – 20. Vapores saturantes. Tensión máxima de vapor

Un vapor está en estado de saturación cuando la atmósfera que lo contiene no admite mayor cantidad de vapor. Llamamos TENSION MÁXIMA DE VAPOR ( $f$ ) a la presión que ejerce el vapor en estado de saturación.

Como consecuencia de estas definiciones se puede afirmar que «un líquido se evapora cuando la presión ejercida por su propio vapor es menor que su tensión máxima», ya que entonces la atmósfera que hay sobre el líquido no está saturada de vapor.

«El equilibrio entre el líquido y vapor se establece cuando la presión ejercida por este último es igual a la tensión máxima», pues entonces se ha llegado a la saturación. El equilibrio obtenido es dinámico, habiendo constante evaporación, pero licuándose, al mismo tiempo, tanto vapor como líquido evaporado.

### XV – 21. Interpretación cinético-molecular de la vaporización

Si se suministra energía calorífica a un líquido, se incrementa la energía cinética media de sus moléculas. Las moléculas se mueven más rápidamente y sobre más larga distancia, lo que hace que el líquido aumente de volumen (Dilatación). Al seguir incrementando la temperatura, las moléculas se mueven todavía más deprisa.

Como vimos en la teoría cinético-molecular de los gases, la «energía cinética media», es una función de la temperatura, pero ya sabemos que no todas las moléculas individualmente poseen la misma velocidad. Lo mismo que en un batallón de mil soldados son pocos los que tienen la misma talla mínima ( $1,55$  m, por ejemplo) y también son muy pocos los que miden más de  $1,90$  m, siendo en proporción mucho más numerosos los de tallas comprendidas entre  $1,65$  m y  $1,75$  m; en las moléculas de un líquido también son relativamente pocas las que tienen una gran energía cinética. Las de este tipo (excepcionalmente rápido), serán las que moviéndose cerca de la superficie, escaparán del líquido debido a su energía, proyectándose al espacio exterior como molécula de vapor.

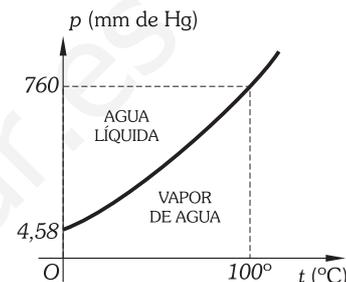


Fig. XV-11.- Variaciones de la temperatura de ebullición del agua con la presión.

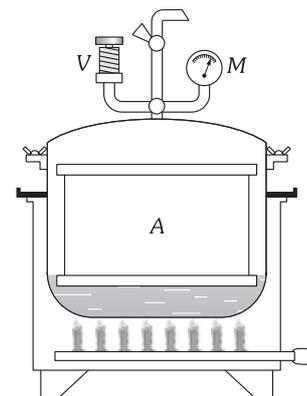


Fig. XV-12.- Esquema de un autoclave.

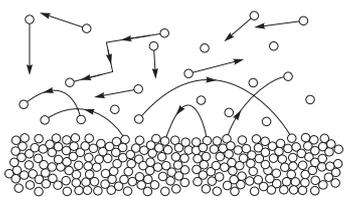


Fig. XV-13.- Un líquido y su vapor (moléculas rápidas que escapan del líquido pudiéndose proyectar otra vez a su interior).

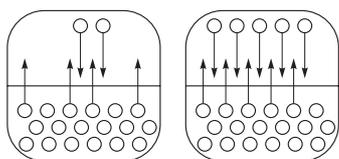


Fig. XV-14.- Si tantas moléculas como escapan del líquido se incorporan al mismo existirá un equilibrio dinámico, y decimos que «el ambiente está saturado a esa temperatura».

Si todas las moléculas de un líquido tuvieran la misma velocidad nos sería imposible explicar el fenómeno de vaporización, pues en tanto las moléculas no adquiriesen la energía necesaria, ninguna pasaría a la fase de vapor, y a una temperatura determinada todas pasarían a transformarse en vapor al mismo tiempo.

Al ser las moléculas que se escapan «las más energéticas», el promedio de energía de las que quedan en el líquido será menor que el que exista antes de escapar aquéllas. Por tanto, *el líquido se enfría durante la evaporación*.

Las moléculas «escapadas» puede ocurrir que choquen con el gas que se encuentran en las proximidades de la superficie del líquido o con otras del mismo líquido ya escapadas de él y que también se encuentran en las proximidades de su superficie; entonces puede ocurrir que por efecto de este choque cambien el sentido de su velocidad volviendo a introducirse en el líquido frenando de esta forma el proceso de enfriamiento: «soplado» sobre la superficie de un líquido, apartando las moléculas ya evaporadas, disminuimos la probabilidad de choque y por tanto aumenta la rapidez del proceso de enfriamiento.

Si tapamos el recipiente en donde se verifica la evaporación (Fig. XV-14), irá aumentando la cantidad de moléculas en el espacio que tenemos sobre el líquido. Los choques entre las moléculas de vapor irán en aumento tanto entre sí como con las paredes del recipiente y con la superficie libre del líquido, aumentando por consiguiente la presión. Algunas de las moléculas de vapor serán captadas por el líquido. Llegado el momento en que *tantas moléculas como escapan del líquido se incorporan al mismo, existe un equilibrio dinámico y decimos que el ambiente está saturado a esa temperatura*. La presión que ejerce el vapor a esa temperatura la llamamos *presión de saturación* o TENSIÓN MÁXIMA DE VAPOR y es característica para cada líquido, dándonos la medida de su tendencia de escape para abandonar el líquido.

### XV - 22. Evaporación en el vacío

Todo líquido se evapora en el vacío hasta que la presión ejercida por su vapor alcanza el valor de la tensión máxima. Ello nos proporciona un procedimiento para medir esta última.

Se emplea un dispositivo análogo al empleado en la experiencia de Torricelli (párrafo XIII-4). En la parte superior del tubo invertido y sobre el mercurio queda un espacio vacío, que va a servir de cámara de evaporación. Con una pipeta de punta curva se introduce por la parte inferior del tubo una gota de líquido que sube a la superficie interior del mercurio por su menor densidad y se evapora; se van introduciendo, de la misma forma, sucesivas gotas hasta que una de ellas no se evapora, quedando líquida sobre la superficie del mercurio. La presión que ejerce el vapor hace descender el nivel interior. La diferencia de alturas barométricas, antes y después de la experiencia, nos mide, en milímetros de mercurio, la tensión máxima de vapor.

«Hechas experiencias con el mismo líquido a diversas temperaturas se observa, al crecer éstas, un aumento de la tensión máxima de vapor».

### XV - 23. Cálculo de la masa de un vapor

Conocida la presión  $p$  que un vapor ejerce dentro de un recinto de volumen  $V$ , la masa de vapor existente en él viene dada (párrafo XIV-20) por:

$$M = V\rho = V\rho_0 \frac{p_t}{p_0} \frac{T_0}{T} = V\rho_0 \frac{p_t}{760} \frac{273,16}{273,16 + t}$$

en la que  $p_t$  debe estar medida en mm de Hg. La presión del vapor  $p_t$  es la tensión máxima, cuando el vapor esté a saturación. Al crecer la tensión con la temperatura, la masa de vapor saturante que llena un recinto aumenta, también, con ella.

### XV - 24. Evaporación en el seno de un gas

La evaporación de un líquido en el seno de un gas ofrece las mismas características que en el vacío.

«Un líquido se evapora en el seno de un gas hasta que la presión ejercida por su propio vapor alcanza el valor de la tensión máxima».

La presión total, suma de las presiones parciales (Ley de Dalton, párrafo XIV-19) no influye en la masa del líquido evaporado, sino únicamente en la velocidad de evaporación (masa de líquido transformada en vapor en un segundo), que está regida por las siguientes leyes:

«La velocidad de evaporación de un líquido es directamente proporcional a su superficie ( $S$ ) y a la diferencia entre su tensión máxima ( $f$ ) y la presión de su vapor ( $p$ ), y es inversamente proporcional a la presión total del gas que existe sobre él ( $H$ )».

$$v = \frac{KS(f - p)}{H}$$

**XV – 25. Principio de la pared fría o de Watt**

«En un recinto, cuyas paredes tienen distinta temperatura, la tensión máxima del vapor saturante es la que corresponde a la temperatura de la pared más fría».

Supongamos dos recintos A y B a temperaturas  $t_1$  y  $t_2$  invariables, y que  $t_1 > t_2$  (Fig. XV-15). El vapor saturante de A, difundiéndose en todo el volumen, ejerce en B una presión mayor que la tensión máxima y, por lo tanto, se licúa. El fenómeno continúa hasta que todo el líquido de A pasa a B y el vapor, en todo el recinto, quedará a la tensión máxima correspondiente a  $t_2$ .

El principio, enunciado por James Watt (1736-1819), explica la formación de «rocío» en la parte interior de los vidrios de la ventana de una habitación, los días en que el ambiente externo es más frío que el del interior de la casa.

Una de las más importantes aplicaciones de este principio es la *destilación*.

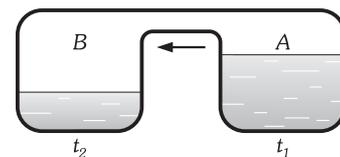


Fig. XV-15.- Principio de la pared fría o de Watt.

**XV – 26. Estado higrométrico de la atmósfera**

Por evaporación de mares, ríos y lagos, existen en el aire atmosférico cantidades de vapor de agua que varían con el lugar y el tiempo.

ESTADO HIGROMÉTRICO ABSOLUTO ( $M$ ) es la masa de vapor de agua que hay en  $1 \text{ m}^3$  de aire.

Su valor, en gramos, es (párrafo XV-23):

$$M = 10^6 \frac{18}{22\,400} \frac{p}{760} \frac{273,16}{273,16 + t} \quad (1)$$

( $10^6$  = volumen en  $\text{cm}^3$ ;  $18/22\,400 \text{ g/cm}^3$  = masa específica normal del vapor de agua;  $p$  = presión del vapor de agua en mm de mercurio;  $t$  = temperatura en  $^\circ\text{C}$ ).

ESTADO HIGROMÉTRICO RELATIVO O HUMEDAD RELATIVA ( $E$ ) es el cociente de dividir la masa de vapor de agua que hay en un  $\text{m}^3$  de aire ( $M$ ), por la masa de vapor que habría a saturación en el mismo volumen y a la misma temperatura ( $M_s$ ).

$$E = \frac{M}{M_s}$$

El valor máximo de  $E$  es la unidad; entonces ( $M = M_s$ ) la atmósfera está saturada de vapor de agua. Un estado higrométrico relativo  $0,25$  significa que en un volumen de aire existe una masa de agua que es  $0,25$  (la cuarta parte) de la que existiría a saturación y a la misma temperatura. Multiplicando por  $100$  la expresión anterior obtendríamos el «tanto por cien» de vapor, referido a la saturación ( $25\%$  en el caso anterior).

El denominador de la fracción es:

$$M_s = 10^6 \frac{18}{22\,400} \frac{f}{760} \frac{273,16}{273,16 + t} \quad (2)$$

$f$  es la tensión máxima del vapor de agua en mm de Hg a la temperatura  $t$ . Por división de (1) por (2), obtenemos:

$$E = \frac{M}{M_s} = \frac{p}{f} \quad (3)$$

El ESTADO HIGROMÉTRICO RELATIVO se puede definir también, como «el cociente de dividir la presión parcial del vapor de agua en el aire, por la tensión máxima a la misma temperatura».

**PROBLEMAS: 20 al 26.**

**XV – 27. Determinación del estado higrométrico**

El denominador de la fórmula (3),  $M_s$ , lo proporcionan las tablas de constantes físicas en función de la temperatura del ambiente. El numerador  $M$  se determina por los higrómetros.

En el HIGRÓMETRO QUÍMICO se pasa un volumen determinado de aire por una serie de tubos en  $U$  con pómez sulfúrica que obra de desecador; la diferencia de masa de estos tubos antes y después del paso del aire, da la masa de vapor de agua contenida en tal volumen.

El HIGRÓMETRO DE PUNTO DE ROCÍO se basa en la disminución del valor de la tensión máxima al bajar la temperatura. No estando la atmósfera saturada, la presión parcial del vapor de agua es menor que la tensión máxima ( $p < f$ ). Si el ambiente se enfría,  $f$  disminuye y en el instante en que  $p = f'$  (atmósfera saturada) se empañan los objetos brillantes. Conocidas las temperaturas del ambiente y del punto de rocío, las tablas de constantes físicas nos dan las tensiones  $f$  y  $f' = p$ , quedando determinado el estado higrométrico por la fórmula (3) del párrafo anterior. El enfriamiento se produce por evaporación del éter contenido en un recipiente con una pared metálica bruñida,

TENSIONES MÁXIMAS DE VAPOR DE AGUA

TEMPERATURA ( $^\circ\text{C}$ )	TENSIÓN DE VAPOR (mm de Hg)
0	4,58
5	6,54
10	9,21
15	12,79
20	17,54
25	23,77
30	31,84
40	55,36
50	92,60
60	149,51
70	233,85
80	355,34
90	525,94
100	760,00

MASA DE VAPOR DE AGUA EN AIRE SATURADO

TEMPERATURA (°C)	M <sub>s</sub> (g H <sub>2</sub> O/m <sup>3</sup> de aire)
0	4,85
5	6,80
10	9,40
15	12,80
20	17,30
25	23,10
30	30,35
35	39,55
40	50,10

cuya superficie externa se empaña al llegar a la saturación. Un termómetro, cuyo depósito está rodeado del vapor de éter, indica la temperatura del punto de rocío.

El PSICRÓMETRO es un aparato constituido por dos termómetros; el depósito de uno de ellos está constantemente humedecido por agua que, ascendiendo por una mecha, moja una muselina que lo envuelve y, por efecto de evaporación su temperatura desciende. En función de la diferencia de temperaturas del termómetro seco y húmedo y de la temperatura del seco, se determina el estado higrométrico.

**XV - 28. Mecanismo de la ebullición**

Una de las formas de la vaporización es la EBULLICIÓN: *paso del líquido a vapor en toda la masa líquida a temperatura constante.*

Imaginemos una burbuja muy próxima a la superficie de un líquido; ella hace de cámara de evaporación y en su interior se produce vapor hasta alcanzar una presión igual a la tensión máxima a la temperatura de la experiencia. Si la presión externa es mayor que la interna (tensión máxima) la burbuja se comprime y el vapor se licúa; pero si las dos presiones se igualan la burbuja revienta y el fenómeno de la ebullición se produce.

«Para que un líquido hierva es necesario que la tensión máxima de su vapor sea igual a la presión que soporta».

Es de hacer observar que una burbuja situada en el interior de un líquido soporta, además de la presión externa, la hidrostática correspondiente a la capa de líquido que hay sobre ella y, en consecuencia, para que el fenómeno de la ebullición se verifique en tal lugar, necesita una mayor presión interna (mayor tensión de vapor) lo que obliga a la existencia de una mayor temperatura conforme aumenta la profundidad en el líquido hirviendo.

Las temperaturas de ebullición se observan siempre, en evitación de estas variaciones, en el vapor que está en contacto con la superficie del líquido.

Un líquido hierve, a la presión normal, cuando su tensión máxima es 760 mm; el agua adquiere tal tensión a 100 °C. Una disminución de presión lleva consigo un descenso de la temperatura de ebullición, ya que la tensión máxima a adquirir es menor. Al aumentar la presión aumenta la temperatura de ebullición.

**XV - 29. Curvas de estado. Punto triple**

Reuniendo en un solo gráfico las curvas de fusión y ebullición, se obtiene el diagrama de la Fig. XV-16. A una presión *p* y a temperatura *t*<sub>1</sub> el cuerpo es sólido; si lo calentamos sin variar la presión, aumenta la temperatura, y al llegar a la *t*<sub>2</sub> el cuerpo funde; terminada la fusión, si se sigue comunicando calor, la temperatura del líquido se eleva (*t*<sub>3</sub>) hasta que llegando a *t*<sub>4</sub> rompe a hervir; terminada la ebullición en vasija cerrada el vapor se calienta (*t*<sub>5</sub>). Partiendo de esta temperatura, el enfriamiento isobárico produce los cambios inversos, representando, en este caso, *t*<sub>4</sub> y *t*<sub>2</sub> las temperaturas de licuefacción y solidificación.

Si la presión es *p'* y la temperatura inicial *t*<sub>6</sub> el calentamiento del sólido le hace llegar a la temperatura *t*<sub>7</sub> en que se verifica la sublimación.

Siendo la presión *p''* al elevar la temperatura del cuerpo en estado sólido se llega a un punto *P*, a temperatura *t*<sub>8</sub>, en que coexisten los estados sólido, líquido y vapor (PUNTO TRIPLE). Cuando la presión del punto triple (característica de la sustancia) es mayor que la atmosférica, el cuerpo sublima a la presión normal (yodo).

Por debajo del punto triple, la CURVA DE SUBLIMACIÓN se prolonga hasta cero absoluto en donde se anula la presión. La CURVA DE FUSIÓN se eleva casi verticalmente, lo que indica que la temperatura del punto triple es muy próxima a la de fusión a la presión normal. Para el agua esta curva es descendente (casi vertical) como se indica en la Fig. XV-16 en línea de trazos. La CURVA DE VAPORIZACIÓN se eleva a partir del punto triple cada vez más rápidamente y termina en el punto crítico *C*; para temperaturas mayores que *t*<sub>c</sub> el cuerpo no se licúa al aumentar la presión. Como volveremos a comentar en la cuestión XV-32, la línea *Ct*<sub>c</sub> marca la diferencia entre gases y vapores.

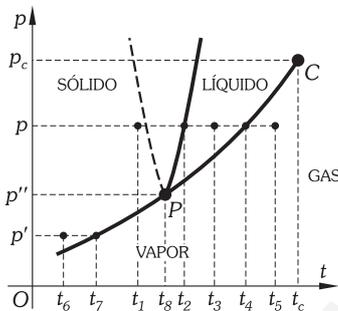


Fig. XV-16.- Punto triple.

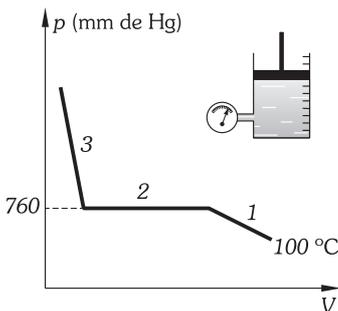


Fig. XV-17.- Licuefacción por compresión del agua.

**C) LICUEFACCIÓN DE GASES. ECUACIÓN DE VAN DER WAALS**

**XV - 30. Licuefacción por compresión**

Sin modificar la temperatura de un vapor se puede conseguir la licuefacción por un aumento de presión. Si en un cilindro graduado, cerrado con un émbolo y provisto de un manómetro, para realizar la medida de la presión, se tiene vapor de agua a 100 °C y presión menor de una atmósfera (rama 1 de la Fig. XV-17) no hay formación de líquido al comprimir; al disminuir el volumen aumenta la presión interna y cuando llegue a adquirir el valor de una atmósfera (tensión máxima del vapor de agua a 100 °C) comenzará la licuefacción. (La rama 1 del gráfico representa ese aumento de presión al disminuir el volumen). Una vez comenzado a licuar el vapor, la presión no varía aunque se disminuya el volumen, pues mientras subsiste el equilibrio, la presión que ejerce el

vapor es la tensión máxima. (Rama 2 paralela al eje V). Licuado todo el vapor, a grandes aumentos de presión corresponden pequeñas variaciones de volumen por la poca compresibilidad de los líquidos. (Rama 3 del gráfico).

**XV – 31. Isotermas de los gases reales. Punto crítico**

Si realizamos prácticamente la compresión de un mol de un gas real a distintas temperaturas, se observa que conforme éstas se elevan ( $T_1, T_2, T_3, \dots$ ) la variación de volumen correspondiente a la licuefacción (paralela al eje V) disminuye. Para una temperatura  $T_k$  el segmento se transforma en un punto de inflexión llamado PUNTO CRÍTICO; en él las propiedades del vapor y del líquido se confunden (Fig. XV-18).

Las isotermas correspondientes a temperaturas superiores a la crítica se asemejan tanto más a las isotermas teóricas cuanto más se eleva la temperatura, no verificándose la licuefacción a tales temperaturas.

Llamamos gas ideal, al infinitamente expansionado, es decir, que está infinitamente alejado de las condiciones necesarias para la licuefacción, cumpliendo exactamente las leyes de Boyle-Mariotte y Gay-Lussac, que por ello se denominan leyes límites.

TEMPERATURA CRÍTICA es una temperatura tal que a temperaturas superiores a ella un gas no se puede licuar, cualesquiera que sean las presiones a que está sometido. (Está representada en los gráficos por  $T_k$ ).

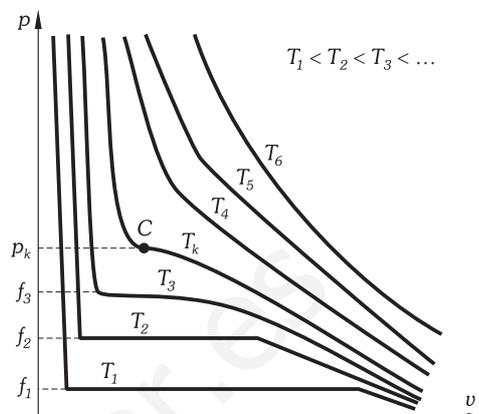


Fig. XV-18.– Isotermas de los gases reales.

PROBLEMAS: 27 y 28.

**XV – 32. Curva límite de saturación: diferencias entre gases y vapores**

Si unimos entre sí los extremos de los segmentos paralelos al eje de los volúmenes que representan la licuefacción en la gráfica anterior, obtenemos la curva ABC (C, punto crítico) llamada CURVA LÍMITE DE SATURACIÓN. (Fig. XV-19). Ésta, con la ISOTERMA CRÍTICA (DC), dividen al plano en cuatro regiones:

Región 1.– GAS: el cuerpo no se licúa cualesquiera que sean las presiones que sobre él ejerzamos.

Región 2.– VAPOR: el cuerpo se licúa por compresión.

La diferencia que existe entre gases y vapores es que los primeros por una compresión isoterma (temperatura constante) no se licúan y los segundos pueden licuarse por compresión.

Región 3.– Líquido.

Región 4.– Vapor en equilibrio con el líquido.

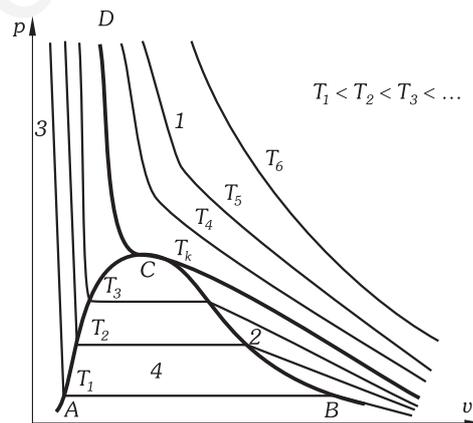


Fig. XV-19.– Curva límite de saturación.

El cociente de la masa molar entre el volumen correspondiente al extremo derecho de la parte recta de la isoterma es la densidad del vapor saturado, y si la dividimos entre el volumen correspondiente al extremo izquierdo, obtendremos la densidad del líquido, a la misma temperatura.

Como se aprecia en la figura, la diferencia de densidades disminuye con la temperatura, y a la temperatura crítica (374,15 °C para el agua) esa diferencia se anula, es decir desaparece la distinción entre líquido y vapor saturado. Por encima de esa temperatura la sustancia se comporta siempre como un gas, a pesar de que para una presión suficientemente alta su densidad pueda ser mayor que la del líquido.

**XV – 33. Licuefacción de gases**

Existen gases, como los dióxidos de azufre y de carbono, cuya temperatura de licuefacción para la presión normal se consigue fácilmente por medio de mezclas frigoríficas; pero hay otros gases (aire, oxígeno, hidrógeno, etc.), cuya temperatura crítica es tan baja (-140 °C, -119 °C, -242 °C) que hacen necesarios procedimientos más complejos.

Se basa la licuefacción de tales gases (permanentes) en el efecto Joule-Kelvin o enfriamiento que experimentan los gases en determinadas condiciones de presión, volumen y temperatura, cuando sufren una expansión brusca.

En el apartado de Karl Ritter Linde (1842-1934) (Fig. XV-20) el gas, al ser sometido en un compresor a una presión de 200 atmósferas eleva su temperatura. Pasa por el tubo A al refrigerante R' (por el que circula agua) y se enfría hasta unos 10 °C; en la válvula R sufre una expansión brusca y se enfría y circulando por la corona exterior E de los tubos concéntricos B, enfría el gas que llega por el interior y vuelve al cilindro para ser comprimido de nuevo. Al cabo de sucesivas expansiones el gas se licúa cayendo, ya líquido, al vaso V.

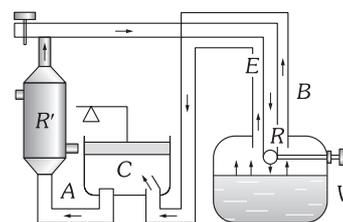


Fig. XV-20.– Esquema del aparato de Linde.

CONSTANTES DE VAN DER WAALS

GAS	$a \left( \frac{\text{atm} \cdot \text{l}}{\text{mol}^2} \right)$	$b \left( \frac{\text{l}}{\text{mol}} \right)$
Ar	1,30	0,032
H <sub>2</sub>	0,24	0,027
N <sub>2</sub>	1,35	0,039
O <sub>2</sub>	1,35	0,032
CO <sub>2</sub>	3,62	0,043
H <sub>2</sub> O	5,47	0,030

### XV – 34. Ecuación de Van der Waals

Para describir el comportamiento real de los gases se han propuesto varias ecuaciones de estado, que se ajustan más o menos, según los valores de la presión, a los resultados experimentales.

La ecuación propuesta por Johannes Diderik Van der Waals (1837-1923) se basa en consideraciones de la teoría cinética de los gases para los que, en el comportamiento ideal, se ha considerado nulo el tamaño de las moléculas; de esta forma, cada una de ellas dispone de todo el volumen del recipiente para moverse. En un gas esto no ocurre y, por lo tanto, el volumen intermolecular (volumen a que se refiere la ecuación de estado de los gases perfectos) es menor que el volumen total del gas. Se resta, por ello, al volumen real del gas un término correctivo.

La presión que interviene en la fórmula de los gases ideales es la originada por los choques moleculares no influenciados por la cohesión, ya que ésta se considera nula en el comportamiento ideal de los gases. En un gas real las atracciones moleculares son apreciables y, en consecuencia, frenadas las moléculas por la cohesión, chocan con menor velocidad contra las paredes. La presión que ejercería un mol de un gas sin cohesión sería la real ( $p$ ) más un término correctivo  $a/v^2$ , siendo  $a$  un coeficiente característico del gas. La ecuación de VAN DER WAALS o ecuación que determina el estado de los gases reales para un mol es:

$$\left( p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = RT \quad (4)$$

$T$  es la temperatura absoluta y  $a$  y  $b$  parámetros característicos del gas que se determinan experimentalmente.

### XV – 35. Isotermas de Van der Waals

La ecuación (4) de Van der Waals puede transformarse de la forma:

$$(pv^2 + a)(v - b) = v^2 RT \Rightarrow pv^3 - (RT + bp)v^2 + av - ab = 0 \quad (5)$$

Es ésta una ecuación de tercer grado en  $v$  cuya representación gráfica es la de la Fig. XV-21. A temperaturas bajas se observa que a cada presión ( $p_1$  por ejemplo) le corresponden tres valores reales ( $v_1, v_2, v_3$ ) del volumen molar, lo que está en desacuerdo con la forma de las isotermas experimentales. Los dos valores extremos se encuentran aproximadamente sobre la curva de saturación, con lo que es lógico considerar que el menor de ellos ( $v_1$ ) corresponde al estado líquido y el mayor ( $v_3$ ) al estado de vapor.

En el punto crítico las tres raíces de la ecuación (5) se confunden en una sola, y por encima de la temperatura crítica, para cada valor de  $p$  se obtiene una solución real y dos imaginarias que carecen de significado físico.

Queda por aclarar el significado del estado de volumen  $v_2$ . Hay que observar en primer lugar que los tramos  $AB$  (estado líquido) y  $GH$  (estado de vapor) coinciden con la forma de la isoterma experimental.

Los estados del tramo  $DEF$  no pueden existir ya que corresponderían a un comportamiento inexplicable de la sustancia. En efecto, un aumento de presión produciría un aumento de volumen, que a su vez originaría otro aumento de la presión, y así sucesivamente hasta que el sistema alcanzase el punto  $F$  de la curva. Análogamente, una disminución de la presión llevaría espontáneamente el sistema al punto  $D$ . Por tanto no es de extrañar que en las isotermas experimentales no aparezca el tramo  $DEF$  pues corresponde a estados que, de producirse, serían extremadamente inestables. El estado correspondiente a la solución  $v_2$  de la ecuación (5) no se observa debido a su inestabilidad.

Los estados representados en los tramos  $BD$  y  $FG$  de la isoterma corresponden a una variación razonable del volumen con la presión. No son tan inestables como los del tramo  $DEF$ , aunque son menos estables que los del tramo horizontal  $BEG$ . Se llaman ESTADOS METAESTABLES, y se pueden obtener en condiciones especiales.

El tramo  $FG$  es prolongación del  $GH$ , corresponde al estado de vapor, pero en cualquiera de sus estados la presión de vapor es mayor que la tensión del vapor saturado. Se dice que en tales condiciones el vapor está SOBRESATURADO o SOBREENFRIADO. Para realizar esos estados es necesario limpiar perfectamente el recipiente que contiene el vapor en un estado del tramo  $GH$ , eliminando cualquier partícula de polvo y cualquier carga eléctrica que puedan actuar como centros de condensación, para, a continuación, producir un rápido enfriamiento del recipiente. Se puede conseguir así vapor de agua que permanece sobreenfriado durante un tiempo bastante largo. En este hecho se basa la cámara de niebla, empleada en el rastreo de partículas cargadas.

Los estados del tramo  $BD$  son incluso más difíciles de obtener que los del  $FG$  por ser más inestables. Corresponden a estado líquido ya que  $BD$  es la prolongación de  $AB$ , y en tales situaciones se habla de LÍQUIDO SOBREALENTADO.

**PROBLEMAS: 29 y 30.**

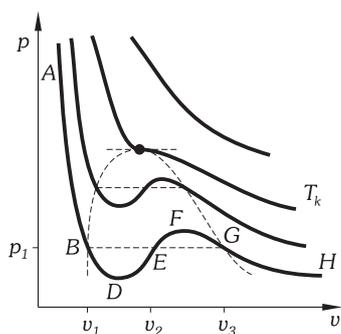


Fig. XV-21.- Isotermas de Van der Waals.

**XV – 36. Coordenadas del punto crítico**

La ecuación (4) de Van der Waals puede escribirse, despejando  $p$ , de la forma:

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$$

y en el punto crítico:

$$p_k = \frac{RT_k}{v_k - b} - \frac{a}{v_k^2} \quad (6)$$

Por otra parte, la isoterma  $T_k$  presenta en el punto crítico un punto de inflexión, con lo que allí su primera y segunda derivadas son nulas. Derivando  $p$  respecto de  $v$  a temperatura constante, y sustituyendo las variables por sus valores críticos, tenemos:

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{RT_k}{(v_k - b)^2} + \frac{2a}{v_k^3} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{d^2p}{dv^2} = \frac{2RT_k}{(v_k - b)^3} - \frac{6a}{v_k^4} = 0 \quad (8)$$

Del sistema de ecuaciones (6), (7) y (8), resuelto para  $a$ ,  $b$  y  $R$ , resulta:

$$a = 3p_k v_k^2 \quad b = \frac{v_k}{3} \quad R = \frac{8p_k v_k}{3T_k} \quad (9)$$

expresiones que permiten calcular los parámetros de la ecuación de Van der Waals de cualquier gas a partir de la medida de las coordenadas del punto crítico. De la tercera de ellas obtenemos que el cociente  $RT_k/p_k v_k$ , que en los gases ideales es igual a la unidad, vale  $8/3$  para los gases reales.

**XV – 37. Ecuación reducida de Van der Waals. Ley de los estados correspondientes**

La isoterma correspondiente a una temperatura determinada, obtenida para distintos gases tiene formas diferentes ya que los parámetros y las coordenadas críticas son distintas para cada uno. A pesar de ello, también se pueden obtener ecuaciones de las isothermas de los gases reales que sean universales, como lo es la ecuación de estado de los gases ideales, es decir, que no dependan de la naturaleza del gas. Para ello se definen las llamadas MAGNITUDES REDUCIDAS de la forma:

$$p_r = \frac{p}{p_k} \quad v_r = \frac{v}{v_k} \quad T_r = \frac{T}{T_k}$$

Si en la ecuación (4) sustituimos los parámetros por sus valores dados en (9), tenemos:

$$\left( p + \frac{3p_k v_k^2}{v^2} \right) \left( v - \frac{v_k}{3} \right) = T \frac{8p_k v_k}{3T_k}$$

y dividiendo ambos miembros por  $p_k v_k$ :

$$\left( \frac{p}{p_k} + \frac{3v_k^2}{v^2} \right) \left( \frac{v}{v_k} - \frac{1}{3} \right) = \frac{8T}{3T_k}$$

que en función de las magnitudes reducidas se transforma en la ECUACIÓN DE ESTADO REDUCIDA DE VAN DER WAALS:

$$\left( p_r + \frac{3}{v_r^2} \right) \left( v_r - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3} T_r$$

que es una ecuación de estado válida para todos los gases reales por no depender de los parámetros característicos de cada gas, con lo que las isothermas reducidas son iguales para todos los gases reales.

De la ecuación anterior se deduce lo que se conoce como LEY DE LOS ESTADOS CORRESPONDIENTES:

«El mismo número de moles de dos gases cualesquiera en las mismas condiciones de presión y temperatura reducidas, ocupan el mismo volumen reducido».

Se dice entonces que los gases se encuentran en ESTADOS CORRESPONDIENTES.

**PROBLEMAS: 31 y 32.**

DATOS DEL PUNTO CRÍTICO

	TEMPERATURA CRÍTICA (°C)	PRESIÓN CRÍTICA (atm)	DENSIDAD CRÍTICA (kg/m <sup>3</sup> )
H <sub>2</sub> O	374,2	217,5	0,329
H <sub>2</sub>	-239,9	12,8	0,0310
He	-267,9	2,26	0,0693
N <sub>2</sub>	-147,1	33,5	0,311
CO <sub>2</sub>	31,04	72,8	0,468
Aire seco	-140,7	37,2	0,31
O <sub>2</sub>	-118	50,1	0,41

D) TRANSMISIÓN DE CALOR

XV – 38. Transmisión del calor por conducción. Ley de Fourier

Se produce CONDUCCIÓN DEL CALOR, cuando en las diversas partes de un cuerpo a distinta temperatura la agitación térmica se transmite de molécula a molécula hasta la unificación de aquélla.

La conducción en gases y líquidos es una consecuencia de la agitación molecular y de la equipartición de la energía en el choque (tendencia a la igualación de la energía cinética en choques sucesivos). El fenómeno de igualación de la energía cinética media, y en consecuencia de la temperatura es muy lento; en los gases y líquidos el fenómeno de transmisión del calor se realiza, en general, por CORRIENTES DE CONVECCIÓN.

La conducción de calor en los sólidos obedece a causas análogas, siendo los distribuidores de la energía los electrones constituyentes de los átomos que, en agitación térmica, se comportan como un GAS ELECTRÓNICO. Los metales (cuyos átomos retienen débilmente a sus electrones) conducen el calor más rápidamente que los no metales.

La cantidad de calor que pasa en un tiempo  $\Delta t$ , a través de una lámina de un material cuya superficie es  $A$  y su espesor  $\Delta x$  y cuyas paredes están a temperaturas  $T_1$  y  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ), está determinada experimentalmente por Jean Baptiste Joseph, barón de Fourier (1768-1830), que expresa:

$$\Delta Q = -KA \frac{T_2 - T_1}{\Delta x} \Delta t \quad \Leftrightarrow \quad H = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -KA \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

$H$  es la RAPIDEZ DE TRANSFERENCIA DE CALOR a través del área  $A$  y  $K$  es una constante de proporcionalidad que depende de la sustancia de que está hecha la lámina, a la que llamamos CONDUCTIVIDAD TÉRMICA. En realidad el valor de  $K$  depende de la temperatura aumentando ligeramente cuando ésta aumenta, pero se puede considerar casi constante en todo un material si la diferencia de temperatura entre sus partes no es demasiado grande.

La fórmula anterior es expresión particular de una ley general en la que por la forma del cuerpo, su heterogeneidad u otras circunstancias, no hay por qué suponer una variación uniforme de temperatura a lo largo de una dimensión  $x$ . Si suponemos espesores infinitesimales, a los que corresponden variaciones infinitesimales de temperatura, entonces:

$$H = \frac{dQ}{dt} = -KA \frac{dT}{dx}$$

en la que  $dT/dx$  recibe el nombre de GRADIENTE DE TEMPERATURA,  $F = dQ/dt$  FLUJO CALORÍFICO o TÉRMICO y siendo INTENSIDAD TÉRMICA la energía (calor) que por unidad de tiempo atraviesa la unidad de área.

$$I = \frac{dQ}{A dt} = -K \frac{dT}{dx}$$

Las fórmulas estudiadas son aplicables a los hilos o barras cuando éstos están absolutamente aislados; pero si hay pérdidas de calor por su superficie (RADIACIÓN) se verifica que, cuando la distancia de un punto al extremo más caliente aumenta, la temperatura desciende según una ley exponencial cuya expresión es:

$$T - T_2 = (T_1 - T_2) e^{-\alpha x}$$

$T$  es la temperatura del punto considerado;  $T_1$  y  $T_2$ , las temperaturas de los extremos caliente y frío de la barra;  $x$ , la distancia del punto considerado al extremo caliente;  $e$ , la base de los logaritmos neperianos;  $\alpha$ , una constante cuyo valor es:

$$\alpha = \sqrt{\frac{hp}{KA}}$$

$A$ : la sección;  $p$ : es el perímetro;  $K$ : es coeficiente de conductibilidad;  $h$ : el coeficiente de radiación o conductibilidad externa.

**PROBLEMAS: 33 al 40.**

XV – 39. Transmisión del calor por convección

Se produce la transmisión del calor por CONVECCIÓN cuando se produce su distribución por corrientes materiales de fluido.

Tales corrientes pueden ser originadas por la menor densidad de las partes más calientes que, en consecuencia, ascienden y la mayor densidad de las porciones frías que descienden.

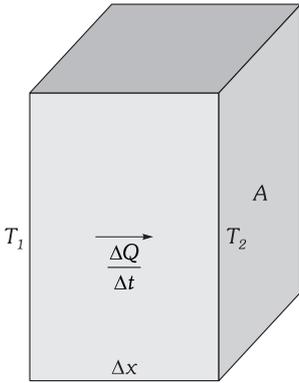


Fig. XV-22.- El calor atraviesa un muro por conducción.

COEFICIENTE DE CONDUCTIVIDAD TÉRMICA (W/m·K)

Ag	429
Cu	400
Al	205
Fe	80,4
Hg	58,6
H <sub>2</sub> O (27 °C)	0,609
Hielo	0,592
Yeso	0,520
Aire (27 °C)	0,026
Lana de algodón	0,017
Corcho	0,043
Cristal	0,7-0,9

En un fluido entubado adecuadamente y calentado en una caldera situada en la parte inferior del sistema, se establece una circulación del fluido caliente que sale de la caldera y fría que llega a ella. (Calefacción). En la «convección forzada» la corriente de gas o líquido, se origina por ventiladores o bombas.

#### XV – 40. Transmisión del calor por radiación

El calor puede ser transmitido de un cuerpo a otro, sin necesidad de soporte material; a este fenómeno se le llama **RADIACIÓN**. El calor solar llega a la Tierra de esta forma. En el capítulo XXVI sección B se estudiará esta forma de transmisión del calor.

### E) DISOLUCIONES: PROPIEDADES COLIGATIVAS

#### XV – 41. Disolución

La mezcla de dos o más sustancias dando un resultado homogéneo, se llama **DISOLUCIÓN**.

El concepto de homogeneidad no debe ser tomado en un sentido absoluto, ya que hay muchas mezclas que, a nuestra vista, presentan una uniformidad que se quiebra o se quebraría con instrumentos de visión adecuados.

La disolución entre dos cuerpos es mutua, aunque se suele llamar **DISOLVENTE** o medio de dispersión al componente cuyo estado físico es el mismo que el de la disolución, y **SOLUTO** o solutos, al otro u otros componentes. En el caso de tener todos los componentes y la disolución el mismo estado, se llama **DISOLVENTE** al componente que interviene en mayor proporción de masa.

DISOLVENTE	SOLUTO	DISOLUCIÓN
Sólido (Cu) .....	Sólido (Zn) .....	Sólida (latón).
Sólido (Au).....	Líquido (Hg).....	Sólida (amalgama de Au).
Sólido (C) .....	Gas (diversos).....	Sólida (hulla).
Líquido (H <sub>2</sub> O) .....	Sólidos (sales).....	Líquida (agua potable).
Líquido (alcohol).....	Líquido (H <sub>2</sub> O).....	Líquida (alcohol industrial).
Líquido (H <sub>2</sub> O) .....	Gas (aire).....	Líquida (agua potable).
Gas (aire) .....	Sólido (polvo atmosférico).....	Gas (aire).
Gas (aire) .....	Líquido (H <sub>2</sub> O).....	Gas (nieblas).
Gas (N <sub>2</sub> ).....	Gas (O <sub>2</sub> , CO <sub>2</sub> , etc.).....	Gas (aire).

Al fenómeno de realizarse la disolución, se llama **DIFUSIÓN**. La difusión es una consecuencia de la agitación térmica de las moléculas de los cuerpos.

Todos los gases se difunden debido a su gran movimiento molecular; hay líquidos que se difunden, llamados **MISCIBLES** (agua y alcohol) y otros que no lo hacen (agua y aceite), a los que llamamos **INMISCIBLES**, ya que las moléculas son incapaces de vencer la resistencia (a modo de membrana resistente a la ruptura) que se origina en la superficie de separación de los líquidos, por su gran diferencia de tensión superficial; los sólidos, en general, no se difunden, aunque hay algunos metales que verifican la difusión cuando están en contacto largo tiempo, quedando soldados por su superficie de contacto.

#### XV – 42. Sistemática de Ostwald

Vilhelm Ostwald (1853-1932), clasifica los sistemas dispersos en tres grandes grupos, atendiendo al tamaño de la partícula del soluto en la disolución. Los límites que establece para el diámetro de la partícula son la décima y la milésima de micra ( $\mu\text{m}$ ).

DISPERSIONES O FALSAS DISOLUCIONES: *diámetro*  $> 0,1 \mu\text{m}$ .

DISPERSOIDES O DISOLUCIONES COLOIDALES:  $0,1 \mu\text{m} > \textit{diámetro} > 0,001 \mu\text{m}$ .

DISPERSIDOS O DISOLUCIONES VERDADERAS: *diámetro*  $< 0,001 \mu\text{m}$ .

Estas últimas se clasifican a su vez:

DISOLUCIONES CON CONDENSACIÓN MOLECULAR (la partícula dispersa está formada por una agrupación de moléculas).

DISOLUCIONES MOLECULARES (cada partícula es una molécula).

DISOLUCIONES IÓNICAS (la partícula dispersa es un fragmento de molécula con carga eléctrica).

DISOLUCIONES ATÓMICAS (cada partícula es un átomo).

**XV – 43. Modificación de las propiedades de un componente por disolución de otro. Propiedades coligativas**

Hay propiedades de las disoluciones que dependen del número de *partículas de soluto* presentes y no de su naturaleza.

Otras veces la naturaleza de la sustancia disuelta y del disolvente (así como también la concentración de aquélla), son las que determinan propiedades especiales.

Entre las primeras propiedades se encuentran las variaciones de la presión de vapor, la presión osmótica, así como los cambios que experimentan los puntos de congelación y de ebullición del disolvente, por el hecho de tener sustancias disueltas.

A estas propiedades se las denomina COLIGATIVAS y son las que vamos a tratar en el presente capítulo\*.

**XV – 44. Coeficiente de solubilidad. Concentración**

Una disolución está SATURADA cuando el disolvente no admite en su seno mayor cantidad de soluto. COEFICIENTE DE SOLUBILIDAD es la masa de soluto existente en la unidad de masa o de volumen de la disolución saturada.

El coeficiente de solubilidad de sólidos y líquidos, en líquidos, aumenta con la temperatura; el de los gases en líquidos disminuye conforme aumenta aquélla (Fig. XV-23).

CONCENTRACIÓN es la cantidad de soluto existente en la unidad de masa o de volumen de la disolución.

El concepto de concentración y coeficiente de solubilidad es variable. Los valores que lo expresan se suelen referir a 100 gramos o a 100 cm<sup>3</sup> de disolvente o de disolución, debiéndose especificar claramente el concepto adoptado en cada caso.

Una disolución al 5 por 100 puede ser: 5 g de soluto en 100 g de disolvente, 5 g de soluto en 100 cm<sup>3</sup> de disolvente, 5 g de soluto en 100 g de disolución, 5 g de soluto en 100 cm<sup>3</sup> de disolución.

Mientras no se advierta lo contrario, el concepto adoptado es «masa de soluto que existe en la unidad de volumen de disolución».

**XV – 45. Concentración molar y molal**

«CONCENTRACIÓN MOLAR es el número de moles de soluto que hay en un litro de disolución». El número que la expresa nos indica la MOLARIDAD de la disolución.

«CONCENTRACIÓN MOLAL O MOLALIDAD es el número de moles de soluto que hay por cada 1 000 gramos de disolvente puro». (En las disoluciones acuosas muy diluidas, hay diferencia muy pequeña entre molalidad y molaridad).

**XV – 46. Disoluciones de gases en líquidos. Ley de Henry**

Los trabajos realizados por William Henry (1775-1836) le condujeron a las siguientes consecuencias: si un volumen de gas (*v*) se disuelve hasta saturar un determinado volumen (*V*) de un líquido, se define el COEFICIENTE DE SOLUBILIDAD (*K*) mediante la relación:

$$K = \frac{v}{V}$$

Al decir que el coeficiente de solubilidad del dióxido de carbono en el agua es 1 a 15 °C, expresamos que cada litro de agua es capaz de disolver un litro de CO<sub>2</sub>, medido este litro a la presión que el gas ejerce sobre el agua y a 15 °C.

Conocido *K* y el volumen *V* de líquido, la masa de gas queda determinada por la expresión:

$$m = v\rho = KV\rho = KV\rho_0 \frac{p_t}{p_0} \frac{T_0}{T}$$

de acuerdo con lo expuesto en el párrafo XV-23; y expresando las presiones en mm de mercurio y la temperatura en °C:

$$m = KV\rho_0 \frac{p_t}{760} \frac{273,16}{273,16 + t}$$

«Para una temperatura determinada la masa de gas que se disuelve en un cierto volumen de líquido, es proporcional a la presión que ejerce el gas sobre el líquido» (LEY DE HENRY).

\* En estas propiedades que vamos a tratar, se supondrá que el soluto no es volátil.

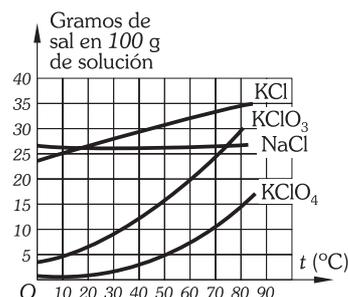


Fig. XV-23.- Diagrama de solubilidad en el agua de diversos solutos.

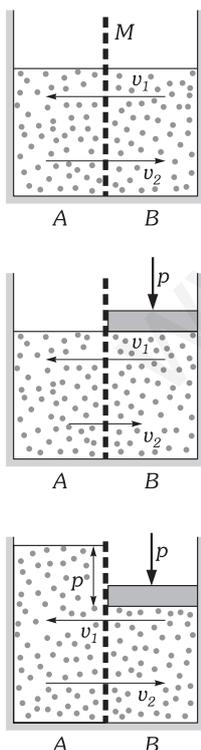


Fig. XV-24.- Recipiente con un único líquido separado por una membrana porosa.

Para disolver grandes cantidades de gas en un disolvente líquido basta que el primero ejerza gran presión sobre el segundo. Al disminuir o cesar la presión, el gas se desprende del sistema, verificándose el fenómeno de *efervescencia* (bebidas espumosas).

«Si se trata de una mezcla de gases, cada uno de ellos se disuelve en el líquido independientemente de los demás y con arreglo a la presión parcial que él ejerce».

### XV – 47. Ósmosis

ÓSMOSIS es la difusión de las disoluciones a través de membranas semipermeables (membranas que dejan pasar al disolvente, pero no al soluto).

Si a un lado y otro de una membrana porosa ( $M$ ) hay el mismo líquido (agua) la velocidad osmótica  $v_1$  (Fig. XV-24) y la  $v_2$  originadas por el movimiento molecular, son idénticas; si sobre la superficie de líquido de uno de los compartimentos ( $B$ ) ejercemos una presión ( $p$ ), se verifica que  $v_1 > v_2$  y al pasar más agua de  $B$  a  $A$  que de  $A$  a  $B$ , el nivel de  $A$  sube y el de  $B$  baja hasta que la presión originada en  $A$  por el desnivel origine un aumento de  $v_2$  que la iguale a  $v_1$ . La presión correspondiente al desnivel mide el exceso de presión que se ejerce en el líquido de  $B$ .

Supongamos que en el compartimento  $B$  hay agua, en el  $A$  una disolución de un sólido en agua (Fig. XV-25) y que la membrana es semipermeable. Un cierto número de moléculas de agua en  $B$  se dirigen cada segundo hacia la membrana y pasan a través de ella; también ciertas moléculas de  $A$  se mueven hacia la membrana, pasando únicamente las de agua y golpeando las de soluto a aquélla. En las velocidades de paso se verifica que  $v_1 > v_2$  y, por lo tanto, se establece un desnivel, ascendiendo la disolución y descendiendo el líquido puro, hasta que la presión correspondiente al desnivel hace que  $v_1 = v_2$ .

La corriente osmótica entre dos disoluciones va siempre de la diluida a la concentrada.

Esta es la causa del hinchamiento de células introducidas en líquidos más diluidos que su protoplasma (TURGESCENCIA), o su disminución de volumen cuando el líquido externo es el más concentrado.

### XV – 48. Presión osmótica. Su medida

En los puntos de una misma superficie horizontal del disolvente puro  $B$  (Fig. XV-25-2ª) y de la disolución, no existe la misma presión, ya que hay una mayor capa líquida sobre los puntos de la última y, por tanto, una «sobrepresión» o presión osmótica.

La PRESIÓN OSMÓTICA es igual a la presión ejercida por la agitación térmica de las partículas del soluto en el seno del disolvente.

La presión osmótica puede ser medida en el *osmómetro* (Fig. XV-26). El fondo del vaso interior es semipermeable y, en este vaso, se pone la disolución; el disolvente puro está contenido en el vaso exterior. La disolución asciende por el tubo del vaso interno y la presión de la columna, correspondiente al desnivel, mide la presión osmótica.

Dos disoluciones se llaman ISOTÓNICAS cuando tienen la misma presión osmótica.

### XV – 49. Leyes de Pfeffer

Las leyes de Wilhelm Pfeffer (1845-1920), modificadas por Hugo De Vries (1848-1935), se pueden expresar:

- 1.ª La presión osmótica es directamente proporcional a la concentración molar (número de moles del soluto, por litro de disolución).
- 2.ª La presión osmótica es directamente proporcional a la temperatura absoluta.
- 3.ª Disoluciones equimoleculares, a la misma temperatura, son isotónicas.

### XV – 50. Hipótesis de Van't Hoff

Jacobus Henricus Van't Hoff (1852-1911) enunció como empírica la siguiente ley:

Las disoluciones diluidas se comportan, para los efectos de la presión osmótica, como si las moléculas del cuerpo disuelto fuesen las de un gas.

Hoy está demostrado que esta ley, establecida experimentalmente, es una consecuencia de las leyes de la Termodinámica, y es válida únicamente para disoluciones diluidas.

Esta hipótesis conduce a la fórmula:  $pV = nRT$  ( $p$  = presión osmótica;  $V$  = volumen de la disolución;  $n$  = número de moles del soluto;  $R$  = constante de los gases;  $T$  = temperatura absoluta). De la ecuación anterior se obtiene:

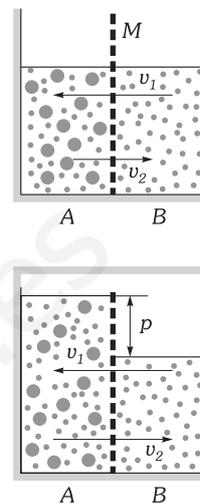


Fig. XV-25.- En el compartimento  $B$  hay agua, y en el  $A$  una disolución de un soluto en agua; la membrana de separación  $M$  es semipermeable.

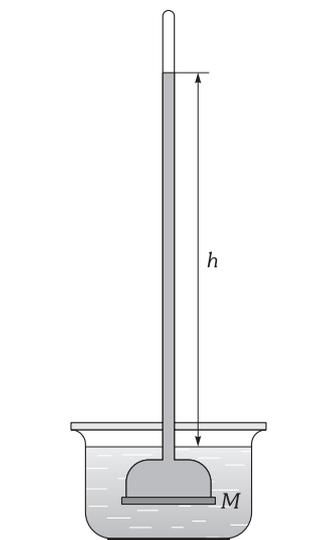


Fig. XV-26.- Osmómetro.

$$p = \frac{n}{V} RT \Rightarrow \boxed{p = cRT}$$

siendo  $n/V = c$  (número de moles por unidad de volumen) la concentración molar.

La expresión anterior encierra las leyes de Pfeffer; la tercera de ellas se explica fácilmente, pues si en otra disolución cuya presión osmótica viene dada por:  $p' = c'RT'$  se verifica:  $c = c'$  y  $T = T'$ , resulta  $p = p'$ , siendo por lo tanto isotónicas las soluciones comparadas.

EXCEPCIONES A LAS LEYES DE PFEFFER: En las disoluciones con asociaciones moleculares del soluto la presión es menor que la teórica calculada por las leyes anteriores. En los cuerpos que se ionizan (ácidos, bases y sales) la presión osmótica es mayor que la que se ejercería sin disociación.

### XV - 51. Determinación de masas moleculares

Basta considerar en la fórmula anterior que  $R$  tiene por valor  $R = 0,082$  siempre que se exprese  $p$  en atmósferas,  $v$  en litros,  $T$  en K y  $n$  en moles, y que:

$$c = \frac{\text{masa disuelta en 1 litro}}{\text{masa molecular}} = \frac{m_l}{M_m}$$

por sustitución, obtendremos:

$$p = cRT = \frac{m_l}{M_m} 0,082 T \Rightarrow \boxed{M_m = \frac{m_l}{p} 0,082 T}$$

ecuación que nos determina la masa molecular ( $M_m$ ) conocidas la presión osmótica ( $p$ ) (en atmósferas), la temperatura absoluta y la masa en gramos ( $m_l$ ) de soluto existente en un litro de disolución.

### XV - 52. Tensión de vapor de las disoluciones. Ley de Raoult

«Cuando una sustancia no volátil se disuelve en un líquido disminuye la tensión de vapor de éste».

Si disolvemos en un líquido una sustancia no volátil, su presencia parece como si «estorbase» el movimiento de las moléculas del disolvente, impidiendo que abandonen la superficie del líquido. Este «impedimento» se comprende que aumentará con el número de moléculas disueltas, contribuyendo a que la presión del vapor sea menor. Experimentalmente, se demuestra que:

«La disminución relativa de la tensión de vapor del disolvente es igual a la fracción molar de soluto» [Ley de Jacques Marie Raoult (1830-1901).

Por FRACCIÓN MOLAR DE SOLUTO ( $x_s$ ) se entiende el cociente entre el número de moles de soluto y el número total de moles (soluto + disolvente):

$$x_s = \frac{n_s}{n_s + n_d}$$

Análogamente se define la FRACCIÓN MOLAR DE DISOLVENTE ( $x_d$ ):

$$x_d = \frac{n_d}{n_s + n_d}$$

Si llamamos  $f_0$  a la tensión de vapor de disolvente puro y  $f$  a la de la disolución, la ley de Raoult se expresa:

$$\frac{f_0 - f}{f_0} = x_s \Leftrightarrow \frac{f_0 - f}{f_0} = \frac{n_s}{n_s + n_d} \Rightarrow f = f_0 \left( 1 - \frac{n_s}{n_s + n_d} \right) \Rightarrow \boxed{f = f_0 x_d}$$

«La presión de vapor del disolvente en la disolución es igual a la presión de vapor del disolvente puro multiplicado por la fracción molar del disolvente».

Para disoluciones diluidas:  $n_s \ll n_d$  y con bastante aproximación se verifica:

$$\frac{f_0 - f}{f_0} = \frac{\Delta f}{f_0} = \frac{n_s}{n_d}$$

pero al ser:  $n^\circ$  de moles del soluto =  $m_1$  (g de soluto)/ $M_{m_1}$  (masa molecular del soluto), y lo mismo para el disolvente, obtenemos:

$$\boxed{\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{m_1/M_{m_1}}{m_2/M_{m_2}}}$$

que nos permite calcular masas moleculares midiendo la presión de vapor de la disolución.

La presión osmótica y el descenso relativo de la tensión de vapor, son proporcionales a la concentración; en consecuencia:

«La presión osmótica es proporcional al descenso relativo de la tensión de vapor».

**XV – 53. Influencia del soluto en las temperaturas de cambio de estado del disolvente. Leyes de Raoult**

Al disolver una sustancia no volátil en un líquido la temperatura de solidificación de éste disminuye (DESCENSO CRIOSCÓPICO) y la de ebullición aumenta (ASCENSO EBULLOSCÓPICO).

LEYES DE RAOULT: 1.<sup>a</sup>) El descenso crioscópico y el ascenso ebulloscópico son directamente proporcionales a la concentración molar (número de moles del soluto en un kilogramo del disolvente). 2.<sup>a</sup>) Dos disoluciones con el mismo disolvente y de la misma concentración (EQUIMOLECULARES), tienen iguales ascensos ebulloscópicos e iguales descensos crioscópicos.

Las dos leyes se pueden compendiar en la fórmula

$$\Delta t = Kc$$

$K$  es una constante característica del disolvente llamada EBULLOSCÓPICA O CRIOSCÓPICA, cuyo significado físico ( $K = \Delta t/c$ ) es: «el descenso o ascenso correspondiente a una disolución que contiene 1 mol de soluto por cada unidad de masa (1 kg) de disolvente». (Para el agua el descenso crioscópico es 1,85 °C y el ascenso ebulloscópico 0,51 °C).

El valor de las constantes  $K$  se puede calcular teóricamente a partir de la expresión:

$$K = \frac{RT^2}{1000l}$$

en la que  $R$  es la constante de los gases expresada en calorías,  $T$  la temperatura absoluta del punto de congelación,  $T_c$ , o de ebullición  $T_e$ , y  $l$  el calor latente de fusión ( $l_c$ ) o de ebullición ( $l_e$ ) expresado en cal/g. Se obtiene así:  $K_c = RT_c^2/1000l_c$  y  $K_e = RT_e^2/1000l_e$ , y para los valores absolutos de las variaciones de los puntos de congelación y ebullición:

$$\Delta t_c = K_c c \quad \Delta t_e = K_e c$$

Para la determinación de masas moleculares basta considerar en la fórmula anterior que  $c$  es el número de moles disueltos en 1 kg de disolvente y, por lo tanto:

$$c = \frac{\text{masa disuelta en 1 kg de disolvente}}{\text{masa molecular}} = \frac{M'_1}{M_m}$$

Por sustitución obtendremos:

$$\Delta t = K \frac{M'_1}{M_m} \Rightarrow M_m = K \frac{M'_1}{\Delta t}$$

ecuación que nos determina la masa molecular ( $M_m$ ) conocidos el descenso o ascenso molar ( $K$ ), el descenso crioscópico o ascenso ebulloscópico ( $\Delta t$ ) y la masa en gramos de soluto que corresponde a un kg de disolvente.

La determinación  $\Delta t$  se hace en el CRIÓSCOPO (Fig. XV-27) que consta de un tubo de ensayo con una tubulura lateral, en el que se introduce una masa de disolvente (agua). Introduciendo el tubo dentro de un vaso con una mezcla frigorífica (hielo y sal) se agita el líquido hasta obtener una constancia de temperatura (punto de solidificación). Fundido el disolvente que hay en el tubo (fuera del vaso), se le añade el soluto por la tubulura lateral y se hace una nueva solidificación. La diferencia entre las temperaturas de cambio de estado es el descenso crioscópico.

Para efectuar una ebulloscopia se opera, esencialmente, de la misma forma. En el vaso externo hay un líquido a temperatura superior a la de ebullición del disolvente: en el extremo de la tubulura lateral se pone un refrigerante de reflujo para evitar las variaciones de la concentración por vaporización del disolvente.

EXCEPCIONES DE LAS LEYES DE RAOULT: Las disoluciones en las que hay asociaciones moleculares tienen menos descenso crioscópico o ascenso ebulloscópico que el correspondiente a leyes de Raoult. Los cuerpos que se ionizan (ácidos, bases y sales), por el contrario, producen en el disolvente ascensos o descensos mayores que los teóricos.

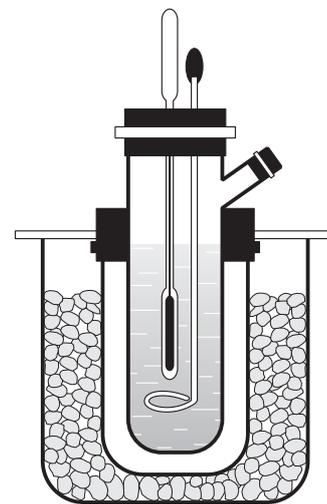


Fig. XV-27.- Crióscopo.

**XV – 54. Mezclas frigoríficas**

CALOR DE DISOLUCIÓN de una sustancia es el número de calorías que absorbe o desprende un gramo de ella para quedar completamente disuelta.

Los gases y líquidos desprenden calor al disolverse; hay sólidos que se disuelven con desprendimiento de calor (sosa o potasa en agua) y otros que lo hacen con absorción de calor (sal común en agua).

Se aprovecha el fenómeno de la absorción de calor para producir enfriamiento. A las mezclas destinadas a este fin se les llama MEZCLAS FROGORÍFICAS. La temperatura mínima que se puede obtener con la mezcla de hielo y sal es  $-22\text{ }^{\circ}\text{C}$  (TEMPERATURA EUTÉCTICA).

**PROBLEMAS: 41 al 48.**

## PROBLEMAS

### A) CALORIMETRÍA. CAMBIOS DE ESTADO O DE FASE. HIGROMETRÍA

1. Calcular la temperatura final de una mezcla de 10 y 80 l de agua cuyas temperaturas respectivas son  $70\text{ }^{\circ}\text{C}$  y  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

2. En un calorímetro cuyo equivalente en agua es despreciable que contiene 440 g de agua a  $9\text{ }^{\circ}\text{C}$  se introduce un trozo de hierro de masa 50 g a la temperatura de  $90\text{ }^{\circ}\text{C}$ ; la temperatura del equilibrio es  $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Calcular el calor específico del hierro. Calor específico del agua:  $4\ 180\text{ J/kg}\cdot\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

3. En un vaso calorimétrico de cobre, cuya masa es 40 g, se ponen 380 g de alcohol; el conjunto está a una temperatura de  $8\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Se introduce en el alcohol un trozo de cobre de 122 g a la temperatura de  $50\text{ }^{\circ}\text{C}$ . La temperatura de equilibrio es  $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Calcular el calor específico del alcohol. Suponemos que no hay pérdida de calor. Calor específico del cobre:  $0,095\text{ cal/g}\cdot\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

4. En un depósito se tiene  $1\text{ m}^3$  de agua a  $5\text{ }^{\circ}\text{C}$ ; se dispone de agua a  $65\text{ }^{\circ}\text{C}$  que sale por un grifo a razón de  $100\text{ cm}^3/\text{s}$ . Calcular el tiempo que debe estar abierto el grifo para que la temperatura de la mezcla sea de  $35\text{ }^{\circ}\text{C}$ , despreciando toda influencia del medio exterior. Calor específico del agua:  $1\text{ cal/g}\cdot\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

5. En un calorímetro que contiene un termómetro y un agitador, introducimos  $m_1 = 100\text{ g}$  de agua; agitamos durante un tiempo, y el termómetro marca  $t_1 = 17,20\text{ }^{\circ}\text{C}$ ; entonces se introducen  $m_2 = 300\text{ g}$  de agua a  $t_2 = 26,32\text{ }^{\circ}\text{C}$ ; agitamos nuevamente alcanzando la temperatura  $t_3 = 22,80\text{ }^{\circ}\text{C}$  en el nuevo equilibrio. Si suponemos nulas las pérdidas de calor, calcular el equivalente en agua del calorímetro, el termómetro y el agitador.

6. Cien gramos de una aleación de oro y cobre, a la temperatura de  $75,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ , se introducen en un calorímetro, cuyo equivalente en agua es despreciable, con 502 g de agua a  $25\text{ }^{\circ}\text{C}$ ; la temperatura del equilibrio térmico es de  $25,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Calcular la composición de la aleación. Calor específico del oro:  $0,031\text{ cal/g}\cdot\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Calor específico del cobre:  $0,095\text{ cal/g}\cdot\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Calor específico del agua:  $1\text{ cal/g}\cdot\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

7. Por una tubería calentada en su punto medio con una llama invariable fluye agua a razón de 50 l por min. La temperatura de entrada es de  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  y la de salida de  $35\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Otro líquido, de densidad  $800\text{ kg/m}^3$ , circula a continuación por el mismo tubo calentado por la misma llama, pero con un caudal de 15 l por min. Las temperaturas en los dos extremos se estacionan ahora en  $18\text{ }^{\circ}\text{C}$  y  $68\text{ }^{\circ}\text{C}$ . El calor específico del agua es:  $4\ 180\text{ J/kg}\cdot\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Calcular con estos datos: 1) El calor específico del líquido. 2) El calor total absorbido por el líquido y el agua si el tiempo de circulación de cada uno de ellos fue de 1 h, admitiendo que no existen pérdidas de calor.

8. Calcular la variación de presión que experimentan 100 l de oxígeno ( $c_v = 5\text{ cal/mol}\cdot\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) cuando se calientan a volumen constante comunicándoles 3 000 cal. Inicialmente el oxígeno se encuentra a  $25\text{ }^{\circ}\text{C}$  y 70 mm de Hg de presión.

9. Comunicamos  $5 \times 10^5$  calorías a un recinto de  $1\text{ m}^3$  de volumen, que se mantiene constante, y que contiene un gas ideal monoatómico ( $c_v = 3\text{ cal/mol}\cdot\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) a 6 atm de presión y  $30\text{ }^{\circ}\text{C}$  de temperatura. Determinar la presión final de dicho gas.

10. Determinar la cantidad de calor necesaria para triplicar a presión constante un volumen de  $1\text{ m}^3$  de un gas perfecto biatómico ( $c_p = 7\text{ cal/mol}\cdot\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) que se encuentra a  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  y a la presión constante de 2 atm.

11. En un platillo de una balanza se coloca una tara invariable y en el otro se van colocando sucesivamente los objetos y pesas necesarios para establecer el equilibrio. a) Un calorímetro cuyo equivalente en agua son 8 g y pesas por valor de 390 g. b) El mismo calorímetro con cierta cantidad de agua a  $32\text{ }^{\circ}\text{C}$  y pesas por valor de 128 g. c) El mismo calorímetro con el agua que tenía y un bloque de hielo a  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  y pesas

por valor de 118 g. Cuando el hielo se ha fundido la temperatura del agua ha descendido a  $28\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Deducir de estos datos el calor de fusión del hielo. Calor específico del agua:  $4\ 180\text{ J/g}\cdot\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

12. Mezclamos 1 kg de agua a  $95\text{ }^{\circ}\text{C}$  con 1 kg de hielo a  $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$ . ¿Disponemos de suficiente calor para fundir todo el hielo? Si es así, ¿a qué temperatura queda la mezcla? Calor específico del hielo:  $0,5\text{ cal/g}\cdot\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Calor de fusión del hielo:  $80\text{ cal/g}$ . Calor específico del agua:  $1\text{ cal/g}\cdot\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

13. Mezclamos 1 kg de agua a  $50\text{ }^{\circ}\text{C}$  con 1 kg de hielo a  $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ . ¿Disponemos de suficiente calor para fundir todo el hielo? En caso contrario, ¿qué masa de hielo queda sin fundir? Calor específico del hielo:  $2\ 090\text{ J/kg}\cdot\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Calor de fusión del hielo:  $334,4 \times 10^3\text{ J/kg}$ . Calor específico del agua:  $4\ 180\text{ J/kg}\cdot\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

14. En un recinto térmicamente aislado hay un litro de agua a  $12\text{ }^{\circ}\text{C}$ . En ella se introducen 150 g de cobre a  $200\text{ }^{\circ}\text{C}$ . ¿Qué cantidad de hielo fundente habrá que añadir para que, una vez fundido, la temperatura final sea de  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ? ¿Qué temperatura se alcanzará si se añaden 100 g de hielo fundente? ¿Qué sucederá si se añaden 200 g de hielo fundente? Calor específico del cobre:  $397\text{ J/kg}\cdot\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Calor de fusión del hielo:  $334,4\text{ kJ/kg}$ . Calor específico del agua:  $4\ 180\text{ J/kg}\cdot\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

15. En un vaso Dewar que contiene 300 g de un líquido a  $25\text{ }^{\circ}\text{C}$  se introducen 150 g de hielo a  $-6\text{ }^{\circ}\text{C}$ . 1) ¿Se fundirá todo el hielo suponiendo que el vaso está bien aislado? 2) Si no se funde totalmente, ¿qué masa de hielo subsistirá una vez alcanzado el equilibrio? 3) ¿A qué temperatura debería estar inicialmente el líquido para que se fundiera justamente el hielo y todo el sistema quedara a  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ? DATOS: Calor específico del líquido:  $0,950\text{ cal/g}\cdot\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Equivalente en agua del vaso Dewar = 30 g. Calor específico del hielo:  $0,5\text{ cal/g}\cdot\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Calor específico del agua:  $1\text{ cal/g}\cdot\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

16. En un calorímetro, cuyo equivalente en agua es despreciable, hay 1 kg de hielo a  $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ . ¿Cuántos gramos de agua a  $80\text{ }^{\circ}\text{C}$  hay que introducir en él para que la temperatura final sea de  $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ ? Si en lugar de agua de  $80\text{ }^{\circ}\text{C}$  se introduce vapor de agua a  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ , ¿cuántos gramos de éste habría que introducir para que la temperatura final sea de  $40\text{ }^{\circ}\text{C}$ ? ¿qué volumen ocupa el vapor de agua introducido si la presión a que se mide es de 700 mm de mercurio? Masa molecular del agua:  $18\text{ g/mol}$ . Calor específico del hielo:  $2\ 090\text{ J/kg}\cdot\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Calor de fusión del hielo:  $334,4 \times 10^3\text{ J/kg}$ . Calor específico del agua:  $4\ 180\text{ J/kg}\cdot\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Calor de licuefacción del vapor de agua:  $2\ 257 \times 10^3\text{ J/kg}$ .

17. Se mezclan en un calorímetro (equivalente en agua = 10 g) 100 g de hielo a  $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$  con 200 g de agua a  $80\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Determinar: 1) La temperatura final de la mezcla. 2) Cantidad de vapor de agua a  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$  que habría que introducir para que la temperatura final fuese de  $90\text{ }^{\circ}\text{C}$ . DATOS: Calor específico del hielo:  $0,5\text{ cal/g}\cdot\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Calor de fusión del hielo:  $80\text{ cal/g}$ . Calor de licuefacción del vapor de agua:  $540\text{ cal/g}$ . Calor específico del agua:  $1\text{ cal/g}\cdot\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

18. En un vaso de cobre, que pesa 1,5 kg, conteniendo un bloque de hielo de 10 kg a la temperatura de  $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ , se inyectan 5 kg de vapor de agua a  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Se pide la temperatura final de la mezcla. Discútase el resultado obtenido e intérpretese (calor específico del cobre:  $398\text{ J/kg}\cdot\text{ }^{\circ}\text{C}$ ). Se pide, además, determinar cuál sería la masa del vapor a emplear para que la temperatura final de la mezcla fuese  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ . (Tomar los datos para el  $\text{H}_2\text{O}$  del problema anterior.)

19. En un recipiente aislado térmicamente hay 10 kg de hielo enfriado a  $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Se inyecta en el recinto 2 500 g de vapor de agua a  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Se pide: 1) La temperatura y la composición de la mezcla una vez alcanzado el equilibrio térmico. 2) La cantidad de energía que podría obtenerse de este sistema si se le enfriara a  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Tomar los datos para el agua del problema 17.

20. Un recipiente de volumen 10 l contiene aire a la presión de 740 mm de mercurio y temperatura de  $27\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Humedad relativa del

aire: 0,8. Determinar: 1) Peso del aire seco contenido en el recipiente. 2) Peso del vapor de agua contenido en el recipiente. 3) Cantidad de agua que habrá que introducir para que el aire quede saturado a dicha temperatura. DATOS: Tensión máxima del vapor de agua a 27 °C: 27 mm de mercurio. Peso de 22,4 l de aire en condiciones normales: 29 g.

**21.** Se tiene 1 m<sup>3</sup> de aire medido a 20 °C y presión de 740 mm de mercurio, cuya humedad relativa es de 0,4. Determinar: 1) Los gramos de vapor contenidos en el metro cúbico de aire. 2) ¿Cuántos gramos de agua hay que añadir a ese metro cúbico de aire para que quede saturado? 3) Si este aire saturado se enfría a 10 °C, ¿cuánto vapor de agua se condensa? DATOS: Tensión máxima del vapor de agua a 20 °C = 18 mm de mercurio. Tensión máxima del vapor de agua a 10 °C = 9 mm de mercurio.

**22.** Se tienen 2 m<sup>3</sup> de aire medidos a 27 °C a la presión de 760 mm y de humedad relativa 0,8. Determinar: 1) El peso de ese volumen de aire húmedo. 2) Cantidad en gramos de vapor de agua existente en ese volumen de aire. 3) Si se enfría a 10 °C, ¿cuánto vapor de agua se condensa? DATOS: Tensión máxima del vapor de agua a 27 °C = 26 mm; a 10 °C = 9 mm de mercurio. Peso de 1 l de aire seco en condiciones normales: 1,3 g.

**23.** Un tubo barométrico, dispuesto como en la experiencia de Torricelli, tiene la longitud, desde el nivel del mercurio en la cubeta hasta su extremo superior, 1 m, y su sección es de 1 cm<sup>2</sup>; la presión atmosférica es de 1 013 000 barias, y la temperatura, de 20 °C. En la cámara barométrica se introducen 2 mg de agua. Determinar: 1) Altura de la columna barométrica antes de introducir el agua. 2) Altura de la columna barométrica después de introducir el agua. 3) ¿Que cantidad de agua se ha evaporado? Tensión máxima del vapor de agua a 20 °C = 18 mm de mercurio.

**24.** Supongamos que en el análisis de un determinado volumen de aire, medido a 20 °C y 748 mm de Hg, se ha obtenido que el 20,5% es oxígeno, el 78% es nitrógeno y el 1,5% es vapor de agua. Determinar su estado higrométrico. Tensión de vapor de agua a 20 °C:  $f = 17,54$  mm de Hg.

**25.** En una probeta graduada invertida sobre agua (cuba hidroneumática) se ha recogido un gas que ocupa un volumen de 100 cm<sup>3</sup>; el nivel del agua dentro de la probeta está 5 cm por encima del nivel del agua exterior. La temperatura es de 20 °C. Determinar: 1) Volumen que ocuparía el gas seco en condiciones normales. 2) Gramos de vapor de agua contenidos en ese volumen. 3) Si se introdujese la probeta en el agua hasta que el nivel de ésta fuese el mismo dentro que fuera, ¿qué volumen se leería en la probeta? Presión atmosférica en el lugar de la experiencia: 740 mm de Hg. Tensión máxima del vapor de agua a la temperatura de 20 °C: 18 mm de Hg. Masa molecular del agua: 18 g/mol.

**26.** Se hacen burbujear 0,30 g de oxígeno medidos a 20 °C y 750 mm de presión recogidos sobre agua en las mismas condiciones. ¿Qué volumen de gas se obtendrá? DATOS: Tensión de vapor de agua a 20 °C,  $f = 17,54$  mm de Hg. Masa molecular del oxígeno: 32 g/mol.

**B) LICUEFACCIÓN DE GASES. ECUACIÓN DE VAN DER WAALS**

**27.** Encerramos en un recipiente un volumen de aire con el 50% de humedad, a la temperatura de 8 °C. Tensión máxima del vapor de agua a esta temperatura:  $f = 8$  mm. 1) Si la presión de este aire húmedo encerrado en el recipiente es de 760 mm, ¿cuál es la presión parcial del aire? 2) Si comprimimos este aire húmedo, sin variar la temperatura, ¿cuáles serán las presiones parciales de aire y del vapor de agua cuando se alcance la saturación? 3) Si seguimos comprimiendo (siempre manteniendo constante la temperatura) hasta que se haya condensado la mitad del agua existente al comienzo, ¿cuál será ahora la presión parcial del aire y cuál la del agua?

**28.** Se comprime una masa de aire húmedo con 50% de humedad relativa, a una temperatura constante en que la tensión máxima de vapor es  $f = 4$  cm; la presión inicial es 76 cm; se pide cuál será la presión: 1) Cuando esté la masa de aire saturada. 2) Cuando haya perdido por condensación la mitad del vapor de agua que contenía al principio. La temperatura se mantiene constante.

**29.** Dada la ecuación de Van der Waals para un mol de una sustancia:  $(p + a/v^2)(v - b) = RT$ . 1) Establézcase la forma de dicha ecuación para  $n$  moles. 2) Calcúlese la presión que ejercerán 1 000 g de CO<sub>2</sub> confinados en un volumen de 7 l, a la temperatura de 57 °C. Las

constantes de la ecuación de Van der Waals para dicha sustancia valen:  $a = 3,62$  atm · l<sup>2</sup>/mol<sup>2</sup>;  $b = 0,043$  l/mol.  $R = 0,082$  atm · l/K · mol. 3) Compárese la presión obtenida con la que resultaría al considerar el CO<sub>2</sub> como gas perfecto y discúptase brevemente la discrepancia. DATOS: Masas atómicas: C = 12 u; O = 16 u.

**30.** Determinar la presión a que es necesario someter al dióxido de carbono que se encuentra a 27 °C para que su densidad alcance el valor de 0,5 g/cm<sup>3</sup>. 1) Considerando al gas como ideal. 2) Como gas de Van der Waals, considerar los datos del problema anterior.

**31.** La densidad del acetileno (C<sub>2</sub>H<sub>2</sub>) en el punto crítico es 0,231 g/cm<sup>3</sup>; la presión crítica vale 62 atm. Calcúlese: 1) El volumen molar crítico. 2) La temperatura crítica, en °C, supuesta válida para dicha sustancia la ecuación de Van der Waals con las constantes:  $a = 4,39$  atm · l<sup>2</sup>/mol<sup>2</sup>;  $b = 0,051$  l/mol;  $R = 0,082$  atm · l/K · mol. 3) La posibilidad de almacenar el acetileno, en estado líquido, en botellas de acero. DATOS: Masas atómicas: C = 12 u; H = 1,01 u.

**32.** Para el amoníaco las condiciones críticas son:  $T_k = 405,6$  K,  $p_k = 111,5$  atm y  $\rho_k = 0,235$  g/cm<sup>3</sup>. Determinar aplicando la ecuación de Van der Waals la presión necesaria para mantener 2 g de NH<sub>3</sub> en un volumen de 1 l a 0 °C.

**C) TRANSMISIÓN DE CALOR**

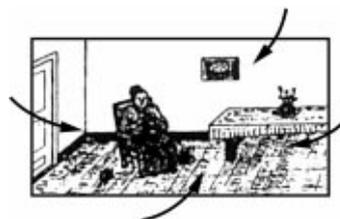
**33.** Una caldera de hierro cuya superficie es de 2 m<sup>2</sup> y su espesor 1 cm contiene agua a 80 °C. La temperatura del ambiente es de 30 °C, y se puede considerar como constante. Calcular la pérdida de calor por conducción, en 1 s. (Considerar las superficies exterior e interior de la caldera prácticamente iguales y que no hay variación sensible en la temperatura del agua.) Coeficiente de conductividad del hierro: 80,4 J/m · s · K.

**34.** Una vasija cilíndrica de hierro, cuyo radio es de 10 cm y su altura 20 cm, está cerrada herméticamente, conteniendo hielo a 0 °C en su interior. El ambiente externo está a una temperatura constante de 25 °C. El espesor de la chapa de hierro es de 0,1 cm. Calcular la masa de hielo fundida en un segundo, considerando el calor conducido a través de la chapa. Suponer las superficies externa e interna del cilindro prácticamente iguales a la exterior. Calor de fusión de hielo: 80 cal/g. Conductividad del Fe: 0,2 cal/cm · s · °C.

**35.** Un matraz esférico de vidrio, de 20 cm de diámetro externo y de paredes de 1 cm de espesor, se llena con 2 kg de hielo a 0 °C y se introduce en agua hirviendo. Calcular el tiempo que tarda en fundirse el hielo, suponiendo que el matraz es una esfera perfecta. Coeficiente de conductividad del vidrio: 0,84 N/s · K. Calor de fusión del hielo: 334,4 kJ/kg.

**36.** Un puchero de aluminio contiene inicialmente 1 l de agua que se evapora totalmente en 10 min. Suponiendo que todo el calor se transmite a través del fondo plano de 20 cm de diámetro y 5 mm de espesor. Determinar la temperatura en la parte exterior del fondo, cuando todavía queda una parte muy pequeña del agua en el puchero. DATOS: Coeficiente de conductividad térmica del aluminio: 205 W/m · K. Calor latente de evaporación del agua a la presión atmosférica: 540 kcal/kg.

**37.** Doña Ahorros tiene un cuarto interior donde hace labor las tardes de invierno. Arriba, abajo, a la izquierda y al fondo de la habitación viven vecinos que encienden la calefacción. Ella no la enciende y hace su labor calentita. La superficie total de las paredes que transmiten calor es de 40 m<sup>2</sup> y tales paredes son de ladrillo, de 10 cm de espesor, y cuya coeficiente de conductibilidad es 0,0015 cal/cm · s · °C. El precio del carbón que gastan los vecinos es de 7 500 pesetas tonelada, y su calor de combustión es de 7 500 cal/g. Suponiendo 12 h diarias en que la diferencia media de temperaturas entre los ambientes sea de 10 °C, ¿en cuántas pesetas perjudica doña Ahorros a sus vecinos en la temporada de invierno (4 meses)?



Problema XV-37.

**38.** Una pared está formada por dos planchas paralelas de 5 y 4 cm de grosor y con coeficientes de conductividad térmica de 209 y 83,6 W/m · K respectivamente. Siendo 100 °C y 10 °C las temperaturas de las caras opuestas respectivas, determinar: 1) La temperatura de la intercámara. 2) El gradiente de temperatura en cada una de las planchas y la intensidad térmica a través de la pared.

**39.** Las paredes de un horno están construidas con ladrillo refractario de una conductividad térmica de 0,14 W/m °C, y con un espesor de 15 cm. La temperatura en el interior del horno es de 400 °C y, en el exterior, 20 °C. 1) Calcular las pérdidas de calor por unidad de superficie del horno y por unidad de tiempo, a través de sus paredes. 2) Calcular el espesor de una capa de amianto, con una conductividad de 0,04 W/m °C, que recubriendo las paredes permita reducir las pérdidas en un 50%. 3) Si la capa de amianto se sitúa en el interior del horno, ¿cuál es la temperatura en la superficie de separación entre amianto y ladrillo?

**40.** Una ventana cuadrada de 1 m de lado y 5 mm de espesor separa una habitación a 20 °C del exterior a 0 °C; siendo la conductividad térmica del vidrio de la ventana 0,7 W/m · K. 1) Hallar el flujo térmico a través de la ventana. 2) Determinar qué reducirá más el flujo calculado, disminuir el lado de la ventana a 0,9 m o aumentar el espesor del vidrio en 0,5 mm.

#### D) DISOLUCIONES: PROPIEDADES COLIGATIVAS

**41.** Un litro de agua disuelve en condiciones normales 0,049 l de O<sub>2</sub>. Calcular la masa de oxígeno contenido en 5 l de agua a 0 °C y a la presión de 20 atm.

**42.** Calcular la longitud que debería tener el tubo de un osmómetro que en el interior de la célula osmótica tiene una solución de glucosa (C<sub>6</sub>H<sub>12</sub>O<sub>6</sub>) al 9% (9 g en 100 cm<sup>3</sup> de disolución) y en el exterior agua pura. La temperatura es de 0 °C. (Resolver el problema suponiendo la densidad de la disolución interior prácticamente igual a la unidad.)

**43.** Determinar el peso molecular de una sustancia si sabemos que 4,08 g de la misma, disueltos en 100 g de agua dan a 16 °C, una tensión de vapor de 13,53 mm. Tensión de vapor de agua a 16 °C = 13,637 mm.

**44.** Calcular la masa molecular de la sacarosa, sabiendo que 7,635 g en 0,5 l de disolución producen una presión osmótica de 1 atm a 0 °C.

**45.** Determinar la masa molecular de la sacarosa, sabiendo que 4,62 g disueltos en 50 g de agua producen un descenso crioscópico de 0,5 °C.  $K_c = 1,86 \text{ °C} \cdot \text{mol/kg}$ .

**46.** ¿A qué temperatura hierve, a la presión normal, la disolución anterior?  $K_c = 0,52 \text{ °C} \cdot \text{mol/kg}$ .

**47.** ¿Qué concentración en g/l tiene una disolución de glucosa isotónica con una de sacarosa de 18 g/l, consideradas ambas a la misma temperatura?

**48.** Disolvemos 100 g de caramelos en 1 kg de agua. El descenso crioscópico de la solución es 0,676 °C. Supuesto el caramelo formado exclusivamente de sacarosa y glucosa, calcular la proporción de cada una de ellas.

# CAPÍTULO XVI

## PRIMER Y SEGUNDO PRINCIPIOS DE LA TERMODINÁMICA

### A) PRIMER PRINCIPIO DE TERMODINÁMICA

#### XV - 1. Principio de la equivalencia

La Termodinámica niega todo proceso en el que no se cumpla el principio de conservación de la energía. Aplicando esta hipótesis a una máquina térmica capaz de transformar el calor en energía mecánica diremos:

*«Es imposible construir una máquina térmica de funcionamiento ininterrumpido, capaz de producir trabajo mecánico sin un consumo equivalente de energía calorífica».*

A este principio termodinámico se le ha dado el nombre de «IMPOSIBILIDAD DEL MÓVIL PERPETUO DE PRIMERA ESPECIE».

Otra forma de expresar esta hipótesis es mediante el «PRINCIPIO DE LA EQUIVALENCIA», el cual nos determina el trabajo que podría ser realizado a costa de una cierta cantidad de calor, si se transformase éste *totalmente*. Para realizar la «total» transformación del calor es necesario que el sistema quede al final del fenómeno de forma idéntica a cuando se inició (estado final igual a inicial). Así se tiene evidencia de que el sistema no ha acumulado calor en la forma que sea. En tales condiciones, a doble cantidad de calor comunicado al sistema, se realiza doble trabajo; a triple calor hay aprovechamiento de triple trabajo, etc. Podemos compendiar tales ideas diciendo:

*«Si partiendo de un estado inicial se llega al mismo estado final, la relación entre el calor comunicado al sistema y el trabajo desarrollado por él, es una cantidad constante».*

$$\frac{\text{Trabajo}}{\text{Calor}} = \text{cte} = J$$

La constante  $J$  (EQUIVALENTE MECÁNICO DEL CALOR) es el trabajo capaz de ser producido por una caloría.  $J = 4,18 \times 10^7 \text{ erg/cal} = 4,18 \text{ J/cal} = 427 \text{ kgm/kcal}$ .

Estos números son sorprendentes: la cantidad de calor capaz de elevar un litro de agua un grado es suficiente, transformada totalmente en trabajo, para hacer ascender a tal masa de agua hasta una altura de 427 m.

Si consideramos que la energía que aprovechamos en un ciclo cerrado (partiendo de un estado inicial y llegando al mismo estado final) produciendo trabajo es la energía calorífica, entonces en una transformación infinitesimal el  $dW$  aprovechado tiene que ser igual al  $dQ$  absorbido en ella, y en todo el ciclo se ha de cumplir.

$$\oint dQ = \oint dW \Rightarrow \oint (dQ - dW) = 0$$

que es la expresión integral del principio de equivalencia.

Una de las muchas experiencias que realizó James Prescott Joule (1818-1889) para la determinación de  $J$  consiste en que en un calorímetro de paredes adiabáticas cuya masa total en agua es  $M$ , giran unas paletas fijas en un eje vertical (Fig. XVI-1) accionadas por la caída de una masa  $m$ . La diferencia entre la energía potencial de este cuerpo ( $mgh$ ) con respecto a un cierto nivel y la cinética al llegar a él ( $mv^2/2$ ) se transforma en calor por efecto del rozamiento de las paletas con el agua, elevando la temperatura del sistema de  $t$  a  $t'$ .

$$J = \frac{mgh - \frac{1}{2}mv^2}{M(t' - t)}$$

Expresando las diversas magnitudes en unidades convenientes, se encuentran para  $J$  los valores citados anteriormente.

Es de destacar en esta experiencia que podemos transformar la energía mecánica en calor, sin ninguna adición externa de calor al sistema formado por el calorímetro, despejando toda duda sobre la antigua teoría del calórico que definía al calor como un fluido que va de unas sustancias a otras.

**PROBLEMAS: 1 al 10.**

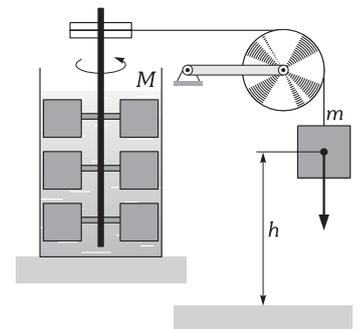


Fig. XVI-1.- Método de Joule para la determinación del equivalente mecánico del calor.

**XVI. – 2. Energía interna de un sistema**

Si tomamos un gas encerrado en un recipiente cilíndrico provisto de un pistón que ajusta herméticamente, que pueda deslizarse por sus paredes, al comunicarle calor desde el exterior (calentarlo), entonces el gas, «venciendo» a la fuerza debida a la presión externa, al peso del pistón y a las fuerzas de rozamiento entre éste y las paredes del recipiente, se «expansiona» (aumenta su volumen) haciendo ascender al pistón. Observada esta experiencia razonamos diciendo que la energía calorífica comunicada al sistema se ha transformado en trabajo mecánico para hacer ascender al émbolo venciendo las fuerzas debidas a la presión exterior, al peso y a las resistencias pasivas, y en *aumentar la «energía interna del gas»*; los primeros resultados en los que el calor se transforma en energía mecánica, se comprenden perfectamente con los estudios realizados hasta ahora, pero ¿qué es ese aumento de energía interna del gas? Para comprender esto y otras incógnitas que no hemos podido plantear en los anteriores estudios de calor y sus efectos, tenemos que recurrir a un estudio microscópico del sistema.

Supongamos ahora que el recipiente que contiene al gas es indeformable, al comunicarle una cierta energía calorífica es absorbida por el sistema y aparentemente ha desaparecido; sabemos que esto es imposible y que el principio de conservación de la energía, exige que esta energía se acumule en el gas; diremos de nuevo que «*ha ido a aumentar su energía interna*».

Entenderemos por ENERGÍA INTERNA de cualquier cuerpo, sea cual sea su estado, la energía total que se refiere a sus partículas; en ella entran: la energía cinética de movimiento de las moléculas respecto del centro de masas del sistema, la de movimiento de los átomos respecto del centro de masas de la molécula si ésta no es monoatómica, la energía potencial de interacción de los átomos dentro de la molécula, e incluso la energía cinética y potencial de las partículas que entran en la composición de los átomos.

En el último caso comentado, las moléculas que constituyen el gas, al calentarlo, han aumentado su velocidad y por tanto su energía cinética, y razonamos diciendo que «*El sistema ha experimentado un aumento de energía interna igual a la energía térmica comunicada*».

**XVI – 3. Generalización del principio de la equivalencia. Primer principio de Termodinámica**

En la transformación del calor en trabajo y su inversa hay que considerar que, en general, los estados extremos no son idénticos, es decir, que la energía calorífica comunicada ( $dQ$ ) se distribuye entre una realización de trabajo y una acumulación de energía interna en el propio sistema.

Si aplicamos al ciclo cerrado de la Fig. XVI-2 el principio de equivalencia tendremos que:

$$\oint (dQ - dW) = 0 \Rightarrow \int_{1a}^2 (dQ - dW) + \int_{2b}^1 (dQ - dW) = 0$$

cambiando los extremos de la integral podemos poner:

$$\int_{1a}^2 (dQ - dW) - \int_{1b}^2 (dQ - dW) = 0 \Rightarrow \int_{1a}^2 (dQ - dW) = \int_{1b}^2 (dQ - dW)$$

Si en el proceso que estudiamos hacemos el mismo razonamiento pero pasando de 2 a 1 por el camino c nos resultará:

$$\int_{1a}^2 (dQ - dW) = \int_{1c}^2 (dQ - dW)$$

haciendo el mismo razonamiento pero volviendo de 2 a 1 por el camino que queramos, siempre obtenemos para la integral el mismo valor, es decir:

$$\int_{1a}^2 (dQ - dW) = \int_{1b}^2 (dQ - dW) = \int_{1c}^2 (dQ - dW) = \dots$$

luego en una transformación cualquiera en la que el sistema pasa de 1 a 2 la diferencia del calor absorbido y el trabajo exterior producido, no depende de los caminos intermedios, dependiendo únicamente del estado 1 y del estado 2.

Atribuimos al estado 1 una función  $U_1$  y al estado 2 la función  $U_2$ , de modo que en la transformación en que el sistema pasa de 1 a 2 tendremos:

$$\int_1^2 (dQ - dW) = U_2 - U_1 \Leftrightarrow Q_1^2 - W_1^2 = U_2 - U_1$$

bien entendido que el valor de  $Q_1^2$  y de  $W_1^2$  depende de los estados intermedios, no así su diferencia. A la función de estado  $U$  se le llama ENERGÍA INTERNA DEL SISTEMA.

Si los estados 1 y 2 son infinitamente próximos, pondremos la ecuación anterior de la forma:

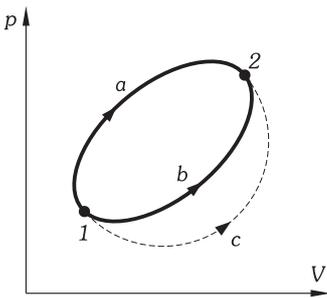


Fig. XVI-2.- En una transformación termodinámica cualquiera en la que el sistema pasa de 1 a 2 la diferencia del calor absorbido y el trabajo exterior producido, no depende de los caminos intermedios, dependiendo únicamente del estado 1 y del estado 2.

$$\boxed{dU = dQ - dW} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{dQ = dW + dU}$$

«La cantidad de calor comunicada al sistema es igual al trabajo realizado por él más la variación de su energía interna».

La ecuación anterior expresa el principio más importante de la naturaleza, el de conservación de la energía, aplicado a sistemas termodinámicos, y se conoce como PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA, que en su forma integral se puede enunciar también:

Si de un estado inicial se llega a un estado final distinto, la diferencia entre el calor comunicado al sistema y el trabajo por él desarrollado se emplea en variar su energía interna; esta variación es independiente de la forma de realizar la transformación, dependiendo, únicamente, del estado inicial 1 y del final 2.

Insistimos en el convenio ya establecido en el que el calor ( $dQ$ ) es positivo si es absorbido del ambiente por el sistema, y negativo si es calor cedido por el sistema al ambiente; el trabajo ( $dW$ ) es positivo si es realizado por el sistema sobre el medio exterior, y negativo si se considera realizado por el medio exterior sobre el sistema.

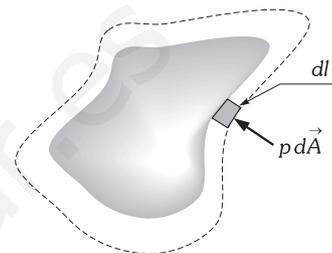


Fig. XVI-3.- Trabajo en la expansión de un gas.

### XVI - 4. Trabajo realizado en los cambios de volumen

Supongamos un sistema en expansión; el gas «venciendo» a la presión externa se expandiona pasando de la posición original a la representada en la Fig. XVI-3 por la línea de puntos. La fuerza externa vencida por un elemento de superficie de área  $dA$  es:  $dF = p dA$ , integrando sobre la superficie límite se obtiene:

$$F = \oint_A p dA = p \oint_A dA = pA$$

y si la porción se mueve expansionándose  $dl$ , el trabajo elemental producido «contra» la fuerza exterior será:

$$\boxed{dW = pA dl = p dV}$$

ya que  $A dl = dV$ , es la variación elemental de volumen que ha experimentado el gas. El trabajo finito del estado 1 al 2 es:

$$\boxed{W = \int_1^2 p dV}$$

Como ya se ha dicho, consideraremos trabajo positivo o «motor» cuando la transformación se realiza en el sentido de la expansión y negativo «resistente» cuando se realiza en sentido de la compresión.

El primer principio de termodinámica se podrá expresar:

$$\boxed{dQ = dU + p dV} \quad (1)$$

En el diagrama de Clapeyron ( $V, p$ ) el trabajo queda representado por el área encerrada por la curva, las ordenadas extremas (presiones) y el eje de abscisas (volúmenes). En efecto: el producto  $p dV$  está representada en el diagrama por el área del rectángulo rayado (Fig. XVI-4) cuya base es elemental; tal área difiere en un infinitésimo de segundo orden ( $BEF$ ) de la del trapecio con un lado curvo  $ABFG$ . En el límite la suma de las infinitas áreas rectangulares coincide con la  $ABCD$  (concepto de integral definida).

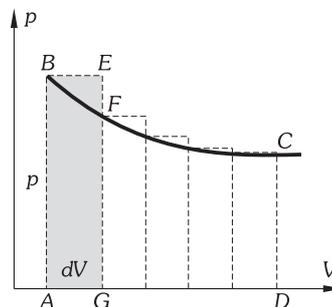


Fig. XVI-4.- El trabajo queda representado por el área encerrada por la curva, las ordenadas extremas (presiones) y el eje de abscisas.

Si el ciclo es cerrado (estado inicial coincidente con el final) el trabajo queda representado por el área encerrada en el ciclo, el cual es positivo si el ciclo es recorrido en el sentido de las agujas de un reloj y negativo en caso contrario (Fig. XVI-5).

En efecto: el trabajo total en el ciclo es el correspondiente a la transformación  $NPQ$  (positivo) más el de la  $QSN$  (negativo).

$$W = \text{área } MNPQRM - \text{área } MNSQRM = \text{área } NPQSN$$

Si la transformación se hubiese realizado en sentido inverso, el área que representa trabajo negativo hubiese sido mayor que la correspondiente al positivo.

### XVI - 5. Cálculo del trabajo en transformaciones isocoras, isobaras e isotermas de un gas ideal

En una transformación ISOCORA O ISOSTÉRICA (se llaman así a las transformaciones termodinámicas que se realizan a volumen constante), al ser la variación de volumen nula tendremos que:  $p dV = 0$ , luego el trabajo es nulo.

Si la transformación es ISOBÁRICA (la presión permanece constante) el trabajo es:

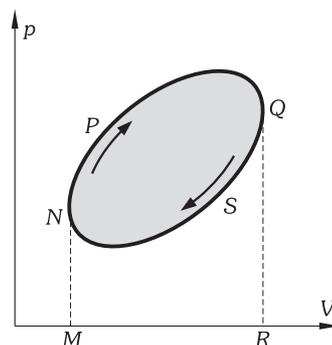


Fig. XVI-5.- En un ciclo cerrado el trabajo queda representado por el área encerrada en el ciclo.

$$W_1^2 = \int_1^2 p dV = p(V_2 - V_1) \quad (2)$$

si queremos ponerlo en función de las temperaturas extremas, operaremos teniendo en cuenta que:

$$\left. \begin{array}{l} pV_1 = nRT_1 \\ pV_2 = nRT_2 \end{array} \right| \Rightarrow V_2 - V_1 = \frac{nR}{p}(T_2 - T_1)$$

que sustituida en (2) nos queda:

$$W_1^2 = nR(T_2 - T_1)$$

Si se trata de una transformación ISOTERMA de un gas ideal, considerando que:  $pV = nRT$ , obtenemos:

$$W_1^2 = \int_1^2 p dV = \int_1^2 \frac{nRT}{V} dV$$

y como  $nRT$  es constante nos quedará:

$$W_1^2 = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

teniendo en cuenta que:  $p_1V_1 = p_2V_2$  (Boyle-Mariotte), podemos poner:

$$W_1^2 = nRT \ln \frac{p_1}{p_2}$$

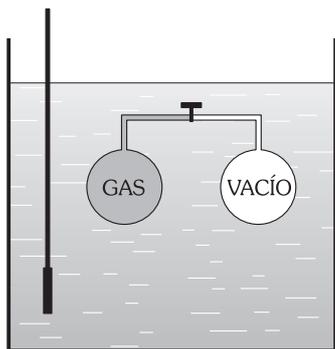


Fig. XVI-6.- El gas del primer recipiente, al abrir la llave, se expande variando su presión y su volumen, mientras que la temperatura permanece constante.

### XVI – 6. Gases ideales: experiencia y ley de Joule

Se introduce un gas, muy apartado de las condiciones de licuefacción (muy expansionado), en una vasija comunicada con otra vacía por una llave de gran paso (Fig. XVI-6), el conjunto se introduce en un calorímetro. Se abre la llave y el gas se expande variando su presión y su volumen, mientras que la temperatura permanece constante.

Al no haber intercambio de calor con el exterior (transformación adiabática) se verifica que  $dQ = 0$ . Al no haber «vencido» el gas ninguna presión, el trabajo ( $p dV$ ) será nulo.

$$dU = dQ - p dV = 0 \Rightarrow U = cte$$

La energía interna de un gas permanece constante con la temperatura, aunque se realicen en él cambios de presión y volumen. En consecuencia:

«La energía interna de un gas perfecto es una función exclusiva de su temperatura».

$$U = f(T)$$

Considerando la energía interna de los gases, como la correspondiente a los movimientos moleculares, el estudio de la teoría cinética nos hubiese llevado a la misma conclusión. En efecto: la energía interna molar tiene por valor:

$$U = \frac{l}{2} RT$$

párrafo XIV-27 en la que  $l$  son los grados de libertad de la molécula y  $R$  la constante universal de los gases ideales; para un determinado gas  $U$  depende tan sólo de la temperatura.

### XVI – 7. Transformaciones a volumen constante (isostéricas o isocoras) y a presión constante (isobaras)

Al ser  $V$  constante, el primer principio de termodinámica (1) se expresa:

$$dU = dQ - p dV = dQ \Rightarrow Q = U_2 - U_1$$

En las transformaciones a volumen constante el calor comunicado al sistema se emplea totalmente en aumentar su energía interna.

Si  $c_v$  es el CALOR ESPECÍFICO MOLAR o CALOR MOLAR A VOLUMEN CONSTANTE entonces para un mol:

$$dQ = c_v dT = dU \Rightarrow \boxed{c_v = \frac{dU}{dT}} \quad (3)$$

Si se trata de  $n$  moles del gas, la expresión anterior se escribirá:

$$\boxed{dU = nc_v dT}$$

Si en una transformación de un gas, la presión permanece constante, la expresión del primer principio integrada nos quedará:

$$U_2 - U_1 = Q_1^2 - p(V_2 - V_1) \Rightarrow Q_1^2 = U_2 - U_1 + p(V_2 - V_1)$$

Siendo el último término la expresión del trabajo a presión constante, se puede afirmar:

«En las transformaciones a presión constante el calor comunicado al sistema se emplea en aumentar su energía interna y realizar trabajo exterior».

Y como ya conocemos:

$$dQ = nc_p dT \Rightarrow Q_1^2 = n \int_{T_1}^{T_2} c_p dT$$

y para los gases ideales, en los que  $c_p$  no depende de la temperatura:

$$Q_1^2 = nc_p (T_2 - T_1)$$

### XVI - 8. Expresión general de la variación de energía interna de un gas en cualquier transformación termodinámica

La experiencia de Joule nos hace ver que la energía interna de un gas es una función de estado dependiente únicamente de la temperatura, luego en una transformación isoterma permanecerá constante.

Para una transformación infinitesimal cualquiera,  $1 \rightarrow 2$  en la Fig. XVI-7, pasamos de la temperatura  $T$  a la  $T + dT$  y la energía interna del gas pasará de  $U$  a  $U + dU$ .

El cálculo de  $dU$  lo hacemos para el caso particular  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$  ( $1 \rightarrow 3$  transformación isocora y de  $3 \rightarrow 2$  transformación isoterma), esta variación será según la (3):

$$\boxed{dU = nc_v dT} \quad (4)$$

ya que en  $3 \rightarrow 2$  no hay variación de energía interna.

Según el primer principio de termodinámica, si partimos de un estado inicial y llegamos a un distinto estado final, la variación de energía interna es independiente de los estados intermedios y depende del estado inicial y final. Luego la fórmula obtenida para el caso particular  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$  será general para cualquier transformación infinitesimal.

La ecuación integral de la variación de energía interna en cualquier proceso será:

$$\boxed{U_2 - U_1 = \int_1^2 nc_v dT = nc_v (T_2 - T_1)}$$

### XVI - 9. Determinación del calor molar de los gases a volumen constante

Una de las condiciones que debe cumplir un gas para ser considerado como ideal es que el valor de  $c_v$  (calor molar a volumen constante) sea independiente de la temperatura, lo que nos permite integrar la expresión (4) obteniendo:

$$U = nc_v T + \text{constante}$$

«La energía interna de un gas ideal es una función lineal de primer grado de la temperatura absoluta».

Realizando el mismo razonamiento que en el párrafo XV-4 y teniendo en cuenta los grados de libertad de las moléculas de los gases, ya indicados en la teoría cinética (párrafo XIV-27) se obtiene considerando un mol de gas:

$$dU = c_v dT \Rightarrow c_v = \frac{dU}{dT}$$

y teniendo en cuenta que:  $U = \frac{1}{2} RT \Rightarrow \boxed{c_v = \frac{1}{2} R}$

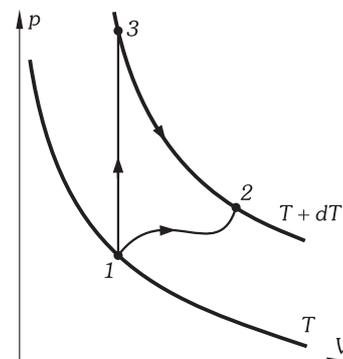


Fig. XVI-7.- La variación de energía interna en el proceso  $1 \rightarrow 2$  es la misma que en el  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ .

$$\text{MOLÉCULAS MONOATÓMICAS:} \quad l = 3 \quad \Rightarrow \quad c_v = \frac{3}{2} R \approx \frac{3}{2} \cdot 2 = 3 \text{ cal/K} \cdot \text{mol}$$

$$\text{MOLÉCULAS BIATÓMICAS:} \quad l = 5 \quad \Rightarrow \quad c_v = \frac{5}{2} R \approx \frac{5}{2} \cdot 2 = 5 \text{ cal/K} \cdot \text{mol}$$

$$\text{MOLÉCULAS TRIATÓMICAS:} \quad l = 6 \quad \Rightarrow \quad c_v = \frac{6}{2} R \approx \frac{6}{2} \cdot 2 = 6 \text{ cal/K} \cdot \text{mol}$$

Estos resultados son muy parecidos a los que se obtienen experimentalmente.

### XVI – 10. Fórmula de Mayer

Si  $c_p$  es el calor molar a presión constante, la cantidad de calor en una transformación isobara elemental ( $p = \text{constante}$ ) es:  $dQ = nc_p dT$ ; en los gases ideales la variación de energía interna es siempre:  $dU = nc_v dT$ . El primer principio se escribiría:  $nc_v dT = nc_p dT - p dV$ .

Si diferenciamos la ecuación de estado:  $pV = nRT \Rightarrow p dV + V dp = nR dT$ , y si la transformación es isobara  $dp = 0 \Rightarrow p dV = nR dT$ ; luego:

$$nc_v dT = nc_p dT - nR dT \quad \Rightarrow \quad \boxed{c_p - c_v = R} \quad \text{FÓRMULA DE JULIUS R. VON MAYER (1814-1878)}$$

como  $R \approx 2$  calorías/K · mol y teniendo en cuenta los valores expresados para el calor molar a volumen constante en los gases ideales, tendremos:

$$\text{GASES MONOATÓMICOS:} \quad c_v = 3 \text{ cal/K} \cdot \text{mol}, \quad c_p = 5 \text{ cal/K} \cdot \text{mol}.$$

$$\text{GASES BIATÓMICOS:} \quad c_v = 5 \text{ cal/K} \cdot \text{mol}, \quad c_p = 7 \text{ cal/K} \cdot \text{mol}.$$

$$\text{GASES TRIATÓMICOS:} \quad c_v = 6 \text{ cal/K} \cdot \text{mol}, \quad c_p = 8 \text{ cal/K} \cdot \text{mol}.$$

Resultados muy aproximados a los que se obtienen experimentalmente.

**PROBLEMAS: 11 al 18.**

### XVI – 11. Transformaciones adiabáticas

Son transformaciones ADIABÁTICAS las que se realizan a calor constante, es decir, sin intercambios caloríficos con el medio exterior al sistema.

Al ser  $dQ = 0$ , la expresión del primer principio queda:

$$\boxed{dW = -dU} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_1^2 dW = U_1 - U_2} \quad (5)$$

En una transformación adiabática el trabajo realizado contra las fuerzas exteriores es a costa de la disminución de energía interna.

### XVI – 12. Transformaciones adiabáticas en los gases ideales. Ecuaciones de Poisson

Teniendo en cuenta las expresiones generales:  $dW = p dV$ ,  $dU = nc_v dT$ , la expresión (5) la podemos escribir:

$$p dV + nc_v dT = 0$$

diferenciando la ecuación de estado  $pV = nRT$  se obtiene:

$$p dV + V dp = nR dT \quad \Rightarrow \quad n dT = \frac{p dV}{R} + \frac{V dp}{R}$$

que sustituida en la anterior nos da:

$$0 = p dV + c_v \frac{p dV}{R} + c_v \frac{V dp}{R} = p dV \frac{c_v + R}{R} + c_v \frac{V dp}{R}$$

Considerando que  $c_v + R = c_p$  (fórmula de Mayer) y multiplicando por  $R$  nos queda:

$$0 = c_p p dV + c_v V dp$$

y dividiendo por  $c_v V p$ , y llamando:

$$\boxed{\gamma = \frac{c_p}{c_v}}$$

obtenemos:

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0$$

e integrando:  $\gamma \ln V + \ln p = \ln k$ ; y por tanto:

$$pV^\gamma = K = cte$$

que es la ecuación de las adiabáticas de un gas ideal.

Siendo  $V = nRT/p$ , podemos sustituir su valor en la anterior, y por cálculos elementales llegamos a:

$$Tp^{(1-\gamma)/\gamma} = K' = cte$$

Al ser  $c_p - c_v = R$ , se verifica que  $c_p/c_v = \gamma > 1$  y por tanto el exponente de  $p$  es negativo; al aumentar la presión del gas el factor  $p^{(1-\gamma)/\gamma}$  disminuye; la constancia del producto exige que  $T$  aumente. Por el contrario, la expansión de un gas, venciendo una presión exterior, lleva consigo una disminución de la temperatura.

*La expansión o compresión adiabática de un gas ideal con realización de trabajo (venciendo o siendo vencido el sistema por la presión externa) lleva consigo una disminución o aumento de la temperatura.*

Eliminando  $p$ , entre la primera ecuación de las adiabáticas y la de estado del gas, obtenemos:

$$TV^{\gamma-1} = K'' = cte$$

Las tres ecuaciones encuadradas constituyen las llamadas ECUACIONES DE DENIS S. POISSON (1781-1840) de las adiabáticas de un gas ideal.

### XVI - 13. Pendiente de las curvas isotermas y adiabáticas en el diagrama de Clapeyron

Consideremos un punto cualquiera  $P(V, p)$  del diagrama de Clapeyron y en él calculemos el valor de la primera derivada de  $p$  con respecto a  $V$  en las isotermas y adiabáticas, esta derivada nos medirá la pendiente de estas curvas en  $P(V, p)$ . La ecuación de las isotermas es:  $pV = cte$ , que diferenciada:

$$p dV + V dp = 0 \Rightarrow \left( \frac{dp}{dV} \right)_{T=cte} = -\frac{p}{V} \tag{6}$$

valor de la pendiente de las isotermas. La ecuación de las adiabáticas:  $pV^\gamma = cte$ , diferenciada nos da:

$$p\gamma V^{\gamma-1} dV + V^\gamma dp = 0 \Rightarrow \left( \frac{dp}{dV} \right)_{Q=cte} = -\gamma \frac{p}{V} \tag{7}$$

valor de la pendiente de las adiabáticas.

Comparando las (6) y (7) y teniendo en cuenta que  $\gamma > 1$  obtenemos:

$$\left( \frac{dp}{dV} \right)_{T=cte} > \left( \frac{dp}{dV} \right)_{Q=cte}$$

luego la pendiente de las isotermas es mayor (menos negativa) que en las adiabáticas o lo que es lo mismo:

*En el diagrama de Clapeyron las adiabáticas de un gas perfecto son descendentes y tienen, en valor absoluto, una pendiente  $\gamma$  veces mayor (son más inclinadas) que las isotermas (Fig. XVI-8).*

**PROBLEMAS: 19 al 21.**

### XVI - 14. Función térmica o entalpía

Cuando en una transformación un sistema tiene la posibilidad de dilatarse o comprimirse libremente manteniéndose constante la presión, la expresión matemática del primer principio se puede escribir:

$$dQ = dU + p dV = dU + d(pV) = d(U + pV)$$

con lo que en un proceso isobárico el calor absorbido o cedido por el sistema se puede expresar como la variación de la función:

$$H = U + pV$$

llamada ENTALPÍA DEL SISTEMA, y que es función de estado por serlo  $U$ .

Su variación con la temperatura es (para un mol de sustancia):

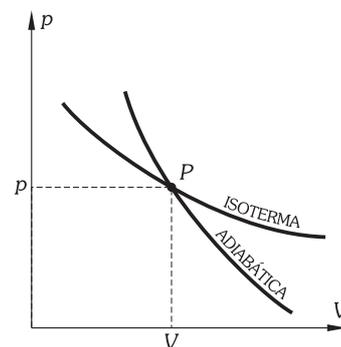


Fig. XVI-8.- Pendiente de las curvas isotermas y adiabáticas en el diagrama de Clapeyron.

$$\frac{dH}{dT} = \frac{dU}{dT} + \frac{d(pv)}{dT} = c_v + R \Rightarrow \boxed{c_p = \frac{dH}{dT}}$$

que comparada con (3), y de lo dicho arriba, nos lleva a la conclusión de que *la entalpía desempeña en las transformaciones isobáricas el mismo papel que la energía interna en las isocoras.*

Para  $n$  moles la variación de entalpía será:

$$\boxed{dH = n c_p dT} \Leftrightarrow \boxed{\Delta H = n \int_{T_1}^{T_2} c_p dT = n c_p (T_2 - T_1)}$$

Esta última igualdad será cierta cuando  $c_p$  no dependa de la temperatura.

**PROBLEMAS: 22 al 24.**

### B) SEGUNDO PRINCIPIO DE TERMODINÁMICA

El primer principio de termodinámica establece que la energía se conserva: la conversión del calor y del trabajo expresada en éste sitúa al calor sobre la misma base que las demás energías. Nos garantiza, por ejemplo, que al caer un cuerpo al suelo ocurre que la energía potencial del objeto se convierte en cinética y cuando choca con el suelo, esta energía se transforma en energía interna del cuerpo y del suelo; este primer principio no se opone al proceso inverso, es decir: no se opone a que el cuerpo se eleve espontáneamente mientras se enfrían el suelo y el cuerpo; sin embargo, no se ha observado que esto ocurra.

Hay muchos otros procesos que cumpliendo el primer principio de termodinámica nunca ocurren en la naturaleza, tales como: el paso del calor de un sistema de menor temperatura a otro de temperatura superior; tampoco ocurre de forma espontánea el proceso de compresión de un gas pasando de menor a mayor presión... En la naturaleza estos procesos ocurren espontáneamente exactamente al revés y para poder realizarlos en sentido inverso es necesario un aporte de energía.

*El segundo principio de termodinámica se ocupa de los procesos que, cumpliendo el primer principio, ocurren o no en la naturaleza y explica la carencia de reversibilidad de éstos, precisando el sentido y la forma en la cual las evoluciones son realmente posibles.*

#### XVI – 15. Máquinas térmicas. Rendimiento de una máquina térmica

Es un proceso posible la transformación íntegra de trabajo en calor, pero nunca se ha podido encontrar un procedimiento mediante el cual se convierta por completo una cantidad dada de calor en trabajo.

«Una MÁQUINA TÉRMICA es todo dispositivo que transforma la energía térmica en trabajo mecánico».

La invención de un dispositivo práctico que transformara la energía térmica en trabajo fue hecha por Thomas Newcomen (1663-1729) en 1712, que construyó una máquina de vapor, compuesta por un cilindro y un pistón en su interior, que fue aplicada con éxito en el bombeo de agua en las minas; James Watt (1736-1819) en 1763 estudiando esta máquina, inició la serie de descubrimientos y mejoras que convirtieron a la máquina de vapor en una fuente eficaz de potencia, provocando la primera revolución industrial y al mismo tiempo el inicio de la Termodinámica.

En 1824 el ingeniero francés N. L. Sadi Carnot (1796-1832) cuando la máquina de Watt era ya de uso corriente, y muchos años antes de que se enunciara el primer principio de termodinámica, determina que:

*Para que el calor se transforme en energía mecánica, realizando trabajo, es necesario un desnivel térmico, es decir, un foco caliente y otro frío. El calor, al pasar del primero al segundo, se puede transformar, en parte en trabajo (Fig. XVI-9).*

Las primeras máquinas que se construyeron eran de muy bajo rendimiento ya que sólo una pequeña parte del calor absorbido del foco caliente podía transformarse en trabajo útil; a medida que se modernizaban los diseños de ingeniería en su construcción, se mejoraba el rendimiento de estas máquinas y se albergaba la esperanza de inventar una máquina térmica capaz de convertir totalmente una determinada cantidad de energía térmica en energía mecánica. A tal máquina se le llamó *MÓVIL PERPETUO DE SEGUNDA ESPECIE* y sería capaz de transformar el calor en trabajo sin un «salto» de temperatura (Fig.-XVI-10). La experiencia demuestra la imposibilidad de construir una máquina que funcione de esta forma, y que sería capaz de captar la extraordinaria energía térmica acumulada en los océanos o en la atmósfera. A la afirmación de esta imposibilidad, debida a Rudolf Clausius (1822-1888) en 1867, se le denomina *IMPOSIBILIDAD DEL MÓVIL PERPETUO DE SEGUNDA ESPECIE*. William Thomson (Lord Kelvin 1824-1907) juntamente con Max Planck (1858-1947) enunciaron este principio diciendo:

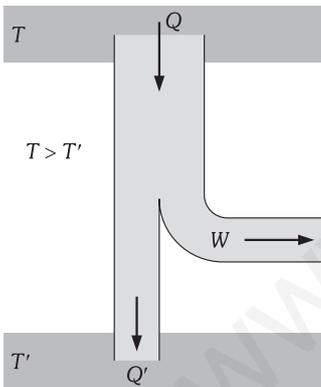


Fig. XVI-9.- Máquina térmica real.

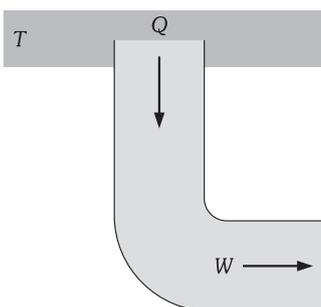


Fig. XVI-10.- Máquina térmica ideal (imposible).

«Es imposible que exista una transformación cuyo único resultado final fuese convertir en trabajo el calor extraído de una fuente».

Cumpliendo con el principio anterior, todas las máquinas térmicas tienen un foco caliente y otro frío.

«*Toda máquina térmica es un sistema que múltiples veces realiza un ciclo cerrado (realiza un proceso cerrado)*».

Supongamos que durante el ciclo la «sustancia de trabajo» (por ejemplo un gas), primeramente se expande desde un volumen inicial  $V_1$  hasta el volumen  $V_2$ , a continuación se comprime hasta el volumen inicial  $V_1$ . Para que el trabajo durante el ciclo sea mayor que cero (área del ciclo, véase el párrafo 4 de este capítulo), la presión para cada valor de  $V$  (y, por tanto, la temperatura) en el proceso de expansión debe ser mayor que durante la compresión; para que esto ocurra, en la expansión habrá que comunicar una determinada cantidad de calor  $Q$ , procedente del foco caliente, a la sustancia de trabajo, mientras que en la compresión ésta deberá ceder una cantidad de calor  $Q'$  ( $Q' < 0$ ) al foco frío.

Aplicando el primer principio de termodinámica a un ciclo cerrado se obtiene que  $dQ = dW$ , e integrando para el ciclo descrito por la sustancia de trabajo:  $Q + Q' = W$ . Es evidente que con cuanta mayor eficacia transforme la máquina térmica el calor  $Q$  que recibe del foco caliente en trabajo útil  $W$ , mejor será la máquina. Por esta razón, caracterizamos las máquinas térmicas por su rendimiento  $\eta$  que se define como:

«RENDIMIENTO DE UNA MÁQUINA TÉRMICA es el trabajo obtenido por cada unidad de calor cedida por el hogar».

Un rendimiento 0,3 quiere decir que de cada caloría cedida por el foco caliente únicamente 0,3 se transforma en trabajo. El rendimiento tiene por valor:

$$\eta = \frac{W}{Q} = \frac{Q + Q'}{Q}$$

De todo lo anterior, deducimos que, puesto que  $Q'$  es negativo, el rendimiento nunca puede ser mayor que la unidad.

Al invertir el ciclo representado en la Fig. XVI-11 obtenemos una máquina frigorífica que junto con la de vapor y los motores de explosión se describen más adelante.

**PROBLEMAS: 25 y 26.**

**XVI - 16. Procesos reversibles e irreversibles**

Son procesos reversibles los que tienen dos características fundamentales:

1. Están exentos de todo efecto disipativo, como la viscosidad del fluido de trabajo y el rozamiento de sus piezas móviles.
2. Se realizan cuasiestáticamente, es decir: el proceso es una sucesión de indefinidos estados de equilibrio, y de forma tal que modificando infinitamente poco las causas de la transformación, ésta se puede realizar en sentido contrario.

Supongamos un sistema aislado en equilibrio termodinámico, por ejemplo un gas encerrado en un cilindro con un émbolo que puede deslizarse sin rozamiento por el interior de aquél y que se encuentra cargado con una masa determinada; las paredes del cilindro, su base y el émbolo (de cierre hermético) son de un material aislante perfecto. El equilibrio se consigue cuando la presión exterior (carga del émbolo) es igual a la interior del gas ( $p_1$ ) y la temperatura ( $T_1$ ) y el volumen que ocupa ( $V_1$ ) en el interior del cilindro permanecen constantes con el tiempo. Expansionemos el sistema pasándolo a otro estado de equilibrio definido por  $p_2, T_2, V_2$ ; de las muchas formas que tenemos de realizar esta transformación analizaremos dos casos extremos:

- A) Disminuyendo la carga del émbolo de forma repentina, el gas se expande rápidamente y tendremos que esperar a que se establezca el equilibrio. Durante esta transformación el sistema no es homogéneo (el gas se encuentra en estado turbulento) y su temperatura y presión no están definidas; este proceso no se puede representar en un diagrama ( $V, p$ ), puesto que no conocemos cuáles son la temperatura y presión asociados a un volumen intermedio. El sistema pasa del estado de equilibrio ( $p_1, T_1, V_1$ ) al ( $p_2, T_2, V_2$ ) a través de una serie de estados que no son de equilibrio.
- B) Si disminuimos la carga del émbolo en un peso infinitamente pequeño, el gas se expande hasta alcanzar un nuevo estado de equilibrio infinitamente próximo al primero. Las sucesivas e infinitas descargas elementales del émbolo nos producirán la expansión del gas desde un volumen  $V_1$  a  $V_2$ . Si en vez de descargar el émbolo se hubiesen efectuado cargas, el gas se hubiese comprimido en vez de expandirse. Podemos representar este proceso

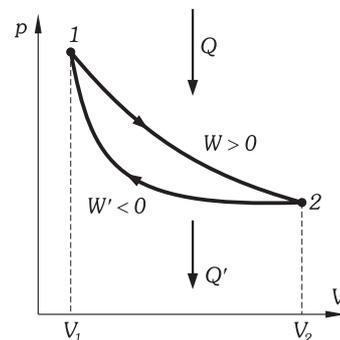


Fig. XVI-11.- Funcionamiento de una máquina térmica (motor).

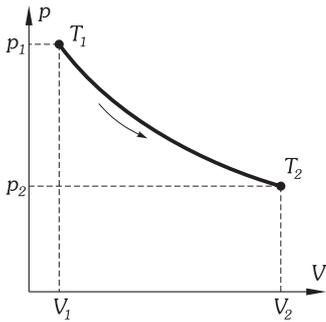


Fig. XVI-12.— Proceso reversible.

en el diagrama ( $V, p$ ) por una línea continua como se muestra en la Fig. XVI-12, que como no ha existido intercambio de calor con el exterior nos representa una curva adiabática.

Los procesos del tipo A se llaman irreversibles y los del tipo B se llaman reversibles.

*Las transformaciones reversibles son ideales; todas las transformaciones que se verifican realmente son irreversibles.*

El proceso estrictamente reversible es una abstracción útil que guarda una relación con los procesos reales, semejante a la que el gas ideal guarda con los gases reales.

**XVI - 17. La máquina de Carnot**

Carnot diseñó una máquina ideal en la que la «sustancia de trabajo» (por ejemplo, un gas), recorría un ciclo reversible; tal ciclo consta de dos procesos isotérmicos reversibles (cuyas temperaturas corresponden a la de los dos focos caloríficos) y dos procesos adiabáticos también reversibles. Suponía un sistema cuya ecuación de estado (ecuación que determina la forma de ser del sistema) es:  $f(p, V, T) = 0$ . Es decir que conocidos dos valores de las variables ( $p$  y  $V$ , por ejemplo) la tercera ( $T$ ) queda determinada. El gas pasa sucesivamente por 4 estados (1, 2, 3, 4) determinados por los siguientes valores:

Estado 1:	$p_1, V_1, T$	Estado 3:	$p_3, V_3, T'$
Estado 2:	$p_2, V_2, T$	Estado 4:	$p_4, V_4, T'$

y volvemos de nuevo al estado 1.

- El paso 1 → 2 es isotérmico.
- El paso 2 → 3 es adiabático.
- El paso 3 → 4 es isotérmico.
- El paso 4 → 1 es adiabático.

Este recorrido se llama CICLO DE CARNOT (Fig. XVI-13).

El motor de Carnot podría diseñarse de la siguiente forma: un gas ideal encerrado en un cilindro con un émbolo que se desliza sin rozamiento. Supongamos el gas a la presión  $p_1$ , dentro del cilindro de volumen  $V_1$  y a la temperatura  $T$ .

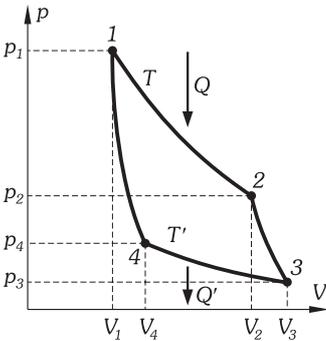


Fig. XVI-13.— Ciclo reversible de Carnot.

- 1 → 2) Encerramos el cilindro en una estufa a temperatura constante  $T$  y expandimos el gas subiendo el émbolo: el nuevo volumen ( $V_2$ ) será mayor que  $V_1$  y la presión  $p_2$  menor que la  $p_1$ ; la temperatura seguirá siendo la misma  $T$ . La representación gráfica de esta expansión es la curva 1, 2 (isoterma) de la figura. En esta transformación el gas ha tomado del hogar una cantidad de calor que representamos por  $Q$ .
- 2 → 3) Saquemos el cilindro de la estufa y lo aislamos del exterior. Seguimos expandiendo el gas y éste se enfría. Las variables han pasado de  $V_2, p_2$  y  $T$  a  $V_3, p_3$  y  $T'$  ( $V_3 > V_2$ ;  $p_3 < p_2$ ;  $T' < T$ ). La representación gráfica de esta expansión es la curva 2, 3 (adiabática) de la figura (más inclinada que la isoterma). Por ser la expansión adiabática el gas no ha tomado ni cedido calor.
- 3 → 4) Introducimos el cilindro en un ambiente a temperatura constante  $T'$  y comprimimos. Las variables han pasado de  $V_3, p_3$  a  $V_4, p_4$  ( $V_4 < V_3$ ;  $p_4 > p_3$ ). La temperatura se ha mantenido constante ( $T'$ ). La representación gráfica de esta compresión es la curva 3, 4 (isoterma). En esta transformación el gas ha cedido al ambiente (refrigerante), una cantidad de calor que representamos por  $Q'$ .
- 4 → 1) Sacamos el cilindro del ambiente a temperatura  $T'$  y lo aislamos del exterior. Seguimos comprimiendo el gas y éste se calienta. La compresión la hacemos hasta que el gas recupera su primitivo volumen  $V_1$  la primitiva presión  $p_1$ , y en consecuencia, la temperatura inicial  $T$ .

La importancia de la máquina de Carnot no es como máquina práctica (para uso industrial), sino como una ayuda para comprender las máquinas térmicas en general, y contribuye a establecer y comprender el segundo principio de termodinámica.

**XVI - 18. Rendimiento de la máquina de Carnot**

Para calcular el rendimiento de un ciclo de Carnot, demos por demostrados los siguientes teoremas:

- a) El rendimiento de un ciclo de Carnot recorrido en transformaciones reversibles, no depende de la naturaleza de la sustancia que experimenta los cambios de presión, temperatura y volumen.
- b) El rendimiento de un motor térmico por vía reversible es siempre mayor que por vía irreversible, siendo las mismas las demás condiciones.

Supuesto demostrado el teorema a) podemos imaginar un ciclo de Carnot descrito por un gas ideal y las consecuencias que obtengamos las podremos generalizar.

Aplicamos el primer principio a los recorridos  $1 \rightarrow 2$  y  $3 \rightarrow 4$ :  $dQ = dW$ , ya que la energía interna permanece constante, por tratarse de transformaciones de un gas perfecto a temperatura constante (ley de Joule); por integración para  $1 \rightarrow 2$  y  $3 \rightarrow 4$ , obtenemos:  $Q = W$ ,  $Q' = W'$ . La expresión del rendimiento es así:

$$\eta = \frac{Q + Q'}{Q} = \frac{W + W'}{W} = \frac{RT \ln V_2/V_1 + RT' \ln V_4/V_3}{RT \ln V_2/V_1}$$

recordando el trabajo en la transformación isoterma de un gas perfecto (párrafo XVI-5).

Las ecuaciones de las isotermas y adiabáticas que constituyen el ciclo de Carnot, son:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad p_2 V_2^\gamma = p_3 V_3^\gamma \quad p_3 V_3 = p_4 V_4 \quad p_4 V_4^\gamma = p_1 V_1^\gamma$$

que multiplicadas miembro a miembro, eliminando factores comunes y extrayendo la raíz  $\gamma - 1$ , nos da:

$$V_2 V_4 = V_3 V_1 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \Rightarrow \ln \frac{V_2}{V_1} = -\ln \frac{V_4}{V_3}$$

con lo que la expresión del rendimiento queda:

$$\eta = \frac{Q + Q'}{Q} = \frac{T - T'}{T}$$

Generalizando esta expresión para cualquier sustancia que experimenta las transformaciones reversibles (teorema a) podemos afirmar:

*El rendimiento de un ciclo de Carnot recorrido por vía reversible depende solamente de las temperaturas extremas del ciclo descrito.*

Si el ciclo se ha descrito en transformaciones irreversibles (teorema b) la expresión anterior se transformará en:

$$\eta = \frac{Q + Q'}{Q} < \frac{T - T'}{T}$$

o en definitiva, considerando el signo igual para las transformaciones reversibles y el menor para las irreversibles:

$$\eta = \frac{Q + Q'}{Q} \leq \frac{T - T'}{T}$$

$$\text{de aquí: } 1 + \frac{Q'}{Q} \leq 1 - \frac{T'}{T} \Rightarrow \frac{Q'}{Q} \leq -\frac{T'}{T} \Rightarrow \frac{Q'}{T'} \leq -\frac{Q}{T} \Rightarrow \frac{Q}{T} + \frac{Q'}{T'} \leq 0 \quad (8)$$

ecuación aplicable a un ciclo de Carnot. Para diversos ciclos asociados:

$$\sum \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \quad (9)$$

«Si el sistema experimenta diversas transformaciones, describiendo diversos ciclos de Carnot, la suma de los cocientes de las cantidades de calor a las temperaturas de las isotermas, es igual a cero en transformaciones reversibles y menor que cero en las irreversibles».

**PROBLEMAS: 27 al 29.**

**XVI - 19. Máquinas frigoríficas. Eficiencia**

Se puede hacer funcionar a una máquina de Carnot en sentido contrario, es decir, extraer calor de un sistema a temperatura baja, tomando trabajo de un agente externo (compresor o motor) y comunicando la suma de estas energías en forma de calor al sistema caliente (ambiente) (Fig. XVI-14). Tales operaciones son útiles de dos formas; si el propósito es enfriar más el sistema frío, el dispositivo es una MÁQUINA FRIGORÍFICA; si la finalidad es calentar más el foco caliente recibe el nombre de BOMBA DE CALOR.

Una máquina frigorífica será tanto más eficaz cuanto con menos trabajo del compresor elimine más calorías de la cámara.

En definitiva, la máquina frigorífica ideal, recorrería un ciclo de Carnot en sentido inverso. A costa de un trabajo consumido, se toma calor de un foco frío y se cede a otro a mayor temperatura.

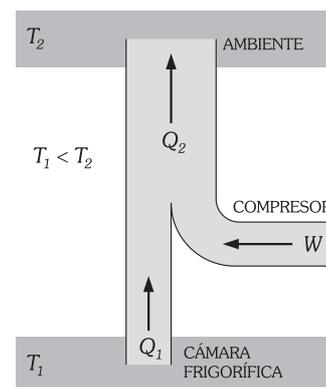


Fig. XVI-14.- Esquema de un frigorífico.

Llamaremos EFICIENCIA de un frigorífico a la relación entre el calor extraído a la cámara y el trabajo desarrollado por el compresor:

$$K = \frac{Q_1}{W}$$

pero al ser:  $Q_1 + W = Q_2 \Rightarrow K = \frac{Q_1}{Q_2 - Q_1} = \frac{1}{\frac{Q_2}{Q_1} - 1} = \frac{1}{\frac{T_2}{T_1} - 1} = \frac{T_1}{T_2 - T_1}$

Siendo  $T_1$  la temperatura de la cámara y  $T_2$  la del exterior.

**PROBLEMAS: 30 al 33.**

**XVI – 20. Escala termodinámica de temperaturas**

Las medidas de temperaturas descritas hasta ahora se han reducido a establecer diferencias de temperaturas al estudiar variaciones de determinadas propiedades de los cuerpos y, por tanto, cualquiera de las escalas hay que relacionarla con una determinada sustancia. La ecuación (8) del párrafo anterior, aplicada a transformaciones reversibles, es válida para sustancias cualesquiera que describen un ciclo de Carnot.

$$\frac{Q}{T} + \frac{Q'}{T'} = 0$$

Si establecemos que:  $T - T' = 100$ , cuando el ciclo tiene como límite superior de temperatura la de ebullición del agua a la presión normal, e inferior la de fusión del hielo a la presión normal, podremos determinar  $T$  y  $T'$ , por medidas de cantidades de calor ( $Q$  y  $Q'$ ).

De esta forma habremos definido la ESCALA TERMODINÁMICA O KELVIN, realizable con cualquier sustancia y que coincide con la escala absoluta, definida a costa de los gases ideales.

**XVI – 21. Ecuación de Clapeyron**

Estudiamos esta ecuación en el capítulo XV párrafo 10; la admitimos sin demostración y la aplicábamos al cálculo de pendientes de las curvas de equilibrio entre los estados de una sustancia en el diagrama ( $V, p$ ); vamos a deducirla como aplicación de lo anteriormente expuesto.

Supongamos que en el interior de un cilindro se encuentra una sustancia en equilibrio líquido-vapor (por debajo de la curva límite de saturación) y que inicialmente el sistema se encuentra en el estado 1 a la presión  $p$ , volumen  $V_1$  y temperatura  $T$ , y hagámosle recorrer el ciclo expresado en la Fig. XVI-15. En la transformación isoterma  $1 \rightarrow 2$  un gramo de esta sustancia pasa de líquido a vapor absorbiendo calor, cuyo valor es:  $Q = l$ , siendo  $l$  el calor latente de vaporización. En la expansión adiabática infinitesimal  $2 \rightarrow 3$  la presión desciende  $dp$  y la temperatura en  $dT$ ; se completa el ciclo de Carnot mediante una compresión isoterma a la temperatura  $T - dT$  ( $3 \rightarrow 4$ ) y una compresión adiabática infinitesimal ( $4 \rightarrow 1$ ).

Como los cambios de presión son infinitesimales el área encerrada en el ciclo puede considerarse un rectángulo; esta área mide el trabajo:

$$dW = (V_2 - V_1) dp$$

$(V_2 - V_1)$  es igual a la diferencia entre los volúmenes específicos (volumen por unidad de masa) del vapor y del líquido. El rendimiento de este ciclo es:

$$\eta = \frac{dW}{Q} = \frac{T - (T - dT)}{T} = \frac{dT}{T}$$

sustituyendo en ésta los valores obtenidos para  $Q$  y  $dW$  nos queda:

$$\frac{(V_2 - V_1) dp}{l} = \frac{dT}{T} \Rightarrow l = (V_2 - V_1) T \frac{dp}{dT}$$

ECUACIÓN DE CLAPEYRON que nos mide las variaciones que experimenta la temperatura a que se verifica un cambio de estado cuando varía la presión.

**XVI – 22. Segundo principio de Termodinámica. Entropía**

Consideremos un ciclo cerrado cualquiera (Fig. XVI-16) y dibujemos una serie de adiabáticas infinitamente próximas ( $MM', NN',$  etc.) y por sus puntos de contacto con el ciclo ( $1, 1', 1'',$  etc.) tracemos elementos de isothermas ( $2 \rightarrow 1', 2' \rightarrow 1'',$  etc.); habremos constituido así una red de infinitos ciclos de Carnot. Realizando el recorrido del ciclo por los «dientes de sierra» se habrá de cumplir la ecuación (9). Ahora bien, la cantidad de calor en la transformación  $2 \rightarrow 1' (\Delta Q_2^{1'})$  es la misma que en la  $1 \rightarrow 1' (\Delta Q_1^{1'})$ . En efecto: apliquemos el primer principio al ciclo  $11'21$ ; en tal transformación no hay variación de energía interna por partir del estado 1, y llegar al final a él:

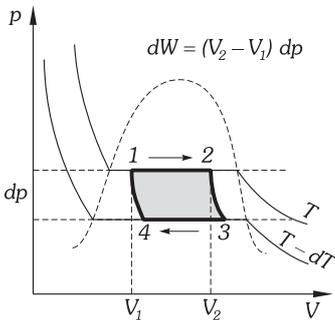


Fig. XVI-15.- El trabajo viene medido por el área encerrada en el ciclo.

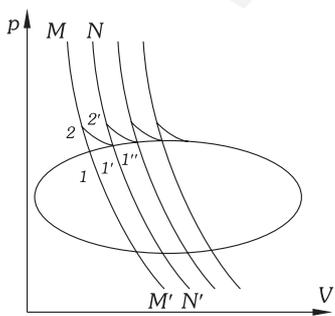


Fig. XVI-16.- Las adiabáticas  $MM', NN', \dots$  las tomamos como infinitamente próximas; las transformaciones  $2 \rightarrow 1', 2' \rightarrow 1'', \dots$  son elementos de isoterma.

$$\Delta Q_1' + \Delta Q_{1'}^2 - \Delta W = 0$$

El trabajo en la transformación está representado por el área 11'2 que, si las adiabáticas (MM' y NN') están infinitamente próximas, es un infinitésimo de segundo orden que se hace nulo en el límite; por tanto el calor en la transformación 1 → 1' y en la 1' → 2 son iguales y de signo contrario; en consecuencia las cantidades de calor en las transformaciones 1 → 1' y 2 → 1' son iguales en el límite; la ecuación (9) es aplicable, por tanto, a los infinitos elementos (1 → 1' y 1' → 1'', etc.) que constituyen el ciclo, pudiéndose escribir:

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0 \tag{10}$$

«Si en una transformación partimos de un estado inicial y llegamos al mismo estado final, la integral del cociente entre el calor comunicado y la temperatura absoluta es igual a cero en las transformaciones reversibles y menor que cero en las reales».

Consideremos en un ciclo cerrado reversible dos puntos que nos definen dos estados 1 y 2 (Fig. XVI-17); la aplicación de la ecuación anterior nos da:

$$\int_{1a}^2 \frac{dQ}{T} + \int_{2b}^1 \frac{dQ}{T} = 0$$

indicando la letra del límite inferior los «estados intermedios» en el diagrama que representa la transformación; por tanto:

$$\int_{1a}^2 \frac{dQ}{T} = \int_{1b}^2 \frac{dQ}{T} = \int_{1c}^2 \frac{dQ}{T} = \dots$$

«En una transformación reversible, en la que se pasa de un estado inicial (1) a otro final (2), la integral de la cantidad de calor comunicada dividida por la temperatura absoluta es independiente de la forma de realizar la transformación, dependiendo, únicamente, del estado inicial (1) y del final (2)».

es decir:

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} = S_2 - S_1 = \Delta S \tag{11}$$

$S_2 - S_1$  es constante; siempre que el sistema pase del estado 1 al 2.

La función  $S_1$  caracteriza, da modo de ser, al sistema en el estado 1: es una FUNCIÓN DE ESTADO. Lo mismo es  $S_2$  con respecto al estado 2. A esta función, que queda determinada y que a su vez determina la forma de ser de un sistema se le llama ENTROPÍA.

El segundo principio determina las variaciones de entropía sin prejuzgar su valor de una forma absoluta.

En el caso de transformaciones reales la integral es menor que  $S_2 - S_1$ .

En efecto: consideremos la transformación 1 → 2 (Fig. XVI-17) por la serie a de estados intermedios como irreversible, y la 2 → 1 por b como reversible; el conjunto del ciclo cerrado representa por lo tanto una transformación irreversible. La aplicación de la ecuación (10) de este párrafo para todo el ciclo, nos da:

$$\int_{1a}^2 \frac{dQ}{T} + \int_{2b}^1 \frac{dQ}{T} < 0$$

y considerando la (11) aplicable a la transformación 2 → 1 por b:

$$\int_{1a}^2 \frac{dQ}{T} + S_1 - S_2 < 0 \Rightarrow \int_{1a}^2 \frac{dQ}{T} < S_2 - S_1 \tag{12}$$

como se pretendía demostrar.

Agrupando las expresiones (11) y (12) podremos expresar el SEGUNDO PRINCIPIO DE TERMODINÁMICA:

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} \leq \Delta S \tag{13}$$

correspondiendo al signo «igual» a las transformaciones reversibles y el «menor» a las reales.

En forma diferencial se puede expresar el segundo principio por:

$$\frac{dQ}{T} \leq dS \tag{14}$$

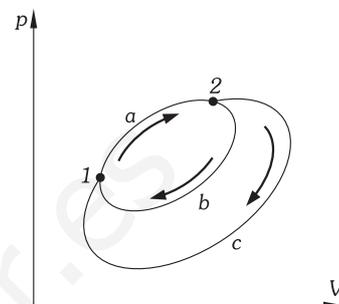


Fig. XVI-17.- Al pasar de 1 → 2, la integral de la cantidad de calor comunicada dividida por la temperatura absoluta es la misma para los caminos a, b, c, ...

«En una transformación reversible elemental la relación entre el calor comunicado y la temperatura absoluta es la diferencial de la función de estado llamada ENTROPÍA; si la transformación es real el valor de tal relación es menor que la diferencial de la entropía».

En resumen: la cantidad  $S$  que hemos definido como entropía de un sistema es una función de estado, y como tal, se utiliza para describir el estado del sistema junto con  $p$ ,  $V$ ,  $T$ ,  $n$  y  $U$ . Para calcular en un proceso real (irreversible) la variación de entropía del sistema  $\Delta S$ , emplearemos el método seguido para la obtención de la ecuación (13), es decir: resolveremos algún otro proceso reversible que siga el sistema entre los mismos dos estados que el real y calcularemos  $\Delta S$  para este proceso; este valor obtenido será el mismo que para el proceso real, ya que  $\Delta S$  depende sólo de los estados inicial y final del sistema.

### XVI – 23. Variación de la entropía de un gas ideal para procesos isotérmicos, isobaros e isocoros

Supongamos que un gas ideal pasa de un estado 1 a un estado 2 según un proceso reversible ISOTÉRMICO; en este caso sabemos que la variación de energía interna es nula ( $dU = nc_v dT = 0$ ), teniendo en cuenta el primer principio:  $dQ = p dV$ , sustituyendo en (11) se obtiene:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{p dV}{T}$$

y como el gas es ideal verificará:

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{T} = \frac{nR}{V}$$

que sustituida en la anterior y teniendo en cuenta la ecuación de Boyle-Mariotte nos queda:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{nR dV}{V} = nR \ln \frac{V_2}{V_1} = nR \ln \frac{p_1}{p_2}$$

Supongamos ahora que el gas ideal pasa de un estado 1 a un estado 2 según un proceso reversible ISOBARO; en este caso:  $dQ = nc_p dT$ , y sustituyendo en (11) se obtiene:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{nc_p dT}{T} = nc_p \ln \frac{T_2}{T_1} = nc_p \ln \frac{V_2}{V_1}$$

en donde hemos supuesto que  $c_p$  no es función de la temperatura y que se verifica la ecuación de estado de los gases ideales.

De la misma manera y considerando que el gas ideal realiza un proceso reversible ISOCORO, se tendrá:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{nc_v dT}{T} = nc_v \ln \frac{T_2}{T_1} = nc_v \ln \frac{p_2}{p_1}$$

### XVI – 24. La entropía en las transformaciones adiabáticas

Al hacer en la ecuación (14),  $dQ = 0$ , obtenemos:

$$dS \geq 0$$

En las transformaciones adiabáticas reversibles, la entropía permanece constante. En las transformaciones adiabáticas reales, la entropía aumenta.

Siendo «reales» todas las transformaciones del universo y no habiendo posibilidad de intercambios caloríficos con el medio externo, podemos afirmar:

«Los fenómenos del universo se verifican en el sentido de un aumento de entropía».

El «fin térmico» del universo tendrá lugar (de acuerdo con el segundo principio) al llegar al máximo de entropía, obteniéndose una uniformidad que haga imposible toda transformación química o física. Obsérvese que ello no va en contradicción del principio de conservación de la energía del universo y que la energía, en el «fin térmico», seguiría siendo la de hoy; se habría llegado a una anulación de la energía «disponible» para la realización de los fenómenos que constituyen la dinámica la vida del universo; en definitiva el aumento de entropía lleva consigo una «degradación» de la energía.

Aunque la entropía de una parte del universo puede decrecer en un determinado proceso, tendrá siempre que verificarse que la entropía de alguna otra parte del universo aumenta en una cantidad mayor; esto nos indica, como decíamos en la introducción para la explicación del segun-

do principio de termodinámica, la dirección en que se realizan los procesos en la naturaleza, tales evoluciones son solamente posibles cuando se verifique que  $\Delta S > 0$ .

**PROBLEMAS: 34 al 44.**

**XVI – 25. Energía libre**

En el ciclo de Carnot, cuando la sustancia se expande adiabáticamente realiza un trabajo a cuenta de su energía interna, que es precisamente igual a la disminución de esa energía. Sin embargo, durante la expansión isoterma su temperatura permanece constante y, por tanto, la parte de energía interna que determina la temperatura de la sustancia no puede ser utilizada para transformarla en trabajo.

*Se llama ENERGÍA LIBRE de un cuerpo a la parte de su energía interna que puede ser transformada en trabajo mecánico en un proceso isotérmico reversible.*

En tales procesos se verifica  $dS = dQ/T$  y, utilizando el primer principio, el trabajo realizado es:

$$dW = dQ - dU = TdS - dU$$

que, por ser  $T$  constante, se puede escribir:

$$dW = d(TS) - dU = -d(U - TS)$$

es decir, el trabajo realizado por el sistema en un proceso isotérmico reversible es igual al cambio de la función  $U - TS$ . Esta función:

$$F = U - TS$$

es por tanto la ENERGÍA LIBRE del sistema, igual a la energía interna menos el producto  $TS$ , que se denomina ENERGÍA LIGADA o TERMENTROPÍA, y que es aquella parte mencionada inútil para la realización de trabajo.

La función  $F$  nos permite deducir el sentido en que se verificará una transformación y cuándo se establecerá el equilibrio, en unas determinadas condiciones. En efecto, de acuerdo con su definición podemos poner:  $dF = dU - TdS - SdT$ , y si el proceso es reversible:

$$dF = (TdS - pdV) - TdS - SdT = -pdV - SdT$$

ahora bien, si se inicia un proceso espontáneo (irreversible) que se verifique a temperatura y volumen constantes, entonces  $dQ < TdS$ , y por tanto  $dF < -pdV - SdT$ , que por ser  $T$  y  $V$  constantes, se reduce a:

$$dF < 0 \Rightarrow F_{\text{final}} < F_{\text{inicial}}$$

*Un proceso espontáneo, a  $T$  y  $V$  constantes, se produce en el sentido en que disminuye la energía libre, y el estado de equilibrio se alcanzará en consecuencia cuando  $F$  sea mínima.*

Si en un sistema aislado ( $U = cte$ ) se verifican procesos irreversibles (reales) los consiguientes aumento de entropía y disminución de energía libre tienen como consecuencia que la energía del sistema posee cada vez menos capacidad de transformarse en trabajo, está más degradada.

**C) MÁQUINAS TÉRMICAS**

**XVI – 26. Máquina de vapor. Ciclo de Rankine. Turbina de vapor**

El foco caliente es un hogar que calienta el agua contenida en una caldera transformándose en vapor, el cual hace de transportador de calor, realizando un trabajo y cediendo parte del calor tomado a un condensador o al ambiente exterior que funcionan como foco frío de la máquina (Fig. XVI-18).

El vapor de agua que proviene de la caldera llega por  $A$  a una caja de distribución, penetra por uno de sus conductos y llega por  $B$  a un cilindro, empujando el émbolo  $C$  que adquiere un movimiento de ascenso. Si suponemos la parte superior del cilindro  $D$  llena de vapor, su compresión hace que pasando por  $E$ , llegue a una cavidad comunicada con un condensador. Al llegar el émbolo a la parte superior de su recorrido el distribuidor del vapor (corredera) adquiere, accionado por  $G'$ , una posición tal que comunica  $E$  con la caldera y  $B$  con el condensador, produciéndose efectos inversos: al penetrar el vapor por  $E$  baja el émbolo, que hace salir el vapor de la parte inferior del cilindro, por  $B$ , hasta el condensador. Una bomba de alimentación, transporta el agua líquida del condensador o refrigerante a la caldera volviéndose a repetir el ciclo.

Un sistema *biela-manivela* transforma el movimiento rectilíneo y alternativo de  $G$  en movimiento de rotación (Fig. XVI-19).

**CICLO DE RANKINE:** Es el ciclo teórico de una máquina de vapor (Fig. XVI-20). El punto  $A$  nos representa agua líquida en el condensador (volumen  $V_2$ , presión  $p_2$  y temperatura  $T_2$ ); la bomba le

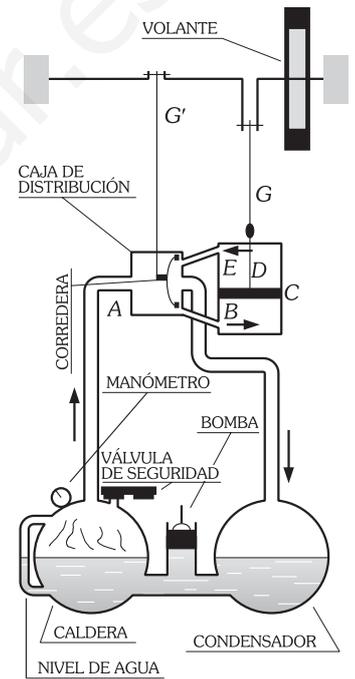


Fig. XVI-18.- Esquema de una máquina de vapor.

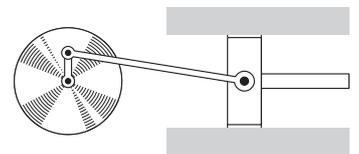


Fig. XVI-19.- Biela-manivela.

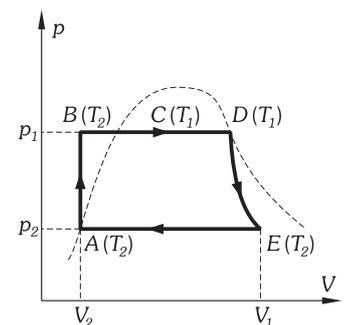


Fig. XVI-20.- Ciclo de Rankine.

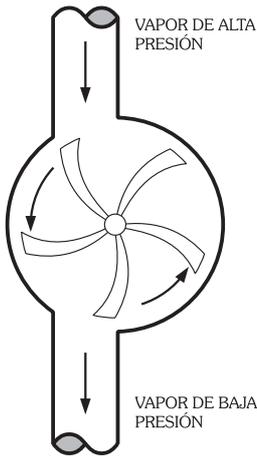


Fig. XVI-21.- Turbina de vapor.

comunica la presión  $p_1$  de la caldera y el agua pasa a ésta conservando prácticamente su volumen ( $V_2$ ) y su temperatura ( $T_2$ ), el punto representativo es el B; en la caldera se calienta a presión constante ( $p_1$ ) hasta adquirir la temperatura de la caldera ( $T_1$ ), (punto C). El agua líquida se transforma en vapor (C a D), conservando su temperatura y presión; CD es la rama recta del diagrama de licuefacción, es decir, C y D pertenecen a la curva límite de saturación. El vapor penetra en el cilindro y empujando el pistón (carrera de trabajo) experimenta una expansión adiabática (DE) hasta adquirir la temperatura  $T_2$  del refrigerante, pasando a éste por la correspondiente válvula de escape y licuándose (EA) cerrándose así el ciclo.

**TURBINA DE VAPOR:** De mejor rendimiento que la «máquina de vapor» es la «turbina de vapor» (Fig. XVI-21), en ella hay un mayor aprovechamiento de la potencia calorífica del combustible y, por tanto, una mayor economía.

El vapor a presión, producido en la caldera y conducido por tubos, va a incidir contra las paletas de una rueda giratoria; la forma de éstas y la inclinación con que llega a ellas el vapor, hace que la rueda se ponga en movimiento, por la misma razón que gira un «moliente» de papel o las aspas de un molino de viento.

Para el mejor rendimiento de la máquina se superponen varias coronas giratorias unidas al mismo eje; entre cada dos de ellas hay una corona fija, que sirve para conducir al vapor en la dirección adecuada para producir el giro de la siguiente rueda giratoria.

Se emplea la turbina de vapor, entre otros usos, para provocar el giro del rotor de las dinamos en las plantas de producción de electricidad (centrales térmicas y termonucleares).

**XVI – 27. Motores de explosión. Ciclo de Otto**

En los motores de explosión el foco caliente y el vehículo del calor son una mezcla de aire y finísimas gotas de combustible (gasolina) y vapor del mismo originada en el carburador. La mezcla explosiva pasa a un cilindro al originarse un retroceso de su émbolo (aspiración o admisión) estando abierta una válvula A (Fig. XVI-22) que comunica el cilindro con el carburador. Cerrada esta válvula el émbolo retrocede (compresión) y cuando está al límite de su retroceso una bujía eléctrica hace saltar la chispa que provoca la combustión de la mezcla (explosión) y el retroceso del émbolo por efecto de la dilatación de los gases de combustión (expansión); un nuevo avance del émbolo y la apertura de una válvula (B) que comunica el cilindro con el exterior, que funciona como foco frío, provocan la salida de los gases a la atmósfera (escape).

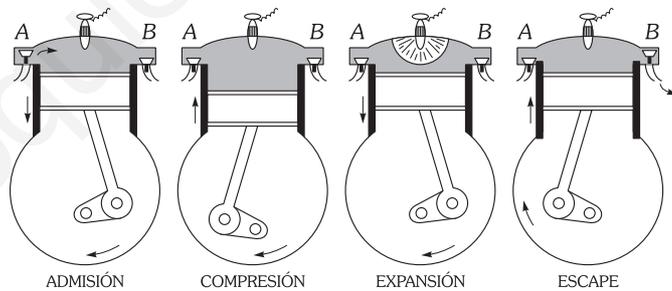


Fig. XVI-22.- Motor de explosión de cuatro tiempos.

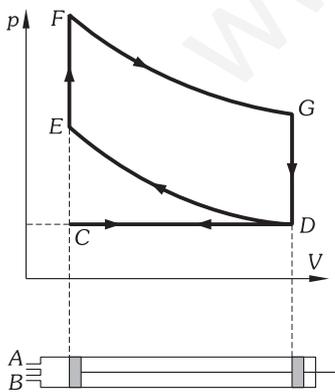


Fig. XVI-23.- Ciclo de Otto.

De los cuatro tiempos descritos el único que funciona como motor es la explosión y expansión; el movimiento en los demás tiempos del pistón es consecuencia de la inercia de un volante.

Se acoplan varios cilindros articulados al mismo árbol de forma que sus fases vayan en un orden determinado.

**CICLO DE OTTO:** es el ciclo de un motor de explosión de cuatro tiempo (Fig. XVI-23):

1. *Aspiración:* en el punto C el pistón se encuentra al extremo de su carrera; después de haber sido expulsados los gases quemados por la válvula B, ésta se cierra abriéndose la válvula A y el pistón retrocede a presión constante penetrando la mezcla. Al final de la carrera CD, el cilindro está lleno de los gases de combustión.
2. *Compresión:* el avance del pistón (hacia la izquierda de la figura) comprime la mezcla gaseosa, ya que las dos válvulas están cerradas; este proceso queda representado por la adiabática DE; la temperatura de los gases aumenta.
3. *Explosión y expansión:* en E salta la chispa que provoca la combustión de los gases; la presión y la temperatura aumentan bruscamente (isocora EF). El exceso de presión provoca el movimiento del émbolo (adiabática FG) con el consiguiente descenso de la temperatura.
4. *Escape:* abierta la válvula B, los gases salen al exterior, disminuyendo así la presión del interior del cilindro (isocora GD); el movimiento del pistón (hacia la izquierda) barre los gases del cilindro y los expulsa al exterior (isobara DC).

**XVI - 28. Motores Diesel. Ciclo Diesel**

Se comprime aire, en el interior de un cilindro, a varios cientos de atmósferas; como consecuencia de esta compresión se produce una elevación de la temperatura considerable. Un inyector proyecta en el seno del gas el combustible pulverizado (aceites pesados) el cual arde, provocando la expansión gaseosa el retroceso del émbolo. Finalizada la combustión los gases son expulsados al exterior.

CICLO DIESEL: El ciclo teórico de un motor Diesel de cuatro tiempos está representado en la Fig. XVI-24.

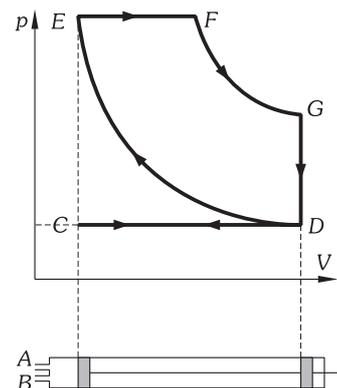


Fig. XVI-24.- Ciclo Diesel.

1. **Aspiración.** En el punto C el pistón se encuentra en el extremo de su carrera, habiendo sido expulsados los gases de la combustión por la válvula B; ésta se cierra, el pistón retrocede y el aire penetra por la válvula A, que se abre; al final de la carrera CD, el cilindro queda lleno de aire.
2. **Compresión.** El avance del pistón (hacia la izquierda de la figura) comprime el aire adiabáticamente ya que las dos válvulas están cerradas, alcanzando presiones de 30 a 40 atmósferas y temperaturas a 750 °C (adiabática DE).
3. **Combustión y expansión.** Mientras el émbolo retrocede (hacia la derecha en la figura), una bomba auxiliar hace penetrar el combustible en el cilindro por el inyector; la elevada temperatura del aire provoca la combustión. La entrada de combustible está regulada de forma tal que la presión permanece constante a pesar del retroceso del pistón (isobara EF). En F la combustión y los gases se expansionan empujando al pistón (adiabática FG).
4. **Escape.** Abierta la válvula B, los gases salen al exterior, disminuyendo así la presión del cilindro (isocora GD); el movimiento del pistón (hacia la izquierda en la figura) barre los gases del cilindro y los expulsa al exterior (isobara DC).

**PROBLEMAS**

**A) PRINCIPIO DE LA EQUIVALENCIA**

1. Una bola de acero de calor específico 0,11 cal/g · °C se deja caer desde una altura de 2 m sobre un plano horizontal, la bola rebota y se eleva a 1,5 m. El plano ni se mueve ni se calienta. 1) Determinar el incremento de temperatura experimentado por la bola. 2) Discutir el resultado que se obtendría si el choque fuera totalmente elástico o totalmente inelástico.
2. Una bala de plomo penetra en una plancha de madera a la velocidad de 400 m/s, y después de perforarla sale de ella. Suponiendo que la mitad del calor desarrollado se ha empleado en calentar la bala y observando que su temperatura ha aumentado 200 °C, calcular la velocidad de salida de la bala. Calor específico del plomo: 0,03 cal/g · °C.
3. 1) ¿A qué velocidad debería lanzarse un proyectil de plomo para que al aplastarse contra un obstáculo de cemento se fundiese totalmente por efecto del choque? Se supone que el 80% del calor desprendido es absorbido por el proyectil, y que su temperatura inicial es de 20 °C. 2) ¿Desde qué altura debería dejarse caer libremente dicho proyectil para que se verificase el mismo proceso? (También se admite una absorción del 80% del calor). Calor específico del plomo: 0,03 cal/g · °C. Calor de fusión del plomo: 5,8 cal/g. Temperatura de fusión del plomo: 330 °C.
4. Una masa de mercurio (peso atómico: 201) cae libremente de un recipiente superior a otro inferior separados entre sí un metro, aumentando su temperatura en 0,70 °C. Suponiendo que es despreciable todo intercambio térmico entre el mercurio y el exterior. Calcular: 1) El calor específico del mercurio en cal/g · °C. 2) Expresar el resultado obtenido en J/mol · °C y en el SI.
5. En un recinto se introducen 5 g de agua destilada a 8 °C y 24 g de hielo a -10 °C, de calor específico 0,5 cal/g · °C. 1) Determinar la proporción de hielo y agua cuando se alcanza el equilibrio. 2) Desde qué altura debe caer una masa de 1 kg para fundir el hielo que queda. 3) Qué velocidad debería llevar esa masa para que el ceder toda su energía a la mezcla ésta se vaporizara totalmente.
6. Por una pista horizontal cubierta de nieve se desliza un trineo; suponiendo que el peso del trineo es de 105 kg, que su velocidad inicial es de 36 km/h y que el coeficiente de rozamiento vale 0,025, calcular: 1) El tiempo que tardará en pararse. 2) La distancia que habrá recorrido hasta el momento de pararse. 3) La energía del trineo en el momento inicial. 4) La nieve que se licuará al paso del trineo, suponiendo que

- todo el calor del rozamiento pasa a la nieve y ésta se encuentra a 0 °C. (Calor latente de fusión del hielo: 80 cal/g).
7. Una rueda de 50 kg de masa, supuesta concentrada en su aro periférico, y 50 cm de radio, gira con una velocidad de 3 000 rpm. Sobre la periferia se aplica una fuerza constante que la hace parar en un minuto. Calcular: 1) Valor y signo de la aceleración angular. 2) Número de vueltas que da la rueda en el minuto considerado. 3) Valor de la fuerza aplicada. 4) Pérdida de la energía cinética de rotación que experimenta la rueda al pararse. 5) Si el 40% de esta energía, transformada en calor, se emplea en fundir hielo a 0 °C, ¿qué masa de hielo se fundirá?
  8. Se lanza un proyectil de 50 kg formando con la horizontal un ángulo de 30°, con una velocidad de 400 m/s. El cañón tiene un radio de 4 cm y la longitud del ánima es 1 m. Se desea saber: 1) La presión necesaria, supuesta constante, que tienen que ejercer los gases dentro del cañón para que salga a dicha velocidad. 2) Componentes de la velocidad del proyectil a los 5 s de haber sido disparado. 3) Alcance del proyectil en el plano del disparo. 4) Si al llegar al suelo toda la energía se convierte en calor, del cual el 60% se emplea en calentar el proyectil, averiguar cuánto aumentará su temperatura si su calor específico es de 0,25 cal/g · °C.
  9. Se tiene una esfera de Pb de 750 g de peso suspendida de una hilo. Se dispara contra ella un proyectil de acero de 15 g de peso, cuya velocidad en el momento del impacto es de 300 m/s. El proyectil, que llega horizontalmente, se incrusta en la esfera. Calcular la elevación del desplazamiento que experimenta la esfera y el calentamiento producido, suponiendo que toda la energía desprendida en el choque se transforma en calor. DATOS: Calor específico del plomo: 0,03 cal/g · °C. Calor específico del acero: 0,12 cal/g · °C. Se admite que las temperaturas del proyectil y de la esfera son idénticas en el momento del choque.
  10. Un disco de masa 2 kg y radio 20 cm gira alrededor de un eje horizontal con la frecuencia  $\nu_0 = 10$  Hz. Apoyada sobre una generatriz de su periferia, descansa una lámina metálica de masa M kg, que actúa por su peso frenando el movimiento del disco. Éste se detiene al cabo de 2 min de actuar al freno. El coeficiente rozamiento es 0,2. Calcular: 1) El valor de M. 2) La energía cinética del disco al cabo de 1 min de actuar el freno. 3) Suponiendo que el calor desarrollado quede totalmente acumulado en la lámina, calcular el incremento de temperatura experimentado por la misma cuando el disco se ha parado. Calor específico de la lámina: 0,1 cal/g · °C.

### B) PRIMER Y SEGUNDO PRINCIPIOS DE TERMODINÁMICA

11. 1) ¿Qué calor se precisa para pasar 1 g de hielo a vapor de agua a la presión de 760 mm de mercurio? 2) ¿Cuál es el aumento de volumen que experimenta el hielo? 3) ¿Cuál es el valor del trabajo realizado por este aumento de volumen? Densidad del hielo con respecto al agua en las condiciones del problema (0 °C y 760 mm de Hg): 0,92. Calor específico del agua: 1 cal/g · °C. Calor de fusión del hielo: 80 cal/g. Calor de vaporización del agua 540 cal/g. Masa molecular del agua: 18 g/mol.

12. Sueña un estudiante de termodinámica de 70 kg de peso en poder subir en un ascensor (200 kg) hasta una altura de 15 m, simplemente con la energía interna acumulada por 18 g de agua (1 mol) cuando pasa de líquida a 0 °C a vapor a 100 °C a la presión normal. ¿Es un sueño matemáticamente correcto? (Despreciar la pequeña variación de volumen del agua líquida al pasar de 0 °C a 100 °C.) ( $l_v = 540$  cal/g;  $c = 1$  cal/g · °C).

13. El aire de una habitación de dimensiones 5 × 5 × 4 m se dilata a presión constante (760 mm de Hg), escapándose por las ventanas al pasar su temperatura de 15 °C a 20 °C. Se considera como gas ideal. Deseamos saber: 1) El volumen de aire que se escapa. 2) El trabajo que realiza en la expansión al empujar el aire exterior. 3) ¿Qué volumen ocuparía todo el aire de la habitación (el que queda y el que se escapa) en las condiciones normales de presión y temperatura? 4) La cantidad de calor que ha absorbido al dilatarse en las condiciones arriba expresadas y el aumento de su energía interna. Calor molar a presión constante: 7 cal/mol · K.

14. Un gas ideal monoatómico ( $c_v = 3R/2$ ) se expande a la presión constante desde un estado inicial a temperatura  $T_1$  a otro final a  $T_2$ . El proceso se realiza aportando una cantidad de calor,  $Q$  lentamente y se determina de forma experimental la variación de volumen,  $\Delta V$ . En función de  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $c_v$ ,  $Q$  e  $\Delta V$ , calcular: 1) El número de moles del gas. 2) La presión. 3) El volumen inicial. 4) El trabajo realizado por el gas. 5) La variación de la energía interna.

15. ¿Qué cantidad de calor hace falta para duplicar el volumen en transformación isobara de 50 l de oxígeno que se encuentran a 27 °C y 2 atm de presión? Calcular la temperatura final y la variación de energía interna. ( $R = 2$  cal/K · mol).

16. Se tiene 1 g de nitrógeno (masa molecular: 28 g/mol) a 0 °C y a presión normal. Calcular: 1) ¿Cuál es el volumen ocupado por el gas? 2) Se calienta el gas a 100 °C a presión constante (calor molar a presión constante: 7 cal/mol · °C). ¿Qué cantidad de calor se necesita y cuál es la presión final? 3) A partir del mismo estado inicial se calienta de nuevo a 100 °C a volumen constante. ¿Qué cantidad de calor se necesita y cuál es la presión final? 4) Interpretar físicamente la diferencia observada entre las respuestas a las cuestiones 2ª y 3ª.

17. Un mol de un gas ideal inicialmente a la temperatura de 27 °C y presión de  $10^5$  Pa se calienta a volumen constante hasta duplicar su presión. A continuación se reduce su volumen a la mitad manteniendo constante la presión. Calcular: 1) La temperatura final. 2) La variación de energía interna en el proceso. 3) El calor intercambiado por el sistema. 4) Hacer una representación gráfica en el diagrama de Clapeyron del proceso. DATO:  $R = 8,31$  J · K<sup>-1</sup> · mol<sup>-1</sup>.

18. Determinar para un gas que siga la ecuación de estado de Van der Waals la expresión del trabajo en un proceso isotérmico reversible.

19. Un mol de oxígeno gaseoso que ocupa inicialmente un volumen  $V = 20$  l a una presión  $p_1 = 1,5 \times 10^5$  Pa, se expande muy lentamente hasta duplicar su volumen. Determinar la presión y temperatura del gas si el proceso seguido ha sido: 1) Isotermo. 2) Isobárico. 3) Adiabático. DATO:  $R = 2$  cal/K · mol.

20. Teniendo en cuenta que la ecuación de las adiabáticas es:  $pV^\gamma = cte$   $\wedge$   $\gamma = c_p/c_v$ , demostrar que el trabajo realizado en una transformación adiabática es:  $W = (p_2V_2 - p_1V_1)/(1 - \gamma)$ .

21. Se expansiona reversible y adiabáticamente un gas ideal diatómico desde un volumen de 2 l, a presión de 2 atm y temperatura de 300 K, hasta que su temperatura final sea la cuarta parte de la inicial. Se pide calcular: 1) Volumen y presión finales. 2) Trabajo y variación de energía interna en la transformación.

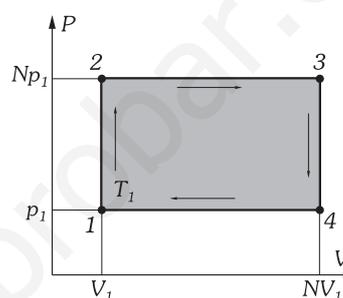
22. Una burbuja de aire ( $\gamma = 1,41$  cal/mol · K) de 1 cm de diámetro cuando se encuentra en el fondo de un lago a la presión de 8 atm y a la temperatura de 4 °C, sube a la superficie cuya presión es de 1 atm y 23 °C de temperatura. Considerado el aire como un gas ideal, calcular:

1) El diámetro que tendrá la burbuja en la superficie. 2) La variación de energía interna y de entalpía en el proceso ( $R = 2$  cal/mol · K).

23. Se comprimen reversible y adiabáticamente 12 g de oxígeno que se encuentra inicialmente a 27 °C, desde 10 a 7 l. Calcular: 1) La temperatura final del gas. 2) El trabajo desarrollado y la variación de la energía interna. 3) La variación de entalpía en el proceso ( $M_m$  [O<sub>2</sub>] = 32 g/mol;  $R = 2$  cal/mol · K).

24. Se comprime lenta y adiabáticamente a un mol de un gas perfecto que se encuentra inicialmente a 27 °C y 1 atm hasta que su temperatura se eleva a 47 °C. Entonces se expande lenta e isotérmicamente hasta que su presión vuelve a ser 1 atm. Sabiendo que  $c_p = 28,8$  J/mol · K, y que  $R = 8,3$  J/mol · K, determinar: 1) La presión que alcanza después de la compresión adiabática. 2) Las variaciones de energía interna y de entalpía en el proceso. 3) El calor y el trabajo totales en el proceso. 4) Hacer una representación gráfica en el diagrama de Clapeyron de todo el proceso.

25. Calcular el rendimiento térmico en función de  $N > 1$  de un motor que funciona con un gas ideal monoatómico, y recorre el ciclo representado en la figura.



Problema XVI-25.

26. Determinar el rendimiento de una máquina que utiliza un mol de un gas ideal inicialmente a  $v_1 = 24,6$  l y  $T_1 = 400$  K, trabajando en un ciclo consistente en cuatro etapas: (a) expansión isotérmica a 400 K hasta dos veces su volumen; (b) enfriamiento a volumen constante hasta 300 K; (c) compresión isotérmica hasta el volumen original, y (d) calentamiento a volumen constante hasta su temperatura inicial. Dibujar el ciclo en el diagrama de Clapeyron. DATOS:  $c_v = 21$  J/K,  $R = 8,34$  J/mol · K.

27. Un alpinista que pesa 70 kg, cargado con una mochila de 30 kg, sube una montaña de 300 m, estando el ambiente a una temperatura de 20 °C. Para la realización de este trabajo, sin pérdidas teóricas de las reservas de su organismo, le basta con ingerir en su comida 400 g más de patatas que en los días que no ejercita su deporte. Sabiendo que el calor de combustión de las patatas es de 90 kcal cada 100 g, demostrar que el hombre es una máquina más perfecta que la ideal de Carnot.

28. Queremos multiplicar por  $n$  el rendimiento de un ciclo reversible de Carnot, aumentando al hogar y disminuyendo al refrigerante el mismo número de grados ( $\Delta T$ ). Hallar una fórmula general relacionando  $\Delta T$  con el primitivo rendimiento  $\eta$ ,  $N$  y la temperatura del hogar  $T$ .

29. Dos moles de un gas perfecto monoatómico describen un ciclo de Carnot, realizando en la expansión adiabática 9 932 J de trabajo. Siendo 1 000 K la temperatura del foco caliente, calcular el rendimiento del ciclo.

30. En una nevera, que funciona como una máquina de Carnot recorriendo el ciclo por vía reversible y en sentido contrario, se trata de fabricar 5 kg de hielo cada hora, partiendo de agua a 0 °C. El ambiente exterior está a 27 °C. Calcular: 1) La eficacia de la nevera. 2) La potencia teórica del motor. 3) La potencia real si el rendimiento de la operación es el 75%. 4) El costo de la energía necesaria para fabricar 100 kg de hielo a 10 céntimos de euro el kW · h.

31. El congelador de un refrigerador y su contenido se encuentran a 5 °C. El refrigerador cede calor a una habitación en donde se halla situado, que se encuentra a 25 °C; si su capacidad calorífica es de 84 kJ/K, determinar la potencia mínima del motor que debe utilizarse para reducir la temperatura del congelador en 1 °C. Suponer que es un motor de Carnot que funciona por vía reversible.

32. La temperatura del foco caliente de un motor de Carnot que funciona por vía reversible es de 300 K, y la del foco frío 273 K. Si el número de calorías que recibe el motor del foco a 300 K es de 2 000, calcular: 1) Rendimiento. 2) Calorías cedidas al foco frío. 3) Si el motor

funciona como frigorífico (recorrido a la inversa) y recibe 2 000 calorías del foco a 273 K. Calcular la eficiencia. 4) Cuántas calorías cede al foco caliente.

**33.** 1) Una bomba de calor que funciona con un motor de Carnot por vía reversible mantiene una habitación a 21 °C, extrayendo calor del exterior que se encuentra a 11 °C. Si para ello hay que aportar 3,8 kcal/s a la habitación y el kW · h cuesta 10 céntimos de euro, determinar el gasto diario. 2) En verano el exterior se encuentra a 30 °C y sacamos 4 kcal/s de la habitación, con el mismo gasto que en invierno; determinar la temperatura que conseguimos en la habitación.

**34.** A un resorte, cuya longitud natural, cuando está colgado de un punto, es de 8 cm, se le pone una masa de 10 kg unida a su extremo libre; cuando esta masa está en la posición de equilibrio, la longitud del resorte es 10 cm. La masa se impulsa 3 cm hacia abajo y se suelta. 1) Calcular la constante del resorte. 2) Si el ambiente son 21 °C, ¿cuál será la variación de entropía del Universo cuando las oscilaciones se hayan amortiguado?

**35.** Una máquina frigorífica gasta 3 kW · h diarios y mantiene en la cámara una temperatura constante de -3 °C. ¿Qué variación de entropía experimenta el Universo en un día?

**36.** Calcular la variación de energía interna y entropía que experimentan 100 g de He al pasar de 0 °C a 100 °C en transformación cuasiestática isobara.

**37.** Calcular la variación de entropía al mezclar 1 kg de agua a 0 °C con otro a 100 °C.

**38.** Hallar la variación de energía interna y de entropía que se produce al fundir 1 kg de hielo a la presión normal. (Considérese que la densidad del hielo es 0,9 g/cm<sup>3</sup> y la del agua 1 g/cm<sup>3</sup>.)

**39.** Calcular el aumento de entropía al mezclar 100 kg de hielo a 0 °C con 80 kg de agua a 100 °C. (Se supone nula la influencia del medio exterior.)

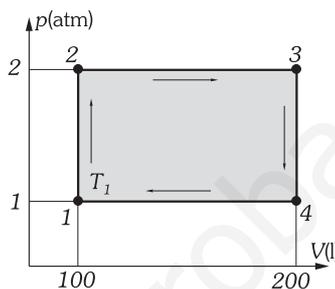
**40.** Los extremos de una barra metálica, con una conductividad térmica de 400 W/m · K, se mantienen a temperaturas fijas de 500 K y 300 K, cada uno. La barra tiene una sección transversal de 5 cm<sup>2</sup> de área y 0,2 m de longitud. Suponemos que no existe pérdida de calor por el área lateral. 1) Determinar la cantidad de calor que fluye en la unidad de tiempo por la varilla. 2) Determinar las variaciones de entropía de los dos focos térmicos (a 500 K y 300 K), de la barra metálica y del uni-

verso, en la unidad de tiempo. 3) Sacar consecuencias acerca de la reversibilidad o irreversibilidad del proceso.

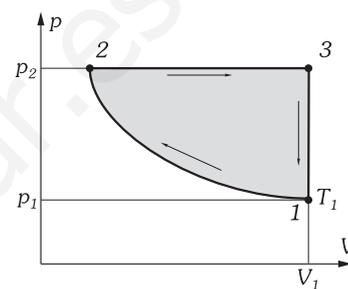
**41.** ¿Qué cantidad de calor hace falta para duplicar la temperatura en una transformación cuasiestática isocora de 100 l de hidrógeno a 3 atm de presión y 300 K de temperatura? Calcúlese la variación de entropía en la transformación. Considérese al gas como ideal.

**42.** Se realiza una transformación cuasiestática isoterma en un gas ideal, desde un volumen de 10 l, presión de 5 atm a la temperatura de 300 K hasta que se reduce el volumen a la mitad. Calcular: 1) La presión final del gas. 2) Número de moles. 3) Trabajo y calor en la transformación. 4) Variación de entropía en la transformación.

**43.** Dos moles de un gas ideal ( $c_v = 3 \text{ cal/mol} \cdot \text{K}$ ) describen en procesos cuasiestáticos el ciclo de la figura; determinar la temperatura de cada vértice y el trabajo, calor, variación de energía interna y variación de entropía en cada una de las líneas que constituyen el ciclo, y en el ciclo total. Determinar el rendimiento del ciclo.



Problema XVI-43.



Problema XVI-44.

**44.** Un cierto número de moles de un gas ideal describe el ciclo de la figura en procesos cuasiestáticos, siendo conocidos los valores de las variables en ella expresadas ( $T_1, V_1, p_1, p_2$ ), así como el calor molar a volumen constante ( $c_v$ ). Determinar, en función de tales datos, el valor de  $p, V$  y  $T$  en cada vértice; el calor, trabajo y variación de energía interna y entropía en cada línea y en el ciclo: 1) Suponiendo isoterma la transformación (1 → 2). 2) Suponiendo adiabática la transformación (1 → 2).

# CAPÍTULO XVII

## ONDAS\*

### A) ECUACIÓN DE ONDAS

#### XVII - 1. Movimientos ondulatorios

El MOVIMIENTO ONDULATORIO estudia la propagación de una perturbación a través del espacio. Decimos que un medio está perturbado o que está oscilando cuando una propiedad física de él (la presión, la densidad, la temperatura, su geometría) varía con el tiempo.

Por ejemplo, si en un punto de la superficie de un líquido se produce una perturbación dejando caer una piedra, esta perturbación se propaga en todas las direcciones por la superficie del líquido.

Una perturbación puede estar constituida por un solo PULSO aislado (por ejemplo: una onda explosiva o «boom» sónico) o si la acción perturbadora continúa periódica, definida o indefinidamente, la oscilación transporte recibe el nombre de TREN DE ONDAS FINITO O INDEFINIDO respectivamente.

Para que al producir en un punto una variación del valor de una magnitud física y esta variación alcance a otro punto, el espacio entre ambos deberá ser capaz de soportar un campo variable con el tiempo de dicha magnitud física. En tales condiciones decimos que existe una ONDA ASOCIADA al campo considerado.

En este capítulo estudiaremos fundamentalmente la «onda asociada» a medios deformables o elásticos (ejemplos: las deformaciones en una cuerda, las ondas de sonido, ondas en el agua, ...), desplazándose a través de este medio; a estas ondas las denominaremos ONDAS MECÁNICAS. Existen ondas que para transmitirse no necesitan un medio material, tales son las ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS que estudiaremos en el capítulo XXIII.

En un movimiento ondulatorio las partículas que constituyen el medio no se propagan con la perturbación sino que se limitan a transmitirla, para lo cual vibran alrededor de su posición de equilibrio. Por lo tanto:

«Existe un transporte de energía pero no de materia».

Analizando los medios de transporte de energía, podríamos englobarlos en dos procedimientos: el primero consiste en el paso de materia de un punto a otro; el segundo, que es el que nos ocupa, será el paso de la energía a través de un medio continuo al que pertenecen ambos puntos, para lo cual, se ha de producir una perturbación o pulso en el primero, que viaje durante un cierto tiempo hasta llegar al segundo con una determinada VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN DE LA ONDA, que como veremos, estará caracterizada por la naturaleza de la perturbación y por las propiedades físicas del medio.

Un medio es NO ABSORBENTE (ELÁSTICO) cuando después de someterlo a una perturbación recupera su forma y tamaño sin disipación de energía, propagándose en él la onda sin sufrir «absorción» de la energía que transporta. Sin embargo, si el medio almacena o disipa (en forma de calor, deformación, ...) parte o toda la energía de la onda diremos que es ABSORBENTE (O INELÁSTICO).

Si las ondas de la misma naturaleza se propagan en el medio con la misma velocidad, independientemente de su longitud de onda, diremos que el medio es NO DISPERSIVO (por ejemplo sonidos graves y agudos viajando en el aire a la misma velocidad); en caso contrario el medio es DISPERSIVO, produciéndose *dispersión normal* si la velocidad aumenta con la longitud de onda y *dispersión anómala* si disminuye.

En un medio extenso isótropo, las ondas producidas por un «foco» o «fuente», se propagan alejándose de dicho punto de forma radial (Fig. XVII-1 a y b); para distancias al foco que sean grandes comparadas con la longitud de onda de la perturbación, podemos considerar *planos a los frentes de onda*, (Fig. XVII-1 c), y las partículas contenidas en un plano perpendicular a la dirección de propagación de la onda estarán en idénticas condiciones de movimiento, o lo que es lo mismo «se encuentran en fase».

SUPERFICIE DE ONDA O FRENTE DE ONDA es una superficie cuyos puntos han comenzado a vibrar en el mismo instante y, por lo tanto, están todos en la misma fase de vibración.

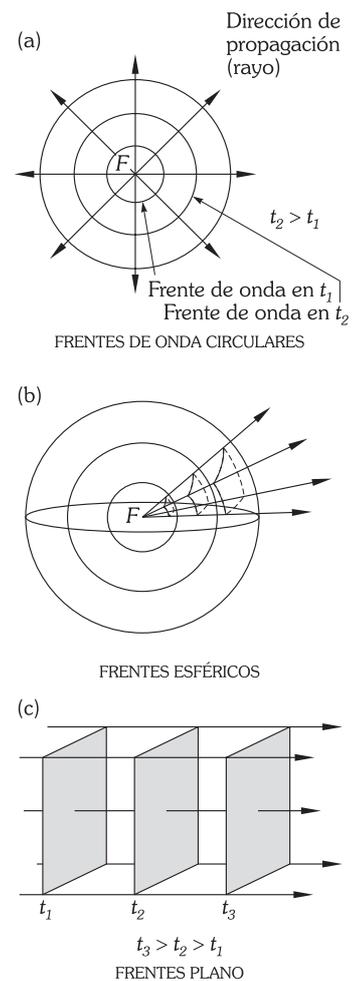


Fig. XVII-1.- Frentes de onda.

\* Para estudiar y comprender este tema es imprescindible repasar los párrafos III-16 al 20, IV-8 al 12, VI-6 al 10 y VII-25 al 29, todos ellos referentes al movimiento vibratorio.

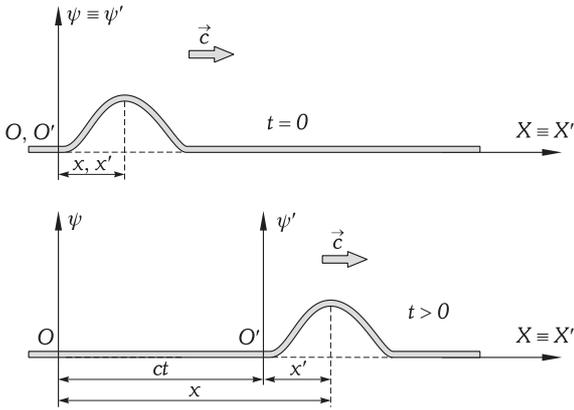


Fig. XVII-2.- Propagación sin deformación de un «pulso» a lo largo de una cuerda tensa.

El observador  $O'$ , deberá aplicar las siguientes transformaciones, de acuerdo con la Fig. XVII-2:  $x' = x - ct$  y  $\psi' = \psi$ , y obtiene:  $\psi = \psi' = f(x') = f(x - ct)$ ; en definitiva:

$$\psi(x, t) = f(x - ct) \tag{1}$$

Cualquier perturbación que obedezca en todo instante esta relación, representará una onda que se propaga hacia la derecha con una velocidad de propagación  $c$ .

Si la onda viaja en el sentido negativo del eje  $X$  con velocidad de módulo  $c$ , haciendo  $c' = -c$  en la expresión anterior tendremos:

$$\psi(x, t) = f(x + ct) \tag{2}$$

así pues, si los dos sumandos del argumento tienen el mismo signo se está representando una onda que viaja hacia valores decrecientes de  $X$  (velocidad  $< 0$ ), y si el signo es distinto, la onda viaja hacia valores de  $X$  crecientes.

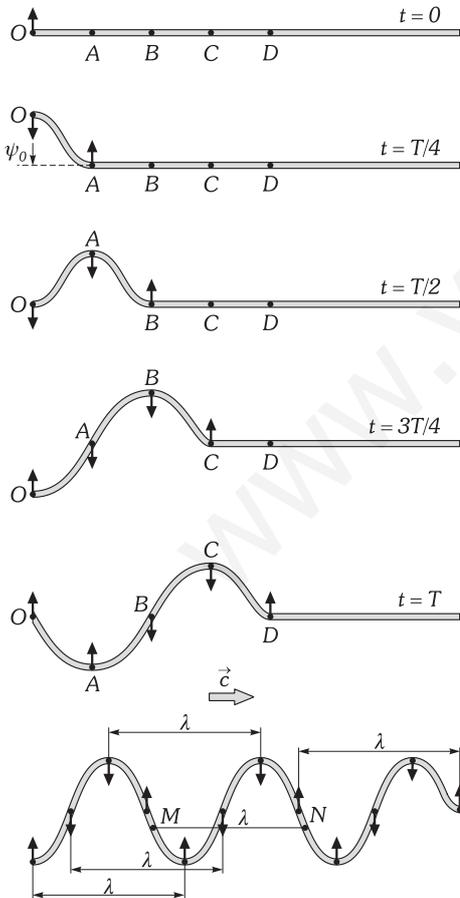


Fig. XVII-3.- La partícula  $O$  oscila con un MAS, produciendo una perturbación  $\psi$  que se propaga a lo largo de la cuerda con una velocidad constante  $c$ , avanzando una distancia  $\lambda$  en el tiempo en que  $O$  realiza su oscilación.

### XVII - 3. Ondas armónicas: magnitudes fundamentales. Ecuación de la onda armónica

Como tipo más básico y fundamental de onda, consideraremos la onda desarrollada por una partícula que oscila en su lugar con un movimiento vibratorio armónico simple.

Tomemos como «modelo» una cuerda tensa por una fuerza externa; hagamos vibrar a su extremo  $O$  ( $x = 0$ ) con un movimiento vibratorio armónico simple, su estado vibratorio es:

$$\psi(0, t) = \psi_0 \text{ sen } \omega t \tag{3}$$

la perturbación se va a transmitir a lo largo de la cuerda tal y como se aprecia en la Fig. VII-3.

Llamamos PERÍODO ( $T$ ) al tiempo empleado por cualquier partícula en realizar una oscilación completa y FRECUENCIA ( $\nu$ ) al número de oscilaciones realizadas por la partícula en la unidad de tiempo. La relación entre estas dos magnitudes fundamentales es:

$$T = \frac{1}{\nu}$$

En la ecuación (3) a  $\omega$  le llamamos FRECUENCIA ANGULAR y sabemos que viene relacionada con el período y la frecuencia:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

Cada punto de la cuerda adquiere un MAS, aunque lo hace con un cierto «retraso» respecto de  $O$ . Así, el punto  $A$  comienza su movimiento cuando  $O$  se encuentra en su posición de máxima separación con respecto a su posición de equilibrio ( $\psi_0$ : amplitud del MAS) y habiendo transcurrido  $T/4$  en su vibración armónica. El punto  $B$  comenzará a vibrar transcurrido  $T/2$  y cuando  $O$  se encuentra en la posición inicial moviéndose hacia abajo. El punto  $D$  comienza su movimiento cuando ha transcurrido un período  $T$  y  $O$  en ese instante comienza una nueva oscilación.

Si llamamos LONGITUD DE ONDA o PERÍODO ESPACIAL ( $\lambda$ ) a la distancia que avanza la onda (con la velocidad de propagación  $c$ ) en un período, es inmediato que:

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega}$$

Obsérvese en la Fig. XVII-3, que los puntos  $M$  y  $N$  están en el mismo estado de vibración; cuando esto ocurre se dice que estos puntos están en FASE, siendo la distancia entre ellos igual a la longitud de onda, podemos definir a ésta como: «la distancia entre dos posiciones consecutivas en idéntica fase de vibración».

Otra de las que llamamos magnitudes fundamentales de las ondas es el NÚMERO DE ONDAS que por definición toma el valor:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{\omega}{c}$$

En un punto cualquiera a una distancia  $x$  del foco, que supondremos en el origen, al que tarda en llegar la perturbación un tiempo  $t'$ , su estado vibratorio en el instante  $t$  será el mismo que tenía el origen  $t'$  segundos antes, en  $t - t'$ , con lo que:

$$\psi(x, t) = \psi_0 \text{ sen } \omega(t - t')$$

siendo:  $x = ct' \Rightarrow t' = x/c$  y  $\omega t' = \omega x/c = kx$ ; sustituyendo nos queda:

$$\psi(x, t) = \psi_0 \text{ sen } (\omega t - kx) \Leftrightarrow \psi(x, t) = \psi_0 \text{ sen } 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (4)$$

Si la perturbación se produce antes en el punto  $x$  que en el origen (viaja en el sentido negativo de  $X$ ), la condición anterior será:

$$\psi(x, t) = \psi_0 \text{ sen } \omega(t + t') = \psi_0 \text{ sen } (\omega t + kx)$$

En el caso de que en el origen y en  $t = 0$  ( $x = 0, t = 0$ ) sea  $\psi(0, 0) \neq 0$ , hay que añadir a la expresión de la fase una «FASE INICIAL»  $\varphi$ , y se tiene:

$$\psi(x, t) = \psi_0 \text{ sen } (\omega t \pm kx + \varphi) \quad (5)$$

ecuación que describe la posición de cualquier punto en cualquier instante, y que por tanto proporciona información suficiente para resolver cualquier problema cinemático relativo a la onda. Así por ejemplo, si consideramos una onda armónica que viaja en la dirección positiva del eje  $OX$ , para un valor particular del tiempo:

$$t = t_1 \Rightarrow \psi(x) = \psi_0 \text{ sen } (\omega t_1 - kx + \varphi) = \psi_0 \text{ sen } (-kx + cte)$$

que se puede considerar como una «instantánea» de la cuerda que transmite la onda (PERFIL DE LA ONDA). Si consideramos un punto determinado:

$$x = x_1 \Rightarrow \psi(t) = \psi_0 \text{ sen } (\omega t + cte)$$

describe el movimiento vibratorio armónico del punto en cuestión.

La ecuación (5) se puede escribir, sin pérdida de generalidad, sustituyendo la función seno por la función coseno, o bien su argumento ponerlo  $kx \pm \omega t + \varphi$ , en vez de  $\omega t \pm kx + \varphi$ , puesto que al ser convencional la elección del origen de tiempos podemos incluir en estas ecuaciones fases iniciales en las que sumamos o restamos  $\pi/2$  ó  $\pi$ . De hecho, y para que los desarrollos matemáticos que siguen resulten lo menos complicados posible, tomaremos una u otra de estas ecuaciones.

Es sencillo demostrar que la ecuación (5) es periódica espacial y temporalmente, para ello basta probar que:  $\psi(x, t) = \psi(x + K_1\lambda, t + K_2T)$ , ( $\forall K_1, K_2 \in Z$ ). En efecto:

$$\psi(x + K_1\lambda, t + K_2T) = \psi_0 \text{ sen } [\omega(t + K_2T) - k(x + K_1\lambda) + \varphi] = \psi_0 \text{ sen } [\omega t - kx + \varphi + K_2\omega T - K_1k\lambda]$$

y como  $\omega T = k\lambda = 2\pi$  y  $K_2 - K_1 = K \in Z$ , obtenemos:

$$\psi(x + K_1\lambda, t + K_2T) = \psi_0 \text{ sen } (\omega t - kx + \varphi + 2K\pi) = \psi_0 \text{ sen } (\omega t - kx + \varphi) = \psi(x, t)$$

como queríamos demostrar.

#### XVII - 4. Movimiento ondulatorio transversal y longitudinal

«Un movimiento ondulatorio es TRANSVERSAL cuando la dirección de propagación de la onda (dirección en que se transmite la energía) es perpendicular a la dirección de vibración de las partículas oscilantes, y LONGITUDINAL cuando ambas direcciones coinciden».

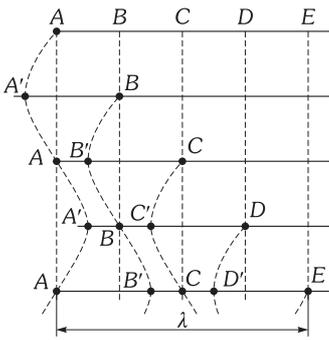


Fig. XVII-4.- Representación gráfica de un movimiento ondulatorio longitudinal armónico (se ha hecho considerando posiciones sucesivas en intervalos  $T/4$ ).

En un movimiento ondulatorio transversal se producen *elevaciones* y *descensos*. Ejemplo de movimiento ondulatorio transversal armónico es el que se produce en una cuerda tensa cuyo extremo está sometido a un movimiento vibratorio armónico (Fig. XVII-3); otros ejemplos de ondas transversales son las ondas producidas en el agua, las ondas electromagnéticas, etc.

En un movimiento ondulatorio longitudinal se producen *condensaciones* y *dilataciones*. En la Fig. XVII-4 se ha representado un movimiento *longitudinal* armónico considerando posiciones de las partículas (que poseen un movimiento vibratorio armónico) en intervalos de tiempo de un cuarto de período. Ejemplos de movimientos ondulatorios longitudinales son el que representamos en la Fig. XVII-5 para un muelle, la prolongación del sonido en el aire... En los fluidos perfectos únicamente se pueden propagar movimientos ondulatorios longitudinales.



Fig. XVII-5.- Ondas longitudinales en un resorte.

Hemos obtenido la ecuación de la onda armónica a partir de una perturbación transversal, ya que es la forma más sencilla de visualizar, sin embargo, el tratamiento matemático es el mismo para las ondas longitudinales. En este caso  $\psi(x, t) = f(x - ct)$  representará el desplazamiento horizontal de la partícula situada originalmente en  $x$ , debido al paso de la onda.

**PROBLEMAS: 1 al 14.**

**XVII - 5. Velocidad de propagación de las ondas planas transversales en medios materiales**

Si le producimos un pulso a una cuerda tensa por una fuerza externa (Fig. XVII-2) la deformación se propagará a lo largo de ella con una velocidad  $c$ , siendo la dirección del movimiento de las partículas de la cuerda perpendicular a la dirección de propagación de la perturbación, se trata de un movimiento ondulatorio transversal.

En el equilibrio (Fig. XVII-6) la fuerza neta que actúa sobre cada elemento de longitud de la cuerda tensa es cero, indicándonos que la tensión es la misma en cada punto de la cuerda.

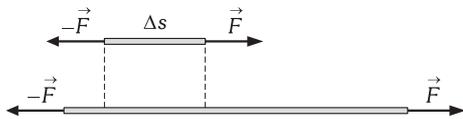


Fig. XVII-6.- En el equilibrio la tensión en todos los puntos de la cuerda es la misma.

En la Fig. XVII-7,  $\Delta s$  es un elemento curvado de la cuerda que no se encuentra en ese instante en equilibrio, estando sometido a fuerzas que producen su movimiento, y es lo suficientemente pequeño como para que pueda ser considerado como un arco de circunferencia de radio  $R$ . La masa de este elemento será:  $\Delta m = \mu \Delta s$ , en la que  $\mu$  es la densidad lineal de la cuerda.

Siendo la cuerda flexible, la única fuerza de valor apreciable, dirigida hacia el centro  $O$ , será la fuerza centrípeta debida a los componentes de las tensiones  $F$  en la dirección de la normal de la cuerda que actúan tangencialmente en cada extremo del arco  $\Delta s$  (Fig. XVII-7) cuyo valor para una de ellas es  $F \sin \Delta\theta/2$ ; la suma de las dos componentes (que son iguales) es:

$$F_c = 2F \sin \frac{1}{2} \Delta\theta = F \Delta\theta = F \frac{\Delta s}{R}$$

en donde se ha tomado en primera aproximación  $\sin \Delta\theta/2 \approx \Delta\theta/2$ , por tratarse de un ángulo muy pequeño. Por tanto, siendo  $c^2/R$  el valor de la aceleración centrípeta, la aplicación del segundo principio de Newton, nos conduce a:

$$F_c = \Delta m \frac{c^2}{R} = \mu \Delta s \frac{c^2}{R}$$

igualando las dos expresiones anteriores, obtenemos:

$$F = \mu c^2 \Rightarrow c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

La validez de este resultado, dependerá del hecho de que los desplazamientos de la cuerda sean pequeños, para los que será válida la aproximación hecha para el ángulo; también es de observar que este resultado es independiente de la forma que tenga la onda viajera transversal.

Si se considera una varilla cilíndrica con uno de sus extremos fijos y en el otro le aplicamos un par de torsión repentino, las ondas transversales producidas por torsión de sus partículas en un sentido y otro alternativamente en forma de arco circular alrededor del eje de la varilla, se demuestra que se propagan a lo largo de ella con una velocidad:

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

en la que  $G$  es el módulo de cizalladura del material de que está hecha la varilla y  $\rho$  su densidad.

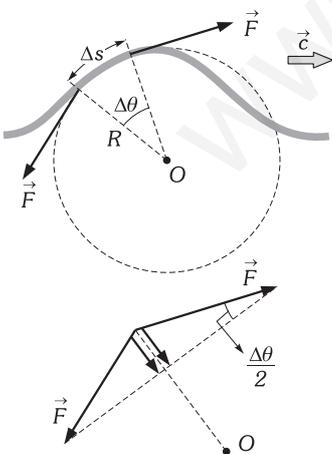


Fig. XVII-7.-  $\Delta s$  es un elemento curvado de la cuerda que no se encuentra en equilibrio y es lo suficientemente pequeño como para que pueda suponerse que es un arco de circunferencia de radio  $R$ .

También, se demuestra, que la velocidad de las ondas transversales que se producen en el agua, y siempre que la longitud de onda sea menor que la profundidad, es:

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho}} \quad (6)$$

en la que  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $\sigma$  la constante de tensión superficial. El término  $2\pi\sigma/\lambda\rho$  es despreciable cuando  $\lambda > 10$  cm, y si  $\lambda < 10$  cm entonces el término despreciable es  $g\lambda/2\pi$ .

**XVII – 6. Velocidad de propagación de las ondas planas de presión longitudinales**

Para el cálculo de la velocidad de propagación de una perturbación longitudinal en el interior de un fluido, supondremos a éste encerrado en el interior de un tubo indefinido por un lado y cerrado por un pistón por el otro (Fig. XVII-8). En el equilibrio el fluido está sometido a una presión  $p$ , tiene una densidad que llamaremos  $\rho$  y se encuentra a temperatura constante; en estas condiciones provocamos una presión adicional  $\Delta p$ , moviendo el pistón hacia la derecha con una velocidad  $v$ ; transcurrido un tiempo  $t$ , el pistón habrá recorrido una distancia  $vt$  y la masa del fluido puesta en movimiento será:  $M = ctA\rho$ , en la que  $A$  es la sección del tubo. La presión del fluido, en ese tiempo, habrá aumentado en  $\Delta p$ , y teniendo en cuenta la ley de compresibilidad (ver elasticidad, párrafo XIII-4), podemos poner:

$$\Delta p = -B \frac{\Delta v}{v} = B \frac{Avt}{Act} = B \frac{v}{c}$$

entonces la fuerza neta que actúa sobre el fluido:

$$A \Delta p = B \frac{v}{c} A$$

teniendo en cuenta el valor de la masa, igualando impulso y momento lineal:

$$B \frac{v}{c} At = ctA\rho v \Rightarrow c = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (7)$$

En el caso de un gas, la propagación de una onda longitudinal, como es el sonido, se verifica por medio de compresiones y dilataciones adiabáticas que cumplen la condición:  $pV^\gamma = cte$ , siendo  $p$  = presión,  $V$  = volumen y  $\gamma = c_p/c_v$  (calores específicos molares a presión y a volumen constante, respectivamente). Tomando logaritmos neperianos y diferenciando, resulta:

$$\ln p + \gamma \ln V = cte \Rightarrow \frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

y, por tanto, el módulo de compresibilidad adiabático es:

$$B = - \frac{dp}{dV/V} = \gamma p$$

sustituyendo en (7) resulta:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

en donde se ha tenido en cuenta la ecuación de los gases ideales,  $pV = nRT \Rightarrow p = \rho RT/M$  ( $\rho$  = densidad del gas,  $M$  = masa molecular).

Si la propagación se realiza en una barra elástica de densidad  $\rho$ , por un razonamiento análogo obtenemos para velocidad de propagación de la perturbación longitudinal en ella:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

en la que  $E$  es el módulo de Young.

Para el caso de la propagación de una perturbación longitudinal en un resorte (Fig. XVII-5), se calcula que:

$$c = \sqrt{\frac{Kl_0}{\mu}}$$

donde  $K$  es la constante elástica del resorte,  $l_0$  su longitud natural y  $\mu$  su densidad lineal de masa.

**PROBLEMAS: 15 al 26.**

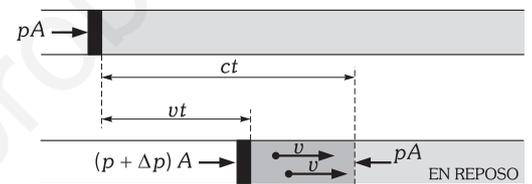


Fig. XVII-8.- Velocidad de propagación de una onda longitudinal en un fluido.

### XVII – 7. Ecuación general de ondas

Trataremos ahora de obtener una relación entre las derivadas de la función  $\psi$  que valga para todas las perturbaciones en una dirección sea cual sea la forma particular de la función  $f$  (párrafo XVII-2). Las derivadas primera y segunda de  $\psi$  respecto del tiempo en un punto de abscisa  $x$  determinado (haciendo permanecer  $x$  constante, concepto de derivada parcial), llamando  $u = x - ct$  al argumento de  $f$ , son en virtud de (1):

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{df}{du} \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -c \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{df}{du} \right) = -c \frac{d^2 f}{du^2} \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{d^2 f}{du^2}$$

Si se considera a  $\psi$  en un instante determinado, entonces:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{du} \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{du^2}$$

por tanto se verifica:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}}$$

a la que llamamos ECUACIÓN DE ONDAS; que responde, en general, a la propagación de una perturbación cualquiera, con una velocidad  $c$ , y que no sólo tiene como solución la ecuación (1), sino también otras que tienen gran interés físico. Así por ejemplo, en una dirección pueden propagarse ondas en los dos sentidos  $+x$  y  $-x$ ; se obtiene entonces:  $\psi(x, t) = f(x - ct) + g[x - (-ct)]$ , que como es fácil de comprobar también satisface a la ecuación de ondas.

Si la propagación tiene lugar en el espacio tridimensional, se demuestra que la ECUACIÓN DE ONDAS escrita en su forma más general es:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)} \quad (8)$$

Una de las soluciones más importantes a esta ecuación, es la que tiene la forma:

$$\psi = f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} \pm ct)$$

siendo  $\mathbf{n}$  el vector unitario perpendicular a la superficie de onda y  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ . Estas ondas son las llamadas ONDAS PLANAS. Existen otros tipos de ondas como las cilíndricas que son producidas por focos lineales largos, y, sobre todo, las ESFÉRICAS que son las que se producen en un medio tridimensional isótropo. Para éstas últimas, la expresión (8) puede transformarse en su equivalente:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)$$

sin más que considerar  $\psi$  función de la distancia  $r$  al foco y del tiempo,  $\psi(r, t)$ , y tener en cuenta que  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ . Una onda que satisface la ecuación anterior tiene la forma general:

$$\psi(r, t) = \frac{1}{r} f(r \pm ct)$$

y por tanto su amplitud disminuirá con la distancia al foco, como comprobaremos en el párrafo siguiente, referente a la energía en un movimiento ondulatorio.

**PROBLEMAS: 27 al 30.**

### B) ENERGÍA E INTENSIDAD DE LAS ONDAS

#### XVII – 8. Propagación de la energía a través de un medio homogéneo e isótropo. Variación de la amplitud de la onda con la distancia al foco emisor

Al realizar un foco de ondas un movimiento vibratorio, éste es transmitido partícula a partícula a todo el medio que le rodea; cualquier partícula de masa  $m$  cuyo estado vibratorio sea:

$$\psi = \psi_0 \text{ sen } (\omega t \pm kx + \varphi)$$

poseerá una energía total:

$$\boxed{W = \frac{1}{2} m \psi_0^2 \omega^2 = 2\pi^2 m \psi_0^2 \nu^2}$$

según se demostró en el párrafo VII-27.

«La energía de las partículas que transmiten el movimiento ondulatorio armónico es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud y al cuadrado de la frecuencia de la vibración».

Un foco emisor de ondas, con una potencia emisora característica, que supondremos constante con el tiempo, comunica al medio propagador su energía vibrante que se transmite a una velocidad que depende de tal medio y conservando su frecuencia de vibración.

Supuesto en medio homogéneo, isótropo y no absorbente la energía que atraviesa a una esfera de radio  $r_1$  en el tiempo  $dt$  estará localizada en una capa esférica de espesor  $c dt$  ( $c$  = velocidad de propagación del movimiento ondulatorio), cuyo volumen es  $4\pi r_1^2 c dt$  y cuya masa:

$$dm = 4\pi r_1^2 c dt \rho$$

La energía localizada en tal zona corresponde a la emitida en un tipo  $dt$ , es:

$$dW = \frac{1}{2} \psi_{01}^2 \omega^2 dm = \frac{1}{2} \psi_{01}^2 \omega^2 4\pi r_1^2 c dt \rho \tag{9}$$

Tal energía, conservando su valor y propagada en el medio transmisor, atraviesa en el tiempo  $dt$  a otra esfera ideal de radio  $r_2$  distinto al anterior (Fig. XVII-9); ni  $\omega = 2\pi\nu$ , ni  $c$  ni  $\rho$  han variado, afectando, por tanto, las variaciones del radio a la amplitud del movimiento. El valor de tal energía es, ahora:

$$dW = \frac{1}{2} \psi_{02}^2 \omega^2 4\pi r_2^2 c dt \rho$$

que igualada a la anterior, nos determina:

$$\psi_{01}^2 r_1^2 = \psi_{02}^2 r_2^2 \Rightarrow \boxed{\frac{\psi_{01}}{\psi_{02}} = \frac{r_2}{r_1}} \tag{10}$$

La amplitud de un movimiento ondulatorio propagado por ondas esféricas, en medios homogéneos, isótropos, y no absorbentes es inversamente proporcional a la distancia al foco emisor.

Considerando la propagación de los frentes de onda planos, en medios homogéneos, isótropos y no absorbentes, la energía que atraviesa a una superficie  $A$  en el tiempo  $dt$ , estará localizada en un hexaedro de espesor  $c dt$ , cuyo volumen es  $Ac dt$  y de masa  $dm = ac dt \rho$ , tendrá por valor:

$$dW_1 = \frac{1}{2} \psi_{01}^2 \omega^2 Ac dt \rho$$

que conservará su valor cuando se encuentre localizada en la posición (2) de la Fig. XVII-10, cuyo valor es:

$$dW_2 = \frac{1}{2} \psi_{02}^2 \omega^2 Ac dt \rho$$

con lo que:

$$dW_1 = dW_2 \Rightarrow \boxed{\psi_{01} = \psi_{02}}$$

«Las ondas planas se propagan en medios homogéneos, isótropos y no absorbentes sin disminución de amplitud».

### XVII – 9. Intensidad del movimiento ondulatorio

«Es la energía que, en la unidad de tiempo, atraviesa a la unidad de superficie, normal a la dirección de propagación».

Como la energía que corresponde a la unidad de tiempo es la potencia, la definición anterior equivale a la «potencia transmitida por un frente de onda en cada unidad de superficie»:

$$I = \frac{1}{A} \frac{dW}{dt} = \frac{P}{A} \Leftrightarrow \boxed{P = IA}$$

Esta magnitud se mide en ergios/s · cm<sup>2</sup> (CGS), W/m<sup>2</sup> (SI) y en kgm/s · m<sup>2</sup> (TÉCNICO).

Considerando frentes de onda esféricos, propagándose en medios homogéneos, isótropos y no absorbentes:  $A = 4\pi r^2$ , y teniendo en cuenta la fórmula (9) del párrafo anterior, obtenemos para valor de la intensidad a la distancia  $r$  del foco emisor:

$$I = \frac{1}{2} \psi_0^2 \omega^2 c \rho = 2\pi^2 \psi_0^2 \nu^2 c \rho \tag{11}$$

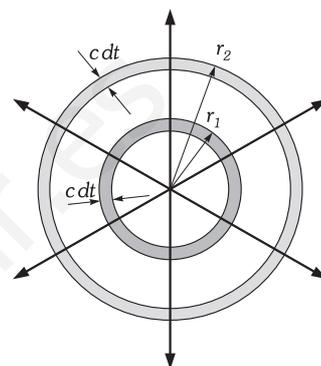


Fig. XVII-9.- La energía localizada en las partes sombreadas es la misma.

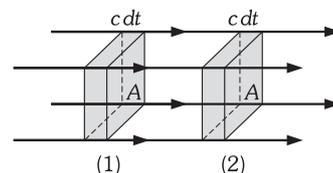


Fig. XVII-10.- La energía localizada en las partes sombreadas es la misma.

Las superficies esféricas de centro el foco emisor y radios cualesquiera  $r_1$  y  $r_2$ , una vez establecido el movimiento ondulatorio, son atravesadas por la misma energía en el mismo tiempo, es decir:

$$P_1 = P_2 \Rightarrow I_1 A_1 = I_2 A_2 \Rightarrow 4\pi r_1^2 I_1 = 4\pi r_2^2 I_2 \Rightarrow \boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{\psi_{01}^2}{\psi_{02}^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}}$$

ya que  $\psi_{01}/\psi_{02} = r_2/r_1$  (fórmula (10) del párrafo anterior).

«La intensidad de un movimiento ondulatorio es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud de la vibración y si es propagado por ondas esféricas, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco emisor».

Considerando frentes de onda planos, al cumplirse:  $P_1 = P_2$  y  $A_1 = A_2$ , entonces:

$$\boxed{I_1 = I_2}$$

es decir, se propagan sin disminución de intensidad y en consecuencia tampoco existe disminución de amplitud, siempre que se propaguen en medios isótropos y no absorbentes. La intensidad para este tipo de ondas sigue siendo directamente proporcional al cuadrado de la amplitud.

**PROBLEMAS: 31 al 35.**

**XVII – 10. Absorción de un movimiento ondulatorio**

En realidad la intensidad de la onda no solamente disminuye con la distancia a la fuente productora de ondas como consecuencia de una disminución de la energía por repartirse en su propagación en mayores volúmenes, sino que hay «absorción» de energía por parte del medio, que nunca será perfectamente elástico y presentará pérdidas por rozamiento (calor) entre sus partículas.

«Definimos ABSORCIÓN para un movimiento ondulatorio como la disminución en la intensidad que éste sufre debido a su naturaleza y a las características físicas del medio propagador».

Si consideramos al foco emisor de ondas muy alejado, las superficies de onda se pueden considerar planas; si éstas se propagan en un medio homogéneo e isótropo, siendo OX su dirección de propagación (Fig. XVII-11), se demuestra experimentalmente que: «la disminución relativa de intensidad es proporcional al desplazamiento», es decir:

$$\frac{dI}{I} = -\gamma dx \tag{12}$$

a  $\gamma$  se le llama «COEFICIENTE DE ABSORCIÓN» y depende del medio y de la frecuencia de la onda. El signo menos es debido a que la intensidad disminuye con la distancia recorrida por la onda. Integrando la ecuación (12) obtenemos:  $\ln I = -\gamma x + cte$ , y si para  $x = 0$  es  $I = I_0$ , la constante de integración vale  $\ln I_0$ , luego:

$$\ln I = -\gamma x + \ln I_0 \Rightarrow \ln \frac{I}{I_0} = -\gamma x \Rightarrow \boxed{I = I_0 e^{-\gamma x}} \quad (\text{LEY DE LAMBERT-BEER})$$

luego la intensidad de la onda disminuye exponencialmente con la distancia recorrida a través del medio y con tanta mayor rapidez cuanto mayor sea el coeficiente de absorción.

Como la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud, ésta decrecerá exponencialmente, pero con un factor de amortiguamiento mitad. La ecuación de la onda amortiguada se expresará de la forma:

$$\boxed{\psi(x, t) = \psi_0 e^{-\frac{\gamma}{2}x} \text{sen}(\omega t - kx + \varphi)}$$

La frecuencia de la onda se conserva invariable con la distancia recorrida; pero se ha dicho que  $\gamma$  depende de la frecuencia de ésta y así por ejemplo, en el aire los sonidos de mayor frecuencia (agudos) son mejor absorbidos que los que tienen menor frecuencia (graves); de esta forma, cuando una banda de música se aleja, pronto dejan de oírse los sonidos agudos. Haciendo uso de esta propiedad, los compositores para dar sensación de alejamiento hacen callar a los instrumentos o voces más agudas. Otro ejemplo de esta dependencia lo tenemos en el llamado «efecto invernadero», que se explica por ser el vidrio transparente (diatérmano) para las radiaciones solares que penetran en el invernadero, siendo absorbidas por los objetos que se encuentran en su interior, los cuales elevan su temperatura y emiten radiación infrarroja, que no puede escapar por el vidrio, pues éste es opaco (atérmano) para estas radiaciones.

**PROBLEMAS: 36 al 40.**

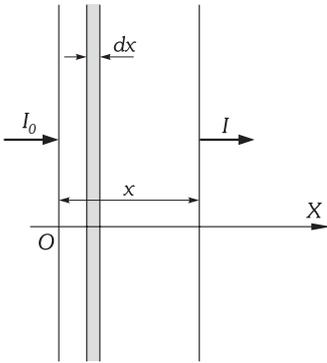


Fig. XVII-11.- Absorción de un movimiento ondulatorio.

C) EFECTO DOPPLER-FIZEAU

XVII – 11. Efecto Doppler-Fizeau

Hasta ahora se ha tomado el foco de la perturbación en reposo, y las medidas efectuadas para la frecuencia y velocidad de los movimientos ondulatorios, también se han hecho desde un sistema de referencia que considerábamos en reposo. Vamos a estudiar la relación existente entre la frecuencia de la onda emitida por el foco y la recibida por el observador cuando hay movimiento relativo entre ellos.

Un foco emisor  $F$  (Fig. XVII-12) en su vibración perturba el ambiente y la superficie de onda originada  $S$  se propaga en un período una distancia  $\lambda = cT$ . En este instante provoca el foco en el medio una perturbación que origina una superficie de onda *análoga a la anterior* que, por avanzar a su misma velocidad, permanece a una distancia constante  $\lambda$  de la emitida un período antes.

PRIMER CASO. Supongamos que el foco emisor se mueve con una velocidad  $v'$ , menor que la de propagación de la onda, acercándose a un observador en reposo respecto al medio en que se propaga la onda.

En el tiempo transcurrido  $T$  desde que se origina la superficie de onda  $S_1$  (Fig. XVII-12) hasta la emisión de su inmediata análoga  $S_2$ , el foco emisor habrá avanzado  $FF' = v'T$  y la distancia entre las dos superficies de onda quedará disminuida, precisamente, en tal valor, ya que la primera  $S_1$  se encuentra en la misma posición que si el foco fuese inmóvil y la  $S_2$  ha recorrido el mismo camino pero desde un lugar ( $F'$ ) más avanzado que antes ( $F$ ).

Para un observador exterior en reposo la longitud de onda que medirá es:

$$\lambda' = \lambda - v'T$$

y llamando  $\nu$  y  $\nu'$  a las frecuencias «emitida» y «percibida»:

$$\frac{c}{\nu'} = \frac{c}{\nu} - \frac{v'}{\nu} = \frac{c - v'}{\nu} \Rightarrow \boxed{\nu' = \nu \frac{c}{c - v'}} \quad (13)$$

En el caso de que el foco se acerque al observador, como  $c > c - v'$ , resulta que la frecuencia percibida por el observador  $\nu'$  es mayor que  $\nu$ .

Si el foco emisor se aleja del observador, un razonamiento análogo conduce a:

$$\nu' = \nu \frac{c}{c + v'}$$

y la frecuencia percibida por el observador es menor que la emitida.

La fórmula (13) es la que en general se empleará en los problemas de aplicación, siempre que tomemos como sentido positivo el que va del foco al observador. De esta manera  $v'$  será positiva si el foco se acerca al observador, y negativa en caso contrario.

Por ejemplo, sabemos que el *tono* de un sonido es su frecuencia (número de vibraciones por segundo), y que de dos sonidos, se llama *agudo* al de más frecuencia y *grave* al de menos frecuencia. Teniendo esto en cuenta, el silbido de un tren en marcha, percibido por un observador exterior, es más agudo que el emitido cuando el tren se acerca y más grave cuando se aleja.

SEGUNDO CASO. Un observador en reposo capta  $\nu$  (frecuencia) superficies de onda idénticas por segundo. Si avanza hacia el foco emisor con una velocidad  $v''$  (Fig. XVII-13), captará las mismas que antes  $\nu$ , más las veces que  $v''$  contiene a  $\lambda$ . La frecuencia percibida es por lo tanto:

$$\nu'' = \nu + \frac{v''}{\lambda} = \nu + \frac{\nu v''}{c} = \frac{\nu c + \nu v''}{c} \Rightarrow \boxed{\nu'' = \nu \frac{c + v''}{c}} \quad (14)$$

Como  $c + v'' > c$ , resulta que la frecuencia detectada por el observador  $\nu''$  es mayor que la emitida. Así por ejemplo, si el foco emite ondas sonoras, el sonido percibido por el observador, que se mueve hacia la fuente, es más agudo que el emitido.

Si el observador se aleja del foco:

$$\nu'' = \nu \frac{c - v''}{c}$$

Como  $c - v'' < c$ , resulta que la frecuencia por el observador  $\nu''$  es menor que la emitida. Para nuestro ejemplo de sonido, el tono percibido por el detector es más grave que el emitido.

Como fórmula de aplicación a problemas tomaremos la (14) si se aplica el mismo convenio que en el caso anterior.

La variación de la frecuencia, como se ve de (13) y (14), no depende solamente de la velocidad relativa entre el foco emisor y el observador, sino también de cuál de ellos es el que se mueve respecto del medio en que se propaga la onda.

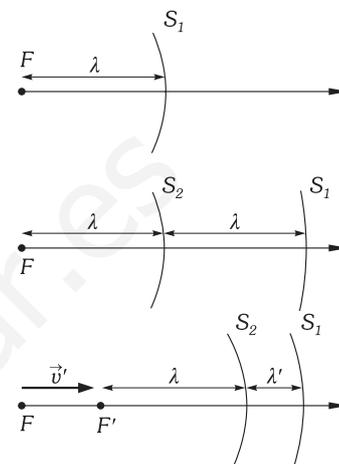


Fig. XVII-12.- El foco emisor se está moviendo con velocidad  $\vec{v}'$  en la misma dirección que la onda, estando el detector en reposo.

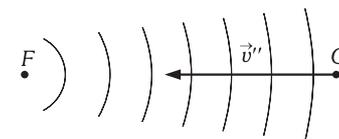


Fig. XVII-13.- El foco emisor  $F$  se encuentra en reposo y el detector  $O$  avanza hacia él con una velocidad  $\vec{v}''$ .

TERCER CASO. Cuando se mueven el observador y el foco emisor la frecuencia percibida por aquél se obtiene si más que sustituir la  $\nu$  de la fórmula (14) por la  $\nu'$  dada por la (13) obteniéndose como FÓRMULA GENERAL:

$$\nu''' = \nu \frac{c + v''}{c - v'}$$

El efecto Doppler se realiza no sólo en el sonido, sino en todo movimiento ondulatorio que perciben nuestros sentidos o captan aparatos de observación, y se llama así en honor de Christian Johann Doppler (1803-1853), que lo aplicó por primera vez en 1842 a las ondas luminosas al estudiar el color de las estrellas.

**XVII – 12. Dirección de percepción**

En los tres casos anteriores, hemos considerado movimientos del foco emisor y observador en la misma dirección, en tal caso la dirección de percepción es ésta misma.

Si el observador y el foco emisor se mueven en distintas direcciones (Fig. XVII-14) la dirección de percepción ( $p$ ), es la línea de unión observador-foco.

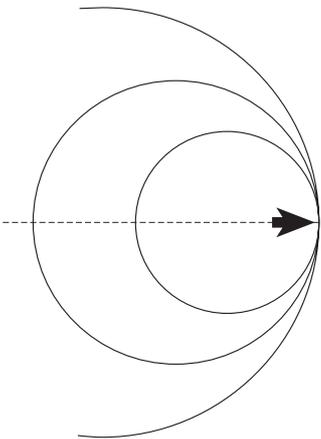


Fig. XVII-15.- Si el foco emisor de ondas viaja con una velocidad  $c$  igual a la que se propaga la onda se suman los efectos de todos los frentes de onda generados en un determinado intervalo de tiempo, produciendo un «bum» sónico y popularmente se dice que el emisor ha roto la «barrera del sonido».

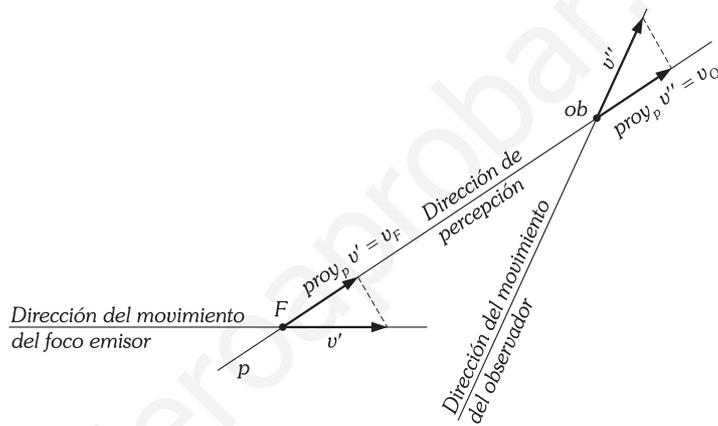


Fig. XVII-14.- Dirección de percepción.

La fórmula a aplicar para el cálculo de la frecuencia instantánea captada por el observador, será en su forma general, igual a la calculada en el párrafo anterior caso tercero, en la que sustituiremos velocidad del foco ( $v'$ ) y observador ( $v''$ ) por sus proyecciones sobre la dirección de percepción (Fig. XVII-15) quedando, con las velocidades representadas:

$$\nu''' = \nu \frac{c - \text{proy}_p v''}{c - \text{proy}_p v'} = \nu \frac{c - v_0}{c - v_F}$$

para nuestro ejemplo sónico, si el aire se moviera a una velocidad  $v$ , habría que sumar (o restar) a la velocidad del sonido  $c$ , la componente de esta  $v$  en la dirección de percepción.

**PROBLEMAS: 41 al 46.**

**XVII – 13. Onda balística o de choque**

La expresión de la relación entre las frecuencias emitida y recibida cuando es el emisor el que está en movimiento y el observador en reposo:  $\nu' = \nu c / (c - v')$  es aplicable solamente si la velocidad del emisor respecto del medio es menor que la de la onda:  $v' < c$ . En los dos casos, de  $v' = c$  y  $v' > c$ , da resultados sin sentido físico.

Si el emisor se mueve con la misma velocidad de propagación de la onda (caso  $v = c$ ), los distintos frentes de onda generados en instantes anteriores a uno  $t$  determinado (Fig. XVII-15) coinciden en el punto en que se encuentra el emisor en ese instante  $t$ , y en el que se suman los efectos de todos ellos. En el caso de ondas sonoras esta acumulación de frentes constituye la llamada «BARRERA DEL SONIDO», y las compresiones que produce en el aire en ese punto no son catastróficas porque la aportación de los frentes disminuye conforme aumenta su radio (recuérdese que según (10) la amplitud es inversamente proporcional a la distancia al foco emisor).

Para comentar el caso  $v > c$ , supongamos al foco emisor, avanzando a velocidad  $v$ , habiendo partido de  $O$  (Fig. XVII-17); al cabo de un tiempo  $t$ , se encontrará en  $P_1$  ( $OP_1 = vt$ ), y transcurridos  $2t$  y  $3t$  segundos en  $P_2$  y  $P_3$  ( $OP_2 = v 2t$ ;  $OP_3 = v 3t$ ). En tanto, la onda emitida en  $O$ , estará localizada en una esfera de radio  $3ct$  ( $c =$  velocidad del sonido) y las emitidas en  $P_1$  y  $P_2$  en esferas de radios respectivos  $2ct$  y  $ct$ . Las ondas se refuerzan en la superficie tangente a tales esferas (princi-

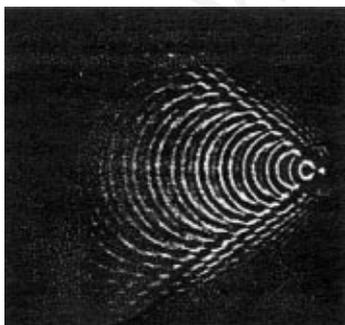


Fig. XVII-16.- Fotografía de una cubeta de ondas en la que el emisor tiene una velocidad mayor que la de propagación de la onda (onda de choque o balística), produciéndose un frente de onda cónico.

pio de Huygens), obteniéndose un frente de onda cónico, cuyo vértice es el foco emisor, y que se denomina ONDA DE CHOQUE o BALÍSTICA. Los proyectiles y aviones supersónicos producen ondas de este tipo, del que también son las estelas que dejan las embarcaciones.

El semiángulo  $\varphi$  del cono [CONO DE MACH, Ernest (1838-1916)] queda determinado fácilmente:

$$\text{sen } \varphi = \frac{OA}{OP_3} = \frac{3ct}{3vt} \Rightarrow \boxed{\text{sen } \varphi = \frac{c}{v} = \frac{1}{M}}$$

donde  $M = v/c$  se denomina NÚMERO DE MACH y el ángulo  $\varphi$  es el ÁNGULO DE MACH que existe solamente si el número de Mach es mayor que uno.

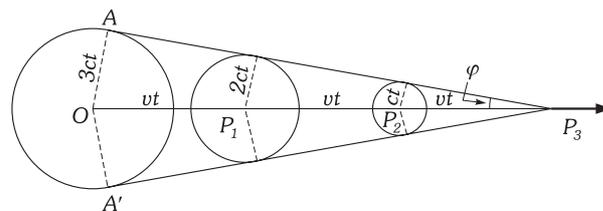


Fig. XVII-17.- Onda de choque.

**D) SUPERPOSICIÓN DE ONDAS. INTERFERENCIAS**

**XVII - 14. Principio de superposición de ondas**

Es un hecho experimental que:

«Cuando dos o más de ellas coinciden en el tiempo y en el espacio, la función de onda resultante es la suma vectorial de las funciones de onda individuales».

Tal afirmación se conoce como PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN. En la región del espacio en que superponen las ondas, la intensidad varía de un punto a otro entre máximos, que puede exceder la suma de las intensidades de las ondas componentes, y mínimos que pueden ser nulos, este fenómeno se conoce con el nombre de INTERFERENCIAS.

Un caso sencillo es el de los pulsos propagándose en la misma dirección en una cuerda al encuentro uno de otro. Si ambos son del mismo sentido se observa que al cruzarse suman sus efectos, conservando posteriormente su forma original (Fig. XVII-18). Si los pulsos son de sentido contrario cuando interfieren tienden a anularse, la anulación es completa (como en el caso de la Fig. XVII-19) cuando las formas son idénticas.

El hecho de que las ondas se crucen y continúen propagándose sin alterar su naturaleza es una propiedad fundamental de éstas y caracteriza el movimiento ondulatorio. Por esta propiedad y por una sintonización (fenómeno de resonancia) podemos, por ejemplo, oír una sola emisora en un receptor de radio; a la antena llegan ondas de muchas frecuencias que superpuestas producen una corriente eléctrica muy compleja; sin embargo podemos «sintonizar» una emisora determinada y la señal que de ella recibimos es, en principio, la misma que hubiésemos recibido si todas las demás emisoras hubiesen dejado de transmitir. Igualmente podemos escuchar el sonido de las notas tocadas por los instrumentos individuales de una orquesta, aun cuando la onda de sonido que llega a nuestros oídos procedente de toda la orquesta, sea muy compleja.

El tratamiento matemático de los fenómenos de interferencia (superposición de ondas en un punto) se hará de tal forma que si las ecuaciones de las ondas correspondientes a dos de ellas son:

$$\psi_1(x, t) = f_1(x + ct) \quad \psi_2(x, t) = f_2(x - ct)$$

el estado vibratorio del punto en que interfieren será:

$$\psi(x, t) = \psi_1 + \psi_2 = f_1(x + ct) + f_2(x - ct)$$

para lo cual, supondremos siempre que la oscilación que la onda resultante produce a una partícula del medio, está dentro del límite de elasticidad de éste y verifica por tanto la ley de Hooke. En estas circunstancias, el principio de superposición se justifica matemáticamente por el hecho de que si  $\psi_1$  y  $\psi_2$  satisfacen la ecuación de ondas, también lo hace su suma  $\psi = \psi_1 + \psi_2$  debido a la igualdad entre la derivada de una suma y la suma de las derivadas de los sumandos.

**XVII - 15. Ondas periódicas no armónicas: serie de Fourier**

Las ondas no suelen ser armónicas siendo generalmente periódicas. Podemos generalizar para estas ondas lo expresado en el párrafo III-18 referente a la serie de Fourier, demostrándose que todo lo que se necesita para construir la forma más general de una onda periódica son ondas armónicas simples.

Supongamos por ejemplo dos ondas representadas por las sinusoides 1 y 2 (Fig. III-31, en la que sustituimos  $x_1$  y  $x_2$  por  $\psi_1$  y  $\psi_2$ ). El período de la primera onda  $T_1$ , es la doble que en la segunda  $T_2$ ; es decir, la frecuencia de la primera es la mitad que la de la segunda y, la longitud de onda de la primera es doble que la de la segunda. Sumemos sus funciones de onda:  $\psi = \psi_1 + \psi_2$ , y la función resultante representa una onda periódica pero no armónica.

La ley de Fourier expresada en términos de ondas se enuncia:

«Cualquier onda periódica de frecuencia  $\nu$ , podrá expresarse como combinación de ondas armónicas cuyas frecuencias son múltiplos enteros de  $\nu$ ».

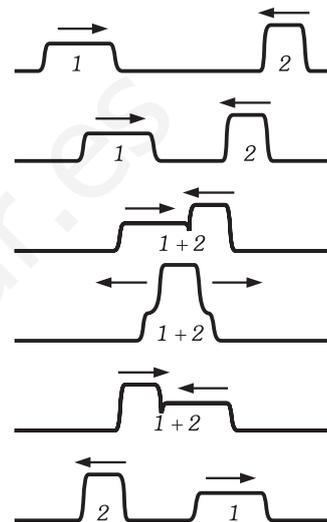


Fig. XVII-18.- Dos pulsos de onda que se mueven en sentidos opuestos en una cuerda. Puede hallarse la forma que tiene la cuerda cuando se encuentran los pulsos sumando los desplazamientos de cada pulso por separado. Este tipo de superposición de ondas se denomina interferencia constructiva.

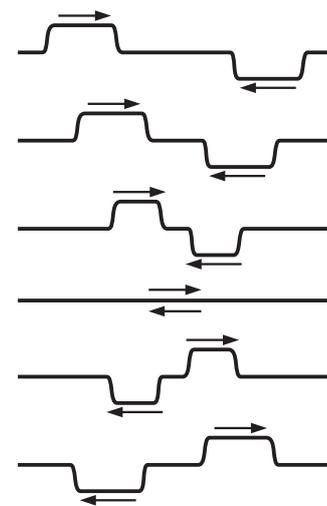


Fig. XVII-19.- Superposición de pulsos que poseen desplazamientos opuestos. En este caso la suma de los desplazamientos de los pulsos separados equivale a la sustracción de sus valores. Este tipo de superposiciones se denomina interferencia destructiva.

Análiticamente expresamos esta ley por la serie (Fourier):

$$\psi(x, t) = \psi_0 + \psi_1 \operatorname{sen} 2\pi \left( \nu t - \frac{x}{\lambda} \right) + \psi_2 \operatorname{sen} 2\pi \left( 2\nu t - \frac{2x}{\lambda} \right) + \psi_3 \operatorname{sen} 2\pi \left( 3\nu t - \frac{3x}{\lambda} \right) + \dots$$

La onda sinusoidal de igual frecuencia que la onda considerada es la «ONDA FUNDAMENTAL», y las ondas sinusoidales de frecuencia  $2\nu, 3\nu, \dots$  se llaman «ARMÓNICOS».

La Fig. III-32 inferior nos representa una onda periódica cuadrada, compuesta por las ondas armónicas de frecuencias  $\nu, 3\nu$  y  $5\nu$  y longitudes de onda  $\lambda, \lambda/3$  y  $\lambda/5$ , es decir a los términos  $1^\circ, 3^\circ$  y  $5^\circ$  de la serie de Fourier.

### XVII – 16. Interferencias

Se ha dicho que:

«INTERFERENCIAS son los efectos físicos que resultan al superponerse dos o más ondas en un punto».

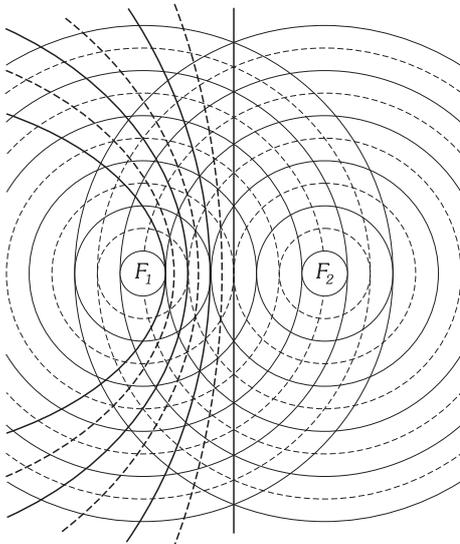


Fig. XVII-20.- Interferencias de dos ondas procedentes de  $F_1$  y  $F_2$ .

Los fenómenos de interferencia se caracterizan porque en la región del espacio en que se superponen las ondas se producen variaciones de amplitud y por tanto una distribución de la intensidad de la onda resultante, dándonos las llamadas figuras de interferencia.

Las condiciones que deben cumplirse para que existan FIGURAS DE INTERFERENCIA estables entre las ondas que producen el fenómeno son:

- 1) Que las ondas tengan el mismo período (igual frecuencia) o muy próximos.
- 2) que procedan de FOCOS COHERENTES, es decir que las fuentes de ondas que las producen tengan una diferencia de fase en la emisión que sea constante con el tiempo.

Imaginemos, por ejemplo, dos focos emisores de ondas idénticas  $F_1$  y  $F_2$  (Fig. XVII-20) que emiten ondas longitudinales o transversales. Representando por circunferencias de línea continua las superficies de onda de máxima elongación positiva y por circunferencias de puntos la de máxima elongación negativa, se verifica que en los lugares en que se encuentran dos líneas de la misma naturaleza, las dos amplitudes se suman y donde se encuentran dos circunferencias de distinto trazo se restan las amplitudes.

Las máximas y mínimas amplitudes están localizadas en el plano del dibujo en líneas que son hipérbolas (lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a otros dos fijos es constante). Los máximos están dibujados con líneas continuas y los mínimos con líneas de puntos. En la fotografía (Fig. XVII-21) se reproducen las figuras de interferencia producidas por dos focos emisores de ondas.

### XVII – 17. Interferencias de dos ondas que tienen vibraciones paralelas con la misma frecuencia y amplitud. Focos coherentes

Estudiaremos primeramente la ECUACIÓN DE ONDA RESULTANTE y a continuación EL ESTADO VIBRATORIO DE UN PUNTO  $P$  en la región del espacio donde se produce el fenómeno de interferencias.

Supongamos dos ondas de vibraciones paralelas, con el mismo período e idéntica amplitud que viajan en el sentido positivo del eje  $OX$ ; sus ecuaciones serán:

$$\psi_1 = \psi_0 \operatorname{sen} (\omega t - kx + \varphi_1) \quad \psi_2 = \psi_0 \operatorname{sen} (\omega t - kx + \varphi_2)$$

entonces:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \psi_0 [\operatorname{sen} (\omega t - kx + \varphi_1) + \operatorname{sen} (\omega t - kx + \varphi_2)]$$

aplicando la transformación trigonométrica:

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \tag{15}$$

nos queda:

$$\psi = 2\psi_0 \operatorname{sen} \left( \omega t - kx + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$$

llamando:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{or} &= 2\psi_0 \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \\ \varphi &= \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\psi = \psi_{or} \operatorname{sen} (\omega t - kx + \varphi)}$$

por consiguiente la onda resultante tiene la misma frecuencia que las dos componentes.



Fig. XVII-21.- Fotografía de un «espectro de interferencias» de ondas de agua producidas en una cubeta de ondas.

La onda resultante tiene una amplitud que dependerá de  $\varphi_2 - \varphi_1$ . Generalmente  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  varían distintamente para focos cualesquiera emisores de onda (por ejemplo: focos puntuales de luz), el valor variable de  $\varphi_2 - \varphi_1$  es tal que en diversos instantes hace pasar desordenadamente el coseno por todos sus valores posibles entre +1 y -1; por tanto, la amplitud resultante adquiere valores muy diversos y como resultado no se obtienen figuras de interferencia estables (con nuestros focos puntuales de luz, al recoger la interferencia en una pantalla se produce un «centelleo» rapidísimo, de tal forma que la persistencia de imágenes en la retina, hacer ver la pantalla regularmente iluminada), razón por la que para la producción de figuras de interferencia estables, necesitamos FOCOS COHERENTES. Para obtener éstos se recurre a ciertos artificios que en general se fundan en separar dos partes de un mismo frente de ondas, haciéndolas recorrer caminos distintos para juntarlas de nuevo (ver espejos de Fresnel o rendijas de Young en el párrafo XXVI-26).

Supongamos ahora que  $F_1$  y  $F_2$  son dos focos coherentes (Fig. XVII-22) que emiten en fase ( $\varphi_1 = \varphi_2$ , caso de condición de coherencia más claro en la producción de figuras de interferencia estables). En un instante  $t$ , el estado vibratorio de un punto  $P$ , distante de las fuentes  $r_1$  y  $r_2$  respectivamente, y no necesariamente alienado con ellas, se obtiene como suma de las vibraciones que producirían cada una de las ondas por separado; teniendo a cuenta que:

$$\psi_1 = \psi_0 \text{ sen } (\omega t - kr_1 + \varphi) \quad \psi_2 = \psi_0 \text{ sen } (\omega t - kr_2 + \varphi)$$

sumándolas y aplicando (15), queda:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = 2\psi_0 \cos k \frac{r_2 - r_1}{2} \text{ sen } \left( \omega t - k \frac{r_1 + r_2}{2} + \varphi \right)$$

y llamando:  $\psi_{or} = 2\psi_0 \cos k \frac{r_2 - r_1}{2} \quad \varphi_0 = -k \frac{r_1 + r_2}{2} + \varphi$

nos quedará:

$$\boxed{\psi = \psi_{or} \text{ sen } (\omega t + \varphi_0)}$$

ecuación del movimiento vibratorio del punto  $P$ , para el cual, la amplitud en valor absoluto será máxima e igual al doble del  $\psi_0$  (interferencia constructiva) cuando:

$$\cos k \frac{r_2 - r_1}{2} = \pm 1 \Rightarrow \pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = K\pi \Rightarrow \boxed{r_2 - r_1 = K\lambda} \quad (K \in Z)$$

En el punto  $P$  no existirá movimiento (interferencia destructiva), o lo que es lo mismo, la amplitud será mínima nula cuando:

$$\cos k \frac{r_2 - r_1}{2} = 0 \Rightarrow \pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = (2K + 1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{r_2 - r_1 = (2K + 1) \frac{\lambda}{2}} \quad (K \in Z)$$

«La amplitud es  $\begin{cases} \text{máxima} \\ \text{mínima nula} \end{cases}$  en aquellos puntos en que la diferencia de distancias a los focos es un número  $\begin{cases} \text{entero de longitud de onda.} \\ \text{impar de semilongitudes de onda.} \end{cases}$ »

**PROBLEMAS: 47 al 50.**

**XVII – 18. Ondas estacionarias**

La interferencia de dos ondas idénticas que se propagan en sentido contrario produce las ONDAS ESTACIONARIAS, caracterizadas por tener amplitud variable en sus diversos puntos, aunque siempre es la misma para cada punto del espacio. VIENTRES son los lugares de máxima amplitud y NODOS los de amplitud cero.

En la Fig. XVII-23 se presentan dos movimientos ondulatorios transversales que se propagan en sentido contrario, avanzando el de línea continua hacia la derecha y el de puntos hacia la izquierda; (de un gráfico a su inmediato inferior, se ha dibujado un avance de  $\lambda/4$ ); se incluye a la derecha de cada dibujo el resultado de la composición de las partes comunes comprendidas entre las dos líneas verticales de puntos.

En los nodos ( $N$ ) se observa que en todos los instantes hay reposo; en los vientres ( $V$ ) la vibración tiene la máxima amplitud.

También se observa que la distancia entre dos vientres o nodos consecutivos es  $\lambda/2$ ; y que la distancia entre vientre y nodo consecutivos es  $\lambda/4$ .

Las ondas se llaman estacionarias porque parecen no avanzar, formándose y deshaciéndose alternativamente y permaneciendo siempre en el mismo lugar. Todos sus puntos se encuentran al mismo tiempo en las posiciones extremas y transcurrido un cuarto de período, todos ellos están a la vez en la posición de equilibrio.

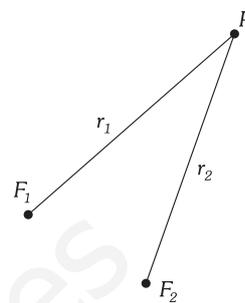


Fig. XVII-22.-  $F_1$  y  $F_2$  son dos fuentes coherentes ( $\varphi_1 = \varphi_2$ ) emisoras de ondas síncronas que interfieren en  $P$ .

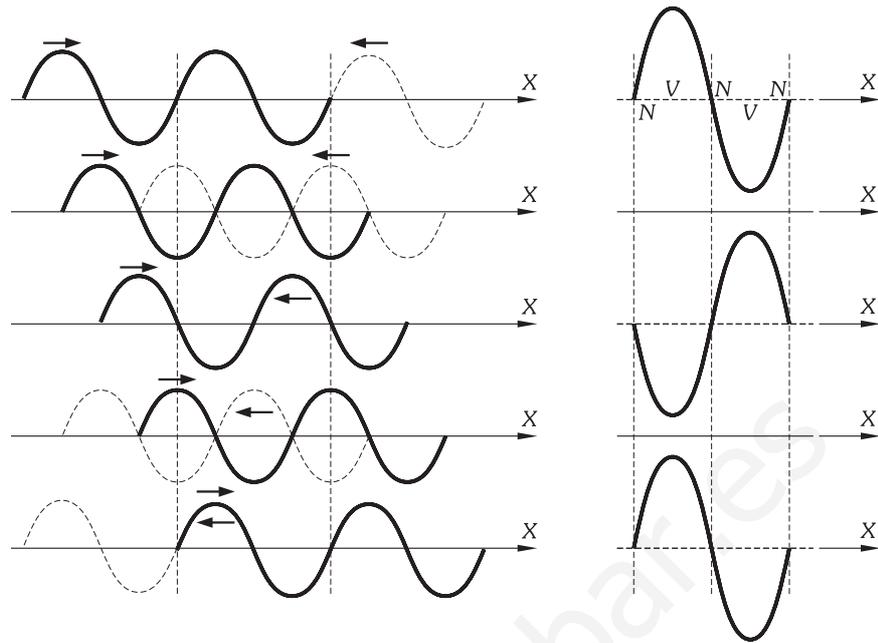


Fig. XVII-23.- Ondas estacionarias transversales.

En la Fig. XVII-24 se representan posiciones sucesivas (intervalos de  $T/4$ ) de ondas estacionarias longitudinales.

Se conviene en dibujar las ondas estacionarias como en la Fig. XVII-25, representando los vientres y nodos por los puntos de amplitud máxima o amplitud cero.

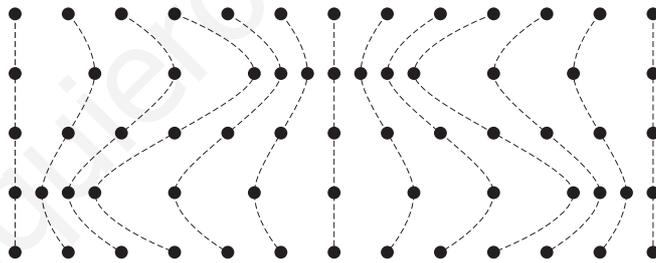


Fig. XVII-24.- Ondas estacionarias longitudinales.

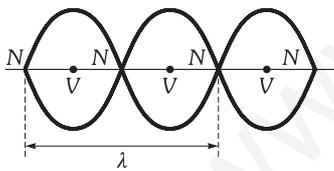


Fig. XVII-25.- Forma convenida para dibujar las ondas estacionarias.

Demostremos las afirmaciones anteriores. Supongamos dos ondas idénticas que se propagan en sentido contrario, una en sentido positivo del eje  $OX$  y la otra en el sentido negativo, y estando ambas en fase:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \psi_0 \text{ sen } (\omega t - kx) \\ \psi_2 &= \psi_0 \text{ sen } (\omega t + kx) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \psi = \psi_1 + \psi_2 = \psi_0 [\text{sen } (\omega t - kx) + \text{sen } (\omega t + kx)]$$

aplicando (15) y llamando  $\psi_{or} = 2\psi_0 \cos kx$ , nos queda:

$$\psi = 2\psi_0 \cos kx \text{ sen } \omega t = \psi_{or} \text{ sen } \omega t$$

que es la ecuación de la onda estacionaria, y que como se ve, no es una función dependiente de  $x \pm ct$  que es la característica fundamental de cualquier onda «viajera». La expresión anterior nos confirma que cualquier partícula en un punto dado  $x$  efectúa un movimiento armónico simple al transcurrir el tiempo, vibrando todas las partículas con idéntico período; y cada partícula vibra siempre con la misma amplitud, que no es la misma para cada una, sino que varía con la posición ( $x$ ) de la partícula.

La amplitud es por tanto una función armónica de la distancia, adquiriendo el valor máximo  $2\psi_0$  en los puntos (VIENTRES) tales que:

$$\cos kx = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad 2\pi \frac{x}{\lambda} = K\pi \quad \Rightarrow \quad x = K \frac{\lambda}{2} \quad (K \in Z)$$

No existe vibración en aquellos puntos en que la amplitud es nula (NODOS), lo cual ocurre cuando:

$$\cos kx = 0 \Rightarrow 2\pi \frac{x}{\lambda} = (2K + 1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{x = (2K + 1) \frac{\lambda}{4}} \quad (K \in \mathbb{Z})$$

La distancia entre vientre y vientre consecutivos es  $\lambda/2$ , puesto que:

$$(K + 1) \frac{\lambda}{2} - K \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}$$

La distancia entre nodo y nodo consecutivos es  $\lambda/2$ , puesto que:

$$(2K + 1) \frac{\lambda}{4} - (2K - 1) \frac{\lambda}{4} = 2 \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2}$$

La distancia entre vientre y nodo consecutivo es  $\lambda/4$ , puesto que:

$$(2K + 1) \frac{\lambda}{4} - K \frac{\lambda}{2} = \frac{2K\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4} - \frac{K\lambda}{2} = \frac{\lambda}{4}$$

Como consecuencia de lo anterior obtenemos que los vientres y los nodos están localizados a distancias iguales entre sí y los últimos están intercalados en el punto medio de las distancias entre dos vientres consecutivos.

El análisis de las ondas estacionarias establecidas en medios de extensión limitada (tubos, cuerdas, etc.), en función de las condiciones en los límites, se hace en las cuestiones 38 a 40 de este capítulo.

**PROBLEMAS: 51 al 54.**

**XVII - 19. Interferencias entre dos ondas que tienen vibraciones paralelas con la misma frecuencia y distinta amplitud**

Estudiaremos primeramente LA ECUACIÓN DE LA ONDA RESULTANTE y a continuación EL ESTADO VIBRATORIO DE UN PUNTO  $P$  en la región donde se produce el fenómeno de interferencias.

Supongamos dos ondas de vibraciones paralelas, con el mismo período y que viajan en el sentido positivo del eje  $OX$ ; sus ecuaciones serán:

$$y_1 = \psi_{01} \text{sen} (\omega t - kx + \varphi_1) \quad y_2 = \psi_{02} \text{sen} (\omega t - kx + \varphi_2)$$

hemos puesto la misma  $\omega$ , puesto que al tener los dos movimientos la misma frecuencia tienen la misma pulsación ya que su valor es:  $\omega = 2\pi\nu$ ; desarrollando las ecuaciones y sumando miembro a miembro:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_1 + \psi_2 = \psi_{01} \text{sen} (\omega t - kx) \cos \varphi_1 + \psi_{01} \cos (\omega t - kx) \text{sen} \varphi_1 + \psi_{01} \text{sen} (\omega t - kx) \cos \varphi_2 + \psi_{02} \cos (\omega t - kx) \text{sen} \varphi_2 = \\ &= \text{sen} (\omega t - kx) [\psi_{01} \cos \varphi_1 + \psi_{02} \cos \varphi_2] + \cos (\omega t - kx) [\psi_{01} \text{sen} \varphi_1 + \psi_{02} \text{sen} \varphi_2] \end{aligned} \quad (16)$$

Existen dos números  $\psi_0$  y  $\varphi$  que cumplen las condiciones:

$$\begin{aligned} \psi_0 \text{sen} \varphi &= \psi_{01} \text{sen} \varphi_1 + \psi_{02} \text{sen} \varphi_2 \\ \psi_0 \cos \varphi &= \psi_{01} \cos \varphi_1 + \psi_{02} \cos \varphi_2 \end{aligned} \quad (17)$$

números que podemos calcular, ya que por cociente de las anteriores, obtenemos:

$$\text{tag} \varphi = \frac{\psi_{01} \text{sen} \varphi_1 + \psi_{02} \text{sen} \varphi_2}{\psi_{01} \cos \varphi_1 + \psi_{02} \cos \varphi_2} \Rightarrow \boxed{\varphi = \text{arctg} \frac{\psi_{01} \text{sen} \varphi_1 + \psi_{02} \text{sen} \varphi_2}{\psi_{01} \cos \varphi_1 + \psi_{02} \cos \varphi_2}}$$

y elevando al cuadrado las ecuaciones (17) y sumándolas:

$$\psi_0^2 (\text{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = \psi_{01}^2 (\text{sen}^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1) + \psi_{02}^2 (\text{sen}^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_2) + 2\psi_{01}\psi_{02} (\text{sen} \varphi_1 \text{sen} \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2)$$

luego:

$$\boxed{\psi_0^2 = \psi_{01}^2 + \psi_{02}^2 + 2\psi_{01}\psi_{02} \cos (\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Sustituyendo los valores (17) en (16) nos da para ecuación de la onda resultante:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \psi_0 \text{sen} (\omega t - kx) \cos \varphi + \psi_0 \cos (\omega t - kx) \text{sen} \varphi$$

$$\boxed{\psi(x, t) = \psi_0 \text{sen} (\omega t + kx + \varphi)}$$

en consecuencia, la onda resultante tiene la misma frecuencia que las dos componentes.

Supongamos ahora que  $F_1$  y  $F_2$  (Fig. XVII-22) son dos focos coherentes que emiten en fase ( $\varphi_1 = \varphi_2$ , caso de condición de coherencia más claro en la producción de figuras de interferencia estables) y que además, por comodidad en el cálculo, elegimos el origen de tiempos cuando

$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ . En un instante  $t$ , el estado vibratorio de un punto  $P$  distante de las fuentes  $r_1$  y  $r_2$  respectivamente, y no necesariamente alineado con ellas, se obtiene como suma de las vibraciones que producirían cada una de las ondas por separado, teniendo en cuenta que:

$$\psi_1 = \psi_{01} \text{ sen } (\omega t - kr_1) \quad \psi_2 = \psi_{02} \text{ sen } (\omega t - kr_2)$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_1 + \psi_2 = \psi_{01} \text{ sen } \omega t \cos kr_1 - \psi_{01} \cos \omega t \text{ sen } kr_1 + \psi_{02} \text{ sen } \omega t \cos kr_2 - \psi_{02} \cos \omega t \text{ sen } kr_2 = \\ &= (\psi_{01} \cos kr_1 + \psi_{02} \cos kr_2) \text{ sen } \omega t - (\psi_{01} \text{ sen } kr_1 + \psi_{02} \text{ sen } kr_2) \cos \omega t \end{aligned} \quad (18)$$

existen dos números  $\psi_0$  y  $\varphi$  que cumplen:

$$\begin{aligned} \psi_0 \text{ sen } \varphi &= \psi_{01} \text{ sen } kr_1 + \psi_{02} \text{ sen } kr_2 \\ \psi_0 \cos \varphi &= \psi_{01} \cos kr_1 + \psi_{02} \cos kr_2 \end{aligned} \quad (19)$$

números que podemos calcular, ya que por el cociente de las anteriores, obtenemos:

$$\varphi = \arctg \frac{\psi_{01} \text{ sen } kr_1 + \psi_{02} \text{ sen } kr_2}{\psi_{01} \cos kr_1 + \psi_{02} \cos kr_2}$$

y elevándolas al cuadrado y sumándolas:

$$\psi_0^2 = \psi_{01}^2 + \psi_{02}^2 + 2\psi_{01}\psi_{02} \cos k(r_2 - r_1) \quad (20)$$

sustituyendo los valores (19) en (18), obtenemos para ecuación del movimiento resultante para la partícula  $P$ :

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \psi_0 \text{ sen } (\omega t - \varphi)$$

La ecuación resultante del movimiento vibratorio del punto  $P$  es la de un movimiento vibratorio armónico, para el cual será MÁXIMA la amplitud cuando:

$$\cos 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = 1 \Rightarrow 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = 2K\pi \Rightarrow r_2 - r_1 = K\lambda \quad (K \in Z)$$

y su valor será:  $\psi_0 = \psi_{01} + \psi_{02}$ . Si:

$$\cos 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = -1 \Rightarrow 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = (2K + 1)\pi \Rightarrow r_2 - r_1 = (2K + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (K \in Z)$$

la amplitud será mínima y de valor:  $\psi_0 = \psi_{01} - \psi_{02}$ . Para este último caso si  $\psi_{01} = \psi_{02}$ , el punto  $P$  se encuentra en reposo, como ya habíamos visto en XVII-17.

**PROBLEMAS: 55 al 57.**

**XVII – 20. Intensidad en los fenómenos de interferencias**

Considerando que los dos movimientos vibratorios productores de interferencias son de la misma frecuencia ( $\nu_1 = \nu_2$ ), y se superponen en el mismo medio ( $c_1 = c_2$  y  $\rho_1 = \rho_2$ ), la fórmula (11):

$$I = \frac{1}{2} \psi_0^2 \omega^2 c\rho$$

la podemos escribir para ambos movimientos componentes y el resultante:

$$I_1 = K \psi_{01}^2 \quad I_2 = K \psi_{02}^2 \quad I = K \psi_0^2 \quad \left( K = \frac{1}{2} \omega^2 c\rho \right)$$

valores que sustituidos en la (20) nos da:

$$\frac{I}{K} = \frac{I_1}{K} + \frac{I_2}{K} + 2 \frac{\sqrt{I_1}}{\sqrt{K}} \frac{\sqrt{I_2}}{\sqrt{K}} \cos k(r_2 - r_1) \Rightarrow I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos k(r_2 - r_1)$$

obteniéndose, por tanto, las mismas condiciones de máximos y mínimos de intensidad, que las requeridas para máximos y mínimos de amplitud.

**PROBLEMAS: 58 y 59.**

**XVII – 21. Superposición de ondas de distinta frecuencia. Pulsaciones. Velocidad de grupo**

Vamos a estudiar el caso de varias ondas de distintas frecuencias propagándose simultáneamente en el mismo medio, por ejemplo en una cuerda tensa. Para empezar consideremos el caso

más sencillo de dos ondas de igual amplitud, viajando en el sentido positivo del eje X (cuerda), con frecuencias  $\nu_1$  y  $\nu_2$  y números de onda  $k_1$  y  $k_2$ . Las funciones de onda respectivas son:

$$\psi_1 = \psi_0 \text{ sen } (\omega_1 t - k_1 x) \quad \psi_2 = \psi_0 \text{ sen } (\omega_2 t - k_2 x)$$

y sumando ambas:  $\psi = \psi_0 [\text{sen } (\omega_2 t - k_2 x) + \text{sen } (\omega_1 t - k_1 x)]$

aplicando de nuevo la expresión (15):

$$\psi = 2\psi_0 \cos \left[ \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t - \frac{k_2 - k_1}{2} x \right] \text{ sen } \left[ \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t - \frac{k_2 + k_1}{2} x \right]$$

que, empleando la notación:

$$\begin{aligned} \Delta k = k_2 - k_1 & \quad k_m = (k_1 + k_2)/2 \\ \Delta \omega = \omega_2 - \omega_1 & \quad \omega_m = (\omega_1 + \omega_2)/2 \end{aligned}$$

podemos escribir de la forma:

$$\psi = 2\psi_0 \cos \left( \frac{\Delta \omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x \right) \text{ sen } (\omega_m t - k_m x)$$

La representación gráfica de esta función, para  $\Delta \omega$  y  $\Delta k$  pequeños, es la de la Fig. XVII-26). La onda resultante está formada por GRUPOS o PAQUETES DE ONDAS individuales separados por puntos de amplitud nula. Se producen *pulsaciones* o *batidos* análogos a los de la figura III-34, aunque la *modulación de la amplitud* es en este caso función de la posición en lugar de serlo del tiempo como en el oscilador.

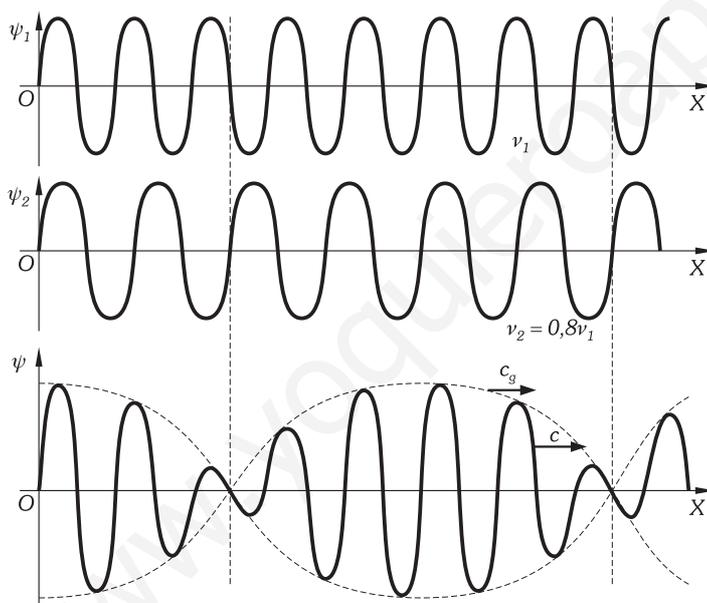


Fig. XVII-26.- Paquetes o grupos de ondas formadas por la superposición de ondas de frecuencia parecida,  $c$  es la velocidad de un punto de fase determinada,  $c_g$  es la velocidad con que avanza el paquete.

La envolvente, representada por puntos en la Fig. XVII-26, está descrita por la expresión:  $2\psi_0 \cos (\Delta \omega t - \Delta k x)/2$ , y progresa a lo largo del eje X con una velocidad llamada VELOCIDAD DE GRUPO ( $c_g$ ), que no coincide necesariamente con la velocidad con la que se mueve un punto de fase determinada; esta velocidad de grupo es:  $c_g = \Delta \omega / \Delta k$ .

En un movimiento ondulatorio la energía es proporcional al cuadrado de la amplitud, por tanto la *velocidad de transmisión de energía* es la *velocidad de grupo*.

Aunque se ha simplificado el estudio al caso de dos ondas, los resultados se pueden extrapolar al caso de un paquete formado por la superposición de muchas ondas con frecuencias y números de onda distribuidos en un intervalo limitado entre  $\nu - \Delta \nu$  y  $\nu + \Delta \nu$ , y entre  $k - \Delta k$  y  $k + \Delta k$ , respectivamente. En este caso, la velocidad de grupo se obtiene mediante:

$$c_g = \frac{d\omega}{dk}$$

calculando esta derivada en el punto medio de los intervalos de  $\omega$  y  $k$ .

Para cada una de las ondas que han formado el paquete existe la relación  $\omega = kc$  entre su frecuencia angular, número de onda y velocidad de fase; y sustituyendo esta relación en  $c_g$  obtenemos la relación entre ambas velocidades:

$$c_g = \frac{d(kc)}{dk} = c + k \frac{dc}{dk}$$

y por ser  $k = 2\pi/\lambda \Rightarrow dk = -2\pi d\lambda/\lambda^2$ , quedándonos:

$$c_g = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}$$

es decir, *las velocidades de fase y de grupo son iguales en un medio no dispersivo*, en el que la velocidad de fase de cada onda no depende de su longitud de onda ( $dc/d\lambda = 0$ ); en medios dispersivos difieren en el segundo sumando de la relación anterior. Por ejemplo, un prisma de vidrio es un medio dispersivo para la luz, los distintos colores corresponden a ondas electromagnéticas de distinta frecuencia, y el fenómeno de la refracción, que estudiaremos a continuación, nos permite observar la dispersión de la luz blanca en sus componentes, formando un arco iris. El aire es un medio no dispersivo para el sonido, afortunadamente los sonidos de distinto tono viajan a la misma velocidad, de lo contrario cualquier concierto sería un suplicio incluso para un melómano (aunque para todo hay gustos).

**PROBLEMA: 60.**

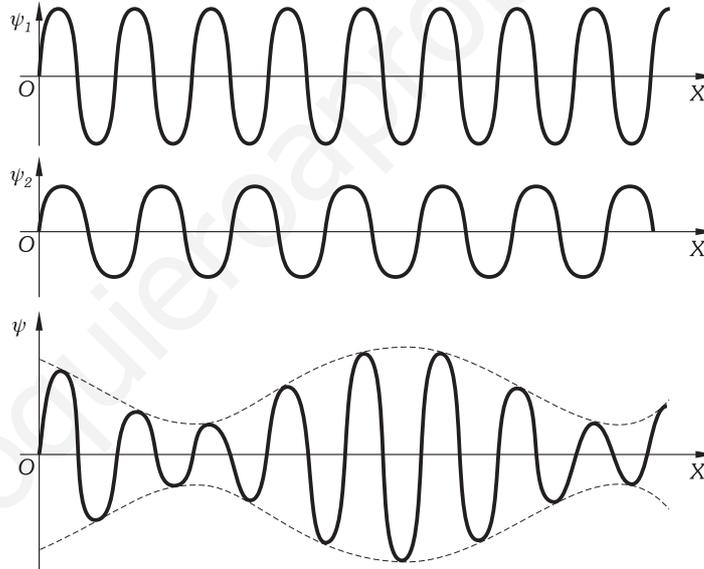


Fig. XVII-27.- Si las componentes son de distinta amplitud, las pulsaciones están separadas por zonas de amplitud mínima no nula.

**E) DIFRACCIÓN, REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN**

**XVII - 22. Principio de Huygens-Fresnel**

«Cuando a un punto capaz de vibrar, llega un movimiento ondulatorio, se transforma en un foco emisor; las ondas resultantes son activas en los puntos de contacto con la envolvente común».

Esta formación de focos emisores en el espacio nos explica la propagación del movimiento ondulatorio. Si una superficie de onda es la esfera de centro  $O$  y radio  $r$  (Fig. XVII-28), en todos los puntos de ella se originan perturbaciones que se propagan en forma de ondas esféricas; al cabo de un período la perturbación se habrá transmitido una distancia  $\lambda = cT$  (radio de las esferas pequeñas); trazando la esfera de radio  $r + \lambda$  concéntrica con la anterior y tangente a todas las superficies parciales, se obtiene la nueva superficie de onda, que a su vez, por el mismo mecanismo, transmite al espacio su energía vibrante. Así se explica la formación de ondas concéntricas al arrojar una piedra a un estanque de aguas tranquilas.

El principio de Christian Huygens (1629-1695) fue completado por Augustin Fresnel (1788-1827) al añadir que:

«La vibración producida en un punto, es la resultante de la interferencia de las diversas ondas que llegan al punto procedentes de cualquier superficie de onda anterior».

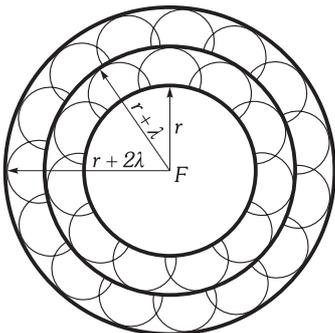


Fig. XVII-28.- Superficies de onda en idéntico estado de vibración.

**XVII – 23. Difracción**

Hemos visto en el capítulo anterior que la energía de una onda es transportada en dirección perpendicular a los frentes de onda, a esta dirección se le ha llamado rayo en la Fig. XVII-1. Si una onda se propaga en un medio homogéneo los rayos son líneas rectas que parten del foco emisor; sin embargo, en condiciones adecuadas (como las que se describen a continuación), puede observarse que se producen desviaciones respecto de la propagación rectilínea. Estas desviaciones reciben el nombre de *fenómenos de difracción*.

Desde un punto de vista cualitativo, la DIFRACCIÓN, puede explicarse por el principio de Huygens-Fresnel. Todo obstáculo que se interpone en el camino por donde se propaga una onda da origen a fenómenos de difracción. Cuando un movimiento ondulatorio llega a una superficie rígida con un orificio de abertura muy pequeña (del orden de la longitud de onda), se verifica que, a partir del orificio, se propagan ondulaciones idénticas a la incidente y en todas las direcciones.

La discrepancia respecto a la propagación rectilínea, es tanto más evidente cuanto más se aproximan al orden de magnitud de la longitud de onda  $\lambda$  las dimensiones de los obstáculos interpuestos, o de los orificios que las ondas han de atravesar.

Si al orificio del obstáculo representado en la Fig. XVII-29 llegan frentes de onda planos, a partir de él se originan ondas que se propagan como si procediesen de un foco emisor situado en el propio orificio. Por el fenómeno de difracción las ondas rodean o «abrazan» al obstáculo que encuentra a su paso (Fig. XVII-30). Si agrandamos la abertura de la Fig. XVII-29, hasta que tenga una anchura mayor que varias longitudes de onda (Fig. XVII-31), en la zona derecha de la figura frente a la abertura la onda se propaga sin modificación, sin embargo los bordes A y A' se convierten en focos emisores y hacen que la onda los rodee alcanzando zonas que de otra forma serían de «sombra».

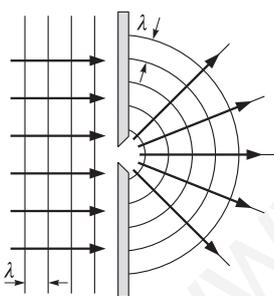
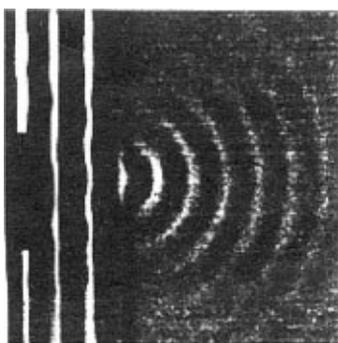


Fig. XVII-29.- Difracción de una onda plana en un orificio cuyo diámetro es del orden de la longitud de onda.

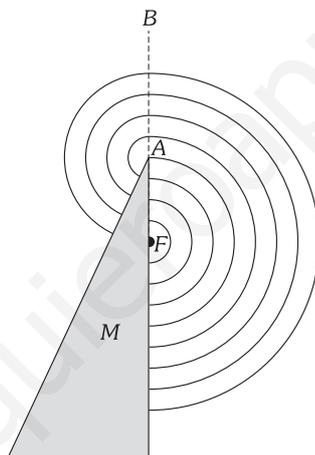


Fig. XVII-30.- Si M es un escollo puntiagudo que existe sobre una superficie quieta de agua, al arrojar una piedra en F las ondas producidas en el agua se propagarán de forma que sus crestas o valles sean circunferencias concéntricas de centro F. En el punto A (principio de Huygens) se formará un foco emisor y a la izquierda de la línea AB, las crestas o valles determinarán circunferencias de centro A, alcanzando las zonas del otro lado del obstáculo.

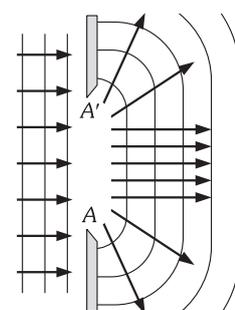
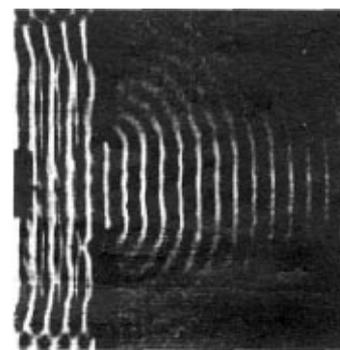


Fig. XVII-31.- Difracción de una onda plana en un orificio del orden de varias longitudes de onda. (Fotografía cubeta de ondas).

El fenómeno de la difracción por obstáculos de formas particulares se estudiará en relación con las ondas luminosas (Capítulo XXVI).

**XVII – 24. Reflexión de ondas planas**

REFLEXIÓN es el retorno del movimiento ondulatorio por el mismo medio por donde se propagaba al chocar con la superficie de un medio distinto.

Imaginemos una superficie material rígida  $EE'$  (Fig. XVII-32) a la que se dirige una onda plana  $AB$ ; al cabo de cierto tiempo la perturbación ha recorrido un camino  $AA'$  encontrándose la onda en la nueva posición  $A'B'$ . El punto A' se transforma en un foco emisor y mientras la perturbación pasa de  $B'$  a  $B''$ , la producida en A' estará localizada en una esfera de radio igual a  $B'B''$  y de centro A'. Si desde  $B''$  se traza una tangente a esta esfera, se obtiene la onda reflejada  $A''B''$ .

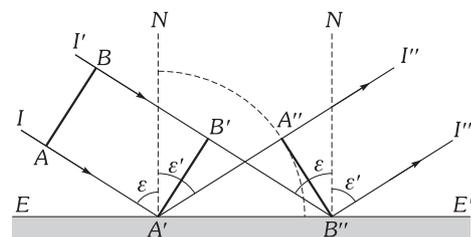


Fig. XVII-32.- Reflexión de ondas planas.

Se llama **ÁNGULO DE INCIDENCIA** ( $\varepsilon$ ) al que forma la dirección de incidencia,  $IA'$  o  $I'B''$ , con la normal a la superficie, y **ángulo de REFLEXIÓN** ( $\varepsilon'$ ) al formado por la dirección de reflexión,  $A'I''$  o  $B''I'''$ , con la normal.

«El ángulo de incidencia y el de reflexión son iguales».

En efecto, los triángulos  $A'A''B''$  y  $A'B''B''$  son iguales por ser rectángulos con la hipotenusa  $A'B''$  común y los catetos  $A'A''$  y  $B''B''$  iguales, por construcción. En consecuencia los ángulos  $A''A'B''$  (complementario de  $\varepsilon'$ ) y  $B''B''A''$  (complementario de  $\varepsilon$ ) son iguales; luego:  $\varepsilon = \varepsilon'$ .

**XVII – 25. Refracción de ondas planas**

REFRACCIÓN es el cambio de la velocidad de propagación de un movimiento ondulatorio, al pasar de un medio a otro.

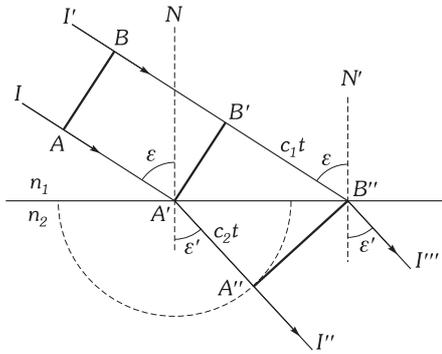


Fig. XVII-33.– Refracción de ondas planas.

Imaginemos una superficie de separación de dos medios distintos 1 y 2 a la que llega una onda plana  $AB$ ; al cabo de un cierto tiempo habrá recorrido un camino  $AA'$  encontrándose en la nueva posición  $A'B'$ . El punto  $A'$  se transforma en un foco emisor y mientras la perturbación pasa de  $B'$  a  $B''$  ( $B'B'' = c_1t$ ) la producida por  $A'$  en el interior del medio 2, estará localizada en una esfera de radio igual a  $c_2t$  y centro  $A'$ ; ( $c_1$  y  $c_2$  son las velocidades de propagación en los medios 1 y 2). Si desde  $B''$  se traza una tangente a la esfera se obtiene la onda refractada (Fig. XVII-33).

ÁNGULO DE REFRACCIÓN es el formado por la dirección de refracción  $A'I''$  o  $B''I'''$  con la normal a la superficie.

«La relación de los senos de los ángulos de incidencia y refracción es constante».

En efecto, en el triángulo rectángulo  $A'B''B''$  se verifica:  $\text{sen } B'A'B'' = B'B''/A'B''$ ; y en el  $A'B''A''$ :  $\text{sen } A'B''A'' = A'A''/A'B''$ . Pero considerando que  $B'A'B''$  y  $A'B''A''$  son respectivamente iguales a  $\varepsilon$  y a  $\varepsilon'$  por tener el mismo complemento que ellos, y que  $B'B'' = c_1t$  y  $A'A'' = c_2t$ , se obtiene por división:

$$\frac{\text{sen } \varepsilon}{\text{sen } \varepsilon'} = \frac{c_1}{c_2} = \text{constante} = n$$

A  $n$  se le llama **ÍNDICE DE REFRACCIÓN del segundo medio con relación al primero**, y es el cociente de dividir la velocidad de propagación en el primer medio por la del segundo.

Tanto para las ondas mecánicas, a las que nos referimos en estos capítulos, como para las electromagnéticas, existe, cuando  $c_1$  es menor que  $c_2$ , un ángulo de incidencia máximo por encima del cual no hay onda refractada y se produce el fenómeno de REFLEXIÓN TOTAL, siempre que el espesor del segundo medio no sea demasiado pequeño. El valor máximo del ángulo de incidencia se denomina **ÁNGULO LÍMITE**,  $\varepsilon_i$ ; si la onda incide con ese ángulo, el de refracción es de  $90^\circ$ , con lo que:  $\text{sen } \varepsilon_i = c_1/c_2$ .

**PROBLEMAS: 61 al 64.**

**XVII – 26. Reflexión y refracción simultáneas. Coeficientes de reflexión y refracción. Cambio de fase en la reflexión**

Cuando una onda incide en la superficie de separación de dos medios experimenta a la vez los dos fenómenos estudiados, es decir, da origen a una onda reflejada y a una transmitida (refractada), de tal forma que la energía que transporta la onda incidente se reparte entre ambas.

Para el estudio de este caso recurrimos de nuevo al modelo de la cuerda tensa, aunque ahora la supondremos compuesta de dos materiales distintos, uno de densidad lineal de masa  $\mu_1$  y otro de densidad  $\mu_2$ , unidos en  $x = 0$  como en la Fig. XVII-34, y soportando ambas partes una tensión común.

En el medio 1, a la izquierda de  $x = 0$ , se propagan superpuestas la onda incidente  $\psi_i$  y la reflejada  $\psi_r$ , con lo que la elongación transversal de un punto de ese lado de la cuerda será:

$$\psi_1(x, t) = \psi_{0i} \text{sen}(\omega t - k_1x) + \psi_{0r} \text{sen}(\omega t + k_1x)$$

y en el medio 2, a la derecha de  $x = 0$ , donde sólo hay onda transmitida:

$$\psi_2(x, t) = \psi_{0t} \text{sen}(\omega t - k_2x)$$

Empleamos la misma  $\omega$  porque la frecuencia no cambia (el sonido reflejado o transmitido tiene el mismo tono que el incidente, igual ocurre con el color de la luz), sin embargo los números de onda son distintos,  $k_1$  y  $k_2$ , porque la velocidad de propagación es diferente en ambos medios.

El extremo común de ambos lados tiene una elongación única, con lo que:

$$\psi_1(0, t) = \psi_2(0, t) \Rightarrow \psi_{0i} + \psi_{0r} = \psi_{0t} \tag{21}$$

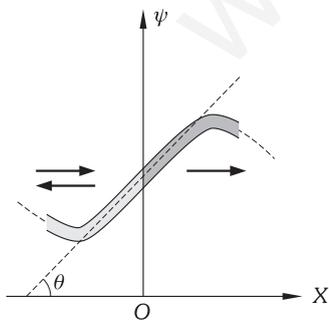


Fig. XVII-34.– Reflexión y refracción en una separación entre dos medios (dos cuerdas de distinta masa por unidad de longitud).

Además las dos partes de la cuerda deben unirse en  $x = 0$  con la misma inclinación ya que, al soportar una tensión común, distinta inclinación supondría una fuerza neta en la dirección de  $\psi$  que aceleraría el elemento de masa que podemos considerar en la unión. Por tanto:

$$\operatorname{tg} \theta = \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right)_{x=0} = \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right)_{x=0}$$

lo que supone: 
$$-k_1 \psi_{0i} + k_1 \psi_{0r} = -k_2 \psi_{0t} \quad (22)$$

Despejando entre (21) y (22), las amplitudes reflejada y transmitida en función de la incidente, se obtiene:

$$\boxed{\psi_{0r} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \psi_{0i}} \quad \boxed{\psi_{0t} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \psi_{0i}} \quad (23)$$

Por otra parte:  $k = \omega/c$  y  $c = \sqrt{F/\mu}$  donde  $F$  es la tensión común a toda la cuerda. Con esto podemos expresar las amplitudes en función de las densidades de los dos medios:

$$k = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\frac{\mu}{F}} \Rightarrow \begin{cases} \psi_{0r} = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} \psi_{0i} \\ \psi_{0t} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} \psi_{0i} \end{cases}$$

Podemos extraer algunas consecuencias de estas expresiones.

Consideremos  $\mu_2$  despreciable frente a  $\mu_1$ , como puede ser el caso de una cuerda con un extremo libre o sujeto por un hilo fino que le comunique la tensión necesaria, entonces:

$$\mu_2 \ll \mu_1 \Rightarrow \psi_{0r} \approx \psi_{0i} \Rightarrow \psi_{0t} \approx 2\psi_{0i}$$

es decir, la onda reflejada está en fase con la incidente y el desplazamiento en el extremo libre es mayor que el máximo en cualquier otra posición (el doble en el caso límite de  $\mu_2 = 0$ ).

Si se verifica que  $\mu_2 > \mu_1$ ,  $\psi_{0t}$  es del mismo signo que  $\psi_{0i}$  y las ondas transmitida e incidente está en fase, pero  $\psi_{0r}$  es de distinto signo con lo que en la reflexión se produce un cambio de fase. Podemos enunciar:

*Al incidir una onda plana en dirección perpendicular a la superficie de separación de dos medios, si el segundo medio es más denso que el primero la onda reflejada está en oposición de fase con la incidente, tienen un desfase de  $\pi$  radianes.*

*En el caso de que  $\mu_2$  sea mucho mayor que  $\mu_1$ , la amplitud transmitida se anula y la reflejada se hace igual a la incidente pero de signo opuesto, con lo que en el medio de incidencia se establecerá una onda estacionaria.*

A los coeficientes que relacionan las amplitudes en las fórmulas (23) se les denomina COEFICIENTE DE REFLEXIÓN y DE REFRACCIÓN,  $r$  y  $t$  respectivamente:

$$\boxed{r = \frac{\psi_{0r}}{\psi_{0i}} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}} \quad \boxed{t = \frac{\psi_{0t}}{\psi_{0i}} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}}$$

y en función de las densidades lineales de masa, en el caso de la cuerda:

$$r = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} \quad t = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}$$

El PODER REFLECTOR  $R$  (o FACTOR DE REFLEXIÓN) se define como el cuadrado del coeficiente de reflexión:

$$\boxed{R = r^2 = \left( \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2}$$

y como la energía que transporta una onda es proporcional al cuadrado de la amplitud,  $R$  resulta ser la relación entre las energía reflejada,  $E_r$ , e incidente,  $E_i$ . En la superficie de separación de dos medios no puede almacenarse energía, por tanto el PODER TRANSMISOR  $T$  será:

$$T = \frac{E_t}{E_i} = \frac{E_i - E_r}{E_i} = 1 - R \Rightarrow \boxed{T = 1 - r^2 = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}}$$

con expresiones análogas para  $R$  y  $T$  en función de las densidades lineales de masa en el caso de la cuerda.

**PROBLEMAS: 65 al 67.**

**F) POLARIZACIÓN**

**XVII – 27. Polarización lineal**

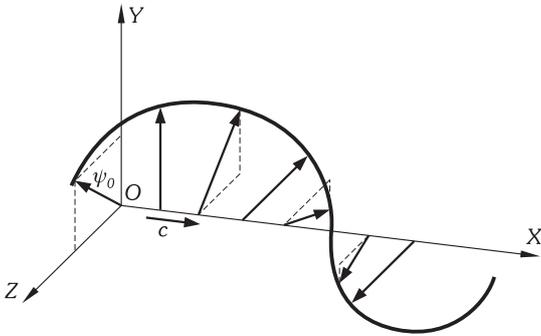


Fig. XVII-35.– Onda transversal no polarizada en una cuerda.

La polarización es un fenómeno característico de las ondas transversales, en las cuales las partículas vibran perpendicularmente a la dirección de propagación; existen infinitas direcciones que cumplen con la condición dada (todas las que se encuentran en un plano perpendicular a la dirección de propagación de la onda). En general, la dirección de vibración varía de unos puntos a otros, en tal caso decimos que la onda no está polarizada (en la Fig. XVII-35 representamos el «perfil» de una onda no polarizada en una cuerda).

«Diremos que una onda está polarizada linealmente, cuando las partículas que vibran produciendo la onda lo hacen siempre en un mismo plano (Fig. XVII-36)». Al plano perpendicular al de vibración (OXY) se le llama PLANO DE POLARIZACIÓN (OXZ).

La polarización de la luz es un tema de gran interés en física, se estudiará en el capítulo XXVI.

**XVII – 28. Superposición de ondas transversales de igual frecuencia que se encuentran linealmente polarizadas con sus planos de polarización perpendiculares. Polarización elíptica y circular**

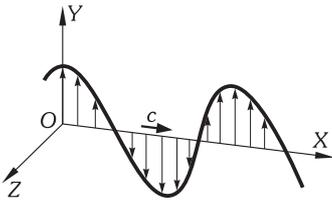


Fig. XVII-36.– Onda transversal polarizada linealmente en una cuerda.

Supongamos que al origen  $O$  de una cuerda tensa situada sobre el eje  $OX$  (Fig. XVII-37) comienza a vibrar sinusoidalmente en la dirección del eje  $OY$  en la siguiente forma:

$$y(0, t) = A \sin \omega t \tag{24}$$

en la cuerda se propaga una onda polarizada plana de ecuación:

$$y(x, t) = A \sin \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) = A \sin (\omega t - kx) \tag{25}$$

Si se obliga al origen a oscilar en la dirección  $OZ$  en la forma:

$$z(0, t) = B \sin (\omega t + \varphi) \tag{26}$$

la onda propagada tendrá  $y = 0$  como plano de vibración y su ecuación será:

$$z(x, t) = B \sin (\omega t + \varphi - kx) \tag{27}$$

Cuando en el origen se excitan simultáneamente las dos vibraciones (24) y (26) el principio de superposición indica que el movimiento de cada punto de la cuerda debe ser la superposición de (25) y (27). De la ecuación (27) obtenemos:

$$\frac{z}{B} = \sin (\omega t - kx) \cos \varphi + \cos (\omega t - kx) \sin \varphi$$

de la (25):  $\sin (\omega t - kx) = \frac{y}{A} \Rightarrow \cos (\omega t - kx) = \sqrt{1 - \frac{y^2}{A^2}}$

sustituyendo:

$$\frac{z}{B} = \frac{y}{A} \cos \varphi + \sqrt{1 - \frac{y^2}{A^2}} \sin \varphi \Rightarrow \frac{z^2}{B^2} + \frac{y^2}{A^2} \cos^2 \varphi - 2 \frac{zy}{AB} \cos \varphi = \sin^2 \varphi - \frac{y^2}{A^2} \sin^2 \varphi$$

$$\boxed{\frac{z^2}{B^2} + \frac{y^2}{A^2} - \frac{2zy}{AB} \cos \varphi = \sin^2 \varphi}$$

que para una  $x$  determinada, es la ecuación de la elipse que describe la partícula situada en esa posición.



Fig. XVII-37.– Cuerda tensa de origen  $O$  y situado en el eje  $OX$ .

CASOS PARTICULARES

1. Si la diferencia de fase  $\varphi$ , es cero ó  $2K\pi$ , ( $K \in \mathbb{Z}$ ); la ecuación general queda:

$$\frac{z^2}{B^2} + \frac{y^2}{A^2} - \frac{2zy}{AB} = 0 \Rightarrow \left(\frac{z}{B} - \frac{y}{A}\right)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{z = \frac{B}{A} y}$$

que es la ecuación de un plano que pasa por el eje  $OX$ ; el movimiento resultante es una onda polarizada linealmente contenida en este plano y cuya amplitud de oscilación es  $\sqrt{A^2 + B^2}$  (Fig. XVII-38) y la ecuación de la onda resultante será de la forma:

$$\psi(x, t) = \sqrt{z^2 + y^2} = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\omega t - kx)$$

2. La diferencia de fase  $\varphi$  es  $\pi$  ó  $(2K + 1)\pi$ , ( $K \in \mathbb{Z}$ ); entonces:

$$\frac{z^2}{B^2} + \frac{y^2}{A^2} + \frac{2zy}{BA} = 0 \Rightarrow \boxed{z = -\frac{B}{A} y}$$

éste será ahora el plano de vibración, y por tanto la onda resultante se encuentra polarizada linealmente puesto que está contenida en este plano (Fig. XVII-39) y la onda resultante tendrá por ecuación:

$$\psi(x, t) = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\omega t - kx)$$

3. La diferencia de fase es  $\pi/2$  ó  $(2K + 1)\pi/2$ , ( $K \in \mathbb{Z}$ ); la ecuación general queda reducida ahora a:

$$\boxed{\frac{z^2}{B^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1}$$

es decir los puntos de la cuerda se hallan situados sobre un cilindro recto cuya base es una elipse de semiejes  $A$  y  $B$ . (Fig. XVII-40). La trayectoria de cada partícula es una elipse con los mismos semiejes. La onda resultante se dice que está POLARIZADA ELÍPTICAMENTE. Cuando la diferencia de fase es  $\pi/2$  cada partícula recorre la elipse en sentido contrario a las agujas del reloj y en el mismo sentido que ellas si  $\varphi = -\pi/2$ .

Si  $A = B$  la elipse se transforma en una circunferencia y hablaremos de POLARIZACIÓN CIRCULAR.

Si la diferencia de fase no es igual a los valores estudiados en los casos anteriores, el movimiento de las partículas que transmiten la onda es elíptico. (En la Fig. IV-16 representamos las trayectorias de las partículas en el plano  $x = 0$  para los diferentes casos de diferencia de fase de las ondas componentes).

La polarización elíptica es DEXTRÓGIRA (sentido de las saetas de un reloj) cuando la diferencia de fase entre las ondas está comprendida entre cero y  $\pi$ ; si lo está entre  $\pi$  y  $2\pi$  la polarización es LEVÓGIRA (sentido contrario a las saetas de un reloj).

G) ACÚSTICA. PROPAGACIÓN DEL SONIDO

XVII - 29. Acústica. Sonido

La ACÚSTICA estudia el sonido. SONIDO son las perturbaciones que impresionan el sentido del oído. Las ondas sonoras son ondas mecánicas longitudinales.

Las ondas de sonido se producen en cuerdas vibrantes (como las cuerdas vocales o las de la guitarra), en columnas de aire vibrante (como el clarinete y el órgano) y en placas y membranas vibrátiles (como el tambor y el altavoz); todos estos elementos vibrátiles comprimen y dilatan al aire que los rodea transmitiendo estas perturbaciones hasta el pabellón de la oreja haciendo vibrar el tímpano; transmitida esta vibración por la cadena de huesos del oído medio al interno, impresiona el nervio auditivo experimentándose la sensación de sonido.

La primera parte del proceso, desde que se produce el sonido hasta que éste hace vibrar el tímpano, está regida por fenómenos puramente físicos y constituye la ACÚSTICA FÍSICA. La transmisión por el oído medio e interno en los que las oscilaciones no verifican la ley de Hooke, está afectada por factores específicos de cada individuo y constituye la ACÚSTICA FISIOLÓGICA. La ACÚSTICA PSICOLÓGICA se refiere a la interpretación por el cerebro de los impulsos eléctricos que le transmite el nervio auditivo.

Para que las ondas de sonido nos den una sensación placentera, tienen que ser aproximadamente periódicas o estar compuestas por un número pequeño de componentes casi periódicas (y si la intensidad no es demasiado grande), como por ejemplo los SONIDOS MUSICALES. El sonido cuya forma de onda no es periódica se oye como RUIDO; el cual puede representarse como una superposición de ondas periódicas en un número muy grande.

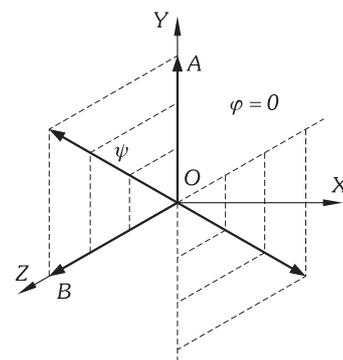


Fig. XVII-38.- Resultante linealmente polarizada de las dos ondas transversales que se indican en el texto, cuando  $\varphi = 0$ .

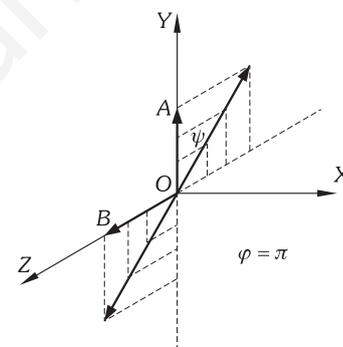


Fig. XVII-39.- Resultante linealmente polarizada de las dos ondas transversales que se indican en el texto, cuando  $\varphi = \pi$ .

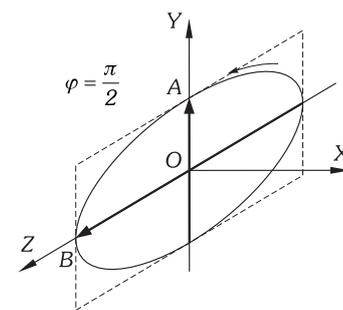


Fig. XVII-40.- Polarización elíptica.

El intervalo de frecuencias que puede estimular al oído y al cerebro humano está comprendido entre 20 y 20 000 Hz, al que se llama INTERVALO AUDIBLE. Una onda longitudinal de sonido cuya frecuencia sea menor que el límite inferior del intervalo audible se llama INFRASÓNICA y si es mayor que el límite superior ULTRASÓNICA.

### XVII – 30. Velocidad de propagación del sonido

VELOCIDAD DEL SONIDO

MEDIO	TEMPERATURA °C	VELOCIDAD m/s
Aire	0	330
Hidrógeno	0	1 286
Oxígeno	0	317
Agua	15	1 450
Plomo	20	1 190
Cobre	20	3 810
Aluminio	20	5 100
Hierro	20	5 190
Granito	20	6 000

En los fluidos, la velocidad de propagación de un movimiento ondulatorio longitudinal, según se demostró en el párrafo XVII-6, es:  $c = \sqrt{B/\rho}$ , siendo  $B$  su módulo de compresibilidad y  $\rho$  la densidad; si el medio es un sólido, el módulo de compresibilidad (volumétrico) se reemplaza por el módulo de Young (módulo de alargamiento), es decir:  $c = \sqrt{E/\rho}$ .

Si el medio es un gas y las compresiones y dilataciones que en él se producen son adiabáticas, también en el párrafo XVII-6, demostrábamos que la velocidad de propagación del sonido en él, es:

$$c = \sqrt{\frac{p\gamma}{\rho}}$$

siendo  $p$  la presión del gas no perturbado y  $\gamma$  el coeficiente de las adiabáticas, que para el aire toma el valor 1,41, obteniéndose para el valor de la velocidad del sonido en él, en condiciones normales:

$$c_0 = \sqrt{\frac{p_0\gamma}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{76 \times 13,6 \times 980 \times 1,41}{0,001 293}} \text{ cm/s} = 330 \text{ m/s}$$

La velocidad del sonido en un gas, a la presión  $p_0$  y la temperatura  $t$  es:

$$c_t = \sqrt{\frac{p_0\gamma}{\rho_t}} = \sqrt{\frac{p_0\gamma}{\rho_0(1+\alpha t)}} = \sqrt{\frac{p_0\gamma(1+\alpha t)}{\rho_0}}$$

ya que la densidad de un gas, a  $t$  grados, comparada con la que tiene a  $0^\circ$  (si no hay variaciones de presión) es:  $\rho_t = \rho_0/(1+\alpha t)$ , pero como:  $c_0 = \sqrt{p_0\gamma/\rho_0}$ , nos queda:

$$c_t = c_0 \sqrt{1+\alpha t}$$

«La velocidad del sonido en un gas es directamente proporcional a la raíz cuadrada del binomio de dilatación».

Para comparar velocidades  $c$  y  $c'$  a las temperaturas  $t$  y  $t'$  grados basta dividir entre sí las expresiones correspondientes a las dos temperaturas, obteniendo:

$$\frac{c}{c'} = \sqrt{\frac{1+\alpha t}{1+\alpha t'}}$$

y si la temperatura la medimos en la escala absoluta ( $T = t + 273$ ), puesto que podemos considerar para los gases  $\alpha = 1/273$ , se tiene:  $c/c' = \sqrt{T/T'}$ ; es decir; en los gases la velocidad del sonido es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta.

Para deducciones posteriores, también es importante recordar que en una cuerda tensa, las ondas transversales que se producen, se propagan con una velocidad:  $c = \sqrt{F/\mu}$  siendo  $F$  la fuerza que tensa a la cuerda y  $\mu$  la masa de la unidad de longitud o densidad lineal ( $\mu = M/l$ ). El volumen correspondiente a esta masa es el de un cilindro de base  $\pi r^2$  y altura unidad; su masa es pues:  $\pi r^2 \rho$ , y la fórmula inicial se transforma en:

$$c = \sqrt{\frac{F}{\pi r^2 \rho}} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{F}{\pi \rho}} \quad (28)$$

«La velocidad de propagación del sonido en una cuerda es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la fuerza que la tensa e inversamente proporcional al radio y a la raíz cuadrada de su densidad».

**PROBLEMAS: 68 al 72.**

### XVII – 31. Ondas longitudinales en un fluido

Como ya se ha dicho las ondas sonoras se propagan en forma de compresiones y dilataciones longitudinales que producen variaciones de presión y de densidad debidas a acumulación o enrarecimiento de las partículas del medio. Para realizar medidas de las magnitudes que intervienen en el fenómeno, es más cómodo medir variaciones de presión que desplazamiento de partículas o va-

riaciones de densidad, por este motivo se suelen expresar las magnitudes de la acústica física en función de la presión.

Vamos a demostrar que si la onda sonora es armónica, las variaciones de presión también lo son. Supongamos para ello una onda plana armónica que se propaga en el sentido positivo del eje X de la Fig. XVII-41, en un medio de densidad  $\rho$ , y consideremos un volumen paralelepédico elemental  $dV = dS dx$ . Como resultado de las distintas presiones que se ejercen en las dos caras perpendiculares al eje X, el volumen de la figura está sometido a una fuerza neta que le produce a la masa  $dm = \rho dV$  una aceleración  $a$ . Esta aceleración es la derivada segunda del desplazamiento  $\psi$  de las partículas.

$$\psi(x, t) = \psi_0 \text{sen}(\omega t - kx) \Rightarrow v(x, t) = \psi_0 \omega \cos(\omega t - kx) = v_{\text{máx}} \cos(\omega t - kx)$$

donde  $v_{\text{máx}} = \psi_0 \omega$  es la amplitud de la velocidad; la aceleración instantánea es:

$$a(x, t) = \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = -\omega v_{\text{máx}} \text{sen}(\omega t - kx)$$

Con esto, la fuerza neta en la dirección de propagación es:

$$a dm = -\rho dS dx v_{\text{máx}} \omega \text{sen}(\omega t - kx)$$

y la diferencia de presión entre las dos caras:

$$dp = \frac{a dm}{dS} = -\rho v_{\text{máx}} \omega \text{sen}(\omega t - kx) dx$$

ecuación que integrada conduce a:

$$p - p_0 = -\rho v_{\text{máx}} \frac{\omega}{k} \cos(\omega t - kx) - \rho v_{\text{máx}} c \cos(\omega t - kx)$$

en la que  $p_0$  es la presión existente en el volumen elemental en ausencia de onda, o sea con  $v_{\text{máx}} = 0$ . La expresión anterior puede ponerse de la forma:

$$\Delta p = p_{\text{máx}} \text{sen}\left(\omega t - kx - \frac{\pi}{2}\right)$$

donde hemos llamado:  $\Delta p = p - p_0 \quad p_{\text{máx}} = v_{\text{máx}} \rho c \quad (29)$

esta expresión nos confirma que la onda de presión es también armónica, de la misma frecuencia que la onda de desplazamiento y su comparación con la expresión de  $\psi(x, t)$  permite afirmar que: *la onda de presión avanza retrasada en fase  $\pi/2$  respecto a la onda de desplazamiento*. Dicho de otra forma:

*En los puntos en que la presión (o la densidad) es máxima o mínima, el desplazamiento de las partículas del medio es nulo, y en los puntos de  $\Delta p = 0$  ( $\rho = \rho_0$ ) el desplazamiento es máximo.*

**XVII - 32. Reflexión y refracción del sonido. Eco**

Las ondas sonoras sufren una reflexión parcial al chocar con la superficie de un medio cualquiera de distinta densidad a la del medio en que se propagaban. Esta es la causa de una pérdida de energía vibrante y, en consecuencia, de amplitud; al disminuir ésta, la intensidad del sonido (párrafo XVII-9), se hace menor.

Al reflejarse el sonido en un sólido, por ejemplo un muro, la energía de la onda reflejada es, prácticamente, la misma que la incidente y la pérdida de intensidad es la que corresponde al aumento de distancia.

*Cuando la onda incidente y la reflejada impresionan el oído del mismo observador con intermitencia suficiente para la percepción de los dos sonidos, se produce el fenómeno llamado ECO.*

El intervalo de tiempo mínimo para que nuestro oído perciba dos sílabas distintamente es 0,1 segundos. Si consideramos como velocidad del sonido a la temperatura de 20° unos 340 m/s, el espacio que debe recorrer la onda en su ida y vuelta del oído al obstáculo es:  $s = 0,1 \times 340 = 34$  m. La distancia mínima entre el oído y la superficie reflectora debe ser alrededor de 17 m para que se produzca eco.

El sonido se refracta al pasar de una zona (o medio) a otra en la que tiene distinta velocidad; así en la atmósfera, en la que hay una variación continua de temperatura, la dirección de propagación cambia continuamente transformándose en una curva, de tal forma que el tiempo empleado para ir de un punto a otro sea mínimo (ver principio de Fermat, párrafo XXIV-4).

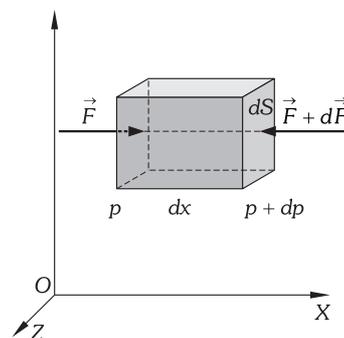


Fig. XVII-41.- El paralelepípedo, atravesado por una onda plana, experimenta una fuerza neta en la dirección de propagación.

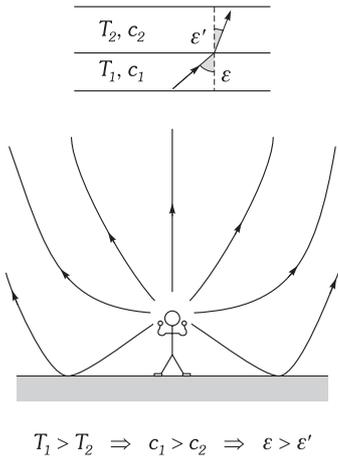


Fig. XVII-42.- Marcha de un sonido si la temperatura disminuye con la altura.

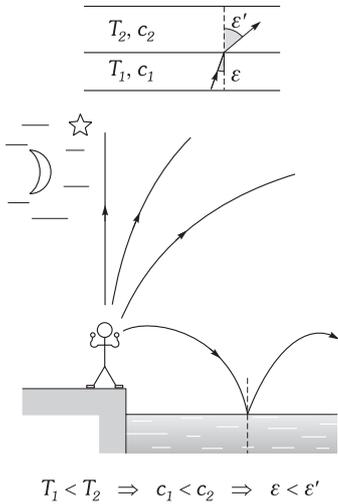


Fig. XVII-43.- Marcha de un sonido si la temperatura aumenta con la altura.

Para ilustrar este hecho pensemos en un sonido emitido durante el día, cuando normalmente la temperatura disminuye con la altura. La situación es la representada en la Fig. XVII-42; las trayectorias, perpendiculares a los frentes de onda, se curvan hacia arriba y en dirección horizontal aparece pronto la zona de sombra que no es alcanzada por la perturbación. El caso contrario se ilustra en la Fig. XVII-43; si la temperatura aumenta con la altura, las trayectorias se curvan hacia el suelo, con lo que en una superficie lisa y de alto coeficiente de reflexión respecto del aire, el sonido de una conversación puede oírse a centenares de metros.

H) CUALIDADES FÍSICAS DEL SONIDO

XVII - 33. Intensidad de un sonido. Impedancia acústica

Son cualidades físicas del sonido la intensidad, el tono y el timbre.

INTENSIDAD es la cualidad por la que se distinguen los sonidos fuertes de los débiles, siendo su valor «la energía media que atraviesa en la unidad de tiempo a la unidad de superficie, normal a la dirección de propagación».

Si  $W$  es la energía que en un tiempo  $t$  atraviesa una superficie  $S$  normal a la dirección de propagación, la intensidad sonora es:

$$I = \frac{W}{St} = \frac{P}{S}$$

ya que  $W/t$  (energía por segundo) es la potencia mecánica ( $P$ ). Podemos así definir la intensidad del sonido como la «potencia transmitida por la onda sonora, en cada unidad de superficie». La unidad CGS de intensidad sonora es el erg/s · cm<sup>2</sup>; la del SI el W/m<sup>2</sup>; prácticamente se emplea el μW/cm<sup>2</sup>. Para que nuestro oído perciba sonidos de una frecuencia aproximada a 1 000 Hz, es necesaria una intensidad de  $10^{-10} \mu\text{W}/\text{cm}^2 = 10^{-12} \text{W}/\text{m}^2$ .

Como se expresó en el estudio general del movimiento ondulatorio, «la intensidad de sonido es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud de la vibración, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco emisor», y, como se vio, su expresión para una onda de amplitud  $\psi$  y frecuencia angular  $\omega$  que se propaga con velocidad  $c$  en un medio de densidad  $\rho$ , es  $I = \psi_0^2 \omega^2 \rho c / 2$ .

La relación obtenida (fórmula 29) para una onda plana de sonido propagándose en un fluido, entre los valores máximos de la presión y velocidad de un punto del medio es  $p_{\text{máx}} = v_{\text{máx}} \rho c$ . Al producto  $\rho c$  de la densidad del medio por la velocidad del sonido en él se le denomina IMPEDANCIA o RESISTENCIA ACÚSTICA ( $Z$ ) del medio; es decir:

$$Z = \rho c$$

En función de ella, y por ser  $v_{\text{máx}} = \psi_0 \omega$ , podemos expresar la intensidad de la forma:

$$I = \frac{1}{2} v_{\text{máx}}^2 Z = \frac{1}{2} \frac{p_{\text{máx}}^2}{Z} = \frac{1}{2} v_{\text{máx}} p_{\text{máx}}$$

con las mismas expresiones para los valores instantáneos de  $v$  y  $\Delta p$ .

Existe una analogía completa entre estas expresiones y las que relacionan la potencia eléctrica en una corriente alterna (potencia  $\leftrightarrow I$ ) y los valores máximos de la intensidad de corriente (intensidad de corriente  $\leftrightarrow v$ ) y de la diferencia de potencial (d.d.p.  $\leftrightarrow \Delta p$ ), de ahí el nombre de impedancia dado a  $Z$ . La analogía, sin embargo, es sólo entre fórmulas ya que las impedancias acústica y eléctrica son magnitudes físicas totalmente diferentes.

XVII - 34. Reverberación. Tiempo de reverberación

REVERBERACIÓN es el fenómeno de sucesivas reflexiones del sonido en distintas superficies.

Al emitir un sonido en un local, se refleja en las paredes, suelo, techo y en todos los obstáculos que impiden su libre propagación. Si los obstáculos son buenos reflectores del sonido éste persiste un largo tiempo, dando ocasión a que sean percibidos por el auditorio varios sonidos a la vez, alterándose, así, la belleza musical de un concierto o haciéndose ininteligible un orador.

Se evita tal fenómeno por medio de cuerpos absorbentes del sonido (cortinas, yeso poroso, etc.); el sonido, reflejándose en tales cuerpos, pierde, en cada reflexión, un tanto por ciento determinado de su intensidad.

TIEMPO DE REVERBERACIÓN es el que transcurre desde que cesa de producirse un sonido hasta que su intensidad se hace  $10^5$  veces menor.

Depende fundamentalmente del poder transmisor de las distintas superficies en que se refleja el sonido. Para este tipo de aplicaciones, al poder transmisor  $T$ , que es la relación entre la energía

transmitida y la incidente, se denomina también COEFICIENTE DE ABSORCIÓN  $\alpha$  (que no hay que confundir con el citado con el mismo nombre en la propagación en un medio no elástico). El estudio del tiempo de reverberación se hace experimentalmente, y da como resultado que podemos medirlo con bastante aproximación, y en condiciones ambientales normales, mediante la expresión:

$$t_r = \frac{0,165 V}{\sum \alpha_i A_i}$$

donde  $V$  (en  $m^3$ ) es el volumen del local y  $A_i$  (en  $m^2$ ) es el área de una de las superficies reflectantes, de coeficiente de absorción  $\alpha_i$ , y el tiempo medido en segundos.

El tiempo de reverberación no debe ser demasiado largo, por los inconvenientes antes expuestos; tampoco debe ser demasiado corto pues, entonces, en una gran sala de espectáculos, por ejemplo, no captaría los sonidos todo el auditorio. El tiempo de reverberación óptimo es de 1 a 2 segundos. En fábricas, talleres, etc., conviene, para evitar molestias auditivas, un tiempo de reverberación muy corto.

**PROBLEMAS: 73 y 74.**

**XVII – 35. Tono de un sonido**

El TONO es la frecuencia del sonido (número de vibraciones por segundo). De dos sonidos se llama AGUDO al de más frecuencia y GRAVE al de menos frecuencia. El tono se mide en HERTZ, correspondiendo un hertz a una vibración por segundo.

El tono está relacionado con la longitud de onda por la expresión:

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu} \quad \boxed{\nu = \frac{c}{\lambda}}$$

«Los sonidos más agudos son los de longitud de onda menor».

Para la medida del tono se transforma la señal acústica, mediante un micrófono, en una señal eléctrica, que, tras un proceso de filtrado, amplificación y rectificación, produce en la pantalla de un osciloscopio un espectro de rayas, que indican tanto la frecuencia como la amplitud del tono fundamental del sonido y de los posibles armónicos de que consta si no es un sonido puro.

**XVII – 36. Teoría física de la música**

MÚSICA es el arte de combinar sonidos para la producción de un efecto estético.

Las notas o sonidos emitidos sucesivamente constituyen una MELODÍA y simultáneamente una ARMONÍA.

INTERVALO entre dos notas es la razón de su frecuencia.

ARMÓNICOS de un sonidos son los que tienen por tono los múltiples enteros de su frecuencia. Así, el sonido de 100 Hz tiene por armónicos los de 200 Hz, 300 Hz, etc.

OCTAVAS AGUDAS de un sonido son los que tienen por tono al del sonido considerado multiplicado por 2, 4, 8, 16 y en general  $2^n$  ( $n =$  número entero). Las octavas agudas del sonido de 100 Hz, son las de 200 Hz, 400 Hz, 800 Hz, etc.

Todas las octavas agudas son armónicas; pero no todos los armónicos son octavas agudas.

Los intervalos básicos en la escala musical son:

$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{25}{24}$
(tono mayor)	(tono menor)	(semitono mayor)	(semitono menor)

Elevar o bajar una nota en un tono mayor, es multiplicar o dividir su frecuencia por  $9/8$  (lo mismo para los demás intervalos considerados).

La escala musical se obtiene partiendo de una nota base (NOTA TÓNICA) y elevando sucesivamente la frecuencia de esta nota, y de las que se obtienen a partir de ella, de la siguiente forma:

tono mayor	(9/8)
tono menor	(10/9)
semitono mayor	(16/15)
tono mayor	(9/8)
tono menor	(10/9)
tono mayor	(9/8)
semitono mayor	(16/15)

Si a la nota tónica la llamamos do, iremos obteniendo las sucesivas (re, mi, fa, sol, la, si, do') como se expresa a continuación:

$$\begin{aligned}
 re &= do \frac{9}{8} \\
 mi &= re \frac{10}{9} = do \frac{9}{8} \frac{10}{9} = do \frac{5}{4} \\
 fa &= mi \frac{16}{15} = do \frac{5}{4} \frac{16}{15} = do \frac{4}{3} \\
 sol &= fa \frac{9}{8} = do \frac{4}{3} \frac{9}{8} = do \frac{3}{2} \\
 la &= sol \frac{10}{9} = do \frac{3}{2} \frac{10}{9} = do \frac{5}{3} \\
 si &= la \frac{9}{8} = do \frac{5}{3} \frac{9}{8} = do \frac{15}{8} \\
 do' &= si \frac{16}{15} = do \frac{15}{8} \frac{16}{15} = do 2
 \end{aligned}$$

En definitiva los intervalos con respecto al do, de cada una de las notas de la escala musical, son:

do	re	mi	fa	sol	la	si	do'
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2

El la de la 3ª escala tiene 440 Hz, luego:

$$\frac{la_3}{do_3} = \frac{440}{do_3} = \frac{5}{3} \Rightarrow do_3 = 264 \text{ Hz}$$

Multiplicando 264 Hz por 2, 4, 8, etc., se obtienen el do<sub>4</sub>, do<sub>5</sub>, do<sub>6</sub>, etc. Dividiendo 264 por 2 y 4 obtenemos el do<sub>2</sub> y el do<sub>1</sub>.

Conociendo el do de cada escala basta multiplicar por el intervalo para obtener la frecuencia de cada nota.

Si tomamos como nota tónica el fa (es decir: el primer peldaño de nuestra escalera indeformable, lo hacemos coincidir con el cuarto de la anterior) observamos en la Fig. XVII-44 la coincidencia de las notas excepto el si que está descendido un semitono; a tales notas se les llama *bemoles* y se obtienen de la nota natural, dividiendo su frecuencia por el *semitono menor* (25/24):

$$si^b = si \frac{24}{25}$$

En la escala cuya nota tónica es fa, el si es bemoles.

En la figura se observa, cómo empleando como nota tónica el sol, coinciden las notas obtenidas a partir de ella con las notas naturales estudiadas, excepto el fa que se eleva un semitono. A tal nota se le llama *sostenido*, y se obtiene de la natural *multiplicando* su frecuencia por el *semitono menor*:

$$fa^\# = fa \frac{25}{24}$$

En la escala cuya nota tónica es el sol, el fa es sostenido.

Procediendo de esta forma, diremos que la escala musical completa (ESCALA CROMÁTICA) consta, por tanto, de 21 notas: las 7 naturales con sus 7 sostenidos y sus 7 bemoles.

En los instrumentos de sonido fijo (el piano, por ejemplo) se emplea un intervalo regular (llamado *temperamento*) para pasar de una nota a la siguiente; Johann Sabastian Bach (1685-1750) empleó un intervalo igual a  $\sqrt[12]{2}$  en una escala de 12 sonidos (escala *temperada*), así: al multiplicar la tónica por  $\sqrt[12]{2}$  obtenemos la nota siguiente; de ésta pasamos a la siguiente multiplicando por  $\sqrt[12]{2}$ , y así sucesivamente; al realizar la duodécima multiplicación, habremos llegado a multiplicar la tónica por 2, es decir: habremos llegado a la octava aguda. De esta forma el sostenido de una nota y el bemoles de la siguiente, se sustituyen por una nota de frecuencia media; procediendo de esta forma se observa (Fig. XVII-45) que se confunden el sostenido del do con el bemoles del re, etc., y que el mi sostenido coincide con el fa natural y el fa bemoles con el mi; lo mismo ocurre con el si y el do'.

Los oídos muy finos y educados en la música, no confunden el sostenido de una nota con el bemoles de la siguiente. En los instrumentos en que la nota producida depende de la técnica y la destreza del músico, como el violín, el artista hace emitir a las cuerdas las notas justas que le dicta su instinto musical.

**PROBLEMAS: 75 al 77.**

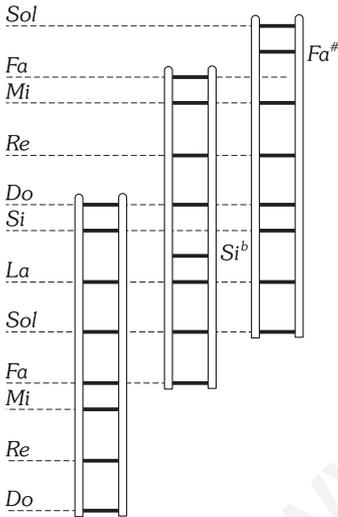


Fig. XVII-44.- Escalera indeformable.

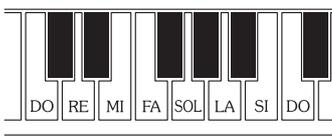


Fig. XVII-45.- Teclado de un piano.

**XVII – 37. Timbre. Sonidos compuestos**

El TIMBRE es la cualidad del sonido que permite distinguir, en notas del mismo tono, el instrumento y aun la forma de emisión.

Todo movimiento periódico de período  $T = 1/\nu$  que no responde a la ecuación general  $x = A \text{ sen } 2\pi\nu t$ , es decir, cuya representación gráfica no es una senoide, como ya se vio en el párrafo XVII-15, se puede considerar como la superposición de diversos movimientos vibratorios armónicos de frecuencia  $\nu, 2\nu, 3\nu$ , etc. (Serie de Fourier).

Los instrumentos musicales emiten en general, sonidos compuestos por la superposición de un sonido fundamental (el más grave) y una serie de armónicos.

El timbre de un sonido depende de los armónicos emitidos, siendo tanto más ARMONIOSO cuanto mayor sea el número de armónicos.

El análisis de los armónicos de un sonido se realiza con el mismo sistema esbozado anteriormente para analizar el tono.

**I) INSTRUMENTOS MUSICALES**

**XVII – 38. Ondas estacionarias transversales en las cuerdas**

El estudio experimental de las vibraciones de las cuerdas sonoras se realiza en el aparato llamado «SONÓMETRO» (Fig. XVII-46a). Las cuerdas sonoras, de tripa, plástico o metal, tensas por medio de un peso o por clavijas que sujetan sus extremos, entran en vibración transversal cuando uno de sus puntos se aparta de la posición de equilibrio con desplazamiento perpendicular a la cuerda (Fig. XVII-46b). La tensión, transmitida a lo largo de ella, origina fuerzas que llevan a las partículas a la posición de equilibrio y la rebasan por inercia hasta que adquiere la cuerda una posición simétrica a la primera. La amplitud de la vibración se amortigua por efecto de los rozamientos. En la cuerda se producen así, dos nodos en sus extremos y un vientre en el centro.

Si en el centro de la cuerda se pone un caballete que impide vibrar al punto de la cuerda que en él se apoya, la vibración es la de la Fig. XVII-46c con tres nodos y dos vientres. Si el caballete se coloca a un tercio del extremo, su vibración es la de la Fig. XVII-46d con cuatro nodos y tres vientres.

Puesto que la distancia entre dos nodos consecutivos es  $\lambda/2$ , la longitud de la cuerda es, en cada caso:  $L = \lambda/2, L = 2\lambda/2, L = 3\lambda/2, \dots$  En general:

$$L = \frac{K}{2} \lambda \quad (K \in \mathbb{N}^*)$$

Considerando que  $\lambda = c/\nu$  se obtiene:

$$L = \frac{K}{2} \lambda = \frac{K}{2} \frac{c}{\nu}$$

El valor de la velocidad de propagación del sonido en una cuerda, de radio  $r$ , y densidad  $\rho$  tensa por un peso o fuerza  $F$  es:

$$c = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}$$

Sustituyendo este valor en la fórmula anterior, después de despejar la frecuencia  $\nu$ , obtenemos:

$$\nu = \frac{K}{2} \frac{c}{L} = \frac{K}{2Lr} \sqrt{\frac{F}{\pi\rho}} \quad (K \in \mathbb{N}^*)$$

En una cuerda se pueden producir el sonido fundamental ( $K=1$ ) y todos sus armónicos ( $K=2, K=3, \dots$ ).

Al pulsar una cuerda se producen en ella varios de los primeros armónicos. En los instrumentos cuyas cuerdas tienen una longitud fija (piano, arpa, etc.) cada una de ellas emite su sonido característico. En el violín, guitarra, etc., la longitud de la cuerda varía al modificar los dedos del músico la posición de uno de sus extremos, emitiéndose sonidos muy variados.

**PROBLEMAS: 78 al 83.**

**XVII – 39. Ondas estacionarias de sonido en los tubos sonoros**

Los TUBOS SONOROS son tubos capaces de producir sonidos por vibración de la columna de gas que hay en su interior.

En los TUBOS DE FLAUTA (Fig. XVII-47a) el aire que penetra por su orificio inferior A, sale por B; la vibración del bisel del orificio B origina la vibración de su columna de gas. En los TUBOS DE

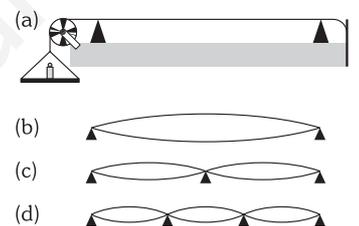


Fig. XVII-46.– Sonómetro. Vibraciones en una cuerda.

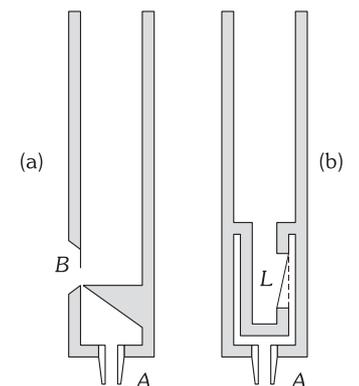


Fig. XVII-47.– Tubos sonoros.

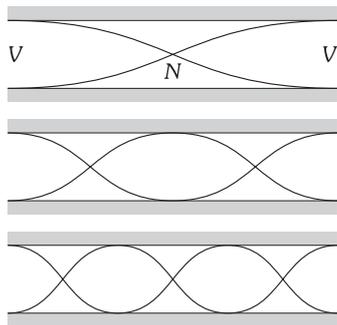


Fig. XVII-48.- Ondas estacionarias en tubos abiertos.

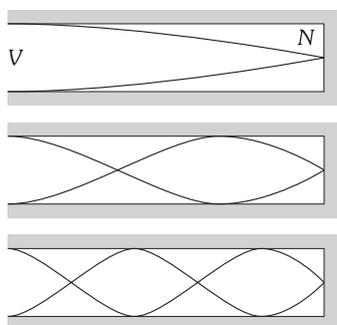


Fig. XVII-49.- Ondas estacionarias en tubos cerrados.

LENGÜETA (Fig. XVII-47b) el aire insuflado por  $A$  abre y cierra sucesivamente la lengüeta  $L$ , entrando en vibración el gas interior del tubo.

Las ondas longitudinales originadas en el aire junto a la lengüeta o al pico de flauta se propagan a lo largo del tubo, reflejándose en su extremo opuesto contra la pared que lo cierra, o en la propia atmósfera si el tubo es abierto, ya que el aire condensado o dilatado tiene distinta densidad que el atmosférico. Las ondas incidentes y las reflejadas originan, en su interferencia, ondas estacionarias. Se demuestra experimentalmente su existencia moviendo a lo largo de un tubo que tiene una pared de vidrio, una membranita sujeta por unos hilos, sobre la cual hay una materia pulverulenta ligera; en los vientres el polvillo salta y en los nodos queda en reposo.

Los tubos de flauta pueden ser *abiertos* o *cerrados* por el extremo opuesto al que se insufla el aire. Los de *lengüeta* son necesariamente abiertos para dar salida al aire.

**TUBOS ABIERTOS:** Si el tubo es *abierto*, el aire vibra con su máxima amplitud en sus extremos, originándose en ellos vientres; las sucesivas vibraciones están representadas en la Fig. XVII-48.

Como la distancia entre vientre y vientre es  $\lambda/2$  la longitud del tubo es en cada caso:  $L = \lambda/2$ ,  $L = 2\lambda/2$ ,  $L = 3\lambda/2$ , ... En general:

$$L = \frac{K}{2} \lambda \quad (K = 1, 2, 3, \dots)$$

considerando que  $\lambda = c/\nu$  se obtiene:

$$L = \frac{K}{2} \frac{c}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{K}{2} \frac{c}{L}$$

**TUBOS CERRADOS:** Si el tubo es cerrado se origina un vientre en el extremo por donde penetra el aire y un nodo en el extremo cerrado (quedan representadas las ondas estacionarias en la Fig. XVII-49). Como la distancia entre vientre y nodo consecutivo es  $\lambda/4$ , la longitud del tubo es en cada caso:  $L = \lambda/4$ ,  $L = 3\lambda/4$ ,  $L = 5\lambda/4$ , ... En general:

$$L = \frac{2K-1}{4} \lambda \quad (K = 1, 2, 3, \dots)$$

considerando que  $\lambda = c/\nu$  se obtiene por sustitución:

$$L = \frac{2K-1}{4} \frac{c}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{2K-1}{4} \frac{c}{L}$$

Las fórmulas obtenidas compendian las LEYES:

En un tubo abierto se puede producir el sonido fundamental ( $K = 1$ ) y sus armónicos ( $K = 2, 3, 4$ , etc.).

En un tubo cerrado se puede producir el sonido fundamental ( $2K - 1 = 1$ ) y los armónicos impares ( $2K - 1 = 3, 5, 7$ , etc.).

En dos tubos idénticos y con el mismo gas, uno abierto y otro cerrado, emitiendo el sonido fundamental, el abierto produce la octava aguda del cerrado. (Doble número de vibraciones por segundo).

Esta última ley es cierta ya que la frecuencia del abierto ( $\nu_a$ ) y del cerrado ( $\nu_c$ ) serán:

$$\nu_a = \frac{1}{2} \frac{c}{L} \quad \wedge \quad \nu_c = \frac{1}{4} \frac{c}{L} \quad \Rightarrow \quad \nu_a = 2\nu_c$$

Hay instrumentos constituidos por tubos de longitud fija como el órgano (cada tubo emite una nota) y la corneta. En esta última las notas de posible emisión se reducen a los armónicos del sonido elemental. Los labios del ejecutante, actuando como flauta, son los que originan la vibración de la columna de aire.

Hay otros instrumentos, como la flauta, en los que se modifica el tono del sonido abriendo o cerrando orificios practicados a lo largo del tubo. En cada orificio abierto se origina un vientre.

#### XVII - 40. Vibraciones en las varillas. Tubo de Kundt

En todo instrumento musical, en este estudio elemental, hay que considerar que en sus extremos libres se produce una vibración de amplitud máxima (vientre) y en sus partes fijas no hay vibración (nodo).

Cuando los dos extremos del instrumento son fijos o libres, la fórmula que determina el tono es análoga a la de los tubos cerrados.

Las varillas sonoras pueden vibrar longitudinal o transversalmente. Para producir las vibraciones longitudinales bastará frotarlas, a lo largo de su longitud, con un paño con resina.

El método de August Kundt (1839-1894) para la medida de la velocidad de propagación del sonido en sólidos, líquidos y gases, se basa en tal tipo de vibraciones (Fig. XVII-50). Las vibracio-

nes de la varilla se transmiten al émbolo *E* que cierra el tubo *T*. El gas del interior del tubo entra en vibración produciéndose ondas estacionarias; en los nodos de ellas se forman montoncitos de un polvo fino, que previamente se habrá introducido en el tubo. La posición de la pared *A* se puede modificar para que exista «resonancia» entre el tubo y la varilla.

Por haberse formado vientres en sus extremos y un nodo en el centro, la longitud de la varilla es:

$$L = \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2} \frac{c}{\nu}$$

siendo *c* la velocidad de propagación del sonido en la sustancia sólida que forma la varilla y  $\nu$  la frecuencia de la nota emitida.

La distancia entre dos montoncitos de polvillo en el interior del tubo (distancia entre dos nodos consecutivos) es:

$$L' = \frac{\lambda'}{2} = \frac{1}{2} \frac{c'}{\nu}$$

siendo *c'* la velocidad del sonido en el gas que llena el tubo. Por cociente, obtenemos:

$$\frac{L}{L'} = \frac{c}{c'}$$

Si el gas que llena el tubo es aire, su velocidad *c'* ya es conocida; medidos *L* y *L'* se puede determinar la velocidad *c*, en la sustancia sólida.

Conocida ya la velocidad del sonido en la varilla, podremos determinar velocidades en los gases o líquidos, sin más que repetir la experiencia llenando el tubo de diversos gases o líquidos; en este último caso el polvillo que se emplea es de limaduras de un metal.

Actualmente para medidas en gases se sustituye la varilla por un altavoz excitado mediante un generador (oscilador de audiofrecuencia) con el que variar la frecuencia a voluntad.

El tubo de Kundt es muy empleado para medir la influencia sobre la velocidad del sonido de factores ambientales como la temperatura o la humedad relativa, e incluso para la medida de la constante adiabática  $\gamma$  de un gas.

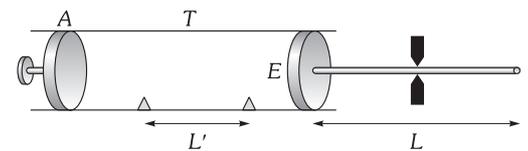


Fig. XVII-50.- Tubo de Kundt.

**XVII - 41. Diapasón**

Es una varilla metálica doblada en forma de U y sujeta por su centro. En sus extremos se forman vientres y en el centro nodo. El sonido es casi puro ya que únicamente el primer armónico es algo sensible.

Conocida la frecuencia de un diapasón se puede determinar muy sencillamente la velocidad de propagación del sonido en el aire, mediante el dispositivo esquematizado en la Fig. XVII-51. Disponemos de un tubo de vidrio (A), comunicado por medio de un tubo de goma, con un depósito con agua (D). Subiendo éste hacemos que el agua llegue hasta la parte superior del tubo. En las proximidades de su boca colocamos un diapasón vibrando que emite una nota de frecuencia ( $\nu$ ) conocida. Hacemos descender el agua hasta que se perciba resonancia (una mayor intensidad) en el tubo de vidrio; medimos la longitud *L* de la parte vacía y con estos datos se puede calcular la velocidad de propagación del sonido en el aire.

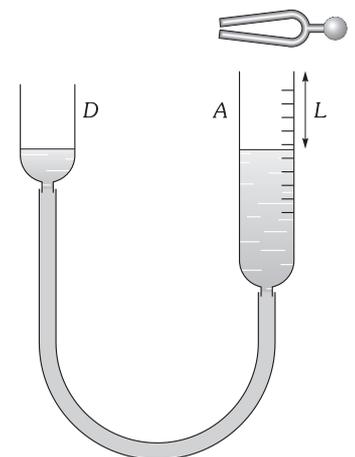


Fig. XVII-51.- Para la determinación de la velocidad de propagación del sonido en el aire.

$$\nu = \frac{1}{4} \frac{c}{L} \Rightarrow c = 4L\nu$$

PROBLEMAS: 84 al 88.

**J) PERCEPCIÓN DEL SONIDO**

**XVII - 42. Oído humano**

Las vibraciones longitudinales del aire, penetran por el «pabellón de la oreja» (*P*) (Fig. XVII-52); continúa la propagación de las ondas por el «conducto auditivo externo» (*C*) hasta llegar a la «membrana del tímpano» (*T*) que «azotada» por el aire vibrante, entra, a su vez, en vibración; ésta es transmitida por la cadena de huesecillos (martillo, yunque y estribo (1, 2 y 3)) a la membrana que cierra la «ventana oval» (*O*) la cual transmite, a su vez, al líquido linfático que llena el «caracol» (*CA*), situado en el «oído interno».

Desarrollando el caracol, es decir, estirando su espiral y en una de sus partes, se compone, muy esquemáticamente, de un conducto, uno de cuyos límites (pared inferior de la figura) es la «membrana basilar» (*MB*) la cual tiene unas 20 000 fibrillas de diversas longitudes (0,04-0,5 mm), que (unas u otras) entran en vibración, en resonancia con las vibraciones de la ventana oval y del líquido linfático; estas fibrillas agitan a las

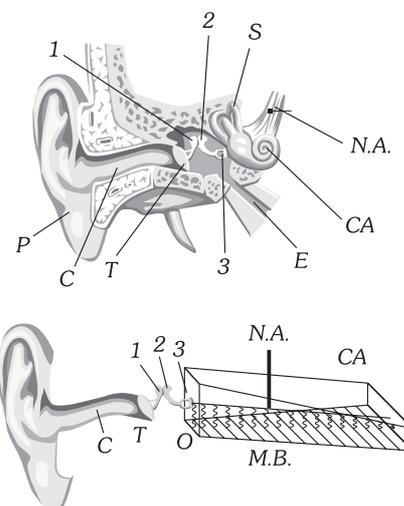


Fig. XVII-52.- Receptor humano del sonido: el oído.

diversas pestañas relacionadas con el nervio auditivo (N.A.), que transmite al cerebro la sensación del tono (vibración de fibras de distinta longitud), intensidad (amplitud de la vibración) y timbre (vibración de diversas fibrillas correspondientes a sonidos armónicos).

La misión de los llamados «conductos semicirculares» (S) es proporcionar la sensación de «equilibrio». La trompa de Eustaquio (E) comunica la faringe con el oído medio.

### XVII – 43. Sensaciones y estímulos. Ley de Weber. Sonoridad

Los efectos o SENSACIONES que los diversos ESTÍMULOS o excitantes producen en nuestros sentidos quedan determinados por la ley de Erns Heinrich WEBER (1795-1878) y de Gustav Théodore Fechner (1801-1887).

«La variación de una sensación es proporcional a la variación relativa del estímulo». VARIACIÓN RELATIVA, es la variación correspondiente a cada unidad del agente que estimula.

Así, si el estímulo es  $E$  y su variación es  $dE$ , la variación relativa es:  $dE/E$ . En el caso de la percepción sonora, la sensación (apreciación de la fortaleza o debilidad del estímulo) es la SONORIDAD o NIVEL SONORO ( $\beta$ ); el estímulo es la intensidad del sonido. La ley queda interpretada matemáticamente por la fórmula:

$$\beta d\beta = K \frac{dI}{I} \quad (30)$$

Un oído necesita una mínima variación relativa de intensidad para que tal variación sea perceptible.

### XVII – 44. Intensidad de umbral

La mínima cantidad de un excitante capaz de provocar la sensación, es el UMBRAL INICIAL. Existe otro UMBRAL TERMINAL tal que al ser sobrepasado deja de ser recogido el estímulo por los sentidos.

INTENSIDAD UMBRAL INICIAL de un sonido es la mínima intensidad perceptible por el oído del observador.

### XVII – 45. Ley de Weber-Fechner

«La sensación crece con el logaritmo del estímulo».

Aplicado al sonido diremos:

El nivel sonoro crece con el logaritmo de la intensidad, es decir: «cuando la intensidad crece en progresión geométrica, la sonoridad crece en progresión aritmética».

En efecto: integrando la fórmula (30) obtenemos:  $\beta = K \ln I + K'$ . Si la intensidad del sonido es la correspondiente a su umbral ( $I_0$ ) la sensación sonora es cero y por lo tanto:

$$K' = -K \ln I_0 \Rightarrow \beta = K (\ln I - \ln I_0) = K \ln \frac{I}{I_0}$$

pasando a los logaritmos decimales:

$$\beta = C \log \frac{I}{I_0} \quad (31)$$

«Sonidos cuyas intensidades crecen con los números 10, 100, 1 000 producen en nosotros aumentos de sensación sonora que crece con los números 1, 2, 3, ...».

### XVII – 46. Decibel

La unidad adoptada para comparar la intensidad de dos sonidos se denomina BEL (B), y corresponde a considerar  $C = 1$  en la fórmula (31). Es mucho más usado un submúltiplo del bel, el DECIBEL (dB). Si en la expresión (31) hacemos  $C$  igual a 10, tenemos:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

a  $I_0$  se le da el valor de  $10^{-12} \text{ W/m}^2$ , que corresponde aproximadamente a la intensidad umbral del sonido de 1 000 Hz, para un oído normal; el nivel sonoro queda expresado en decibeles.

Si la intensidad  $I$  es 10 veces mayor que la  $I_0$  el logaritmo de su cociente es 1 y  $\beta = 10$  decibeles.

Si  $I = 100 I_0$  el cociente  $I/I_0 = 100$ ,  $\log 100 = 2$ ;  $\beta = 20$  dB.

Un sonido tiene un nivel sonoro de 10, 20, 30 dB, cuando su intensidad es 10, 100, 1 000 veces mayor que la correspondiente al sonido de intensidad  $10^{-12}$  W/m<sup>2</sup>.

La gama de sonoridad perceptible por un oído normal abarca desde los cero decibeles del umbral, pasando por los 10 del murmullo de las hojas en un parque, los 20 de un susurro al oído, o los 70 de un tráfico callejero intenso, hasta llegar a los 120 de un reactor a 100 m de distancia. En 120 decibeles aproximadamente la sensación empieza a ser dolorosa.

**PROBLEMAS: 89 al 95.**

**XVII – 47. Ultrasonidos**

Se llaman ULTRASONIDOS a las vibraciones sonoras que sobrepasan el umbral superior de frecuencias de la audibilidad humana (20 000 Hz).

Se producen, generalmente, aprovechando las propiedades piezoeléctricas del cuarzo. Se obtiene una lámina de «piezocuarzo» a partir de un cristal hexagonal de cuarzo, de forma que las caras mayores de la lámina sean perpendiculares al llamado eje polar. Al someter tal lámina a presiones o tracciones aparecen en sus caras mayores, cargas eléctricas iguales y de signo contrario, originándose una diferencia de potencial (piezoelectricidad). Inversamente, cuando se establece entre las caras del cuarzo piezoeléctrico una diferencia de potencial se originan en él, tracciones o compresiones, con la consiguiente variación del espesor de la lámina.

Para producir ultrasonidos se recubren las caras mayores del peizocuarzo con laminillas metálicas, las cuales se embornan con un generador de corriente alterna de alta frecuencia; el espesor de la lámina experimenta variaciones periódicas de la misma frecuencia que la tensión aplicada, siendo máxima la amplitud de tales oscilaciones para una determinada frecuencia característica del cuarzo vibrante. Las vibraciones de las placas son transmitidas al medio que rodea al aparato originándose en él los ultrasonidos, que pueden llegar a frecuencias de  $5 \times 10^8$  Hz, que corresponden a longitudes de onda de unos  $6 \times 10^{-5}$  cm = 600 mμ (del orden de la luz visible).

Lanzada una señal, tren de ondas, formando un estrecho haz de ultrasonidos, se refleja en los obstáculos que encuentra a su paso y puede ser captada por un receptor adecuado. Tal propiedad se emplea para la determinación de las profundidades oceánicas (conociendo la velocidad y el tiempo transcurrido desde la emisión a la percepción de la señal), para indicar la existencia de submarinos sumergidos, etc. Las comunicaciones entre submarinos se pueden realizar por ultrasonidos ya que la intensidad de las ondas es muy grande comparada con la del sonido (hasta 10 W/cm<sup>2</sup>) y sufren relativamente pequeñas absorciones por parte del agua.

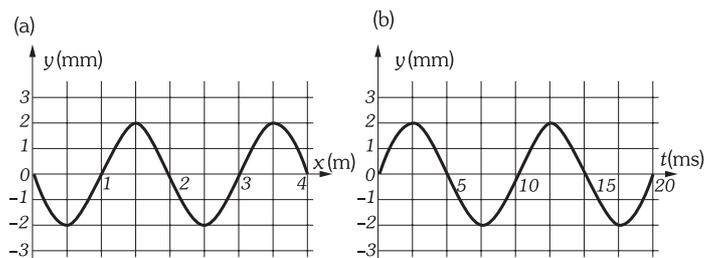
Se emplean, también, para la obtención de emulsiones (emulsiones fotográficas de grano fino), eliminar gases de líquidos (metales fundidos), matar microorganismos (esterilización de agua y leche), ... Su manejo debe realizarse con precaución, por su propiedad de destruir los glóbulos de la sangre.

**PROBLEMAS**

**A) ECUACIÓN DE ONDAS**

1. En  $t = 0$ , un pulso de onda transversal en un alambre se describe por la función:  $y = 10/(x^2 + 5)$ , donde  $x$  e  $y$  están dadas en metros. Determinar la función  $y(x, t)$  que describe esta onda, cuando está viajando en la dirección positiva del eje OX con una velocidad de 2 m/s.
2. El oído humano percibe sonidos cuyas frecuencias están comprendidas entre 20 y 20 000 Hz. Siendo la velocidad de propagación del sonido en el aire 330 m/s (a 0 °C de temperatura), calcula las longitudes de onda de los sonidos extremos.
3. Las ondas emitidas por las emisoras de radio se propagan en el vacío a la velocidad de la luz. 1) Las llamadas «ondas largas» tienen una longitud de onda de 600 a 2 000 m. Calcular las frecuencias extremas en kHz. 2) Las «ondas normales» son emitidas con frecuencias comprendidas entre 500 y 1 500 kHz. Calcular la longitud de onda correspondiente a esta última frecuencia. 3) Las «ondas cortas» tienen longitudes de onda del orden de 10 m; calcular la frecuencia correspondiente. Representar gráficamente las variaciones de la frecuencia con la longitud de onda.
4. La velocidad de propagación de una onda es de 330 m/s, y su frecuencia,  $10^3$  Hz. Calcúlese: 1) La diferencia de fase para dos posiciones de una misma partícula que se presentan en intervalos de tiempo separados  $5 \times 10^{-4}$  s. 2) La diferencia de fase en un determinado instante entre dos partículas que distan entre sí 2,75 cm. 3) La distancia que existe entre dos partículas que se encuentran desfasadas  $120^\circ$ .
5. Sometemos al extremo de una cuerda tensa a vibraciones sinusoidales de 10 Hz. La mínima distancia entre dos puntos cuyas vibraciones tienen una diferencia de fase  $\pi/5$  es de 20 cm, calcular: 1) La longitud de onda. 2) La velocidad de propagación.

6. Determinar la ecuación de una onda armónica que se propaga en el sentido negativo del eje OX con una velocidad de 900 m/s, siendo de 400 Hz su frecuencia y 0,02 m su amplitud. Además, sabemos que para  $x = 0$  y  $t = 0$ , entonces  $\psi = 0,02$  m.
7. Una onda tiene por ecuación:  $\psi(x, t) = 5 \text{ sen } \pi(4x - 20t + 0,25)$ , expresada en el sistema CGS. Determinar la amplitud, la frecuencia, la longitud de onda, el número de ondas, la frecuencia angular, la fase inicial y la velocidad de propagación.
8. Una onda armónica transversal se propaga en el sentido positivo del eje OX y tiene las siguientes características: amplitud, 3 cm; longitud de onda, 2 cm; velocidad de propagación, 2 m/s; la elongación del punto  $x = 0$  en el instante  $t = 0$  es de 3 cm. 1) Determinar la ecuación de la onda. 2) Dibujar el perfil de la onda en  $t = 0,01$  s. Indicar un punto en el que sea máxima la velocidad de movimiento y otro en el que sea máxima la aceleración.
9. Por una cuerda tensa a lo largo del eje OX se propaga, en el sentido positivo de dicho eje, una onda transversal armónica. En la figura (a) se muestra el perfil de la onda en  $t = 0$ , y en la figura (b) se representa, en función del tiempo, el desplazamiento transversal del punto de la cuerda situado en  $x = 0$ . 1) Determinar las siguientes magnitudes de la onda: amplitud, longitud de onda y velocidad de propagación. 2) Escribir la ecuación de la onda.
10. Provocamos en una cuerda tensa una onda armónica transversal de 0,2 m de longitud de onda, y que se propaga de izquierda a derecha con una velocidad de 10 m/s. En el origen  $\psi(0, 0) = 0,5 \times 10^{-2}$  m y moviéndose hacia abajo. Si el módulo de la velocidad máxima de cualquier partícula de la cuerda es 3,14 m/s, determinar la ecuación de la onda.



Problema XVII-9.

**11.** Sometemos al extremo de una cuerda a un vibrador que le produce una onda sinusoidal. Si la ecuación de la vibración en el sistema CGS es:  $\psi = 5 \text{ sen } 0,2\pi t$ , propagándose en la cuerda con una velocidad de  $10 \text{ cm/s}$ . Determinése la ecuación de la onda producida, y la diferencia de fase entre las oscilaciones de dos puntos separados  $125 \text{ cm}$ .

**12.** Las ecuaciones de dos ondas escritas en el sistema CGS vienen dadas por:  $\psi_1(x, t) = 4 \text{ sen } 2\pi(4t - 0,5x)$  y  $\psi_2(x, t) = 6 \text{ sen}(4\pi x - 5\pi t)$ ; calcular en cada caso: 1) Velocidad en función del tiempo, de un punto situado a  $10 \text{ cm}$  del origen. 2) Velocidad máxima de ese punto. 3) Velocidad de fase. 4) ¿En qué instante alcanza su velocidad máxima un punto situado a  $1,5 \text{ m}$  del origen. 5) Posición de los puntos que tienen velocidad máxima en  $t = 0$ .

**13.** Un foco puntual vibra según la ecuación  $\psi(t) = 0,3 \text{ cos } 40\pi t$  (SI) y la onda resultante se propaga en la dirección positiva del eje OX con velocidad de fase de  $25 \text{ m/s}$ . Determinar la elongación de una partícula situada a  $12 \text{ m}$  del foco: 1) A los  $5 \text{ s}$  de empezar a oscilar el foco. 2) A los  $5 \text{ s}$  de empezar a vibrar la propia partícula.

**14.** Sometemos al extremo de una cuerda tensa a un vibrador que le produce vibraciones sinusoidales. Por este efecto se propaga por la cuerda una onda transversal que tiene por ecuación:  $\psi(x, t) = 10 \times \text{sen } \pi(1,6x - 0,8t)$ , expresada en el sistema CGS. 1) ¿Qué condiciones iniciales nos determinan esta ecuación de onda? 2) Determinése para esta onda su amplitud, velocidad de propagación y longitud de onda. 3) Tiempo que tarda en comenzar a vibrar una partícula de la cuerda situada a  $10 \text{ cm}$  del extremo en que se encuentra el vibrador y ecuaciones horarias del movimiento de ella [ $\psi(t)$ ,  $v(t)$ ,  $a(t)$ ] una vez transcurrido éste. 4) Dibujar la forma que tiene la cuerda [ $\psi(x)$ ] cuando han transcurrido  $5,625 \text{ s}$  del comienzo de la vibración (perfil de la onda).

**15.** Calcular la velocidad de propagación de las ondas trasversales en un alambre de  $2 \text{ m}$  de largo que pesa  $7 \text{ g}$  cuando en uno de sus extremos se le cuelga una pesa de  $2 \text{ kg}$ .

**16.** A un alambre de acero (Módulo de Young:  $E = 2,0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ , densidad del acero:  $\rho = 7,8 \text{ g/cm}^3$ ) que tiene un diámetro de  $1 \text{ mm}$  y  $4 \text{ m}$  de longitud, lo colgamos del techo, calcular: 1) El alargamiento del alambre cuando de su extremo libre colgamos un peso de  $150 \text{ kg}$ . 2) La velocidad de propagación de las ondas longitudinales y trasversales a lo largo del alambre cuando el cuerpo está suspendido.

**17.** Determinar la velocidad del sonido en el agua (ondas longitudinales), sabiendo que actuando  $1 \text{ atm}$  de presión sobre un volumen de agua disminuye su volumen en  $50$  millonésimas del que tenía.

**18.** Un rollo de alambre de cobre, de  $1 \text{ kg}$  de peso en el aire, pesa en el seno del agua  $886 \text{ g}$ . De tal alambre tomamos  $1 \text{ m}$  y  $224 \text{ mm}$  y hacemos pender un peso de  $10 \text{ kg}$ , observando un alargamiento de  $1 \text{ mm}$ . El alambre tiene de sección  $1 \text{ mm}^2$ . Calcular la velocidad de propagación de las ondas longitudinales en el cobre.

**19.** Calcular la velocidad de propagación de una onda longitudinal de compresión (sonora) en el helio a  $0^\circ \text{C}$  y  $1 \text{ atm}$  de presión si su densidad en estas condiciones es  $1,79 \times 10^{-4} \text{ g/cm}^3$  y, por ser monoatómico, el coeficiente de las adiabáticas es  $\gamma = 5/3$ .

**20.** A un resorte cuya masa es  $200 \text{ g}$  y cuya longitud natural cuando está colgado de un punto fijo es  $4 \text{ m}$ , se le pone una masa de  $100 \text{ g}$  unida a su extremo libre. Cuando esta masa se encuentra en equilibrio, la longitud del resorte es  $4,05 \text{ m}$ . Determinar la velocidad de propagación de las ondas longitudinales en el resorte.

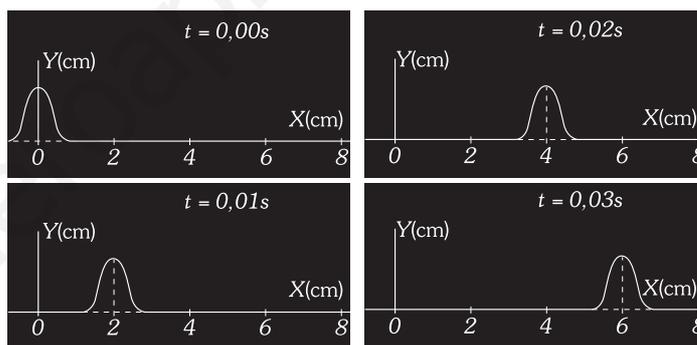
**21.** La velocidad de las ondas superficiales en el agua, siempre que la longitud de onda sea menor que la profundidad, es:  $c = \sqrt{g\lambda/2\pi + 2\pi\sigma/\lambda\rho}$ . Sabemos que si  $\lambda > 10 \text{ cm}$ , el término  $2\pi\sigma/\lambda\rho$  es despreciable, y que si  $\lambda < 10 \text{ cm}$ , entonces el término despreciable es  $g\lambda/2\pi$ . DATOS:  $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ ,  $\sigma = 75 \text{ dyn/cm}$ . 1) Calcular la velocidad de

unas ondas superficiales en el agua, de las que a simple vista se observa que su longitud de onda es bastante mayor de  $10 \text{ cm}$  y que un trozo de madera que flota en la superficie realiza  $120$  oscilaciones completas en un minuto. 2) Tomamos una fotografía de las aguas «rizadas» de un lago y observamos en ella que entre dos puntos a distancia real de  $1 \text{ m}$  hay  $20$  «rizos» completos. Calcular la velocidad de propagación de tales rizos. 3) Demostrar que la mínima velocidad de las ondas superficiales del agua, cuando  $\lambda$  es próximo a  $10 \text{ cm}$ , tiene por valor  $23 \text{ cm/s}$ .

**22.** Demostrar que en un sólido las ondas longitudinales viajan a mayor velocidad que las trasversales.

**23.** Una cuerda de masa  $M$  y longitud  $l$  cuelga del techo de una habitación. 1) Probar que la velocidad de un pulso transversal en función de la posición cuando se propaga a lo largo de ella es  $c = \sqrt{gx}$ , siendo  $x$  la distancia al extremo libre. 2) Probar que un pulso transversal recorrerá la cuerda en un tiempo  $2\sqrt{l/g}$ .

**24.** De las funciones que se presentan a continuación, sólo dos pueden representar ecuaciones de onda, de ondas unidimensionales que se propagan en el eje OX:  $y_1(x, t) = 5 \times 10^{-2}/[0,25 + (x - 2t)^2]$ ,  $y_2(x, t) = 5 \times 10^{-2}/[0,25 + (x^2 + 4t^2 - 2t)]$ ,  $y_3(x, t) = 5 \times 10^{-2}/[0,25 + (2x + t)^2]$ . 1) Decir cuáles de las funciones:  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$  son funciones de onda y justificar la contestación. 2) ¿Cuáles son las velocidades de propagación de dichas ondas? 3) En la figura se representan varias «fotografías» de una cuerda tensa, en la cual se está propagando una onda que corresponde a una de las dos anteriores. Las «fotografías» corresponden a instantes separados  $0,01 \text{ s}$ . ¿A cuál de las ondas corresponden las «fotos»? 4) ¿Podrían las dos ondas propagarse por la misma cuerda, si ésta está sometida a la misma tensión?



Problema XVII-24.

**25.** En un alambre largo de densidad lineal  $3 \times 10^{-2} \text{ kg/m}$  mantenido a una tensión de  $3 \text{ kp}$  provocamos una onda armónica transversal de  $0,5 \text{ cm}$  de amplitud y  $150 \text{ Hz}$  de frecuencia. Suponiendo que la onda se mueve en el sentido positivo del eje OX y en el origen se verifica  $\psi(0, 0) = 0,25 \text{ cm}$  y  $v(0, 0) < 0$ , calcular: 1) La ecuación de la onda. 2) Encontrar las ecuaciones de la velocidad y de la aceleración de una partícula del alambre que esté situada a  $1 \text{ m}$  del origen.

**26.** Por una cuerda tensada con una fuerza de  $100 \text{ N}$  y que tiene una densidad lineal de  $100 \text{ g/m}$ , se propaga una onda transversal armónica tal que  $y(0, 0) = 0$ . Un punto cualquiera de ella tiene velocidades de  $15$  y  $10 \text{ cm/s}$  cuando se encuentra separado de su posición de equilibrio  $2,8$  y  $3,2 \text{ cm}$  respectivamente. Determinar la ecuación de la onda que se propaga por la cuerda.

**27.** Demostrar que la ecuación de una onda:  $\psi(x, t) = \psi_0 \text{ cos}(kx - \omega t + \varphi)$  cumple con la ecuación de ondas.

**28.** Una onda armónica plana se propaga en el sentido del vector  $\mathbf{v}(3, 2, 2\sqrt{3})$  con una frecuencia de  $50 \text{ Hz}$  y una velocidad de  $340 \text{ m/s}$ . Si su amplitud es de  $5 \text{ mm}$  y su fase inicial nula, obtener la ecuación de dicha onda.

**29.** Obtener una expresión de la ecuación de onda para ondas esféricas que relacione las variaciones  $\psi$  con  $t$  y con  $r$ , siendo  $r$  la distancia al foco.

**30.** Demostrar que una onda descrita por la ecuación:  $\psi(r, t) = r^{-1}f(\omega t - kr)$  en la que la amplitud es inversamente proporcional a la distancia  $r$  al foco, verifica la ecuación de ondas obtenida en el problema anterior para ondas esféricas.

**B) ENERGÍA E INTENSIDAD DE LAS ONDAS**

31. Calcular la energía que posee una molécula de agua (masa molecular del agua: 18,015 g/mol; Número de Avogadro:  $6,023 \times 10^{23}$ ) cuando a ella llega una onda armónica de  $10^3$  Hz y vibra con una amplitud de 0,01 mm.

32. Por un largo alambre homogéneo, de densidad lineal 10 g/m, tensado por una fuerza de 10 N, se propaga una onda transversal armónica de longitud de onda 5 cm y 2,5 cm de amplitud. Determinar la energía por unidad de longitud que posee tal alambre.

33. Una onda esférica que se transmite en un medio homogéneo e isotrópico está emitida por una fuente de 5 W. Calcular la intensidad de la onda a 3 m del foco emisor.

34. Una onda sonora se propaga en el aire a 340 m/s, tiene una frecuencia de  $10^3$  Hz y su intensidad es de  $10^{-4}$  W/cm<sup>2</sup>; si la densidad del aire es  $1,3 \times 10^{-3}$  g/cm<sup>3</sup>, calcúlese la amplitud del desplazamiento en ese instante.

35. Una barra de acero de radio 2 cm y densidad  $7,8 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup> transmite ondas longitudinales producidas por un oscilador acoplado en uno de sus extremos. Siendo la amplitud de las oscilaciones de  $10^{-4}$  cm, la frecuencia de la excitación de 10 Hz y el módulo de Young  $2 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>, determinar: 1) La ecuación de la onda que se propaga a lo largo de la barra. 2) La energía de la oscilación por unidad de volumen. 3) La intensidad a través de la sección de la barra y la potencia suministrada por el oscilador que produce la onda.

36. Un parámetro que tiene un gran interés físico en el estudio de absorción de ondas es el llamado «ESPESOR DE SEMIABSORCIÓN» ( $D$ ) y se define como: «el espesor que ha de tener un medio absorbente para que la intensidad inicial quede reducida a la mitad». Determinar éste en función del coeficiente de absorción.

37. El coeficiente de absorción de un medio para el sonido es de  $230 \text{ m}^{-1}$ . Determinar el espesor de una lámina de dicha sustancia que reduce la intensidad a la décima parte de la que incide sobre ella.

38. Una onda plana reduce su intensidad en un 30% al atravesar 5 cm de un material. Determinar la distancia que tendrá que recorrer la onda en dicho material para que su intensidad se reduzca a la mitad (espesor de semiabsorción).

39. Una onda plana reduce su intensidad al 10% al atravesar dos capas aislantes. La primera de ellas, que tiene un coeficiente de absorción  $\gamma_1 = 230 \text{ m}^{-1}$ , reduce a la mitad la intensidad incidente; si la segunda tiene un coeficiente de absorción  $\gamma_2 = 170 \text{ m}^{-1}$ , calcular el espesor total de las capas aislantes.

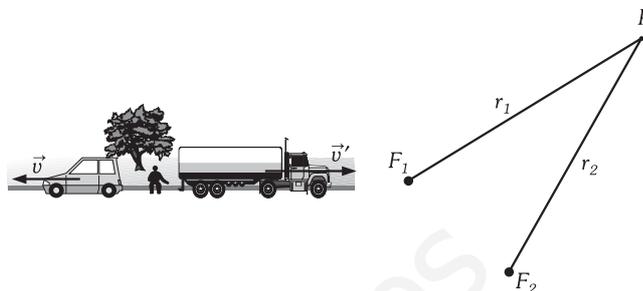
40. Una onda sonora plana cuya intensidad es  $10^{-3}$  W/m<sup>2</sup> reduce su amplitud en un 80% a la salida de un medio absorbente de 4 cm de espesor. Determinar el coeficiente de absorción del medio absorbente.

**C) EFECTO DOPPLER**

41. Dos individuos viajan en dos trenes A y B que llevan respectivamente velocidades de 60 y 50 km/h. Los silbatos de las locomotoras emiten el mismo sonido de 600 Hz. Calcular: 1) Sonido percibido por el viajero del tren A que está en reposo y el silbato de su locomotora en silencio, cuando se acerca a él el tren B, funcionando su silbato. 2) Sonido percibido por el viajero del tren B que está en reposo y el silbato de su locomotora en silencio, cuando se acerca a él el tren A, funcionando su silbato. 3) Sonido percibido por el viajero del tren A en marcha hacia el B, que está en reposo. Funciona el silbato de B. 4) Sonido percibido por el viajero del tren B en marcha hacia el A, que está en reposo. Funciona el silbato de A. 5) Sonido percibido por el viajero de A cuando marchan los dos trenes en sentido contrario, acercándose entre sí. Funciona el silbato de B. 6) Sonido percibido por el viajero de A cuando marchan los dos trenes en sentido contrario, alejándose entre sí. Funciona el silbato de B. 7) Sonido percibido por el viajero de A cuando marchan los dos trenes en el mismo sentido, el B tras el A. Funciona el silbato de B. 8) Sonido percibido por el viajero de B cuando marchan los dos trenes en el mismo sentido, el B tras el A. Funciona el silbato de A. Se supone que la velocidad de propagación del sonido es 340 m/s.

42. Un automóvil se mueve hacia la izquierda con una velocidad  $v = 30$  m/s. En dirección contraria (rebasado suficientemente el punto de cruce) va un camión a una velocidad  $v' = 21$  m/s, con una gran superficie reflectora en su parte posterior. El automóvil emite un bocinazo (emisión instantánea) con una frecuencia de 1 000 Hz. Determinar: 1) ¿Cuál es la frecuencia de las ondas percibidas por el observador de la

figura colocado a la derecha del coche? 2) ¿Cuál es la frecuencia de las ondas que llegan a la superficie reflectora del camión? 3) ¿Cuál es la frecuencia de las ondas que percibirá el observador después que las ondas se han reflejado en el camión? 4) ¿Cuál es la frecuencia de las ondas que percibirá el conductor del coche, después de la reflexión en el camión? Velocidad del sonido: 330 m/s. Se supone el aire en calma.



Problema XVII-42.

Problema XVII-48 y 49.

43. Una estrella se aleja de la Tierra con una velocidad  $v$ , al observar su espectro se obtiene para la longitud de onda de la raya correspondiente al hidrógeno  $656,64 \text{ nm}$ ; si la medida hecha para dicha raya en el laboratorio es  $656,28 \text{ nm}$ , determinar  $v$ .

44. Una sirena de 420 Hz gira atada al extremo de una cuerda de 2 m de longitud a razón de 300 r.p.m. ¿Qué intervalo de frecuencias percibe un observador situado en el plano de rotación de la sirena y alejado de ésta? Tomar para velocidad del sonido en el aire 340 m/s.

45. Una sirena que emite con una frecuencia  $\nu$  sube verticalmente hacia arriba, partiendo del suelo y a una velocidad constante  $v$ . El punto de partida de la sirena está a una distancia  $d$  de un observador. 1) Supuesto el observador parado, calcular en función de los datos la frecuencia que percibirá el observador después de transcurridos  $t$  segundos. 2) Supuesto que el observador se aleja del punto de partida a una velocidad  $v'$ , y que parte del punto a esa distancia  $d$ , en el mismo instante que la sirena. Calcular en función de los datos la frecuencia que percibirá el observador, después de transcurridos  $t$  segundos.

46. Un hombre se encuentra en lo alto de una torre de altura  $h$ . A una distancia  $d$  del pie de ésta, un automóvil que se dirige hacia ella con una velocidad  $v$  emite un bocinazo con una frecuencia  $\nu$ . El aire se mueve con una velocidad  $v'$  y en dirección contraria al coche. Calcular en función de estos datos la frecuencia percibida por el hombre de la torre. (Velocidad del sonido:  $c$ ).

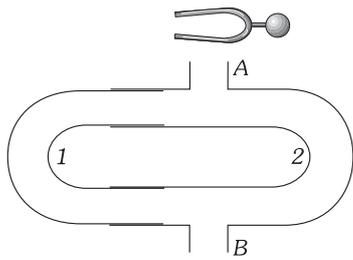
**D) SUPERPOSICIÓN DE ONDAS. INTERFERENCIAS**

47. Dos ondas armónicas de igual frecuencia y amplitud:  $\nu = 50$  Hz,  $\psi_0 = 2$  cm, viajan a la velocidad de 1 m/s y en sentido positivo del eje OX, existiendo entre ellas una diferencia de fase de  $\pi/3$ . Deducir la ecuación de la onda resultante de la interferencia entre las dos, y las ecuaciones horarias del movimiento de una partícula que se encuentra a 20 cm del origen y sobre el eje OX.

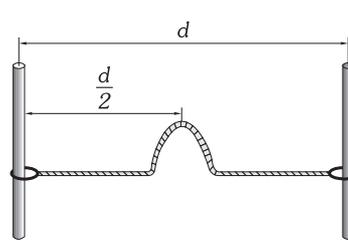
48. A un punto P llegan dos ondas armónicas que viajan a 1 m/s procedentes de dos focos coherentes que distan 7,5 cm y 5,5 cm del punto P (ver figura); ambas ondas tienen la misma frecuencia, 60 Hz, y la misma amplitud, 2 cm. Determinése la ecuación del movimiento vibratorio del punto P.

49. En la figura,  $F_1$  y  $F_2$  representan dos focos emisores de ondas armónicas coherentes de un sonido de 100 Hz. En P se coloca un aparato registrador de sonido; las distancias  $r_1$  y  $r_2$  son 103,4 y 100 m; la velocidad de propagación del sonido en el aire es 340 m/s. ¿Registrará sonido el aparato colocado en P?

50. El aparato de Quincke consta de dos tubos en U, pudiéndose deslizar las ramas de uno de ellos dentro de las ramas del otro. En las proximidades de la ramificación A se produce un sonido que se escucha poniendo el oído en B. Deslizando el tubo 1 dentro del 2, se encuentran posiciones en las que no se percibe sonido; ¿por qué? Si el desplazamiento lateral que hay que dar al tubo 1, desde que no se percibe sonido hasta que, de nuevo, se deja de percibir, es de 25 cm, ¿cuáles son la longitud de onda, la frecuencia y el período de las ondas sonoras? Velocidad de propagación del sonido en el aire, 340 m/s.



Problema XVII-50.



Problema XVII-65.

**51.** Dos ondas que se mueven en la misma dirección y cuyas ecuaciones escritas en el sistema CGS son:  $\psi_1 = 5 \sin(1000t - 100x)$ ,  $\psi_2 = 5 \sin(1000t + 100x)$  al interferir producen «ondas estacionarias». Determinar: 1) La ecuación de la onda resultante. 2) La amplitud en los vientres. 3) Distancia entre dos nodos consecutivos.

**52.** Por un medio se propagan dos ondas transversales, en la misma dirección, vibrando en el plano XOY y dadas por:  $y_1 = A \sin(\omega t + kx)$ ,  $y_2 = A \sin(\omega t - kx + \varphi)$ . 1) Comprobar que la superposición de ambas da lugar a una onda estacionaria. 2) Si en  $x = 0$  ha de haber un nodo de la onda estacionaria, comprobar que el valor de  $\varphi$  debe ser  $\pi$ . 3) Calcular la velocidad de un punto del medio cuya distancia al origen sea  $1/4$  de la longitud de onda.

**53.** Una cuerda vibra de acuerdo con la ecuación escrita en el sistema CGS:  $\psi = 20 \sin 50x \cos 400t$ . Calcular: 1) Las ecuaciones de las ondas armónicas cuya interferencia puede dar dicha onda. 2) Distancia entre dos nodos consecutivos.

**54.** La ecuación de la onda que se propaga en una cuerda viene dada en el sistema CGS:  $\psi = 6 \sin(\pi x/3) \sin 40\pi t$ . Calcular: 1) Las ecuaciones de las ondas armónicas cuya interferencia puede dar dicha onda. 2) La velocidad de un punto de la cuerda situado a  $x = 1$  cm cuando  $t = 1/10$  s.

**55.** En la interferencia de dos ondas armónicas con vibraciones paralelas, teniendo ambas la frecuencia de 100 Hz, sabemos que para  $t = 0$  la elongación y velocidad resultantes en cualquier punto vienen dadas, escritas en el sistema CGS, respectivamente por:  $\psi_0 = 0,05(\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x)$  y  $v_0 = -10\pi(\sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x)$ . Calcular la ecuación de la onda interferencia de las dos.

**56.** Dos ondas armónicas de igual frecuencia:  $\nu = 50$  Hz y amplitudes:  $\psi_{01} = 2$  cm y  $\psi_{02} = 3$  cm, viajan a la velocidad de 1 m/s y en el sentido positivo del eje OX. En el origen ( $x = 0$ ,  $t = 0$ ), para la primera  $\psi_1 = 1$  cm y  $v_1 < 0$  y para la segunda  $\psi_2 = 3\sqrt{3}/2$  y  $v_2 < 0$ . Deducir la ecuación de la onda resultante de la interferencia entre las dos.

**57.** Dos ondas armónicas de amplitudes 2 y 4 cm viajan en la misma dirección y tienen idéntica frecuencia; si su diferencia de fase es  $\pi/4$ , calcúlese la amplitud de la onda resultante.

**58.** Dos focos puntuales F y F', separados entre sí 1 m, emiten en fase sonidos de 500 Hz de frecuencia con la misma intensidad. 1) Obtener la posición de los puntos, si los hay, en los que no se registra sonido. 2) Obtener la posición de los máximos y mínimos de intensidad que se registran a lo largo del segmento FF'. ( $c = 340$  m/s).

**59.** La potencia emisora de dos silbatos es  $4\pi \times 10^{-2}$  y  $16\pi \times 10^{-2}$  W. Ambos emiten un sonido regularmente en todas las direcciones, cuya frecuencia es 850 Hz. Un punto A está situado a 10 m del primero y 20 del segundo. Siendo la velocidad de propagación del sonido en el aire 340 m/s. Determinar: 1) Las intensidades en el punto A provocadas independientemente por cada uno de los sonidos. 2) La producida cuando actúan los dos silbatos a la vez. 3) ¿Cuánto tendríamos que modificar la distancia del primer emisor, permaneciendo constante la del segundo, para percibir en A un mínimo de intensidad?

**60.** Un coche patrulla de la policía está parado en una recta de una autopista. Lleva instalado un radar que emite ondas electromagnéticas ( $c = 3 \times 10^8$  m/s) de 10 cm de longitud de onda. Éstas se reflejan en un coche que avanza incauto hacia la patrulla. La interferencia entre las ondas emitida y reflejada produce en el receptor policial pulsaciones de 1 300 Hz de frecuencia. Suponiendo que la infracción por exceso de velocidad se penalice con 12 € por cada km/h que sobrepase los 120, calcular la cuantía de la multa que se le avecina al alocado conductor.

## E) REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN

**61.** Un micrófono y un altavoz, que supondremos puntuales se sumergen a una profundidad de 20 m en un lago, separados por una distancia horizontal de 100 m. El altavoz emite un sonido puro de 500 Hz de frecuencia. Si ambos son izados lentamente a la vez, calcular la diferencia de profundidades a las que el micrófono registra dos máximos de intensidad consecutivos. En el agua, a la temperatura de la experiencia, la velocidad del sonido es de 1 500 m/s.

**62.** Una onda electromagnética está definida por la ecuación  $E = 3 \times 10^{-4} \sin(5 \times 10^{10}t - 200x)$ . Determinar el índice de refracción absoluto del medio en que se propaga. (Se llama ÍNDICE DE REFRACCIÓN ABSOLUTO para ondas electromagnéticas o simplemente índice de refracción, al cociente entre la velocidad de la onda electromagnética en el vacío [ $c_0 = 3 \times 10^8$  m/s] y la velocidad de ésta en el medio.)

**63.** Una onda de frecuencia 4 Hz se propaga por un medio con velocidad  $c_1 = 2$  m/s e incide en la superficie de separación con otro medio diferente con un ángulo de incidencia  $\varepsilon_1 = 30^\circ$ . En el segundo medio la velocidad de propagación de la onda es  $c_2 = 2,5$  m/s. Calcular: 1) El ángulo de refracción. 2) El ángulo límite.

**64.** El diamante tiene un índice de refracción  $n_d = 2,5$  y la velocidad de propagación de la luz en el agua es  $c_a = 225 563$  km/s, suponiendo que la velocidad de propagación de la luz en el aire, en donde se encuentran el diamante y el agua, es aproximadamente igual a la velocidad de propagación en el vacío ( $c_0 = 3 \times 10^8$  m/s), calcular: 1) La velocidad de la luz en el diamante y su ángulo límite. 2) El índice de refracción del agua y su ángulo límite.

**65.** Entre dos barras paralelas se mantiene tensa una cuerda mediante dos anillos, como se indica en la figura. Se perturba la cuerda partiendo de un desplazamiento inicial como el indicado en la figura (muy exagerado en la misma). La longitud de la cuerda es  $d$  y la velocidad de propagación de las ondas transversales en dicha cuerda es  $c$ . Cuánto tiempo transcurrirá hasta que la cuerda alcance un estado igual al representado si: 1) Los anillos pueden moverse libremente a lo largo de las barras. 2) Un anillo está fijo. 3) Están fijos los dos anillos.

**66.** Cuando una onda incide en la superficie de separación de dos medios de distinta densidad, da origen a una onda reflejada y otra transmitida. Comprobar que en este fenómeno se conserva la energía.

**67.** Una cuerda cilíndrica tiene dos partes, de diámetros diferentes,  $d_1 = 2d_2$ , y la misma densidad  $\rho$ . Por ella se propaga una onda transversal armónica de 6 cm de amplitud, desde el lado grueso hacia el fino. Puesto que en la discontinuidad se produce reflexión y transmisión, calcular: 1) Los coeficientes de reflexión y refracción. 2) El porcentaje de la energía incidente que se refleja. 3) La amplitud de la onda transmitida.

## F) PROPAGACIÓN DEL SONIDO. CUALIDADES. MÚSICA

**68.** Calcular los límites mínimo y máximo de la longitud de onda de los sonidos audibles. Se supone la velocidad de propagación del sonido 340 m/s, siendo la temperatura de 20 °C.

**69.** Calcular la temperatura que sería necesaria para que la velocidad del sonido en el aire fuese doble que a 0 °C. (Se supone constante la presión;  $\alpha = 1/273,16$  °C<sup>-1</sup>.)

**70.** Calcular la distancia a que se ha producido un relámpago cuando se oye un trueno 5 s más tarde que la percepción de aquél. La temperatura es de 30 °C.

**71.** La velocidad del sonido en el agua a 15 °C es de 1 450 m/s. Calcular la disminución relativa de volumen que experimenta una masa de agua al someterla a una presión manométrica de 50 atmósferas.

**72.** La velocidad de propagación del sonido en un gas viene dada por la expresión:  $c = \sqrt{1,4RT/M}$  en donde  $R =$  constante de los gases ideales,  $T =$  temperatura absoluta y  $M =$  masa molar. 1) ¿Qué tanto por ciento de vapor de agua tendrá una mezcla de vapor de agua + aire en la cual se propaga el sonido con la misma velocidad que en el nitrógeno? 2) ¿Cuánto valdría esta velocidad a 100 °C? 3) ¿Qué error se cometería si se considerase en su lugar el valor de 340 m/s o valor normal de la velocidad del sonido en el aire a 20 °C? DATOS: Masa molar del agua: 18 g/mol; Masa molar aparente del aire: 28,8 g/mol; Masa molar del nitrógeno: 28 g/mol.

**73.** Una sala de 10 × 20 m de suelo y 4 m de altura tiene un coeficiente de absorción promedio de 0,08. 1) Calcular el tiempo de reverberación. 2) Si se cubre el suelo con una alfombra de coeficiente de absorción 0,04. Calcular el nuevo tiempo de reverberación.

74. Una sala tiene un tiempo de reverberación de 3 s. Se construyen en el suelo unos bancos, del mismo material que el resto de la sala, que disminuyen el volumen en un 2% y aumentan la superficie total en un 15%. Calcular el nuevo tiempo de reverberación.

75. Calcular la longitud de onda de  $\lambda_3$  en el aire a  $0^\circ\text{C}$  (velocidad de propagación del sonido = 330 m/s) y a  $20^\circ\text{C}$  ( $c = 340$  m/s).

76. Teniendo en cuenta que la frecuencia del  $\lambda_3$  es de 440 Hz, determinar la frecuencia de la nota *do* de las cinco primeras escalas.

77. Determinar qué nota es la que tiene por tono 950,4 Hz.

### G) INSTRUMENTOS MUSICALES

78. Calcular la frecuencia del sonido fundamental emitido por una cuerda de 1 m de longitud y 1 mm de diámetro, cuya densidad es  $2\text{ g/cm}^3$  y está tensa por un peso de 9 231,6 g.

79. Una cuerda está estirada por un peso de 1 kp. Calcular el peso que debe tensar a otra cuerda de la misma sustancia, la misma longitud y doble radio para que emita la octava aguda de la que produce la primera. Se supone que ambas emiten el sonido fundamental.

80. Una cuerda de 1 m de larga, fija por sus dos extremos vibra en su tercer armónico. La amplitud de vibración de un vientre es 3 mm. La velocidad de las ondas transversales en esta cuerda es de 100 m/s. Escribir la ecuación correspondiente a esta onda.

81. Se observa que una cuerda tensa vibra con una frecuencia de 30 Hz en su modo fundamental cuando sus extremos, fijos, están separados una distancia de 60 cm. La amplitud del antinodo (vientre) es de 3 cm. Determinar: 1) La ecuación de onda de la onda estacionaria que tiene lugar en las condiciones descritas. 2) La velocidad de propagación de una onda transversal en dicha cuerda. 3) La velocidad máxima del punto medio de la cuerda.

82. Una cuerda de guitarra, de longitud  $L = 1$  m, vibra estacionariamente en su modo fundamental con una amplitud en el punto medio de 3 mm. La velocidad de propagación de las ondas en esta cuerda es 880 m/s. Determinar la ecuación de la onda. Tomar el origen para la posición en un extremo de la cuerda, y para el tiempo en el instante de máximo desplazamiento transversal de los puntos de la cuerda.

83. El movimiento de una cuerda tensa de 1 m de longitud, con sus extremos fijos, corresponde a una onda estacionaria dada por la ecuación escrita en el si:  $\psi(x,t) = 10^{-2} \text{ sen } 3\pi x \text{ cos } \omega t$ , si la velocidad de propagación de estas ondas es de 10 m/s. Determinar: 1) Su longitud de onda. 2) El número de nodos de la onda estacionaria. 3) Completar su ecuación calculando  $\omega$ .

84. Calcular la frecuencia de los sonidos emitidos por un tubo abierto y otro cerrado de 1 m de longitud, produciendo el sonido fundamental. Se supone que la velocidad del sonido en el aire es 340 m/s.

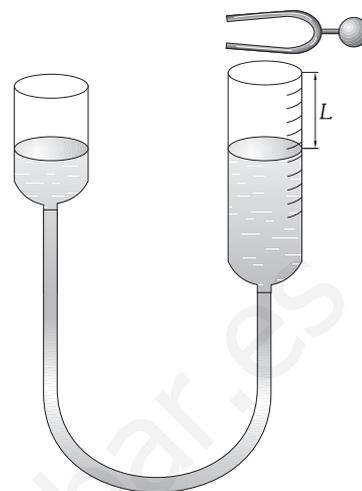
85. Calcular la longitud de un tubo abierto que lleno de aire y a  $0^\circ\text{C}$  ( $c = 330$  m/s) emite como sonido fundamental el  $\text{do}_3$ .

86. En la experiencia de la figura el diapásón emite el  $\lambda_3$ . La longitud  $L$  del tubo que produce la resonancia es 19 cm. ¿Qué velocidad de propagación tiene el sonido? ¿A qué temperatura está el ambiente durante la experiencia? DATOS: Frecuencia del  $\lambda_3$ : 440 Hz. Velocidad del sonido en el aire a  $0^\circ\text{C}$ : 330 m/s.

87. Un tubo de 1 m de largo está cerrado por uno de sus extremos. Un alambre estirado se coloca cerca del extremo abierto. El alambre tiene 0,3 m de largo y una masa de 0,01 kg. Se sostiene fijo en sus dos extremos y vibra en su modo fundamental. Pone a vibrar a la columna de aire en el tubo con su frecuencia fundamental por resonancia. Encontrar: 1) La frecuencia de oscilación de la columna de aire. 2) La tensión del alambre. Velocidad del sonido en el aire, 340 m/s.

88. Deseamos conocer el módulo de Young ( $E$ ) de un metal. Tallamos una varilla y la colocamos como vibrador de un tubo de Kundt. Co-

nocemos: la longitud de la varilla del metal ( $L$ ), la distancia entre nodo y nodo en el aire del tubo ( $L'$ ), la densidad del metal ( $\rho$ ), la temperatura del ambiente ( $t$ ), la velocidad del sonido en el aire a  $0^\circ\text{C}$  (330 m/s) y el coeficiente de dilatación de los gases ( $1/273,16^\circ\text{C}^{-1}$ ). Determinar la fórmula de  $E$ , en función de los datos del problema.



Problema XVII-86.

### H) PERCEPCIÓN DEL SONIDO

89. Calcular en decibeles la sonoridad del sonido percibido en las proximidades de una persona hablando en voz baja (la intensidad es 100 veces mayor que la intensidad umbral).

90. Determinar el nivel sonoro en los diversos casos del problema 59.

91. La bocina de un coche se oye hasta una distancia de 1 km. 1) Calcular la sensación sonora a 100 m. 2) Calcular el número de bocinas iguales que habría que juntar para que a 100 m la sensación sonora fuera 60 dB.

92. A 10 m de distancia la sonoridad de una sirena de un barco es de 60 dB y el valor umbral de la intensidad para su frecuencia es de  $10^{-12}\text{ W/m}^2$ . Calcular: 1) La sonoridad a 1 km de distancia. 2) Distancia a la que la sirena deja de ser audible.

93. El nivel sonoro de una persona en las proximidades de nuestro oído es 80 dB. Calcular el número de personas que serían necesarias para que gritando en las proximidades de una lámpara de incandescencia de 100 W de consumo la mantuviesen encendida, suponiendo que toda la energía acústica, que atraviesa en 1 s a  $1\text{ m}^2$ , fuese transformada adecuadamente en energía eléctrica. (Potencia del sonido umbral:  $10^{-12}\text{ W/m}^2$ .)

94. En un campo de fútbol hay 10 000 espectadores que gritan, en un momento de emoción, la palabra «gol». Si emplean 2 s en un grito y la sonoridad a la misma distancia de cada emisor es 80 dB, determinar la energía transmitida por el aire a través de  $1\text{ cm}^2$ . (Potencia del sonido umbral:  $10^{-12}\text{ W/m}^2$ .)

95. Un foco sonoro emite un sonido de 500 Hz tal que la sonoridad a 1 m del foco es de 60 dB. Siendo la densidad del aire en las condiciones de la experiencia de  $1,27\text{ kg/m}^3$  y la velocidad del sonido de 340 m/s, calcular: 1) La impedancia acústica del aire. 2) La potencia sonora emitida por el foco. 3) El aumento máximo de presión en un punto a 2 m del foco. 4) La amplitud de la oscilación de las moléculas a 2 m del foco.

## A) PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LA ELECTROSTÁTICA

## XVIII – 1. Componentes del átomo

Hemos visto en el capítulo XII que la materia está constituida por átomos y éstos, a su vez, de otras partículas más simples, que son esencialmente: ELECTRONES, PROTONES y NEUTRONES.

Los electrones poseen una masa despreciable en comparación con protones y neutrones, los cuales, asociados entre sí generalmente, forman la parte *reposada* de la materia; los electrones, por el contrario, constituyentes ligeros de ella, son su parte dinámica, pudiendo, con más o menos facilidad, moverse en su interior y pasar de unos cuerpos a otros.

Los componentes del átomo están agrupados dejando entre sí huecos extraordinariamente mayores que su propio tamaño. En la materia la casi totalidad de su volumen está vacío. Agrupados los constituyentes de la materia en contacto unos con otros, el volumen de un cuerpo sería millones de veces menor que el que tiene en realidad.

## XVIII – 2. Manifestación dual de la carga. Cuerpos eléctricamente neutros

Los protones, además de masa, tienen una propiedad especial a la que hemos llamado *electricidad positiva*, la cual se manifiesta en la materia de una forma particular; cuando a un cuerpo que tiene un exceso de protones sobre el de electrones le acercamos otro con la misma propiedad se observa una mutua repulsión entre ellos. LOS PROTONES SE REPELEN ENTRE SÍ. Parece que los electrones tienen una propiedad idéntica ya que se observa la misma repulsión poniendo en presencia dos cuerpos con un exceso de número de electrones sobre el de protones. LOS ELECTRONES SE REPELEN ENTRE SÍ.

Sin embargo la *causa* que origina las repulsiones entre los electrones y entre los protones es distinta ya que un cuerpo con un exceso de protones atrae a otro con un exceso de electrones. PROTONES Y ELECTRONES SE ATRAEN MUTUAMENTE.

*A la propiedad de los protones que se manifiesta repeliendo a otros protones y atrayendo electrones, se llama «ELECTRICIDAD POSITIVA» y se dice que tienen «CARGA POSITIVA».*

*A la propiedad de los electrones que se manifiesta repeliendo a otros electrones y atrayendo protones, se llama «ELECTRICIDAD NEGATIVA» y se dice que tienen «CARGA NEGATIVA».*

*Electricidades del mismo signo se repelen y de signo contrario se atraen.*

Los protones o los electrones no ejercen atracción o repulsión eléctrica sobre los neutrones.

Los nombres de carga «positiva» o «negativa» son absolutamente arbitrarios, el hecho de que a una carga la llamemos negativa no implica que tenga algo de negativo; igual se podía haberles dado el nombre de «carga de derechas» y «carga de izquierdas» y no por eso habría que considerar a la carga como un ente político.

Supongamos una pareja protón-electrón, muy próximos entre sí (Fig. XVIII-1), alejados de otro electrón y a la misma distancia de él. La atracción ejercida por el protón  $p$  queda anulada por la repulsión correspondiente del electrón  $e$ .

*Las cargas positiva y negativa de un protón y un electrón anulan sus acciones entre sí.*

*Llamamos CUERPOS NEUTROS ELÉCTRICAMENTE a los que tienen el mismo número de protones que de electrones.*

La materia es fundamentalmente neutra y no es común encontrar cuerpos cuya carga neta tenga un valor apreciable.

## XVIII – 3. Cuerpos con carga neta positiva o negativa

Cuando, por la causa que sea, un cuerpo neutro es abandonado por un cierto número de electrones queda en él un exceso de cargas positivas. Cuerpo «cargado positivamente» es aquel en el que existe un mayor número de protones que de electrones.



Fig. XVIII-1.- Las acciones conjuntas de un par protón-electrón se anulan.

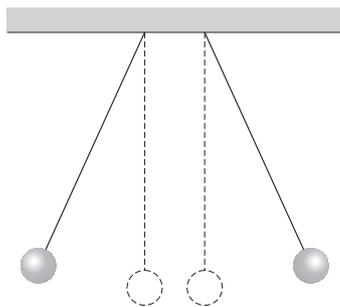


Fig. XVIII-2.- Poniendo dos «péndulos eléctricos» muy próximos, al ser tocados ambos con vidrio o con ámbar frotados, se repelen.

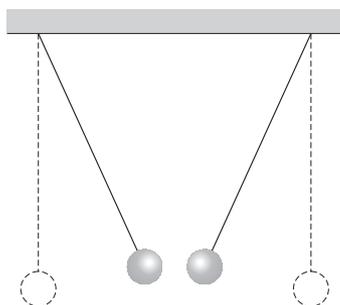


Fig. XVIII-3.- Si uno de los péndulos se ha puesto en contacto con el vidrio frotado y el otro con resina frotada, se produce una mutua atracción.

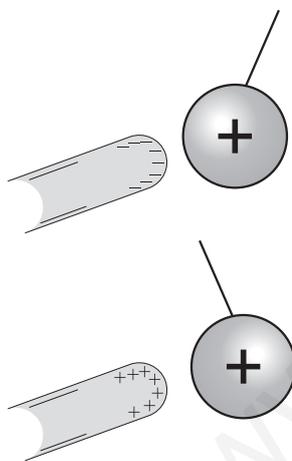


Fig. XVIII-4.- Frotando dos varillas entre sí y cargando un «péndulo eléctrico», una lo atrae y otra lo repele.

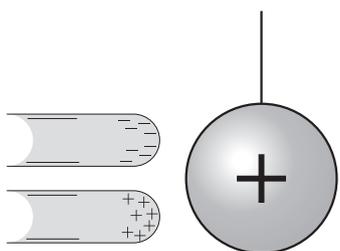


Fig. XVIII-5.- Acercando conjuntamente los dos cuerpos frotados entre sí a un péndulo eléctrico, no producen efecto alguno sobre él.

Cuando un cuerpo en estado neutro recibe, por la causa que sea, un cierto número de electrones, queda en él un exceso de cargas negativas. Cuerpo «cargado negativamente» es aquel en el que existe un mayor número de electrones que de protones.

#### XVIII - 4. Electrización por frotamiento

Thales de Mileto (600 años antes de J. C.) observó la propiedad de algunas sustancias como el ámbar (en griego elektron) de atraer, después de haber sido frotadas, cuerpos muy ligeros. A este fenómeno se le llama «electrización» y a la causa del fenómeno «electricidad».

Se determina si un cuerpo está o no electrizado acercándolo a una esfera de médula de sauco, pendiente de un hilo de seda (péndulo eléctrico); la bolita es atraída por el cuerpo si está electrizado y una vez en contacto con él, es repelida.

Los fenómenos de electrización por frotamiento, no son más que el paso de electrones de un cuerpo a otro, adquiriendo ambos electricidades contrarias.

Poniendo muy próximos dos péndulos eléctricos tocados con vidrio frotado, se observa una repulsión mutua; si los dos se han tocado con resina frotada, la repulsión se origina análogamente (Fig. XVIII-2); si uno de los dos péndulos se ha puesto en contacto con resina frotada y el otro con vidrio, se produce una mutua atracción (Fig. XVIII-3).

La consecuencia inmediata de estos hechos experimentales fue el conocimiento de dos clases de electricidad, mucho antes de saber la existencia de protones y electrones. A la electricidad del vidrio se le llamó *positiva*; a la de la resina, *negativa*.

«Frotando dos cuerpos entre sí, adquieren electricidades contrarias». Este hecho se demuestra cargando un péndulo con electricidad positiva (poniéndolo en contacto con vidrio frotado) y observando cómo después del frotamiento mutuo de dos cuerpos, uno lo atrae y otro lo repele (Fig. XVIII-4).

«La cantidad de electricidad acumulada en dos cuerpos frotados entre sí, es idéntica». Se demuestra acercando conjuntamente los dos cuerpos a un péndulo eléctrico cargado y observando que no producen efecto alguno sobre él, compensándose, por lo tanto, la atracción de uno con la repulsión del otro (Fig. XVIII-5).

#### XVIII - 5. Determinación de la carga neta de un cuerpo

La carga eléctrica en un cuerpo se distribuye de una cierta manera, ya sea sobre su superficie o en todo su volumen, y la fuerza de interacción entre dos cuerpos depende tanto de esa distribución como de la carga neta que posean. Trabajaremos inicialmente con *cargas puntuales*, haciendo una idealización semejante a la hecha en mecánica cuando se trabaja con partículas; esta abstracción puede ser aproximada en condiciones de laboratorio haciendo que las distancias de separación sean muy grandes comparadas con las dimensiones de los cuerpos cargados.

Tomemos dos cuerpos cargados y supongamos que sus cargas son  $q_1$  y  $q_2$ . Consideremos también estos dos cuerpos muy pequeños, puntuales. Si al ponerlos uno frente al otro experimentan fuerzas de atracción o repulsión, concluiremos diciendo que están cargados. Además *las fuerzas de interacción están dirigidas según la recta que une las cargas*.

Por otra parte la fuerza  $F_{12}$  que ejerce la carga  $q_2$  sobre la  $q_1$  es opuesta e igual en módulo a la que ejerce  $q_1$  sobre  $q_2$ , cumpliéndose el principio de acción y reacción, y siempre en el supuesto que las cargas son fijas.

Pues bien, supongamos (Fig. XVIII-6) que a una distancia  $r$  de una carga puntual fija  $q$  colocamos otra carga puntual fija  $q'$  (ambas positivas por ejemplo), a la fuerza que actúa sobre  $q'$  la llamamos  $F'$ . Coloquemos ahora otra carga  $q''$  en la posición de  $q'$ , la fuerza que actúa sobre  $q''$  será  $F''$ ; se observa experimentalmente que los módulos de estas fuerzas son proporcionales a los valores de las cargas, por lo tanto:  $F'/F'' = q'/q''$ .

Si damos un valor arbitrario (elección de un sistema de unidades) a  $q''$  podremos comparar cargas y por lo tanto medirlas. Resumiremos todo lo antes dicho diciendo:

«Dos cuerpos tienen igual carga eléctrica o cantidad de electricidad, cuando situados a la misma distancia de un mismo cuerpo electrizado y en el mismo medio, la fuerza con que lo atraen o lo repelen es idéntica. Un cuerpo tiene doble, triple... carga eléctrica que otro, cuando situados a la misma distancia de un tercer cuerpo electrizado y en el mismo medio, la fuerza de atracción o repulsión es doble, triple... que la del segundo».

De esta manera estamos en condiciones de emprender el estudio cuantitativo de la ELECTROSTÁTICA (cargas fijas) y como en todo estudio, es necesario sentar unos principios básicos que serán el tema de nuestro estudio próximo.

#### XVIII - 6. Principio de conservación de la carga en un sistema aislado

Se observa experimentalmente que en un SISTEMA AISLADO (*sistema en el cual no puede salir ni entrar carga*), las cargas positivas y negativas pueden variar con el tiempo pero su CARGA NETA (*carga positiva + carga negativa*) permanece constante.

«La carga de un sistema aislado eléctricamente permanece constante con el tiempo».

Estudiamos un ejemplo en el que se pone claramente de manifiesto este principio. Supongamos que tenemos un sistema aislado, no puede entrar o salir carga eléctrica, pero no aislado a la radiación gamma (partículas de masa nula y carga nula que se mueven a la velocidad de la luz: fotones). Inicialmente la carga dentro del recinto es nula, pero puede ocurrir (y en efecto se demuestra experimentalmente) que un fotón penetre y se «materialice» creándose un electrón (partícula elemental de carga  $-e$ ) y un positrón (partícula idéntica al electrón pero de carga  $+e$ ). Aparentemente se han creado cargas, y así es, pero la carga total del sistema continúa siendo nula. ¡Sigue siendo cierto el principio de conservación!

Cuando frotamos una barra de vidrio con un paño ¿Hemos creado carga? Por supuesto que no, lo que hemos hecho es arrancar cargas negativas de la barra que han quedado atrapadas en el paño, por lo que la barra inicialmente neutra ha quedado con defecto de cargas negativas (cargada positivamente) y el paño con un exceso de cargas negativas, en el sistema total vidrio-paño, la carga eléctrica no se ha modificado, únicamente se ha redistribuido.

### XVIII – 7. Principio cuantificacional de la carga

Este principio establece que:

«La carga está cuantificada».

es decir: en la naturaleza existe una «mínima carga» o «quantum» de electricidad que es la carga negativa que posee el electrón o la positiva del protón; y no se encuentran fracciones de ésta.

Consecuencia de este principio es que la carga de un cuerpo no crece o decrece de una manera continua; es decir: a un cuerpo le podemos añadir o quitar múltiplos enteros del «quantum de carga» pero nunca una fracción, ya que es indivisible.\*

La hipótesis hecha nos lleva a la conclusión de la existencia de una *unidad natural de carga* de la que luego hablaremos.

### XVIII – 8. Ley de Coulomb

«La fuerza que actúa sobre una carga puntual fija  $q_2$ , debida a la presencia de otra carga puntual fija  $q_1$ , es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa, está dirigida según la línea definida por ambas cargas, y es repulsiva o atractiva según sean del mismo o distinto nombre las dos cargas».

Matemáticamente la expresión del módulo de esta fuerza es:

$$F_{21} = K \frac{|q_1 q_2|}{r_{21}^2} = \frac{1}{4\pi \epsilon} \frac{|q_1 q_2|}{r_{21}^2} \quad \left[ K = \frac{1}{4\pi \epsilon} \right] \quad (1)$$

$K$  es la llamada CONSTANTE DE COULOMB,  $\epsilon$  es lo que se llama COEFICIENTE DIELECTRICO O PERMITIVIDAD,  $K$  y por tanto  $\epsilon$ , son dependientes del medio y del sistema de unidades, cuando se trata del vacío los designaremos por  $K_0$  y  $\epsilon_0$ . La expresión vectorial de esta ley será:

$$\vec{F}_{21} = K \frac{q_1 q_2}{r_{21}^3} \vec{r}_{21}$$

el vector  $\vec{r}_{21}$  es el que define la posición de  $q_2$  respecto de  $q_1$ .

Si llamamos  $\vec{F}_{12}$  a la fuerza que  $q_2$  ejerce sobre la carga  $q_1$  entonces:  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ , obedeciendo al tercer principio de Newton («principio de acción y reacción») por lo que diremos que las fuerzas electrostáticas son, newtonianas.

La ley de Coulomb fue deducida experimentalmente, su validez está plenamente confirmada ya que la formulación que de ella se deriva describe perfectamente los hechos experimentales. La adoptamos como uno de los principios fundamentales del electromagnetismo.

### XVIII – 9. Sistema electrostático de unidades

Queda caracterizado porque todas las unidades son las del sistema CGS y que la permitividad del vacío tiene por valor:  $\epsilon_0 = 1/4\pi$ ; la ley se expresará para el vacío, como originalmente la escribió Coulomb:

$$\vec{F} = \frac{q q'}{r^3} \vec{r} \quad (2)$$

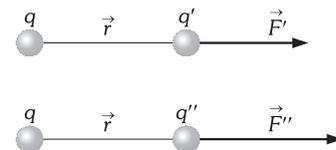


Fig. XVIII-6.– Midiendo las fuerzas, comparamos las cargas en magnitud.

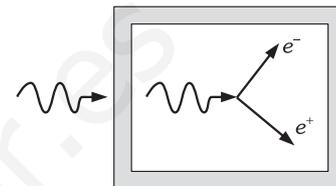


Fig. XVIII-7.– Al penetrar una radiación gamma en un recinto aislado puede ocurrir que aparezcan en él un electrón ( $e^-$ ) y un positrón ( $e^+$ ).

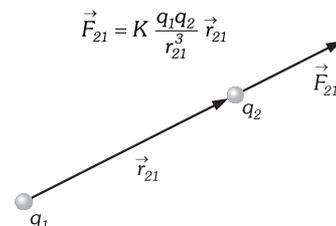


Fig. XVIII-8.– Ley de Coulomb.

\* En los temas dedicados a Electricidad, no consideraremos la posibilidad de carga fraccionaria en los quarks, partículas constituyentes de los protones.

### XVIII – 10. Carga del electrón. Unidades de carga

Hemos establecido que la carga eléctrica de un cuerpo no crece o decrece de una manera continua; existe una «mínima carga» o «quantum» de electricidad. A un cuerpo le podemos añadir o quitar esta *carga unitaria* o múltiplos enteros de ella, pero nunca una fracción, ya que es *indivisible*.

La UNIDAD NATURAL DE CARGA es la carga negativa que posee el electrón o la positiva del protón.

Antes del conocimiento de tal «unidad natural» se estableció la UEE de carga eléctrica o FRANKLIN, deducida de la ley de Coulomb aplicada al vacío (fórmula (2)); haciendo  $r = 1$  cm y  $F = 1$  dyn; se obtiene, así, la unidad de carga en el caso que  $q = q'$ .

La UNIDAD ELECTROSTÁTICA (UEE) de carga o franklin, es una carga tal que colocada enfrente de otra igual, en el vacío y a un centímetro de distancia, la repele con la fuerza de una dina.

La unidad de carga en el Sistema Internacional es el CULOMBIO:  $1 \text{ C} = 2 \times 10^9$  UEE. Un culombio equivale a  $6,242 \times 10^{18}$  unidades naturales de carga. La carga del electrón equivale a  $4,8 \times 10^{-10}$  UEE =  $1,6 \times 10^{-19}$  C.

### XVIII – 11. Valor de $K_0$ en el Sistema Internacional

Para deducir el valor de la permitividad del vacío ( $\epsilon_0$ ) en el SI calculemos lo siguiente:

Dos cuerpos, cargados cada uno de ellos con un culombio, situados uno frente a otro, a un metro de distancia y en el vacío, ¿con qué fuerza se atraen o repelen?

No podremos aplicar (1) por desconocer el valor de  $\epsilon_0$ ; apliquemos la (2), reduciendo todas las unidades al sistema electrostático:

$$F = \frac{qq'}{r^2} = \frac{3 \times 10^9 \times 3 \times 10^9}{100^2} = 9 \times 10^{14} \text{ dyn} = 9 \times 10^9 \text{ N}$$

llevemos este valor a la fórmula 1 expresando todas las unidades en el SI:

$$9 \times 10^9 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 \times 1}{1^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \times 9 \times 10^9} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}}$$

Este es el valor de la permitividad del vacío en el SI. El valor de  $K_0$  es:

$$\boxed{K_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}}$$

En otro medio que no sea el vacío se obtiene  $\epsilon$ , multiplicando la permitividad del vacío  $\epsilon_0$  por el número adimensional (igual para todos los sistemas de unidades) que es una característica del medio, llamado PERMITIVIDAD RELATIVA AL VACÍO  $\epsilon'$

$$\boxed{\epsilon = \epsilon' \epsilon_0}^*$$

Las fuerzas eléctricas, a diferencia de las gravitacionales, dependen del medio en que actúan.

### XVIII – 12. Dimensiones de la carga y de la permitividad

Al aparecer dos nuevas magnitudes ( $\epsilon$  y  $q$ ) independientes de longitud, masa y tiempo ( $L$ ,  $M$ ,  $T$ ), es necesaria una cuarta *unidad fundamental*; en el sistema de UEE se toma  $\epsilon$ ; en el SI, la intensidad de corriente ( $A$ ).\*\*

La ecuación de dimensiones de la carga es un UEE:  $qq' = 4\pi\epsilon Fr^2 \Rightarrow [q^2] = \epsilon MLT^{-2} L^2 = L^3 MT^{-2} \epsilon \Rightarrow [q] = L^{3/2} M^{1/2} T^{-1} \epsilon^{1/2}$ . La ecuación de dimensiones de la carga es en el SI:  $[q] = AT$ , y la de la permitividad:  $[\epsilon] = L^{-3} M^{-1} T^4 A^2$ .

**PROBLEMAS: 1 al 11.**

### XVIII – 13. Sistema de cargas puntuales. Principio de superposición

Supongamos una carga  $q$  puntual y en reposo; si frente a ella tenemos  $n$  cargas puntuales  $q_1$ ,  $q_2$ , ...  $q_n$  también en reposo, se comprueba *experimentalmente* que la fuerza sobre la carga  $q$ , debida a dichas cargas ( $q_i$ ) viene dada por:

$$\boxed{\mathbf{F} = K q \sum \frac{q_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i}$$

\* Ver la tabla de valores del párrafo XIX-28.

\*\* La intensidad de una corriente eléctrica es la carga que pasa por una sección de un hilo conductor en cada unidad de tiempo:  $I = dq/dt$ . Por ser su unidad el amperio designamos por  $A$  a la ecuación de dimensiones de tal magnitud.

este resultado experimental constituye el PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN:

«La fuerza sobre una carga en reposo debida a otras también fijas actuando simultáneamente, es igual a la suma vectorial de las fuerzas ejercida por cada una de ellas actuando por separado como si las demás no existiesen».

**PROBLEMAS: 12 al 16.**

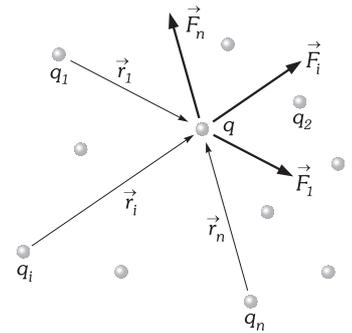


Fig. XVIII-9.- Principio de superposición.

**XVIII – 14. Distribuciones de carga: volumétrica, superficial y lineal**

Hasta este momento sólo nos hemos referido a cargas puntuales, pero, además, se pueden distribuir en volumen, superficie y linealmente, definiéndose por esto la DENSIDAD VOLUMÉTRICA DE CARGA:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV}$$

siendo  $\rho$  una función de las coordenadas y, en general, del tiempo.

En función de  $\rho$ , la carga total de una distribución volumétrica  $V$  será:

$$Q = \int_V \rho dV$$

DENSIDAD SUPERFICIAL:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \frac{dQ}{dA}$$

DENSIDAD LINEAL:

$$\lambda = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta L} = \frac{dQ}{dL}$$

De donde la carga de una superficie finita  $A$  o una línea  $L$ , cargadas con una densidades  $\sigma$  y  $\lambda$  respectivamente serán:

$$Q = \int_A \sigma dA$$

$$Q = \int_L \lambda dL$$

El tratamiento físico que hacemos de la magnitud diferencial  $dV$  ( $dA$  y  $dL$ ) no es el mismo que el empleado por los matemáticos, puesto que  $dV$  ( $dA$  y  $dL$ ) será para nosotros un volumen (una superficie, un elemento de longitud) "muy pequeño" a nivel macroscópico, pero debe ser lo suficientemente grande, a escala microscópica, para contener "varias" cargas fundamentales. (Principio cuantificacional de la carga); sólo de esta manera puede tratarse a  $\rho$  ( $\sigma$  y  $\lambda$ ) como una función que varía de forma continua con respecto a la posición.

**XVIII – 15. Expresión general del principio de superposición**

Si tenemos un sistema de cargas puntuales, una distribución volumétrica de carga definida por una  $\rho(\mathbf{r})$ , una distribución superficial definida por  $\sigma(\mathbf{r})$  y una distribución lineal de cargas definida por  $\lambda(\mathbf{r})$ , la fuerza sobre una carga  $q$ , debida a dichas distribuciones vendrá dada, en virtud del principio de superposición, por\*:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = Kq \left[ \sum \frac{q_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i + \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}) dV}{r^3} \mathbf{r} + \int_A \frac{\sigma(\mathbf{r}) dA}{r^3} \mathbf{r} + \int_L \frac{\lambda(\mathbf{r}) dL}{r^3} \mathbf{r} \right]$$

se supone otra vez que las cargas de todas las distribuciones, tanto discretas como continuas, y la carga  $q$  se mantienen en reposo por fuerzas mecánicas de algún tipo, según se requiera.

**PROBLEMAS: 17 al 20.**

**B) EL CAMPO ELÉCTRICO**

**XVIII – 16. El campo eléctrico**

Supongamos que a la derecha de una lámina de vidrio opaca se ha practicado el vacío (Fig. XVIII-10), no conociendo lo que hay al otro lado de la lámina. En un punto  $P$ , a la derecha de la lámina de vidrio colocamos una carga puntual  $q$  y observamos que sobre esta carga testigo (de prueba) fija actúa una fuerza  $\mathbf{F}$ . Deducimos que en la «zona no visible» existe alguna carga que ha interactuado con la muestra.

\* Emplearemos indistintamente las notaciones  $\mathbf{F}(P)$ ,  $\rho(P)$ ,  $V(P)$  ... y  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ,  $\rho(\mathbf{r})$ ,  $V(\mathbf{r})$ ..., que nos significarán lo mismo.

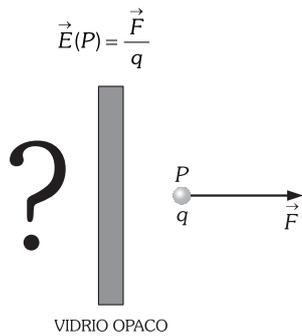


Fig. XVIII-10.- Una distribución de carga perturba el espacio vacío creando lo que llamamos un «Campo eléctrico»; su intensidad toma el valor expresado.

Pero cómo se «ha enterado» nuestra carga de prueba de la existencia de la otra. El único razonamiento físicamente lógico es el siguiente: La carga «oculta» ha creado en el espacio una situación especial, lo ha «perturbado» de tal manera que al colocar una carga  $q$  en un punto cualquiera, ese «enrarecimiento» del espacio interactúa con nuestra carga; resumiendo, la carga oculta ha creado un «campo eléctrico», y este campo ha interactuado con la carga de prueba. La definición del campo será pues:

«CAMPO ELÉCTRICO creado por una carga es el espacio donde se manifiesta su atracción o repulsión sobre otras cargas».

«INTENSIDAD DEL CAMPO EN UN PUNTO es la fuerza que actúa sobre la unidad de carga positiva colocada en el punto».

$$E(P) = \frac{F}{q} \quad (3)$$

En realidad, con el nombre de campo eléctrico se designa no sólo la zona del espacio definida arriba sino también el conjunto de valores que toma el vector intensidad de campo.

Para indicar que la carga  $q$  es lo suficientemente pequeña para no perturbar la distribución de carga existente antes de introducirla, la expresión anterior se suele escribir matemáticamente:

$$E(P) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{F}{q}$$

El caso más sencillo de distribución que crea un campo eléctrico es el de una carga puntual  $q_1$ ; la expresión del campo eléctrico creado por  $q_1$  en un punto  $P$ , la deducimos, colocando en  $P$  la carga de prueba  $q$  (Fig. XVIII-11) y aplicando la ley de Coulomb:

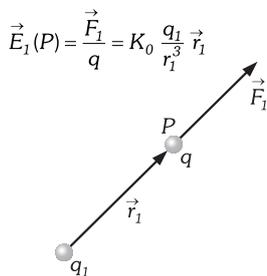


Fig. XVIII-11.- Campo eléctrico producido por una carga puntual.

$$E_1(P) = K_0 \frac{q_1}{r_1^3} r_1$$

dividiendo por  $q$  se obtiene:

La intensidad del campo eléctrico es una magnitud vectorial y será una función de las coordenadas del punto; se medirá en el sistema internacional en N/C. Su equivalencia en el sistema UEE es:  $1 \text{ N/C} = 10^5 \text{ dyn} / 3 \times 10^9 \text{ UEE} = 1 / 3 \times 10^4 \text{ dyn} / \text{UEE}$

### XVIII - 17. Intensidad del campo eléctrico creado por una distribución de cargas puntuales

Sean  $q_1, q_2, \dots, q_n$  una serie de cargas puntuales en reposo situadas frente a una carga  $q$  también puntual y en reposo colocada en un punto  $P$  (Fig. XVIII-9); aplicando (1) y el principio de superposición se obtiene para valor de la intensidad del campo electrostático en  $P$ :

$$E(P) = K_0 \sum \frac{q_i}{r_i^3} r_i = \sum E_i(P) \quad (4)$$

«El campo creado por un sistema de cargas puntuales es la suma de los campos que producirían cada una de las cargas separadamente».

La definición dada por la fórmula (3) es mucho más general que la que hemos obtenido en (4). La (3) nos sirve para cuando no se conoce la distribución de cargas que crea el campo e incluso cuando las cargas generadoras del campo ( $q_1, q_2, \dots, q_n$ ) están en movimiento, y tiene el inconveniente que para medir  $E(P)$  es necesario introducir la carga testigo  $q$  que aunque sea muy pequeña siempre perturbará algo el campo existente antes de introducirla. La expresión (4) tiene la ventaja de dar un valor exacto de  $E(P)$  en función de la distribución que crea el campo y el inconveniente de no servir cuando sus cargas son móviles.

PROBLEMAS: 21 al 29.

### XVIII - 18. Expresión general del campo eléctrico calculado en función de la distribución de cargas puntuales, volumétrica, superficial y lineal que lo crean

Si tenemos un sistema de cargas puntuales, una distribución volumétrica de carga definida por una  $\rho(r)$ , una distribución superficial definida por  $\sigma(r)$ , y una distribución lineal definida por  $\lambda(r)$ , el campo en un punto, en virtud del principio de superposición, será:

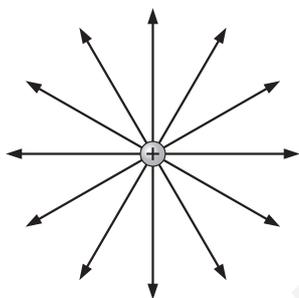


Fig. XVIII-12.- Líneas de fuerza en el campo eléctrico producido por una carga puntual positiva aislada.

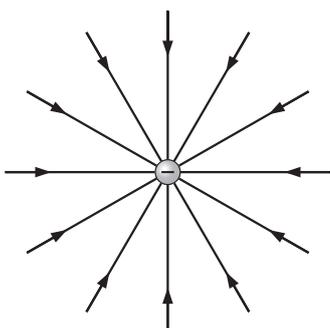


Fig. XVIII-13.- Líneas de fuerza en el campo eléctrico producido por una carga puntual negativa aislada.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = K_0 \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i + K_0 \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}) dV}{r^3} \mathbf{r} + K_0 \int_A \frac{\sigma(\mathbf{r}) dA}{r^3} \mathbf{r} + K_0 \int_L \frac{\lambda(\mathbf{r}) dL}{r^3} \mathbf{r} \quad (5)$$

PROBLEMAS: 30 al 33.

**XVIII – 19. Líneas de fuerza. Representación gráfica del campo eléctrico**

Hemos definido el campo eléctrico asignando un valor a cierta variable física en todos los puntos del espacio, en notación vectorial  $\mathbf{E}(P) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{E}(x, y, z)$ , y tal magnitud vectorial puede sustituirse por tres funciones escalares  $E_x, E_y$  y  $E_z$ ; es decir, un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  puede describirse en coordenadas cartesianas como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_x(x, y, z) \mathbf{i} + E_y(x, y, z) \mathbf{j} + E_z(x, y, z) \mathbf{k}$$

El concepto básico de campo fue desarrollado por Michael Faraday (1791-1867) y utilizó las «líneas de campo» para hacer una representación gráfica de las fuerzas eléctricas que actúan en el espacio que rodea a un cuerpo cargado; nuestro concepto matemático de campo fue una abstracción posterior de su propia representación gráfica, y las «líneas de campo» o «líneas de fuerza» siguen siendo una herramienta muy útil a la hora de resolver problemas eléctricos y magnéticos.

LÍNEAS DE FUERZA son las trayectorias que seguiría una carga positiva, sometida a la influencia del campo, en una sucesión de caminos elementales, partiendo, en todos ellos, del reposo.

Imaginemos una carga positiva que abandonamos en un campo eléctrico. Comenzará a moverse por la influencia del campo, al estar sometida a la fuerza dada por la fórmula (3). En cuanto ha iniciado su movimiento la detenemos, volviendo abandonarla de nuevo y a detenerla. De esta forma describiría una trayectoria —sucesión indefinida de espacios elementales— que se llama LÍNEA DE FUERZA.

El vector intensidad del campo es siempre tangente a las líneas de fuerzas. Las líneas de fuerza van de las cargas positivas a las negativas.

Para dar una idea gráfica del campo eléctrico se conviene en representar su valor en un punto por el número de líneas de fuerza que atraviesan normalmente a la unidad de superficie localizada en dicho punto (Fig. XVIII-16).

Realmente el número de líneas de fuerza que atraviesa normalmente a cualquier superficie es infinito. El artificio antes dicho no es más que un sistema de representación.

En un campo uniforme, es decir, que tiene la misma intensidad en todos sus puntos, las líneas de fuerza son paralelas y se dibujan equidistantes.

Adoptando este sistema de representación, siguiendo así los conceptos iniciados por Faraday, los fenómenos eléctricos que se realizan en un campo quedan en nuestra mente grabados de una forma gráfica, entendiendo siempre que tales ideas son una simple representación de ecuaciones matemáticas de un contenido más abstracto.

La propiedad de que una línea de campo, sea siempre tangente al vector intensidad del campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , podemos expresarla:

$$\mathbf{E} \times d\mathbf{r} = \mathbf{0}$$

expresión que nos proporciona un procedimiento para determina la ecuación de las líneas de campo. Generalmente la resolución de este problema es muy complicada, apartándose del contexto del presente libro. Como caso particular, consideremos el problema plano; como  $\mathbf{E}(x, y) = E_x(x, y) \mathbf{i} + E_y(x, y) \mathbf{j}$ , y  $d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j}$ ; obtenemos:

$$E_x dy - E_y dx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} = f(x, y)$$

puesto que el cociente de los componentes del campo es una función escalar de punto:  $f(x, y)$ . El problema se reduce así a la resolución de esta última ecuación diferencial de primer orden, que también en muchas ocasiones puede ser muy tediosa (como ejemplo sencillo, resolver el problema indicado a continuación).

PROBLEMA: 34.

**XVIII – 20. Flujo de un campo eléctrico**

El flujo de un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  a través de una superficie  $d\mathbf{A}$  (Fig. XVIII-17), se define como:

$$d\phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \Leftrightarrow \phi = \int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int_A E \cdot dA \cos \varphi$$

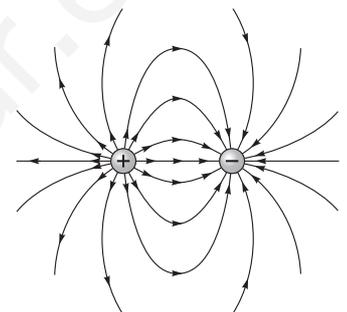


Fig. XVIII-14.- Líneas de fuerza en el campo eléctrico producido por dos cargas iguales y de signos opuestos.

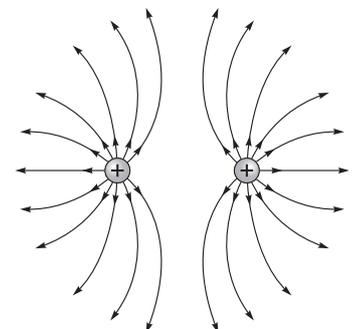


Fig. XVIII-15.- Líneas de fuerza en el campo eléctrico producido por dos cargas puntuales del mismo valor y positivas.

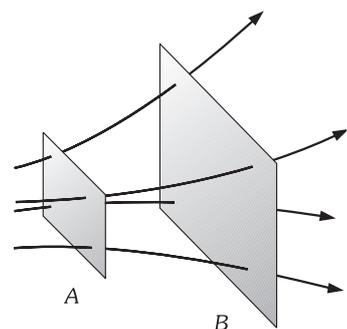


Fig. XVIII-16.- Líneas de fuerza atravesando dos superficies A y B. La densidad de líneas, y por tanto, el campo es mayor en A que en B.

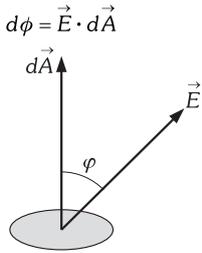


Fig. XVIII-17.- Flujo de un campo electrostático.

esta magnitud ayuda, en determinados casos, a calcular la expresión del campo electrostático (en todos los puntos del espacio) creado por algunas distribuciones de carga, contribuyendo a resolver el problema fundamental que se plantea en la electrostática.

Seguimos a Faraday, si  $\mathbf{E}$  es el número de líneas de fuerza que atraviesan normalmente a la superficie  $dA'$  (Fig. XVIII-18), como:

$$d\phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E dA \cos \varphi$$

y puesto que  $dA' = dA \cos \varphi$  ( $dA'$  es proyección de  $dA$  sobre el plano normal a  $\mathbf{E}$ ), obtenemos:

$$d\phi = E dA'$$

«EL FLUJO del campo eléctrico a través de una superficie elemental (o número de líneas de fuerza que atraviesan a ésta, en nuestro sistema de representación del campo), equivale al producto de la intensidad del campo por el área de la superficie, por el coseno del ángulo que forman el campo con la normal a la superficie».

**XVIII – 21. El problema fundamental de la electrostática**

En los párrafos anteriores hemos enunciado los postulados básicos de la Electroestática y hemos visto la manera de tratar las interacciones electrostáticas a través de la noción del campo eléctrico.

Obsérvese que el problema fundamental de la Electroestática es el cálculo de campos producidos por distintas distribuciones de cargas. El  $\mathbf{E}$  origina en cada punto del espacio una propiedad local, en el sentido: si conocemos  $\mathbf{E}$  en cada punto de una región, sabemos sin más averiguaciones lo que ocurrirá a cualquier carga en ella. No necesitamos conocer la distribución que produce el campo. Conocido el campo eléctrico en todos los puntos del espacio, tenemos una descripción completa de todo el sistema.

Puesto que el campo electrostático es un campo vectorial, debemos investigar las relaciones vectoriales propias de todo campo: el valor del flujo del campo a través de una superficie cerrada, el valor de su circulación a lo largo de una curva cerrada, etc. Los valores de estas relaciones vectoriales en las que entra a formar parte el campo, serán las ecuaciones fundamentales de la Electroestática, y nos ayudarán a resolver el problema fundamental (ver teoría de campos en el capítulo VII).

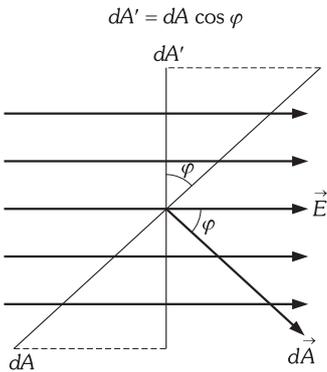


Fig. XVIII-18.-  $dA'$  es la proyección de  $dA$  sobre el plano normal al vector intensidad del campo eléctrico.

**XVIII – 22. Flujo del Campo Electrostático a través de una superficie cerrada (Teorema de Gauss)\***

«El flujo de un campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la suma de todas las cargas encerradas en el interior de ella dividido por  $\epsilon_0$ ».

La expresión matemática de este teorema será:

$$\phi = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}$$

Para demostrar este Teorema, estudiemos primero un caso particular sencillo. Consideremos una carga puntual positiva  $q$  y calculemos el flujo del campo eléctrico a través de una esfera de radio  $r$  cuyo centro coincide con el punto donde está situada la carga  $q$  (Fig. XVIII-19). El campo que produce la carga en un punto de la superficie esférica es:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

es decir, es un CAMPO RADIAL, y «surge» de la carga por ser ésta positiva (si fuese negativa, el campo sería radial y hacia la carga, la carga negativa se comporta como un «sumidero» de campo eléctrico, la positiva como una «fuente» de campo). Queremos calcular:

$$\phi = \oint_{A \text{ (esfera)}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

Sobre cada uno de los puntos de la esfera, el campo al ser radial es paralelo al vector  $d\mathbf{A}$ , luego:

$$\phi = \oint_{A \text{ (esfera)}} E dA \cos \theta = \oint_{A \text{ (esfera)}} E dA$$

y como el valor del módulo de  $\mathbf{E}$  es:

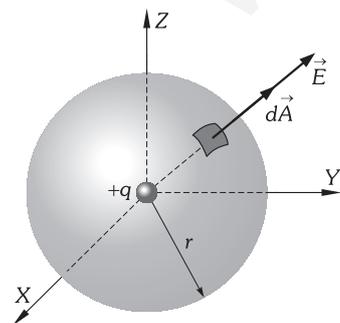


Fig. XVIII-19.- Flujo del campo eléctrico a través de una esfera de radio  $r$  cuyo centro coincide con el punto en que está situada una carga  $q$  que produce el campo.

\* El estudio general de este teorema está en el párrafo VII-17; dada la importancia que tiene en el estudio de la electrostática, repetimos su demostración operando con cargas en reposo.

$$E = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \Rightarrow \phi = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \oint_{A(\text{esfera})} \frac{dA}{r^2}$$

puesto que hemos tomado el origen de coordenadas en el centro de la esfera sobre la cual integramos,  $r$  es constante y puede salir de la integral:

$$\phi = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \oint_{A(\text{esfera})} dA = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Vamos a probar que este resultado es independiente de la forma de la superficie. Consideramos una carga puntual  $q$ . Vamos a calcular el flujo del campo eléctrico producido por esa carga a través de una superficie cerrada  $A$  (Fig. XVIII-20). En un punto  $P$  de la superficie el campo es  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  y el vector área  $d\mathbf{A}$  formará un ángulo  $\theta$  con el campo. El flujo a través de  $d\mathbf{A}$  será:

$$d\phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E dA \cos \theta \quad E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2} \Rightarrow d\phi = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{dA \cos \theta}{r^2} \quad (6)$$

Observemos en la Fig. XVIII-21 que  $dA$  viene relacionada con  $dA'$  trazada desde  $q$  como centro por:  $dA' = dA \cos \theta$ , puesto que al ser infinitamente pequeña  $dA$  y  $dA'$ , ésta última se puede considerar como proyección de la primera. El ángulo  $\theta$  que forman  $dA$  y  $dA'$  es el mismo que forma el vector  $d\mathbf{A}$  (que tiene la dirección de la normal) y el vector  $\mathbf{E}$ , por tener el mismo complemento. Llamando  $d\omega$  a la superficie que determina en la esfera de radio unidad el ángulo sólido que tiene por vértice  $q$  y cuyas aristas pasan por el contorno de  $dA$ ; y como  $dA'$  y  $d\omega$  son directamente proporcionales al cuadrado de sus radios se obtiene:

$$\frac{dA'}{d\omega} = \frac{r^2}{1^2} \Rightarrow dA' = r^2 d\omega \Rightarrow d\omega = \frac{dA \cos \theta}{r^2}$$

según esto, sustituida esta última en (6) nos quedará:  $d\phi = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} d\omega$

y el flujo a través de  $A$  será:

$$\phi = \oint_A \frac{q}{4\pi \epsilon_0} d\omega = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \oint_A d\omega = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Obsérvese que si en vez de tener únicamente una carga en el interior de la superficie, hubiésemos tenido una distribución (de cargas puntuales, por ejemplo) este mismo razonamiento se podría haber hecho para cada una de ellas, es decir, obtendríamos que, el flujo de campo electrostático debido a la carga  $q_i$  a través de  $A$  sería:

$$\phi_i = \oint_A \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{A} = \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

Luego el flujo del campo electrostático total, en virtud del principio de superposición será:

$$\phi = \sum_i \phi_i = \oint_A (\sum_i \mathbf{E}_i) \cdot d\mathbf{A} = \oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}$$

Resumiendo:

$$\boxed{\phi = \oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}} \quad (7)$$

donde  $Q$  representa la carga total interior a la superficie  $A$ .

Si la carga se encuentra fuera de la superficie cerrada (Fig. XVIII-22), el flujo que *entra* a través de  $dA_1$  lo calculamos de la misma manera que antes y nos dará:

$$d\phi_1 = \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{A}_1 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{dA_1 \cos \varphi_1}{r_1^2} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} d\omega$$

y el flujo que sale a través de  $dA_2$  será:

$$d\phi_2 = \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{A}_2 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{dA_2 \cos \varphi_2}{r_2^2} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} d\omega$$

por tanto, el flujo neto será cero, y lo mismo ocurrirá para todos los conos que tracemos desde  $q$ . Entonces, si la carga está fuera de la superficie:  $\phi = 0$ . Quedando así demostrado que la carga  $Q$

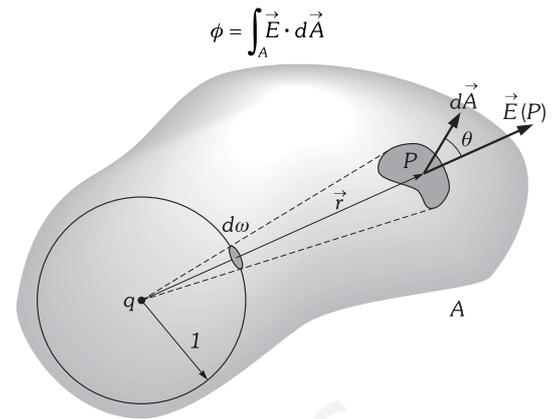


Fig. XVIII-20.- Flujo del campo eléctrico producido por una carga  $q$  a través de una superficie cerrada  $A$ .

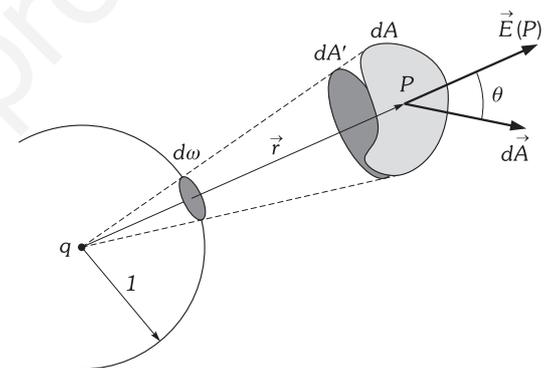


Fig. XVIII-21.- El flujo del campo eléctrico producido por una carga  $q$  a través de  $dA$  es el mismo que a través de  $d\omega$ .

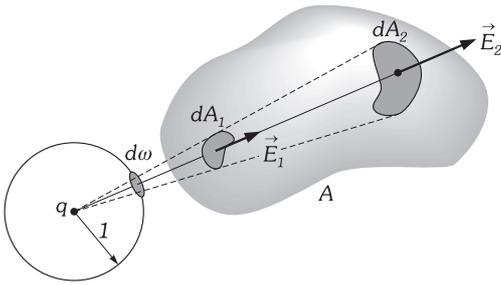


Fig. XVIII-22.- El flujo que atraviesa a una superficie cerrada A debido a las cargas en el exterior es nulo.

que aparece en el teorema de Gauss (fórmula 7) se refiere a la que se encuentra en el interior de la superficie cerrada.

Si la distribución de carga interior a la superficie A fuese una distribución volumétrica, definida por una densidad de carga  $\rho$  (homogénea o no), la carga total sería:

$$Q = \int_V \rho \, dV$$

donde V es el volumen de la distribución. En este caso el teorema de Gauss se escribiría:

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dV$$

donde A es la superficie arbitraria que rodee a la distribución, luego en particular podemos tomar la propia superficie de la distribución. La integral del primer miembro la podemos transformar en una integral de volumen (párrafo VII-10):

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \text{div } \mathbf{E} \, dV \Rightarrow \int_V \text{div } \mathbf{E} \, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dV$$

o bien, como  $\epsilon_0$  es una constante: 
$$\int_V \left( \text{div } \mathbf{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) dV = 0$$

para que esta relación se verifique para todo  $dV$  es preciso que:

$$\boxed{\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

que es la expresión diferencial del teorema de Gauss.

Nótese que los valores de la divergencia de un campo vectorial nos dan las fuentes escalares de dicho campo en cada punto. Esas fuentes escalares pueden ser positivas o negativas correspondiendo a lo que llamábamos «fuentes» o «sumideros» del campo. En el caso del campo electrostático tales fuentes son las cargas eléctricas positivas o negativas.

El teorema de Gauss constituye una de las leyes fundamentales de la electrostática, de ahí su importancia, pero además es un método cómodo para calcular campos electrostáticos en algunos casos determinados en los cuales se conozca algo de antemano de dicho campo, por ejemplo las líneas de fuerza, o lo que es lo mismo la dirección y el sentido del vector  $\mathbf{E}$  en cada punto. Con el teorema de Gauss podemos calcular el módulo del campo fácilmente en estas condiciones. Conocer de antemano las líneas de fuerza del campo es posible cuando la distribución de carga tenga una simetría muy específica (esférica, cilíndrica o plana).

### XVIII - 23. Cálculo del campo eléctrico producido por una carga Q uniformemente distribuida en una esfera

Resolvamos como aplicación del teorema de Gauss este caso particular. Si la distribución es uniforme, la simetría de la distribución de cargas es esférica. No existe ninguna dirección privilegiada, por consiguiente el campo tiene que ser necesariamente radial.

Vamos a calcular el campo a una distancia r del centro de la distribución. Tomaremos una superficie de integración de acuerdo con la simetría de nuestro problema: una esfera de radio r concéntrica con la distribución. El campo en P, por ser radial será paralelo a  $\mathbf{r}$  y también a  $d\mathbf{A}$ . Calculemos el flujo del campo a través de A.

a) En un punto P exterior a la distribución ( $r \geq a$ , Fig. XVIII-25).

$$\phi = \oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint_A E \, dA \cos \theta = \oint_A E \, dA$$

como E sólo depende de r, y A es una esfera, es constante al integrar, luego:

$$\phi = E \oint_A dA = E \, 4\pi r^2$$

por otra parte:  $\phi = Q/\epsilon_0$ , en la que Q es la carga total, que igualada a la anterior nos queda:

$$E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \Rightarrow \boxed{\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}}$$

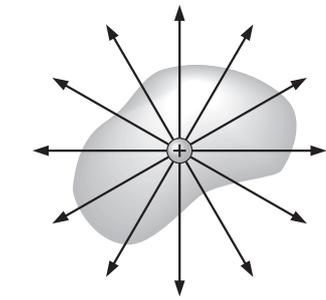


Fig. XVIII-23.- Las cargas positivas son las «fuentes» del campo eléctrico.

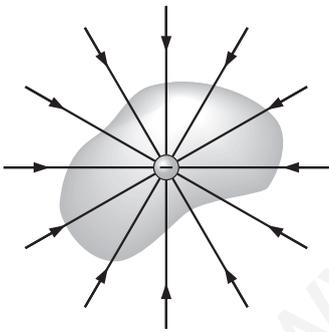


Fig. XVIII-24.- Las cargas negativas son los «sumideros» del campo eléctrico.

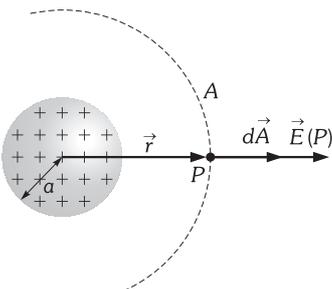


Fig. XVIII-25.- Cálculo de  $\vec{E}(P)$  en un punto del exterior de una esfera homogéneamente cargada.

«El campo que produce una distribución esférica y homogénea de carga en un punto exterior es el que produciría una carga puntual en el centro de la distribución».

b) En un punto  $P$  interior ( $r \leq a$ , Fig. XVIII-26). En este caso los argumentos de simetría son exactamente iguales. Para integrar, tomaremos una esfera  $A'$  de radio  $r$  que pasa por el punto  $P$ . Igual que antes  $\mathbf{E}$  es paralelo a  $\mathbf{r}$  y a  $d\mathbf{A}$ , luego:

$$\phi = \oint_{A'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E \oint_{A'} dA = E 4\pi r^2$$

y por otra parte:  $\phi = Q'/\epsilon_0$ , donde  $Q'$  es la carga encerrada dentro de  $A'$  ( $Q' < Q$ ), luego:

$$E = \frac{Q'}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

Como la carga total nos dicen que está uniformemente distribuida por todo el volumen, la densidad volumétrica de carga será constante y de valor:

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{Q'}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow Q' = Q \frac{r^3}{a^3} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 a^3} r \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 a^3} \mathbf{r}$$

Compruébese que ambas expresiones coinciden cuando calculamos el campo en la superficie de la distribución ( $r = a$ ). En este cálculo se ha supuesto que en el interior de la esfera la permitividad  $\epsilon_0$  es la misma que en el exterior.

**PROBLEMAS: 35 al 43.**

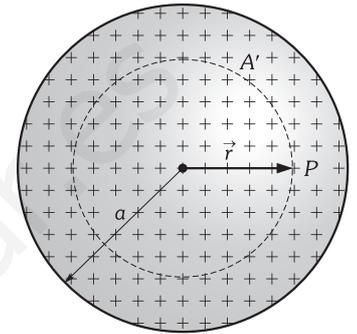


Fig. XVIII-26.- Cálculo de  $\vec{E}(P)$  en un punto del interior de una esfera homogéneamente cargada.

**XVIII - 24. El campo electrostático es un campo de fuerzas conservativo**

Una carga puntual  $q$  produce en el espacio un campo de fuerzas centrales con simetría esférica puesto que cumple con las características de éstos ya que la ley de Coulomb dice: «La fuerza que actúa sobre una carga puntual fija  $q'$  debida a la presencia de otra carga puntual fija  $q$  es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa y está dirigida según la línea definida por ambas cargas»:

$$\mathbf{F} = K \frac{qq'}{r^3} \mathbf{r}$$

esta fuerza cumple con las dos condiciones para ser central con simetría esférica; es decir: cualquiera que sea  $\mathbf{r}$ , posición en el espacio de la carga puntual  $q'$  respecto de la  $q$ , la dirección  $\mathbf{F}$  pasa por el punto en que se encuentra  $q$  y el módulo de dicha fuerza es el mismo en puntos equidistantes de  $q$ .

Vamos a demostrar que: «Un campo electrostático es un campo conservativo».

En efecto: supongamos que movemos\* una carga del punto 1 al 2, a lo largo de un camino  $M$  (Fig. XVIII-27), y luego volvemos a 1 por una trayectoria diferente  $N$ . Para recorrer la carga el camino intermedio  $dr_1$ , cuando pasa de 1 a 2 por  $M$ , el trabajo realizado será:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 = F \text{ proy}_F dr_1 = F dr$$

en la vuelta por el camino  $N$  se realiza un trabajo de signo contrario al anterior, cuyo valor es:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2 = -F \text{ proy}_F dr_2 = -F dr$$

igual a la anterior pero de signo contrario. Sumando todos los trabajos elementales en toda la vuelta obtenemos:

$$\int_{1M}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{2N}^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \Rightarrow \Gamma = \oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

al verificarse esta ecuación, queda demostrado el teorema enunciado.

Esta propiedad del campo, que hemos obtenido para el caso particular de una carga puntual, es general para cualquier distribución puesto que ésta se puede imaginar dividida en cargas puntuales, para cada una de éstas la circulación de la fuerza será nula, luego también lo será para la fuerza resultante.

**XVIII - 25. La circulación del campo electrostático**

Consecuencia inmediata de la definición del campo electrostático  $\mathbf{E}$  y de lo dicho en el párrafo anterior, es:

$$\Gamma = \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

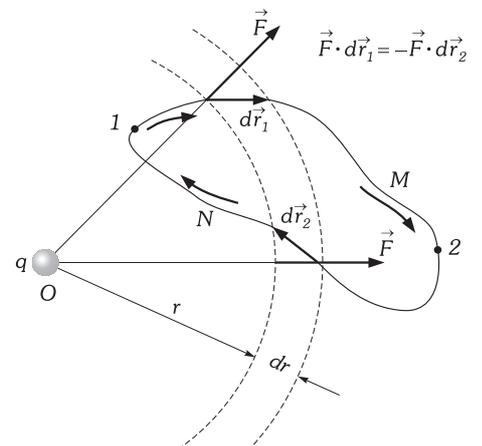


Fig. XVIII-27.- El campo electrostático es un campo de fuerzas conservativo.

\* Este movimiento lo consideramos infinitamente lento para no modificar las condiciones electrostáticas (cargas fijas).

si a esta ecuación le aplicamos el teorema de Stokes obtenemos:

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_A \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

siendo A una superficie cualquiera de las limitadas por C, luego:

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0$$

Sabemos que el valor del rotacional de la intensidad de un campo de fuerzas nos determina las «fuentes vectoriales» y por tanto esta última ecuación nos dice que: «No existen fuentes vectoriales en electrostática».

Conocido el valor del rotacional en todo punto (cero) y calculado el valor de la divergencia del campo (Teorema de Gauss), éste queda totalmente determinado.

**PROBLEMA: 44.**

### C) ENERGÍA POTENCIAL DE PUNTO

#### XVIII – 26. Energía potencial de una carga puntual situada en un campo electrostático

En el párrafo XVIII-24 hemos visto que al mover una carga puntual en trayectoria cerrada (partiendo de un punto 1 del campo y llegando al mismo) en el interior de un campo electrostático, la circulación de la fuerza electrostática era nula; esta consecuencia la podemos expresar diciendo: «En un campo electrostático\*, el trabajo de la fuerza electrostática en una trayectoria cerrada es nulo»; o lo que es lo mismo:

$$W = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Supongamos que la carga pasa del punto 1 a 2 por el camino M (Fig. XVIII-28) y luego volvemos al 1 por otro camino diferente N completando así la línea cerrada. La ecuación anterior la podemos escribir:

$$\int_{1M}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{2N}^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \Rightarrow W_1^2 = \int_{1M}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{1N}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

si en vez de volver por N lo hubiéramos hecho por P nos quedaría:

$$W_1^2 = \int_{1M}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{1P}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

generalizando las expresiones anteriores:

$$W_1^2 = \int_{1M}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{1N}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{1P}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \dots$$

ecuación que nos dice expresada en palabras:

«Si una carga puntual q pasa de un estado inicial 1 a un estado final 2, dentro de un campo eléctrico, el trabajo realizado por la fuerza del campo es independiente de los caminos intermedios, dependiendo única y exclusivamente del punto inicial y final».

«Podemos igualar ese trabajo con la variación de una función que depende del punto en el que se mida; la función que cumple esta condición se llama ENERGÍA POTENCIAL (U) de la carga puntual en un punto del campo eléctrico (o simplemente energía de punto)».

$$W_1^2 = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U_1(x_1, y_1, z_1) - U_2(x_2, y_2, z_2) \tag{8}$$

Obsérvese que escribimos  $U_1 - U_2$ , es decir:

«La energía potencial es una función de punto tal que la diferencia entre sus valores en las posiciones inicial y final es igual al trabajo efectuado por la fuerza conservativa del campo al ser desplazada la partícula desde la posición inicial a la final»; o lo que es lo mismo: «El trabajo realizado por la fuerza del campo es igual a menos el incremento de la energía potencial».

La expresión diferencial de ésta es:

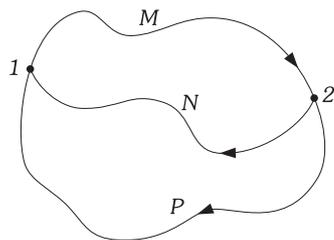


Fig. XVIII-28.- Diferentes caminos que puede recorrer una carga puntual en su traslado del punto 1 al punto 2.

\* Nótese que no importa qué clase de distribución de carga crea el campo.

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dU$$

en una dimensión, obtenemos:

$$dU = -F dx \Rightarrow F = -\frac{dU}{dx}$$

fórmula que nos da la variación de energía potencial por unidad de longitud. Si queremos escribir esta ecuación en tres dimensiones, tenemos que recurrir a la notación de derivadas parciales y será:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} = -\text{grad } U$$

### XVIII - 27. Cálculo de la energía potencial de una carga puntual $q'$ , situada en un campo electrostático, en función de la distribución de carga que crea el campo

Consideremos primeramente que el campo electrostático es debido a una carga puntual  $q$ . Calculando el trabajo que se realiza al trasladar la carga puntual  $q'$  del punto 1 al punto 2 en presencia de  $q$  (Fig. XVIII-29), habremos medido la «diferencia de energía potencial» entre dos puntos del campo. En un punto cualquiera de su trayectoria definido por el vector de posición  $\mathbf{r}$ , la fuerza que actúa sobre  $q'$  viene medida por la ley de Coulomb:

$$\mathbf{F} = K_0 \frac{qq'}{r^3} \mathbf{r}$$

que sustituida en (8) nos queda: 
$$U_1 - U_2 = \int_1^2 K_0 \frac{qq'}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$$

pero al ser el valor de esta integral independiente de la trayectoria a seguir, teniendo en cuenta la Fig. XVIII-29 podemos poner:

$$U_1 - U_2 = \int_1^{2'} K_0 \frac{qq'}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} + \int_{2'}^2 K_0 \frac{qq'}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$$

la primera integral es nula ya que  $\mathbf{F}$  y el camino recorrido  $d\mathbf{r}$  son perpendiculares; además, en la segunda integral podemos prescindir de la notación vectorial por tener  $\mathbf{r}$  y  $d\mathbf{r}$  la misma dirección, luego:

$$U_1 - U_2 = \int_{2'}^2 K_0 \frac{qq'}{r^2} dr = K_0 qq' \left[ -\frac{1}{r} \right]_{2'}^2$$

al ser en módulo  $r_1 = r_{2'}$ , obtenemos:

$$U_1 - U_2 = K_0 qq' \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]$$

expresión que nos mide «el trabajo realizado para trasladar la carga  $q'$  de un punto 1 a otro 2 del campo electrostático creado por la carga».

No se puede calcular la energía potencial absoluta de una carga que se encuentra en un campo electrostático. Sin embargo si convenimos que en un punto del espacio la energía potencial sea nula, llamaremos energía potencial en un punto cualquiera del campo a la diferencia de energía potencial entre el punto en el cual se anula y el punto considerado.

La hipótesis que normalmente hacemos es que para  $r = \infty \Rightarrow U = 0$  ó lo que es lo mismo: «La energía potencial de una carga  $q'$  en un punto en el infinito eléctrico (punto lo suficientemente alejado para que prácticamente no exista influencia del campo) es nula», con lo que la expresión de ésta, para cualquier  $r$  será:

$$U = K_0 \frac{qq'}{r}$$

que nos mide el trabajo que ha de realizar una fuerza exterior para trasladar la carga  $q'$  desde el infinito al punto en presencia de  $q$  o bien el trabajo que haría la fuerza del campo para trasladarla del punto al infinito.

Esta energía potencial electrostática es semejante a la energía potencial gravitatoria; sin embargo, mientras que ésta última es siempre negativa (con  $U(\infty) = 0$ ), la eléctrica puede tener ambos signos. Así, si  $qq' > 0$ , entonces  $U(r)$  es positiva, y si  $qq' < 0$  la energía potencial eléctrica  $U(r)$  es negativa.

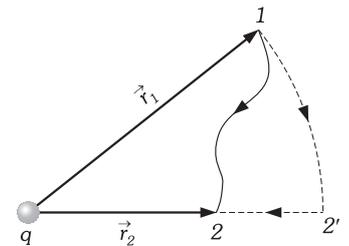


Fig. XVIII-29.- En la trayectoria de  $2'$  a  $2$   $\mathbf{r}$  y  $d\mathbf{r}$  tienen la misma dirección; en la  $1$  a  $2'$  la fuerza de Coulomb y  $d\mathbf{r}$  son perpendiculares.

Teniendo en cuenta que las contribuciones de energía potencial se suman escalarmente podemos decir que: «la energía potencial» de una carga puntual  $q'$  colocada en un punto del campo electrostático debido a encontrarse en presencia de un sistema discreto de cargas puntuales (Fig. XVIII-30) es:

$$U(P) = K_0 q' \sum \frac{q_i}{r_i}$$

La energía potencial de una carga puntual  $q'$  colocada en un punto del campo electrostático debida a una distribución superficial o volumétrica continuas la podemos escribir como una generalización de la expresión anterior. Tendríamos que calcularla sumando (integral) las contribuciones de energía potencial de cada uno de los elementos de superficie o volumen que compongan la distribución, que respectivamente son:  $dq = \sigma dA$  y  $dq = \rho dV$  ( $\sigma$ : la densidad superficial de carga que existe en el punto ocupado por  $dA$ ,  $\rho$ : la densidad volumétrica de carga que existe en el punto ocupado por  $dV$ ), y la contribución a la energía de  $q'$  en el punto  $P$  debida a estos elementos (Fig. XVIII-31 y 32)) sería:

$$dU = K_0 q' \frac{\sigma dA}{r} \quad dU = K_0 q' \frac{\rho dV}{r}$$

luego la energía potencial de  $q'$  debida a la distribución superficial (A) o volumétrica (V) es:

$$U(P) = K_0 q' \int_A \frac{\sigma}{r} dA \quad U(P) = K_0 q' \int_V \frac{\rho}{r} dV$$

Si el campo está creado por un sistema de cargas puntuales, una distribución superficial definida por  $\sigma(\mathbf{r})$  y una distribución volumétrica de carga definida por  $\rho(\mathbf{r})$ , la energía potencial de una carga puntual  $q'$  colocada en un punto  $P$  será:

$$U(P) = K_0 q' \left[ \sum \frac{q_i}{r_i} + \int_A \frac{\sigma(\mathbf{r})}{r} dA + \int_V \frac{\rho(\mathbf{r})}{r} dV \right] \quad (9)$$

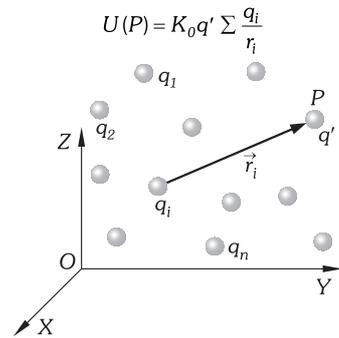


Fig. XVIII-30.- Energía potencial de la carga puntual  $q'$  debida a una distribución discreta.

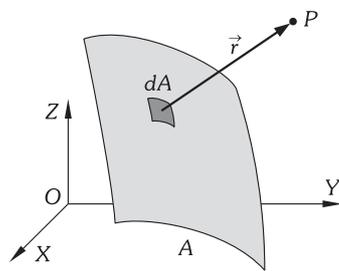


Fig. XVIII-31.- Distribución superficial continua.

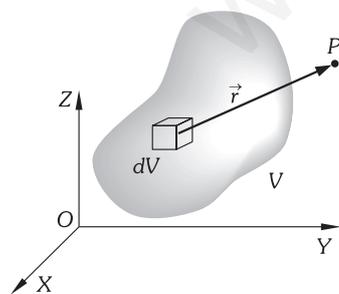


Fig. XVIII-32.- Distribución volumétrica continua.

**XVIII - 28. Energía mecánica total de una carga  $q$  que se mueve en el interior de un campo eléctrico por la acción exclusiva de la fuerza generada en él; cinemática de la misma**

Vimos en el párrafo VII-18 que el trabajo realizado por una fuerza cualquiera  $\mathbf{F}$  sobre una partícula de masa  $m$  cuando se traslada de un punto 1 a otro 2, se emplea en variar su energía cinética (Teorema de las fuerzas vivas), es decir:

$$W_1^2 = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = T_2 - T_1 \quad (10)$$

Si la fuerza  $\mathbf{F}$  es debida a encontrarse la partícula de carga  $q$  en el interior de un campo eléctrico y por lo tanto  $\mathbf{F}$  es conservativa, entonces el trabajo realizado por  $\mathbf{F}$  al ir del punto 1 al punto 2 será:

$$W_1^2 = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U_1 - U_2$$

independiente de los caminos intermedios. Si igualamos con (10) nos quedará:

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2 \Rightarrow T_1 + U_1 = T_2 + U_2$$

expresión que podemos generalizar poniendo:

$$E = T + U = cte \quad (11)$$

que expresa la LEY DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA DE UNA PARTÍCULA EN UN CAMPO CONSERVATIVO. La magnitud  $E$ , suma de la energía cinética más la potencial la llamaremos ENERGÍA MECÁNICA TOTAL DE LA PARTÍCULA en un campo conservativo.

Esto será cierto cualquiera que sea la distribución que crea el campo; como también lo es, la aplicación del Segundo principio de Newton a la partícula, es decir:

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} \Rightarrow q \mathbf{E} = m \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} = \frac{q}{m} \mathbf{E} \quad (12)$$

y en consecuencia, todo el estudio cinemático del movimiento de tal partícula.

En el caso particular en que el campo es producido por una carga puntual fija  $Q$  (Fig. XVIII-33), y es  $q$  la que se mueve por la acción de las fuerzas electrostáticas que  $Q$  produce; si es  $r_1$  la distancia de  $Q$  al punto 1 y  $r_2$  la distancia al punto 2, tomando como referencia al punto del infinito ( $U_\infty = 0$ ), entonces la (11), la podemos escribir:

$$E = T_1 + U_1 = T_2 + U_2 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{K_0 Q q}{r_1} = \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{K_0 Q q}{r_2}$$

y la (12) podremos escribirla, teniendo en cuenta que:

$$\mathbf{E} = K_0 \frac{Q}{r^3} \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{a} = K_0 \frac{Q q}{m r^3} \mathbf{r}$$

Otro caso particular será aquél en que el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  en el que se encuentra sumergida una carga  $q$  es uniforme (estos campos pueden ser producidos por una distribución homogénea de carga sobre un conductor plano, por un condensador plano entre sus armaduras...). Tomando la dirección y sentido del eje  $OX$  (Fig. XVIII-34), la misma que para el campo eléctrico podemos poner:  $\mathbf{E} = E \mathbf{i}$ , entonces la expresión de la energía potencial será:

$$\Delta U = -\Delta W = -\int_{x_0}^x \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \Rightarrow U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^x Eq dx = Eq(x_0 - x)$$

Tomando el origen de tal forma que  $x_0 = 0$  y conviniendo en que  $U(x_0) = 0$ , obtenemos:

$$U(x) = -qEx$$

Además, el valor de la aceleración de la partícula sumergida en tal campo será constante:

$$\mathbf{a} = \frac{qE}{m} \mathbf{i}$$

**PROBLEMAS: 45 al 54.**

### D) LA FUNCIÓN POTENCIAL DEL CAMPO ELECTROSTÁTICO

#### XVIII - 29. Diferencia de potencial entre dos puntos del campo electrostático. La función potencial electrostático. Potencial en un punto en función de la distribución de carga que crea el campo

Definimos DIFERENCIA DE POTENCIAL entre dos puntos del campo electrostático mediante la expresión:

$$\boxed{dV = \frac{dU}{q'}} \Leftrightarrow \boxed{dV = -\frac{dW}{q'}} \Rightarrow \boxed{dW = -q' dV} \quad (13)$$

o bien:

$$\boxed{U_1 - U_2 = q'(V_1 - V_2)} \Leftrightarrow \boxed{V_1 - V_2 = \frac{W_1^2}{q'}} \Leftrightarrow \boxed{W_1^2 = -q' \int_1^2 dV} \quad (14)$$

«DIFERENCIA DE POTENCIAL entre dos puntos del campo electrostático, es el trabajo que realiza el campo al pasar la unidad de carga de un punto a otro».

Recordando que:

$$\mathbf{F} = -\mathbf{grad}U \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q'} \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\mathbf{E} = -\mathbf{grad}V}$$

De las relaciones entre  $W$  y  $U$  con  $V$  también obtenemos:

$$\boxed{dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}} \Leftrightarrow \boxed{V_1 - V_2 = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}} \quad (15)$$

esta última integral es independiente del camino recorrido y sólo depende de los puntos inicial y final y por consiguiente las funciones  $V_1$  y  $V_2$  y en general la función  $V$  (potencial en un punto cualquiera del campo) «es una función exclusiva de las coordenadas del punto».

Si el punto 1 es variable, tendremos de la anterior que:

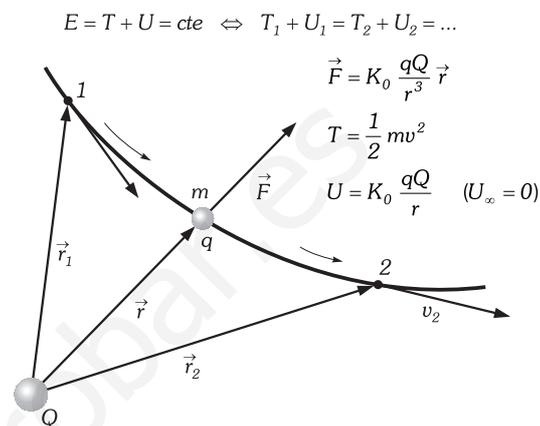


Fig. XVIII-33.- Movimiento de una carga  $q$  en el interior de un campo eléctrico generado por la carga fija  $Q$ , cuando sobre  $q$  solo actúa la fuerza electrostática  $\vec{F}$ .

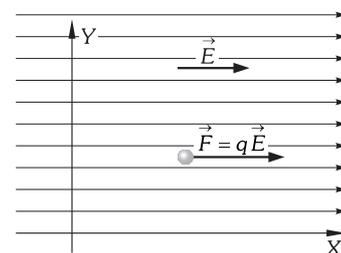


Fig. XVIII-34.- La carga  $q$  está sumergida en un campo eléctrico uniforme, que se representa por líneas de campo paralelas y equidistantes.

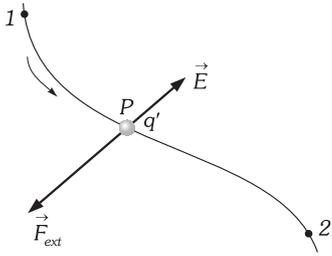


Fig. XVIII-35.- La diferencia de potencial entre los puntos 1 y 2 de un campo electrostático es el trabajo que realiza el campo al pasar la unidad de carga ( $q'$ ) del punto 1 al punto 2.

$$V_1 = V_2 + \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

La función  $V_1$  se define como «FUNCIÓN POTENCIAL ELECTROSTÁTICA» en el punto 1 definido por  $\mathbf{r}$ . Obsérvese que esta función  $V_1$  está unívocamente determinada salvo una constante que es el valor de  $V_2$ . Para determinar unívocamente el valor de  $V_1$  en cada punto hay que asignar un valor arbitrario al potencial de algún punto, la hipótesis que normalmente hacemos es tomar como potencial cero el de un punto infinitamente alejado. Es decir, si hacemos:  $2 \rightarrow \infty$  implica que  $V_2 = 0$ , por lo cual el «POTENCIAL EN EL PUNTO (P)» será:

$$V(P) = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_\infty^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

Físicamente interpretamos el POTENCIAL EN EL PUNTO  $\mathbf{r}$  como «el trabajo realizado por una fuerza exterior opuesta a la del campo para trasladar una unidad de carga positiva desde el infinito a dicho punto», o bien como «la energía potencial de la unidad de carga en ese punto».

Hasta aquí no hemos considerado la distribución de carga que ha creado el campo. Podemos calcular EL POTENCIAL EN UN PUNTO EN FUNCIÓN DE LAS DISTINTAS DISTRIBUCIONES DE CARGA QUE CREAN EL CAMPO sin más que tener en cuenta que de (14) se obtiene:  $U = q' V$ , que comparada con (9) quedará:

$$V(\mathbf{r}) = K_0 \sum \frac{q_i}{r_i} + K_0 \int_A \frac{\sigma(\mathbf{r})}{r} dA + K_0 \int_V \frac{\rho(\mathbf{r})}{r} dV \quad (16)$$

El problema fundamental de la electrostática es el calcular el campo eléctrico debido a una distribución de carga. EL Teorema de Gauss nos facilitaba este cálculo para casos en que de antemano conocemos «algo» del campo: su simetría. El conocimiento de la función potencial  $V(P)$  nos facilita una vía general para calcular campos electrostáticos. Téngase en cuenta que el campo es una función vectorial,  $\mathbf{E}(E_x, E_y, E_z)$  y para determinarlo será preciso calcular tres integrales para cada término de la ecuación general de  $\mathbf{E}(P)$  (fórmula 5). En el mejor de los casos éste es un procedimiento tedioso; en algunos es casi imposible integrar. La ecuación (16), por otra parte, es escalar e implica sólo una suma o una integral por término; además los denominadores que intervienen en esta ecuación son todos de la forma  $r$  en vez de  $r^2$  que simplifica las integrales en comparación con las de la ecuación de  $\mathbf{E}(P)$ . Además la operación de derivar  $V(P)$  para obtener  $\mathbf{E}(P)$  es operación (si existe) siempre muy sencilla y por supuesto más que la integración. Consecuencia de lo expuesto es pues que para resolver el problema fundamental se obtenga primeramente el  $V(P)$  y luego  $\mathbf{E}(P)$ .

Para el caso particular en el que el campo eléctrico es uniforme la (15) podemos escribirla:

$$V_1 - V_2 = Ed \quad \Leftrightarrow \quad E = \frac{V_1 - V_2}{d}$$

siendo 1 y 2 dos puntos del campo y  $d$  la distancia más corta entre ellos cortada sobre una línea de fuerza (Fig. XVIII-36).

La unidad en el SI de potencial es el VOLTIO (V)  $1V = 1J/1C$  o lo que es lo mismo: *El voltio es la diferencia de potencia entre dos puntos tales que para trasladar de uno a otro la carga de 1 culombio, hay que realizar el trabajo de 1 julio.*

La UEE de potencial es la diferencia de potencial entre dos puntos tales que para trasladar de uno a otro la carga de 1 UEE hay que realizar el trabajo de un ergio.

La relación entre las dos unidades es:

$$1 \text{ V} = 1 \text{ J/1 C} = 10^7/3 \times 10^9 = 1/300 \text{ UEE} \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ UEE} = 300 \text{ V}$$

El ELECTRÓN-VOLTIO (eV) es una unidad de energía que se define como «La energía adquirida por un electrón al ser acelerado por un campo eléctrico entre dos puntos cuya diferencia de potencial es de un voltio»  $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$ .

### XVIII - 30. Superficies equipotenciales

«Una SUPERFICIE EQUIPOTENCIAL en un campo eléctrico es el lugar geométrico de los puntos que están al mismo potencial».

Supongamos que dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  (Fig. XVIII-37) infinitamente próximos se encuentran al mismo potencial (pertenecerán a una misma superficie equipotencial). Se verificará que:  $dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$  pero si  $dV$  es la diferencia de potencial entre  $P_1$  y  $P_2$ , será nula, luego:  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$ ; para que este producto escalar sea nulo es preciso que o bien uno o ambos vectores sean nulos o bien que sean perpendiculares. El campo no tiene por qué ser nulo, ni tampoco  $d\mathbf{r}$  ya que tomamos puntos diferentes. La única posibilidad que queda es que sean perpendiculares. Como  $d\mathbf{r}$  está contenido en la superficie equipotencial deducimos que:

$$E = \frac{V_1 - V_2}{d}$$

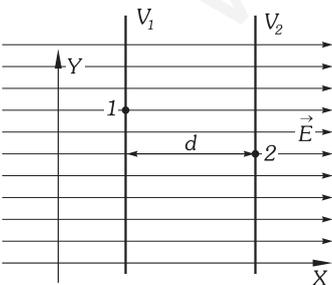


Fig. XVIII-36.- Las superficies que contienen a las rectas marcadas por  $V_1$  y  $V_2$  y perpendiculares al plano de la Fig. son equipotenciales, son también perpendiculares a las líneas de fuerza del campo eléctrico homogéneo a las que representa.

«Las superficies equipotenciales se cortan normalmente con las líneas del campo».

Son propiedades inmediatas de las superficies equipotenciales: 1) Las superficies equipotenciales no se cortan (el potencial en un punto tiene un único valor). 2) En el interior de una superficie equipotencial cerrada de potencial no nulo existe necesariamente carga neta no nula.

PROBLEMAS: 55 al 83.

**XVIII – 31. Cálculo del potencial eléctrico debido a un volumen esférico en el que se halla distribuida uniformemente carga eléctrica**

En el párrafo XVIII-23, por aplicación del Teorema de Gauss, se ha obtenido para valor de la intensidad del campo eléctrico producido por una carga  $Q$  uniformemente distribuida en un volumen esférico de radio  $R$ , para un punto situado en el exterior ( $r \geq R$ ) de la misma y a una distancia  $\mathbf{r}$  del centro:

$$\mathbf{E}_{ext} = K_0 \frac{Q}{r^3} \mathbf{r} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \mathbf{r}$$

llamando  $\rho$  a la carga de la unidad de volumen:

$$\rho = \frac{dQ}{dV} = \frac{Q}{V} = \frac{3Q}{4\pi R^3} \Rightarrow Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \Rightarrow \mathbf{E}_{ext} = \frac{R^3 \rho}{3 \epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

y para un punto en el interior de la esfera ( $r < R$ ): 
$$\mathbf{E}_{int} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^3} \mathbf{r}$$

en función de  $\rho$ : 
$$\mathbf{E}_{int} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}$$

Para calcular el potencial en un punto exterior ( $r > R$ ), mediremos el trabajo realizado por el campo al transportar la unidad de carga del punto al infinito, que viene dado por:

$$V = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

esta integral es independiente del camino recorrido; haciendo el transporte de la unidad de carga a lo largo de una línea de fuerza  $\mathbf{E}$  y  $d\mathbf{r}$  son paralelos; luego:

$$V = \int_r^\infty E dr = \int_r^\infty \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_r^\infty \Rightarrow \boxed{V = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}} \Rightarrow \boxed{V = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r}}$$

El potencial en un punto del interior de dicha esfera ( $r \leq R$ ) vendrá dado por el trabajo realizado por el campo interior al transportar la unidad de carga desde el punto a la superficie de la esfera más el realizado por el campo exterior al transportarla de la superficie al infinito. Viene dado por:

$$V = \int_R^\infty \mathbf{E}_{ext} \cdot d\mathbf{r} + \int_r^R \mathbf{E}_{int} \cdot d\mathbf{r}$$

estas integrales son independientes del camino recorrido; haciendo el transporte de la unidad de carga a lo largo de una línea de fuerza  $\mathbf{E}$  y  $d\mathbf{r}$ , son paralelos; luego:

$$V = \int_R^\infty E_{ext} dr + \int_r^R E_{int} dr = \int_R^\infty \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} dr + \int_r^R \frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_R^\infty + \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_r^R \Rightarrow$$

$$\boxed{V = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} + \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[ \frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right]} \Leftrightarrow \boxed{V = \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi \epsilon_0 R^3}}$$

en ambos casos si hacemos  $r = R$ : 
$$V = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}$$

El potencial se hará máximo en el centro de la esfera y toma el valor ( $r = 0$ ):  $V = \rho R^2 / 2 \epsilon_0$ . Si la carga distribuida en la esfera fuese negativa, la gráfica del potencial, en la Fig. XVIII-38, sería la simetría respecto del eje  $r$ .

Podemos obtener el mismo resultado calculando, el potencial como función de  $r$  dentro y fuera de la distribución de carga. A continuación para obtener  $\mathbf{E}$  lo haremos calculando el  $\mathbf{grad} V$ ; en este caso, el procedimiento es más complicado que como lo hemos realizado.

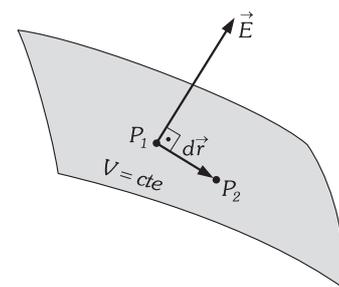


Fig. XVIII-37.– Superficies equipotencial.

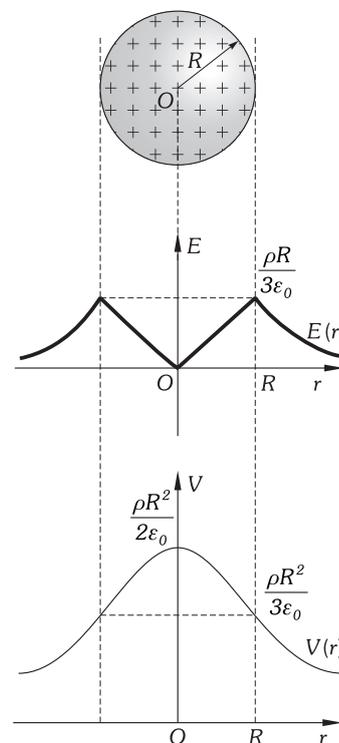


Fig. XVIII-38.– En una esfera uniformemente cargada, la intensidad  $E$  aumenta linealmente desde el centro a la superficie de la esfera y disminuye según la inversa del cuadrado de la distancia fuera de ella. El potencial  $V$  disminuye parabólicamente en el interior y disminuye según la inversa de la distancia fuera de ella.

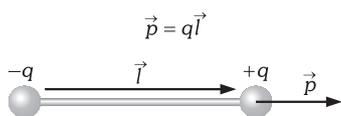


Fig. XVIII-39.- Dipolo eléctrico. Vector momento dipolar.

**XVIII – 32. Cálculo del potencial y del campo eléctrico que crea un dipolo eléctrico en un punto**

El dipolo eléctrico es un tipo de distribución que nos aparece frecuentemente en el estudio del electromagnetismo; volveremos a ocuparnos de él en el capítulo XIX.

Se llama **DIPOLO ELÉCTRICO** al sistema formado por dos cargas eléctricas puntuales, iguales y de signo contrario, unidas rígidamente y separadas entre sí una distancia pequeña  $l$  (Fig. XVIII-39).

Se define como «**MOMENTO DIPOLAR**» a la cantidad vectorial:

$$\mathbf{p} = ql$$

es decir: «Es un vector cuyo módulo es  $ql$ , dirección la definida por la recta que une las cargas, y sentido el que va de la carga negativa a la positiva».

Teniendo en cuenta la relación:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k}\right)$$

y como hemos dicho en muchas ocasiones, casi siempre será más fácil calcular primero el escalar  $V$  (potencial) en cualquier problema y después por derivación hacer el cálculo de  $\mathbf{E}$ .

En efecto: El potencial creado por el dipolo de la Fig. XVIII-40 en un punto  $P$  a distancias  $r_1$  y  $r_2$  de la carga positiva y negativa respectivamente será:

$$V = K_0 \left[ \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right]$$

Llamando  $r$  a la distancia desde el centro del dipolo ( $O$ ) hasta el punto  $P$ , y considerando que:  $r \gg l$ , podemos poner:

$$r_1 = r - \frac{l}{2} \cos \varphi \quad r_2 = r + \frac{l}{2} \cos \varphi$$

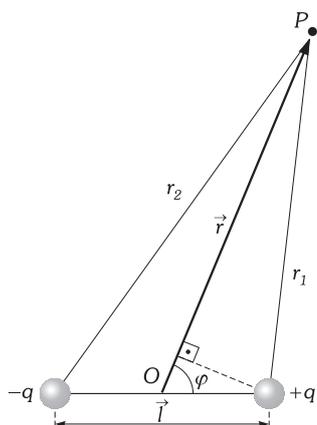


Fig. XVIII-40.- Las cargas  $+q$  y  $-q$  unidas rígidamente forman el dipolo eléctrico de momento dipolar  $\mathbf{p} = ql$ . El potencial en  $P$  será la suma de los potenciales debidos a las cargas individuales.

sustituyendo en  $V$ :

$$V = K_0 q \left[ \frac{1}{r - \frac{l}{2} \cos \varphi} - \frac{1}{r + \frac{l}{2} \cos \varphi} \right] = K_0 ql \frac{\cos \varphi}{r^2 - \frac{l^2}{4} \cos^2 \varphi}$$

y como  $r \gg l$  nos quedará después de eliminar el infinitésimo  $\frac{l^2}{4} \cos^2 \varphi$ :  $V = \frac{K_0 ql \cos \varphi}{r^2}$

teniendo en cuenta que:  $\mathbf{p} = ql \Rightarrow \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = ql \cos \varphi$ , nos queda:

$$V = K_0 \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

Obtendremos las componentes del campo por derivación:

$$\mathbf{E}_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} = -\left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( K_0 \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) \right] \mathbf{i} = -\left[ \mathbf{p} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \right] \mathbf{i} \tag{17}$$

sabemos que:  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , luego:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{r^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} - 3r^2 \frac{\partial r}{\partial x} \mathbf{r}}{r^6} = \frac{r\mathbf{i} - 3\frac{x}{r}\mathbf{r}}{r^4} = \frac{1}{r^3} \mathbf{i} - \frac{3x}{r^5} \mathbf{r}$$

multiplicando escalarmente por  $\mathbf{p} = p_x \mathbf{i} + p_y \mathbf{j} + p_z \mathbf{k}$  y teniendo en cuenta las propiedades de este producto nos queda:

$$\mathbf{p} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{p_x}{r^3} - \frac{3\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^5} x$$

Sustituyendo en (17) y generalizando para las demás componentes del campo:

$$\mathbf{E}_x = K_0 \left( \frac{3\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^5} x \mathbf{i} - \frac{p_x \mathbf{i}}{r^3} \right) \quad \mathbf{E}_y = K_0 \left( \frac{3\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^5} y \mathbf{j} - \frac{p_y \mathbf{j}}{r^3} \right) \quad \mathbf{E}_z = K_0 \left( \frac{3\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^5} z \mathbf{k} - \frac{p_z \mathbf{k}}{r^3} \right)$$

luego:

$$\mathbf{E} = K_0 \left( \frac{3\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right)$$

Los cálculos los hemos realizado refiriéndonos al centro del dipolo como origen; si tomamos otro punto cualquiera O (Fig. XVIII-41), realizaremos una traslación de ejes y las fórmulas serán las mismas sin más que sustituir  $\mathbf{r}$  por  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  y  $r$  por  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ .

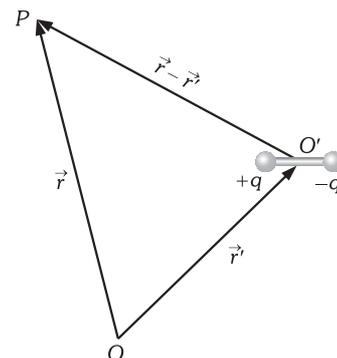


Fig. XVIII-41.- Cambio de sistema de referencia.

**XVIII - 33. Ecuación fundamental de la electrostática: ecuación de Poisson**

Hemos visto que el campo electrostático puede expresarse como menos el gradiente del potencial:  $\mathbf{E} = -\text{grad } V$ , además tenemos que la expresión del Teorema de Gauss en forma infinitesimal era:  $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ , de las dos, deducimos:  $\text{div } \text{grad } V = -\rho/\epsilon_0$ ; conviene considerar la  $\text{div grad}$  como un solo operador diferencial que se llama LAPLACIANO y se representa por  $\Delta$  ó  $\nabla^2$  empleando esta última notación, escribimos la anterior:

$$\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{ECUACIÓN DE Denis Simeón POISSON 1781-1840})$$

En coordenadas cartesianas esta ecuación es de la forma:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = - \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}$$

Si dada una determinada  $\rho$  y unas condiciones de contorno que permitan calcular las constantes de integración, resolvemos la ecuación, sus soluciones nos darán la función potencial  $V(x, y, z)$  creada por tal distribución, y calculando su gradiente conoceremos el campo electrostático en todo punto del espacio con lo cual habremos resuelto el problema fundamental de la electrostática, dada una distribución de carga calcular el campo que origina.

Por lo general la solución de la ecuación de Poisson es complicada, por lo cual su resolución se aparta del contexto del presente libro. El lector interesado puede consultar cualquier texto de Electromagnetismo donde está tratado este tema más ampliamente. No obstante se proponen dos casos particulares, en los que la resolución de la ecuación de Poisson es muy asequible.

**PROBLEMAS: 84 al 86.**

**E) ENERGÍA ASOCIADA A UN CAMPO ELÉCTRICO**

**XVIII - 34. Energía potencial de un sistema de cargas puntuales. Generalización para una distribución volumétrica continua. Energía asociada a un campo eléctrico**

Hemos visto que la energía potencial electrostática que poseen dos cargas puntuales  $q_1$  y  $q_2$  situadas a la distancia  $r_{12}$ , viene medida por el trabajo que se realiza al trasladar la carga  $q_1$  (o la  $q_2$ ) en presencia de  $q_2$  (de  $q_1$ ) desde el infinito hasta la distancia indicada en la distribución de la Fig. XVIII-42; su valor era:

$$U = K_0 \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

si  $q_1$  y  $q_2$  son del mismo signo, el trabajo se ha efectuado sobre el sistema (han de empujarse una hacia la otra) y por tanto es positiva. Dicha energía sería negativa si  $q_1$  y  $q_2$  fueran de distinto signo, lo que quiere decir que en este caso es el campo eléctrico el que realiza un trabajo positivo.

Supongamos ahora una distribución de tres cargas como indicamos en la Fig. XVIII-43. La energía que posee el sistema será el trabajo necesario para formar dicha configuración. Si tenemos  $q_1$  y traemos  $q_2$  el trabajo será el ya expresado en la fórmula anterior; a continuación traemos  $q_3$  el trabajo será:

$$K_0 \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + K_0 \frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$

luego el trabajo total o energía del sistema es: 
$$U = K_0 \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + K_0 \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + K_0 \frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$

generalizando para una distribución de cargas puntuales, la energía del sistema será:

$$U = \sum_i \sum_j K_0 \frac{1}{2} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (\# \quad j)$$

hemos puesto el término  $1/2$  porque los productos binarios  $q_i q_j$  y  $q_j q_i$  aparecen dos veces. Esta última ecuación la podemos escribir de la siguiente forma:

$$W = \int_{\infty}^{r_{12}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = K_0 \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

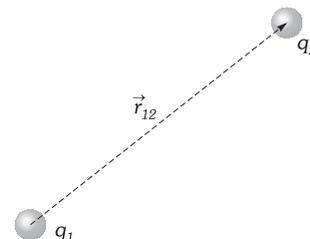


Fig. XVIII-42.- Energía potencial de dos cargas puntuales.

$$W = K_0 \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + K_0 \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + K_0 \frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$

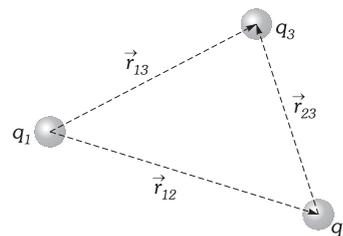


Fig. XVIII-43.- Energía que posee un sistema de tres cargas puntuales.

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i \left[ \sum_j K_0 \frac{q_j}{r_{ij}} \right] \quad (i \neq j)$$

en donde el término entre paréntesis es el potencial electrostático debido a todas las cargas excepto a la  $q_i$  en el punto donde ésta se encuentra, llamándolo  $V_i$  nos quedará:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$$

Si tenemos una distribución continua de carga definida por su densidad volumétrica  $\rho(\mathbf{r})$  en vez de la distribución discreta de cargas puntuales, la carga en cada punto  $P(x, y, z)$  será:  $dq = \rho dv$  y el potencial en ese punto será  $V(x, y, z)$  debido a todas las cargas excepto a  $dq$ , entonces la expresión de la energía asociada a la distribución nos quedará:

$$U = \frac{1}{2} \int_v V \rho dv \quad (18)$$

es evidente que el valor de  $U$  será el mismo si la integral la extendemos a todo el espacio en vez de al volumen  $v$  (que encierra todas las cargas) puesto que fuera de ese volumen  $\rho = 0$  y el integrando para esos puntos es nulo.

### XVIII – 35. Densidad de energía asociada a un campo eléctrico

La expresión diferencial de la (18) es:

$$dU = \frac{1}{2} V \rho dv \Rightarrow \frac{dU}{dv} = \frac{1}{2} V \rho$$

la cual nos indica una propiedad local del campo por la que podemos asociar a cada punto de él una magnitud escalar, que nos representa una densidad de energía por unidad de volumen. Vamos a relacionar esta energía potencial  $U$  con el campo eléctrico en cada punto debido a tal distribución; para lo cual tendremos en cuenta la ecuación de Poisson:  $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0 \Rightarrow \rho = -\epsilon_0 \nabla^2 V$ , que se cumple para todos los puntos del campo. Sustituyendo este valor en la anterior nos queda:

$$\frac{dU}{dv} = -\frac{1}{2} \epsilon_0 V (\nabla^2 V) \quad (19)$$

esta ecuación se puede simplificar empleando la identidad vectorial:

$$\nabla \cdot f \mathbf{a} = f (\nabla \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a} \cdot \nabla f$$

que admitimos sin demostración, y aunque ésta no es difícil, no aporta ningún concepto físico en su razonamiento; en ella  $f$  es una función escalar y  $\mathbf{a}$  una función vectorial. Si ponemos  $f = V$  y  $\mathbf{a} = \nabla V$ , obtenemos:

$$\nabla \cdot (V \nabla V) = V (\nabla \cdot \nabla V) + (\nabla V)^2 \Rightarrow V (\nabla^2 V) = \nabla \cdot (V \nabla V) - (\nabla V)^2$$

y como:  $\mathbf{E} = -\text{grad } V = -\nabla V$ , se obtiene:

$$V (\nabla^2 V) = -\nabla \cdot (V \mathbf{E}) - E^2$$

que sustituida en (19) nos queda:

$$\frac{dU}{dv} = -\frac{1}{2} \epsilon_0 [-\nabla \cdot (V \mathbf{E}) - E^2] \Rightarrow U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_v \nabla \cdot (V \mathbf{E}) dv + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_v E^2 dv \quad (20)$$

como la primera integral es nula (como demostraremos a continuación) nos queda para valor de la energía asociada a un campo eléctrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ :

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_v E^2 dv \quad (21)$$

y la expresión que nos mide la DENSIDAD DE ENERGÍA ASOCIADA A UN CAMPO ELÉCTRICO será:

$$u = \frac{dU}{dv} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

esto significa que en cada punto del espacio donde hay un campo eléctrico puede definirse una magnitud escalar positiva que representa la energía eléctrica por unidad de volumen. A partir de un campo eléctrico se llega a un campo de energía eléctrica.

Para demostrar que la primera integral de la expresión (20) es nula, primeramente apliquemos el teorema de la divergencia (Teorema de Ostrogradsky-Gauss, párrafo VII-10), transformándola en una integral de superficie que limita al volumen  $v$ , quedándonos:

$$\int_v \nabla \cdot (V \mathbf{E}) dv = \int_A V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

Como hemos dicho,  $v$  es cualquier volumen que encierra a la distribución, luego podemos libremente elegir la superficie límite  $A$  tomándola muy alejada del sistema; para el caso de monopolos eléctricos (sistema de cargas puntuales, párrafos XVIII-17 y 29. 3)  $\mathbf{E}$  decrece para la distribución como  $1/r^2$  y  $V$  también decrece como  $1/r$ , mientras que para los dipolos eléctricos (párrafo XVIII-32) la intensidad del campo eléctrico decrece como  $1/r^3$  y el potencial como  $1/r^2$ , y como el área de la superficie aumenta según  $r^2$ , el producto  $V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$  como mínimo disminuye según  $1/r^3$  y se puede hacer tan pequeña como se quiera tomando la superficie  $A$  lo suficientemente alejada, y su integral se anulará.

En el capítulo siguiente llegaremos a la expresión (21) por un método más sencillo, aunque menos formal.

**PROBLEMAS: 87 al 91.**

**PROBLEMAS**

**A) PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LA ELECTROSTÁTICA**

1. Calcular la carga que deben tener dos partículas para que colocadas en el vacío y a la distancia de 1 m se atraigan o repelan con una fuerza igual a 91,843 t.

2. Dos cuerpos cargados con 1 C se repelen entre sí en el vacío con una fuerza de 102 kp. ¿A qué distancia están uno de otro?

3. De uno de los platillos de una balanza se cuelga un cuerpo cargado con 1 000 UEE de carga positiva; en el otro platillo se pone una tara para equilibrar la masa del cuerpo. En estas condiciones se coloca debajo del cuerpo cargado otro también cargado positivamente, de forma que la distancia entre sus centros sea 1 m. Siendo la carga eléctrica de este último 0,0098 C, calcular qué pesa se debe poner en el platillo correspondiente al cuerpo para que la balanza siga en equilibrio. Considerar la permitividad del aire igual a la del vacío.

4. Un cuerpo de 100 g de masa está cargado con 9 800 UEE. ¿A qué distancia sobre él debe colocarse otro cuerpo cargado con 100 000 UEE de signo contrario, para que el primero no caiga por la acción de su peso? Se supone que la experiencia se realiza en el vacío.

5. Separamos los electrones de los protones de 1 mol de  $H_2$  y los situamos a una distancia de  $10^3$  km. Determinése la fuerza con que se atraen. (Carga del protón:  $1,6 \times 10^{-19}$  C. Número de Avogadro:  $6,02 \times 10^{23}$ .)

6. De dos esferas iguales de plomo de radio 1 cm, que se encuentran a 1 m de distancia, se le quita a la primera un electrón por átomo, que se traslada a la segunda esfera; determinar la fuerza con que ambas se atraen. (DATOS: Mas atómica del plomo: 207, su densidad 11,3 g/cm<sup>3</sup>, número de Avogadro:  $6,02 \times 10^{23}$ , carga del electrón:  $-1,6 \times 10^{-19}$  C.)

7. Dos partículas alfa están separadas una distancia de  $10^{-11}$  cm. Calcular la fuerza electrostática con que se repelen, la fuerza gravitatoria con que se atraen y comparar ambas entre sí. DATOS:  $K_0 = 9 \times 10^9$  N · m<sup>2</sup>/C<sup>2</sup>,  $e = 1,6 \times 10^{-19}$  C,  $G = 6,67 \times 10^{-11}$  N · m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>. Masa de una partícula  $\alpha$ :  $m = 6,68 \times 10^{-27}$  kg.

8. Calcular cuántas veces es menor la atracción gravitatoria que la repulsión electrostática entre dos núcleos de hidrógeno. DATOS: Masa del átomo de hidrógeno:  $1,67 \times 10^{-27}$  kg. Carga del núcleo de hidrógeno:  $1,6 \times 10^{-19}$  C. Constante de la gravitación:  $6,67 \times 10^{-11}$  N · m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>. Constante de la ley de Coulomb:  $9 \times 10^9$  N · m<sup>2</sup>/C<sup>2</sup>.

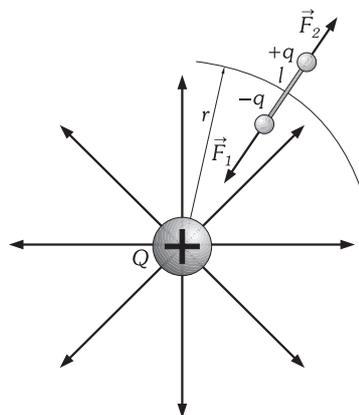
9. El modelo atómico de Bohr para el átomo de hidrógeno, supone que el electrón se mueve en órbita circular de  $5,28 \times 10^{-11}$  m de radio alrededor del protón, que lo retiene por efecto de las fuerzas eléctricas. Determinar: 1) El número de revoluciones por segundo que da el electrón ( $e = 1,6 \times 10^{-19}$  C;  $m = 9,1 \times 10^{-31}$  kg). 2) El momento angular del sistema. 3) El radio que tendría el átomo de hidrógeno, si su movimiento tuviera el mismo momento angular, pero fuera debido únicamente a las fuerzas gravitacionales (masa del protón:  $m' = 1,67 \times 10^{-27}$  kg).

10. Dos esferas iguales de radio 1 cm y masa 9,81 g están suspendidas del mismo punto por medio de sendos hilos de seda de longitud 19 cm. Ambas esferas están cargadas negativamente con la mis-

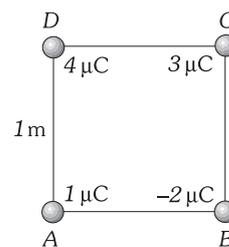
ma carga eléctrica en magnitud. ¿Cuánto vale esta carga si en el equilibrio el ángulo que forman los dos hilos es de 90°? ¿A cuántos electrones equivale la carga contenida en cada esfera? ¿Cuál es la fuerza de gravitación que existe entre las esferas en el equilibrio? Carga del electrón =  $1,6 \times 10^{-19}$  C.  $G$  = constante de gravitación universal =  $6,67 \times 10^{-11}$  N · m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>.  $K_0 = 9 \times 10^9$  N · m<sup>2</sup>/C<sup>2</sup>.

11. La fuerza con que se atraen dos cuerpos iguales cargados cuando se encuentran a una distancia de 3 m es de 1 N. Se ponen en contacto y la carga se distribuye por igual entre los dos cuerpos. Colocándolos a continuación a la misma distancia, se repelen con una fuerza de 2 N. Calcular la carga que inicialmente tenían los dos cuerpos.

12. Calcular la fuerza que actúa sobre un dipolo eléctrico de longitud  $l$  sumergido en el campo eléctrico creado por una carga  $Q$ . Suponer que  $r \gg l$  (ver figura).



Problema XVIII-12.



Problema XVIII-14.

13. Calcular la fuerza que actúa sobre una carga de 1 μC colocada en (0, 4) m debida a la siguiente distribución: en (0, 0), una carga  $Q_1 = -3$  μC; en (4, 0) m, una carga  $Q_2 = 4$  μC, y en (1, 1) m, una carga  $Q_3 = 2$  μC.

14. El cuadrado de la figura tiene 1 m de lado. Determinar la fuerza que actúa sobre la carga situada en el vértice C.

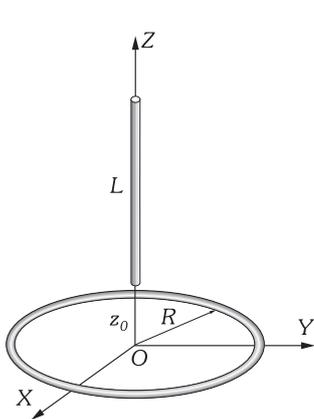
15. Dos cargas puntuales de  $-200$  y  $300$  μC se encuentran situadas en los puntos A (1, 2, 1) m y B (3, 0, 2) m, respectivamente. Calcular la fuerza que ejercen sobre una tercera de 100 μC situada en C (-1, 2, 3) m.

16. Una partícula de masa  $m$  y carga  $q$  se encuentra en el punto medio de la línea que une otras dos, cargadas con  $Q$ , fijas y situadas a una distancia  $r$  la una de la otra. La partícula  $m$  está obligada a permanecer en la línea que une las dos cargas  $Q$ ; si separamos de la posición de equilibrio estable a  $q$  una distancia  $A \ll r$ , determinar su período de oscilación.

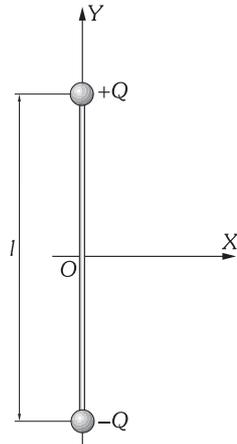
17. Calcular la fuerza que ejerce una varilla de longitud  $L$  cargada con una densidad lineal de carga  $\lambda$ , sobre una partícula cargada con  $q$  situada en la misma línea de la varilla y a una distancia  $a$  de su extremo.

18. Un anillo de radio  $a$  está cargado con una densidad lineal de carga uniforme  $\lambda$ . Colocamos en un punto de su eje, y a una distancia  $b$ , una carga  $q$ . Calcular, en función de estos datos, la fuerza que actúa sobre esta carga.

19. En el gráfico de la figura, el anillo se encuentra en el plano  $XY$  y la varilla en el eje  $Z$ , ambos están contruidos con un hilo muy delgado y están cargados positiva y uniformemente con una densidad lineal de carga  $\lambda$ . Determinar la fuerza que actúa sobre la varilla.



Problema XVIII-19.



Problema XVIII-27.

20. Determinar, aplicando la ley de Coulomb, la fuerza que actúa sobre una carga  $q$ , que se encuentra a una distancia  $a$  de un hilo que consideramos de longitud indefinida ( $L \gg a$ ), y que posee una carga positiva distribuida uniformemente; sabiendo que es  $\lambda$  su densidad lineal de carga.

**B) EL CAMPO ELÉCTRICO**

21. Una partícula de 5 g de masa cargada con  $1 \mu\text{C}$  queda en equilibrio en el espacio, dentro de un campo eléctrico. Calcular módulo, dirección y sentido de la intensidad de este campo eléctrico.

22. Calcular la distancia entre dos electrones situados uno encima del otro y en el vacío, para que el que está encima se encuentre en equilibrio al compensarse la fuerza gravitacional con la fuerza electrostática producida por el campo electrostático que crea el que se encuentra debajo. DATOS:  $K_0$ ,  $e$  y  $m$ .

23. Dos cargas eléctricas puntuales, la una,  $A$ , triple que la otra,  $B$ , están separadas  $1 \text{ m}$ . Determinar el punto en que la unidad de carga positiva estaría en equilibrio. 1) Cuando  $A$  y  $B$  tienen el mismo signo. 2) Cuando tienen signos opuestos.

24. Una varilla homogénea, aislante, rígida, de longitud  $L$  y masa  $M$ , tiene en sus extremos dos cargas  $+q$  y  $-q$  (iguales y de signos contrarios). Colgamos la varilla de un hilo sujeto a su punto medio y tal que no ejerce ningún par cuando se retuerce, y se coloca en un campo eléctrico uniforme horizontal de valor  $E$ . Calcular el período de movimiento que resulta al desplazar la varilla de su posición de equilibrio un ángulo muy pequeño alrededor del eje que contiene al hilo.

25. Un dipolo eléctrico es un sistema de dos cargas  $q$  iguales, de distinto signo y separadas una distancia fija  $L$ . Se coloca alineado paralelamente a un campo eléctrico a lo largo de eje  $X$ . El campo no es uniforme y varía linealmente a lo largo del eje  $x$ , siendo  $dE/dx = k$ . Determinar la fuerza que actúa sobre el dipolo.

26. Una carga puntual positiva de  $10^{-2} \mu\text{C}$  está situada en el origen de un sistema de coordenadas ortogonales. Otra carga puntual negativa de  $-2 \times 10^{-2} \mu\text{C}$  está sobre el eje de ordenadas y a  $1 \text{ m}$  del origen. Determinar la intensidad del campo eléctrico creado por una distribución en puntos: 1)  $A(2, 0)$  m 2)  $B(1, 3)$  m 3)  $C(1/2, 1/2)$  m 4)  $D(3, 4)$  m

27. Calcular la intensidad del campo eléctrico creado por el dipolo eléctrico de la figura en los puntos: 1)  $O(0, 0)$ . 2)  $P(x, 0)$ . 3)  $S(0, y)$ .

28. Una carga puntual positiva de  $10^{-2} \mu\text{C}$  se encuentra en el origen de un sistema de referencia. Determinar la intensidad del campo eléctrico creado por ella en punto  $P(2, -4, 5)$  m.

29. Una carga puntual positiva de  $10^{-2} \mu\text{C}$  se encuentra en el punto  $A(-1, 2, -1)$  m. Otra carga puntual negativa de  $-2 \times 10^{-2} \mu\text{C}$  se

encuentra en  $B(2, -2, 2)$  m. Determinar el campo eléctrico creado por esta distribución en el punto  $C(3, 4, 0)$  m.

30. Un hilo delgado posee una densidad de carga uniforme  $\lambda$  y está doblado en forma de semicircunferencia de radio  $R$ . Calcular el módulo, dirección y sentido del campo eléctrico en el centro de la semicircunferencia.

31. Determinar el campo eléctrico en un punto a una distancia  $a$ , situado sobre la mediatriz de una varilla muy delgada de longitud  $l$ , con una densidad de carga constante  $\lambda$ .

32. Un anillo de radio  $R$  está situado en el plano  $XY$  con su centro en el origen, está cargado con una densidad lineal de carga no uniforme:  $\lambda = \lambda_0 \sin \varphi$ ; en el punto  $P(R, 0)$ ,  $\lambda = 0$ . Calcular la intensidad del campo electrostático en el origen.

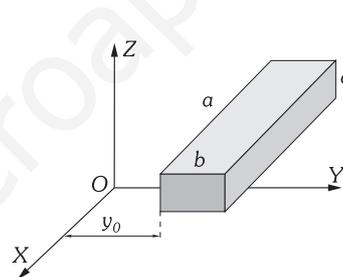
33. Determinar el valor del campo electrostático en el centro de una semiesfera cuya superficie está cargada uniformemente con una densidad superficial de  $1 \mu\text{C}/\text{cm}^2$ .

34. Hallar la ecuación de las líneas de campo que surgen de una carga puntual positiva.

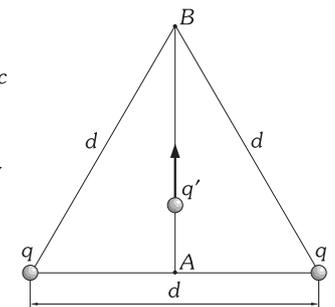
35. En el centro geométrico de un cubo de  $2 \text{ m}$  de arista tenemos una carga de  $50 \mu\text{C}$ . Calcular el módulo de la intensidad del campo en el centro de una cara y el flujo que atravesará a cada una de ellas. (El medio que se considera es el vacío.)

36. Deducir la ley de Coulomb para dos cargas puntuales  $q_1$  y  $q_2$  partiendo de la ley de Gauss.

37. En la superficie cerrada de la figura  $a = 0,5 \text{ m}$ ,  $b = 0,4 \text{ m}$ ,  $c = 0,3 \text{ m}$  e  $y_0 = 0,2 \text{ m}$ . El campo electrostático en que está sumergida no es homogéneo y viene dado en el SI por  $\mathbf{E} = (4 + 3y^2) \mathbf{j}$ . Determinar la carga neta encerrada en la superficie.



Problema XVIII-37.



Problema XVIII-46.

38. En un hilo largo y muy fino tenemos distribuida uniformemente una carga positiva. Sabiendo que  $\lambda$  es la carga por unidad de longitud del hilo, calcular la intensidad del campo eléctrico a una distancia  $r$  de él.

39. En dos hilos muy finos y muy largos tenemos distribuida uniformemente una carga positiva. Sabiendo que es  $\lambda$  la carga por unidad de longitud de ambos hilos, que están situados paralelos, y que se encuentran separados una distancia  $a$ ; calcular la fuerza por unidad de longitud con que se repelen.

40. Calcular la intensidad del campo eléctrico creado por una placa delgada, indefinida y uniformemente cargada con una densidad superficial de carga  $\sigma$ , en un punto fuera de ella.

41. Supongamos una distribución homogénea de carga sobre un conductor plano, indefinido y en equilibrio (en consecuencia el campo en su interior es nulo); siendo  $\sigma$  su densidad superficial de carga, calcúlese la intensidad del campo eléctrico creado por esta distribución en un punto.

42. Calcular la intensidad del campo eléctrico creado por un volumen cilíndrico muy largo de radio  $R$ , en el que se halla distribuida uniformemente una carga positiva, conociendo la carga por unidad de volumen  $\rho$ ; en puntos situados a una distancia  $r$  del eje en los casos siguientes: 1)  $r \leq R$ . 2)  $r \geq R$ .

43. Calcular la intensidad del campo electrostático producido por un volumen cilíndrico muy largo y de radio  $R$ , que tiene una densidad volumétrica de carga que varía con el radio según:  $\rho = \rho_0(a - br)$ , en la que  $\rho_0$ ,  $a$  y  $b$  son constantes y  $r$  es la distancia al eje del cilindro, en los casos siguientes: 1)  $r \leq R$ . 2)  $r \geq R$ .

44. ¿Puede el vector  $\mathbf{E} = (xz - 2x) \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$  ser un campo electrostático?

C) ENERGÍA POTENCIAL ELECTROSTÁTICA

45. Dos partículas de cargas  $q_1 = 2 \mu\text{C}$  y  $q_2 = 4 \mu\text{C}$ , se encuentran fijas en el vacío y están separadas una distancia de 30 cm. Si soltamos  $q_2$  determinar su energía cinética cuando partiendo del reposo se haya desplazado 20 cm.  $K_0 = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ .

46. Dos partículas con igual carga  $q = 0,1 \mu\text{C}$  están fijas en el vacío y separadas una distancia  $d = 1 \text{ m}$ . Otra partícula de carga  $q' = 2 \mu\text{C}$ , sobre la que sólo actúa el campo eléctrico de las anteriores, se desliza desde el punto A hasta el B de la figura, situados en el punto medio entre las dos cargas y en el punto que forma un triángulo equilátero con ambas, respectivamente. En el desplazamiento  $A \rightarrow B$ , ¿cuánto variará la energía cinética de  $q'$ ? ( $K_0 = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ ).

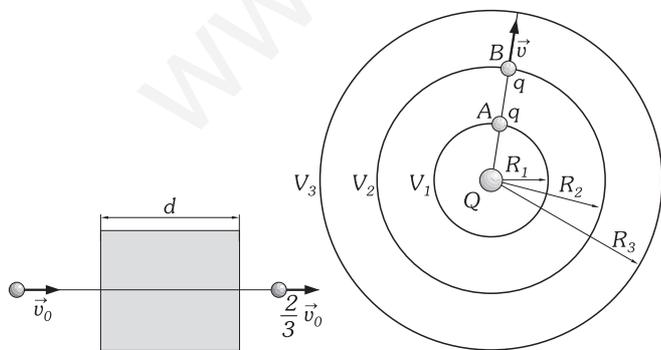
47. Una partícula con masa  $m = 8 \times 10^{-20} \text{ kg}$  y carga  $q = -2 \times 10^{-18} \text{ C}$ , describe órbitas circulares alrededor de otra partícula mucho mayor, de masa  $M = 4 \times 10^{-12} \text{ kg}$  y carga  $Q = 3 \times 10^{-10} \text{ C}$ , a la que suponemos inmóvil. La partícula pequeña tarda  $7,65 \times 10^{-10} \text{ s}$  en dar una vuelta completa. No tendremos en cuenta la atracción gravitatoria entre ambas ( $K_0 = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ ). 1) Calcular el radio orbital que describe la partícula pequeña. 2) Calcular la energía mecánica total que posee la partícula pequeña. 3) Razonar el porqué no se tiene en cuenta la interacción gravitatoria entre ellas ( $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ ).

48. En el modelo atómico de Bohr para el átomo de hidrógeno, se supone que el electrón se encuentra girando alrededor del núcleo, en órbita circular de  $0,53 \times 10^{-10} \text{ m}$  de radio ( $K_0 = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ ;  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ). Calcular: 1) La energía potencial electrostática del átomo de hidrógeno. 2) La ENERGÍA DE IONIZACIÓN del átomo de hidrógeno, es decir: la energía necesaria para separar el electrón del protón una distancia muy grande.

49. Un deuterón se dirige hacia un núcleo de hierro fijo ( $Z = 26$ ), desde una posición muy alejada, y con una velocidad de  $3 \times 10^5 \text{ m/s}$ . Determinar la distancia al centro del núcleo de hierro a la que el deuterón invierte el sentido de su movimiento. (Un deuterón tiene doble masa que el protón y posee la misma carga;  $m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ;  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ;  $K_0 = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ ).

50. Supón que junto a la superficie de la Tierra existe, además de su campo gravitatorio  $g = 10 \text{ N/kg}$ , un campo eléctrico uniforme dirigido en vertical y hacia arriba  $E = 10^4 \text{ N/C}$ . En esta región soltamos una partícula de masa  $m = 0,01 \text{ kg}$ , con velocidad inicial nula. 1) ¿Cuál debe ser su carga para que permanezca en reposo? 2) Si la carga de la partícula es doble que la calculada, ¿qué velocidad adquiere cuando ha ascendido 2 m respecto a su posición inicial?

51. La energía cinética que posee un electrón ( $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ) es de  $1,6 \times 10^{-17} \text{ J}$ , penetra en una región (sombreada en la figura) en la que existe un campo eléctrico uniforme y que tiene una anchura de  $d = 6 \text{ cm}$ . Observamos que el electrón atraviesa dicha región sin desviarse de su trayectoria rectilínea inicial, y que su velocidad a la salida es las dos terceras partes de la inicial. Determinar: 1) La velocidad inicial del electrón. 2) El vector intensidad del campo eléctrico dentro de esa región.



Problema XVIII-51.

Problema XVIII-61.

52. Se crea un campo eléctrico uniforme de intensidad  $6 \times 10^4 \text{ N/C}$ , entre las láminas de un condensador plano que distan 2,5 cm. Calcular: 1) La aceleración a que está sometido un electrón situado en dicho campo. 2) Partiendo del electrón del reposo, y de una de las láminas, ¿con qué velocidad llegará a la otra lámina? 3) ¿Cuál será entonces su energía cinética? 4) ¿Cuánto tardará el electrón en cruzar el espacio que separa ambas láminas?

53. Tenemos un campo eléctrico uniforme dirigido verticalmente de abajo hacia arriba cuya intensidad es de  $10^4 \text{ N/C}$ . 1) Calcular la fuerza ejercida por este campo sobre un electrón. 2) Comparar la fuerza anterior con el peso del electrón. 3) Calcular la velocidad que adquirirá un electrón en el campo anterior cuando haya recorrido 1 cm partiendo del reposo. 4) Calcular su energía cinética en el caso anterior. 5) Calcular el tiempo que necesita para recorrer 1 cm.

54. Calcular la trayectoria que seguirá una partícula de masa  $m$  y carga  $q$  que se mueve inicialmente con una velocidad  $v_0$  perpendicular a un campo eléctrico uniforme  $E$  y es afectada únicamente por él.

55. En ausencia del campo gravitatorio terrestre, lanzamos una partícula de masa  $m$  y carga  $+Q$  a una velocidad  $v_0$ , en el seno de un campo eléctrico  $E$  homogéneo, vertical y hacia abajo. La velocidad de lanzamiento forma un ángulo  $\varphi$  con la dirección horizontal. Calcular en función de estos datos: 1) Las ecuaciones del movimiento. 2) Ecuación de la trayectoria. 3) Alcance sobre la horizontal. 4) Altura máxima alcanzada por la partícula y la variación de la energía potencial electrostática en tal punto.

D) LA FUNCIÓN POTENCIAL

56. Entre dos puntos de un campo eléctrico uniforme (intensidad constante), de valor  $3000 \text{ N/C}$ , supuestos en la misma línea de fuerza, hay una distancia de 10 cm. Calcular la diferencia de potencial entre tales puntos.

57. Calcular la distancia que separa a dos puntos situados en la misma línea de fuerza de un campo eléctrico uniforme de intensidad  $300 \text{ V/m}$ , existiendo entre ellos la diferencia de potencial de 60 V. Calcular, también, el trabajo realizado al transportar de uno a otro una carga de 1,6 nC, suponiendo que tal carga no introduce modificaciones en el campo considerado.

58. El potencial a una cierta distancia de una carga puntual es 600 V, y el campo eléctrico es  $200 \text{ N/C}$ . 1) ¿Cuál es la distancia a la carga puntual? 2) ¿Cuál es el valor de la carga?

59. Se tienen dos cargas eléctricas puntuales de  $+2 \mu\text{C}$  y  $-5 \mu\text{C}$  colocadas a una distancia de 10 cm. Calcúlese el campo y el potencial en los siguientes puntos: 1) A 20 cm de la carga positiva, tomados en la dirección de la recta que une a las cargas y en el sentido de la negativa a la positiva. 2) A 20 cm de la negativa, contados en la misma dirección, pero de sentido de la positiva a la negativa. 3) ¿En qué punto de dicha recta el potencial es nulo?

60. En una región del espacio en donde existe un campo eléctrico uniforme, depositamos sin velocidad inicial una partícula de masa  $m$  y carga  $+q$  en un punto en donde el potencial vale  $V_1$ . En ausencia de campo gravitatorio, 1) Calcular la velocidad de la partícula cuando pasa por otro punto cuyo potencial es  $V_2$ , mayor que  $V_1$ . 2) Si el campo eléctrico no fuera uniforme pero los valores fueran los mismos, ¿sería diferente la respuesta del apartado anterior? Razonar la respuesta.

61. La figura nos representa las superficies equipotenciales esféricas a  $V_1 = 24 \text{ V}$ ,  $V_2 = 12 \text{ V}$  y  $V_3 = 8 \text{ V}$  con relación al infinito ( $V_\infty = 0$ ), de radios  $R_1 = 1 \text{ m}$ ,  $R_2 = 2 \text{ m}$  y  $R_3 = 3 \text{ m}$ , que produce una carga eléctrica  $Q$ . Si  $K_0 = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$  y no existe ningún otro campo más que el producido por dicha carga, calcular: 1) El valor y signo de la carga  $Q$ . 2) El trabajo que hace el campo eléctrico para llevar una carga puntual  $q = 1 \mu\text{C}$  que abandonamos en reposo en el punto A, hasta el punto B. 3) La masa de la partícula  $q$  si la velocidad que alcanza en B es  $v = 1 \text{ m/s}$ .

62. Un electrón es emitido por emisión termoiónica por un filamento caliente a potencial cero respecto a otro electrodo que se encuentra a un potencial de 1000 V. Este electrodo es un cilindro coaxial con el filamento. Calcúlese la velocidad adquirida por el electrón al llegar al cilindro exterior y su energía cinética en electronvoltios. (Masa del electrón:  $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ; carga del electrón:  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ).

63. Una placa conductora cargada positivamente crea en sus proximidades un campo eléctrico uniforme  $E = 1000 \text{ V/m}$ , tal y como se indica en la figura. Desde un punto de la placa se lanza un electrón con velocidad  $v_0 = 10^7 \text{ m/s}$  formando un ángulo  $\varphi = 60^\circ$  con dicha placa, de forma que el electrón describirá una trayectoria como la indicada en la figura. ( $K_0 = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ ,  $e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$  y  $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ .) 1) En el punto A, el más alejado de la placa, ¿con qué velocidad se mueve el electrón? Respecto al punto inicial, ¿cuánto ha variado su energía potencial electrostática? Calcular la distancia  $d$  entre el punto A y la placa. 2) Determinar la velocidad (módulo y orientación) del electrón cuando choca con la placa (punto B).

64. Un electrón se lanza horizontalmente, con una velocidad inicial de  $v_0 = 1000 \text{ km/s}$ , a lo largo de la dirección equidistante de las placas de un condensador plano, cuya longitud es  $l = 50 \text{ cm}$ , y sale por el otro

extremo, justamente por el borde de la placa positiva. El electrón cae sobre una pantalla fluorescente vertical situada a una distancia  $d = 50$  cm del borde de salida del condensador, sobre la que se mide un desplazamiento vertical del electrón  $h = 20$  cm. Se pide: 1) Valor del campo eléctrico existente entre las placas del condensador. 2) Diferencia de potencial entre dichas placas. 3) Desplazamiento vertical experimentado por el electrón justamente a la salida de las placas del condensador.

**65.** El potencial en un punto de coordenadas  $(x, y, z)$  queda determinado por la ecuación:  $V = -5x - 2y^2 + z^3$ , en la que  $x, y, z$  se expresan en metros y  $V$  en voltios. Determinar el campo eléctrico en el punto  $(3, 1, -1)$  m.

**66.** En cada uno de los vértices de la base de un triángulo equilátero de 3 m de lado hay una carga de  $3 \mu\text{C}$ . Calcular el campo y el potencial electrostático en el tercer vértice.

**67.** En tres vértices de un cuadrado de 1 m de lado existen cargas de  $10 \mu\text{C}$  cada una. Calcular: 1) La intensidad del campo eléctrico en el cuarto vértice. 2) El trabajo necesario para llevar una carga negativa de  $5 \mu\text{C}$  desde el cuarto vértice al centro del cuadrado en presencia de las otras tres.

**68.** Resolver el problema XVIII-26, calculando primero la función potencial y después deducir el campo eléctrico.

**69.** Una carga puntual, positiva, de  $10^{-9}$  C está situada en el origen de un sistema de coordenadas ortogonales. Otra carga puntual, negativa, de  $-2 \times 10^{-9}$  C está situada sobre el eje de coordenadas a 1 m del origen. Determinar: 1) Las intensidades de los campos eléctricos, creados por cada una de las cargas mencionadas, en el punto A, situado a 2 m del origen sobre el eje de las X. 2) Las componentes coordenadas del campo total existente en A. 3) El trabajo que es necesario realizar para trasladar 3 C de A a B, cuyas coordenadas son  $(4, 2)$  m. 4) Comprobar los resultados obtenidos calculando  $\mathbf{E}(x, y)$  por medio del potencial  $V(x, y)$  y aplicando  $\mathbf{E} = -\text{grad } V$ .

**70.** Una carga puntual positiva de  $2 \mu\text{C}$  está situada en el punto A  $(2, -1, 3)$  m y otra puntual negativa de  $-3 \mu\text{C}$  se encuentra localizado en B  $(3, 3, 5)$  m. Calcular el trabajo realizado por el campo eléctrico para trasladar  $-1 \mu\text{C}$  desde el punto C  $(1, 2, 1)$  m hasta el D  $(-2, 6, 4)$  m, en presencia de la distribución dada.

**71.** Resolver el problema XVII-28, calculando primero la función potencial y después deducir el campo eléctrico.

**72.** Resolver el problema XVII-29, calculando primero la función potencial y después deducir el campo eléctrico.

**73.** Calcular el potencial y el campo eléctrico creados por un dipolo eléctrico de longitud  $l$  en un punto. Supóngase que la distancia  $r$  del centro del dipolo al punto  $P$  es muy grande en comparación con  $l$ .

**74.** El momento dipolar de un dipolo eléctrico es  $4,8 \times 10^{-30}$  C · m y lo suponemos situado en el eje X de un sistema de referencia y coincidiendo su centro con el origen. Determinar el potencial y el campo eléctrico en el punto P  $(3,0 \times 10^{-9}, 1,0 \times 10^{-9})$  m.

**75.** El dipolo de la figura tiene un momento dipolar de  $3,45 \times 10^{-30}$  C · m; si  $r_A = 10^{-8}$  m,  $r_B = 10^{-7}$  m y  $\varphi = 30^\circ$ , determinar en eV el trabajo necesario para trasladar  $3,2 \times 10^{-19}$  C del punto A al punto B en presencia del dipolo.

cualquiera del espacio que le rodea. 2) El campo eléctrico en dicho punto y debido a tal distribución de carga.

**78.** Un anillo de radio  $R$  está cargado con una densidad de carga uniforme y lineal  $\lambda$ . Determinar: 1) El potencial en un punto de su eje. 2) El campo eléctrico en dicho punto y debido a tal distribución de carga.

**79.** Un disco plano de radio  $a$  está cargado uniformemente con una densidad superficial de carga  $\sigma$ . Calcular: 1) El potencial electrostático en un punto de su eje. 2) La intensidad del campo electrostático en dicho punto y debido a tal distribución de carga.

**80.** Calcular el campo y el potencial electrostáticos creados por una esfera conductora cargada con una carga  $Q$ . 1) En un punto exterior. 2) En su interior. 3) Representar gráficamente las funciones  $E = E(r)$  y  $V = V(r)$ .

**81.** Calcular el potencial creado por un volumen esférico de radio  $a$ , en el que se halla distribuida uniformemente una carga positiva, conociendo la carga por unidad de volumen  $\rho$ , en puntos situados a una distancia  $r$  del centro en los siguientes casos: 1)  $r \geq a$ . 2)  $r \leq a$ .

**82.** Calcular el potencial creado por un volumen cilíndrico de radio  $R$ , en el que se halla distribuida uniformemente una carga positiva, conociendo la carga por unidad de volumen  $\rho$ , en puntos situados a una distancia  $r$  del eje en los siguientes casos: 1)  $r > R$ . 2)  $r < R$ . (Tomar el potencial cero en la superficie del cilindro.)

**83.** Determinar la función potencial entre dos placas conductoras con densidades superficiales de cargas iguales y opuestas ( $\pm \sigma$ ), siendo la separación entre ellas  $d$  mucho menor que sus dimensiones (podemos considerar a las placas como infinitas), por lo que el campo eléctrico entre ellas podemos considerarlo como uniforme (excepto en las proximidades de los bordes).

**84.** Un campo electrostático viene dado en el SI por:  $\mathbf{E} = 6xy \mathbf{i} + (3x^2 - 3y^2) \mathbf{j}$ . Calcular el trabajo realizado al mover una carga puntual de  $10 \mu\text{C}$  desde O  $(0, 0)$  hasta el punto A  $(3, 2)$ .

**85.** Consideremos dos placas infinitas, paralelas, separadas una distancia  $d$  y a potenciales  $0$  y  $V_0$  respectivamente. En la región comprendida entre las placas existe una densidad volumétrica de carga  $\rho$  que es constante. Determinar el potencial y el campo electrostáticos en un punto cualquiera entre las placas.

**86.** Consideremos dos placas infinitas, paralelas, separadas una distancia  $d$  y a potenciales  $0$  y  $V_0$ , respectivamente. En la región comprendida entre las placas existe una densidad volumétrica de carga dada por:  $\rho = \rho_0 x/d$ , ( $\rho_0 = \text{cte}$ ) donde la distancia  $x$  se mide desde la placa a potencial cero. Calcular  $\mathbf{E}$  en cualquier punto entre las placas y el valor de las densidades superficiales de carga en cada placa.

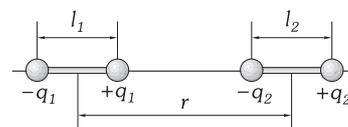
**E) ENERGÍA ASOCIADA A UN CAMPO ELÉCTRICO**

**87.** Tres cargas puntuales  $q_1 = 1 \mu\text{C}$ ,  $q_2 = -2 \mu\text{C}$  y  $q_3 = 3 \mu\text{C}$ , se encuentran alineadas de tal forma que la segunda está situada en el centro de las otras dos. Si la separación entre dos cargas consecutivas es  $0,5$  m, calcular: 1) La energía potencial electrostática de cada carga debida a las otras. 2) La energía potencial electrostática total del sistema.

**88.** En los vértices de un cuadrado de lado  $l$  hay cuatro cargas puntuales iguales de valor  $q$ , y una carga  $-q$  en su centro. Hallar la energía potencial electrostática de tal distribución.

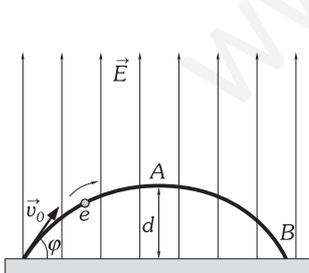
**89.** Tres cargas puntuales positivas  $q_1, q_2$  y  $q_3$ , se encuentran situadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado  $l$ ; las dejamos en libertad sucesivamente. Calcular: 1) La energía cinética final de la primera carga ( $q_1$ ) que se libera. 2) La energía cinética final de la segunda carga ( $q_2$ ) liberada (la carga  $q_1$  ya no está). 3) La energía cinética final de la última carga ( $q_3$ ) libre.

**90.** Demostrar que si dos dipolos eléctricos con momentos dipolares  $\mathbf{p}_1$  y  $\mathbf{p}_2$  se encuentran en la misma recta (ver figura), la energía potencial de uno en presencia del otro (ENERGÍA DE INTERACCIÓN) es:  $U = -2K_0 p_1 p_2 / r^3$ . Suponer que  $r$  es mucho mayor que la longitud de cualquiera de los dipolos.

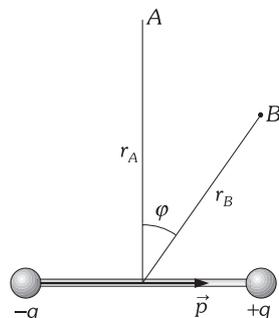


Problema XVIII-90

**91.** Determinar la energía potencial electrostática que posee una esfera de radio  $a$ , que se encuentra uniformemente cargada con una densidad volumétrica de carga  $\rho$ .



Problema XVIII-63.



Problema XVIII-75.

**76.** La función potencial electrostática en el SI viene dado por la expresión:  $V = 3x + (y^2/x) - 3yz + 35V$ . Calcular: 1) La fuerza que actúa sobre una carga puntual de  $200 \mu\text{C}$  localizada en el punto A  $(1, 2, 1)$  m. 2) El trabajo realizado por el campo eléctrico cuando desplazamos dicha carga del punto A al B  $(-1, 3, 2)$  m.

**77.** Una varilla delgada de longitud  $L$  tiene una carga uniforme definida por su densidad lineal  $\lambda$ . Calcular: 1) El potencial en un punto

# CAPÍTULO XIX

## EL CAMPO ELÉCTRICO EN LA MATERIA

### A) CONDUCTORES CARGADOS EN EQUILIBRIO. CAPACIDAD

#### XIX – 1. Sustancias conductoras y dieléctricas

Desde un punto de vista electrostático las sustancias pueden clasificarse en dos clases: CONDUCTORES, en los cuales las cargas eléctricas pueden moverse fácilmente de un lugar a otro y AISLADORES o DIELECTRICOS, en los cuales las cargas se mueven con tal dificultad que podemos considerarlas fijas, a lo sumo sus posiciones de equilibrio podrán sufrir ligeras modificaciones; decimos que en tales materiales la movilidad de los portadores de carga es nula.

La clasificación hecha para los materiales no es muy precisa puesto que no existen conductores perfectos ni dieléctricos perfectos, además para muchos materiales no se puede saber con exactitud a qué grupo pertenecen, tal como ocurre con los llamados «semiconductores» que serán objeto de estudio en el capítulo XXIX. Sin entrar en estos detalles, y para exponer de forma sencilla el estudio de las situaciones electrostáticas en los conductores, definimos al CONDUCTOR IDEAL que supondremos rígido y tal que en su interior las cargas pueden moverse libremente.

Todos los metales y algunas otras pocas sustancias, como el carbono, se acercan a las condiciones del conductor ideal, y sus propiedades eléctricas pueden explicarse considerando que un cierto número de electrones, aproximadamente uno por átomo del material, pueden moverse casi libremente por todo el volumen del sólido en lugar de estar ligados a su átomo correspondiente («nube de carga» que se asemeja a un «gas electrónico» dentro del volumen del sólido en funciones de recipiente). Los átomos que hayan perdido uno o más electrones, al tener un defecto de carga negativa, poseerán carga positiva, son llamados IONES y permanecen fijos en sus posiciones en la red cristalina.

Como los electrones en los cuerpos rígidos pueden moverse con mucha más facilidad que los iones positivos, cuando un sólido posee una carga positiva neta es debida, por lo general, a que en esa sustancia se han extraído electrones; el caso contrario será cuando posea un exceso de electrones.

#### XIX – 2. Distribución de la carga en un conductor electrizado en equilibrio

Sabemos que en un conductor las cargas pueden moverse libremente en su interior. Por tanto si un conductor cargado es sometido a un campo eléctrico sus cargas se moverán hasta alcanzar un estado de equilibrio. Diremos que el conductor está en equilibrio electrostático cuando sus cargas estén en reposo. Vamos a demostrar que en un conductor en equilibrio, sus cargas deberán estar necesariamente distribuidas sobre su superficie de tal manera que el campo eléctrico sobre su superficie sea normal a ella, y por tanto ésta sea una superficie equipotencial.

En efecto, supongamos que el conductor está cargado positivamente, podemos imaginar que su carga neta positiva es debida a un cierto número de cargas elementales que pueden moverse libremente en su interior. Estas cargas ejercen fuerzas repulsivas entre ellas que tienden a separarlas indefinidamente, pero si el volumen del conductor es finito, las cargas se moverán hasta llegar a la superficie de aquél, ya que suponemos que no pueden abandonarlo. Por esta razón la carga neta del conductor deberá estar distribuida sobre la superficie.

Esta conclusión no basta para asegurar el equilibrio electrostático, puesto que las cargas podrían moverse sobre la superficie. Supongamos que la carga  $q$  está sobre la superficie, y el campo existente es el  $\vec{E}'$  (Fig. XIX-1). La fuerza que actúa sobre ella es  $q\vec{E}'$  y la podemos descomponer en la dirección normal a la superficie y en la dirección tangente. La fuerza normal no produce ningún efecto sobre la carga, pues es anulada por las fuerzas cohesivas del material, pero la fuerza tangencial puede desplazar la carga sobre la superficie. Según esto, para que la carga permanezca en reposo es necesario que el campo eléctrico en los puntos de la superficie no tenga componente tangencial, es decir, que sea perpendicular a la superficie del conductor.

Debe tenerse en cuenta que el campo eléctrico al cual nos referimos es el campo eléctrico total, es decir, el creado por el propio conductor y el campo exterior que podría haber en algún caso. Aclaremos esto con un ejemplo.

Supongamos que un conductor de forma esférica no posee carga neta (no está electrizado, su carga positiva es igual a su carga negativa) y lo sometemos a un campo eléctrico uniforme exterior, como se ilustra en la Fig. XIX-2 a, inicialmente, las cargas, tanto positivas como negativas, estarán

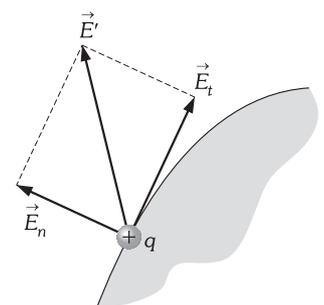


Fig. XIX-1.– Para que la carga  $q$  esté en equilibrio  $\vec{E}_t = \vec{0}$ .

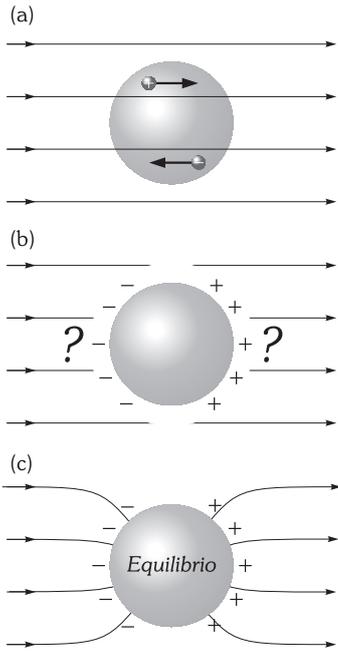


Fig. XIX-2.- Proceso que sigue un conductor esférico puesto en el interior de un campo eléctrico.

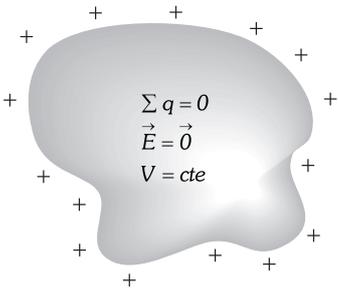


Fig. XIX-3.- En un conductor cargado en equilibrio el campo en su interior es nulo, las cargas se encuentran localizadas en su superficie y el potencial es constante constituyendo un volumen equipotencial.

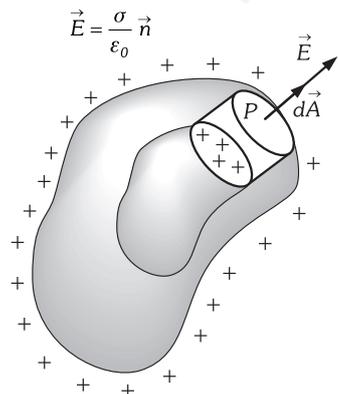


Fig. XIX-4.- Dentro de la «caja de píldoras» existirá una carga  $dq = \sigma dA$ .

distribuidas por el interior del conductor y al ser sometidas al campo las cargas libres (negativas) se desplazarán en sentido contrario al del campo, acumulándose en un lado del conductor y dejando en el lado opuesto una distribución de iones positivos sin compensar (Fig. XIX-2 b). Transcurrido un cierto intervalo de tiempo (muy corto en general) se habrá alcanzado el equilibrio, y por lo tanto el campo eléctrico deberá cortar normalmente a la superficie del conductor, por lo que en las proximidades de éste el campo dejará de ser uniforme, adquiriendo una forma como la de la Fig. XIX-2 c.

En el interior del conductor en equilibrio, el campo deberá ser necesariamente nulo, puesto que de lo contrario las cargas se moverán en su interior dejando de estar en equilibrio.

Podríamos demostrar de otra forma la distribución de la carga en la superficie de los conductores aplicando el teorema de Gauss. En efecto: si el conductor está en equilibrio el campo en el interior es nulo, luego el flujo que atraviesa la superficie del conductor (superficie cerrada) será también nulo, luego:

$$\phi = \oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \sum q_i = 0$$

no pudiendo existir carga neta en el interior del cuerpo y al estar éste cargado, la carga tendrá que estar localizada en la superficie (Fig. XIX-3).

### XIX - 3. Campo eléctrico en las proximidades de un conductor en equilibrio

En un conductor en equilibrio su carga neta debe estar distribuida sobre su superficie si está cargado, si no lo está y lo introducimos en un campo eléctrico exterior, sobre su superficie aparecen cargas positivas y negativas que hacen que el campo eléctrico sea normal a su superficie, siendo siempre su carga total cero. En ambos casos aparecen cargas superficiales, por lo que podemos hablar de una densidad superficial de carga, ya definida como:  $\sigma = dq/dA$ .

Tomemos un punto  $P$  muy próximo al conductor, como conocemos la dirección y sentido del campo, podremos aplicar el teorema de Gauss; para lo cual, elijamos una superficie circular  $dA$  a la que pertenece el punto  $P$ , como la de la Fig. XIX-4, en forma de «caja de píldoras», un cilindro recto de altura muy pequeña, y lo cerramos con una superficie cualquiera en masa conductora; aplicando a esta superficie cerrada el teorema de Gauss, obtenemos:

$$d\phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{dq}{\epsilon_0} \tag{1}$$

$dq$  es la única carga que existe en el interior de la superficie; su valor será:  $dq = \sigma dA$  que sustituida en (1) nos queda:

$$d\phi = \frac{\sigma dA}{\epsilon_0}$$

por otra parte, el flujo del campo eléctrico a través del área lateral del cilindro es nulo, pues éste es perpendicular a cualquier vector que define a los elementos de su superficie lateral, y el flujo a través de la superficie interior al conductor es también nulo, puesto que el campo interior es nulo. Luego el único flujo existente a través de toda la superficie cerrada es el que atraviesa  $dA$ , y como  $\mathbf{E}$  y  $d\mathbf{A}$  son paralelos, entonces:

$$d\phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E dA$$

igualando ambas expresiones del flujo nos queda:

$$\frac{\sigma dA}{\epsilon_0} = E dA \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

vectorialmente podemos expresar esta última de la forma:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n} \tag{TEOREMA DE COULOMB}$$

siendo  $\mathbf{n}$  el vector unitario en la dirección de la normal al conductor en el punto considerado.

### XIX - 4. Potencial de un conductor en equilibrio eléctrico

Si cada uno de los puntos de un conductor en equilibrio estuviera a un potencial diferente, en cualquier punto se verificará:  $\text{grad } V \neq 0$ . Pero hemos definido:  $\mathbf{E} = -\text{grad } V$  por lo que resultaría que  $\mathbf{E} \neq 0$  en un punto cualquiera del conductor, lo cual es falso si el conductor está en equilibrio. Es necesario pues que:  $\text{grad } V = 0$ . Luego  $V = cte$  en todo su volumen. Podemos concluir diciendo:

«Un conductor en equilibrio es un volumen equipotencial».

Consecuencia de esto es que la superficie de un conductor en equilibrio es una superficie equipotencial y por tanto las líneas de fuerza del campo deberán ser normales a ella, conclusión a la que ya habíamos llegado con otros argumentos.

**XIX - 5. Campo y potencial creado por una esfera conductora en un punto exterior**

Supongamos una esfera conductora en la que la carga se ha distribuido uniformemente sobre su superficie y un punto P exterior a ella a distancia r del centro. Con radio r tracemos una esfera concéntrica a la electrizada; el flujo a través de su superficie es:

$$\phi = \oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint_A E dA = E \oint_A dA = E 4\pi r^2$$

pasando de la primera igualdad a la segunda, considerando que el ángulo que forman E y dA es cero y por tanto el coseno es uno; de la segunda a la tercera considerando que, por simetría, el módulo del campo es constante en todos los puntos de la superficie esférica; de la tercera a la cuarta, teniendo en cuenta el valor de la superficie de una esfera. Si Q es la carga total localizada en la superficie de la esfera, la aplicación del teorema de Gauss conduce a:

$$\phi = E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} = K_0 \frac{Q}{r^2}$$

En cuanto al potencial lo obtenemos:

$$V = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^\infty E dr = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} \Rightarrow V = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r} = K_0 \frac{Q}{r}$$

Las dos ecuaciones obtenidas nos indican que el campo y el potencial producidos por una esfera uniformemente cargada en un punto exterior a ella, son los mismos que los que originaría su carga localizada en el centro de la esfera.

**XIX - 6. Potencial de un conductor esférico**

Puesto que todos los puntos de un conductor esférico en equilibrio eléctrico están al mismo potencial, calcularemos el potencial en un punto de su superficie y el resultado obtenido tendrá validez para todos sus puntos. La aplicación de la fórmula anterior conduce a:

$$V = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R} = K_0 \frac{Q}{R}$$

siendo Q la carga total del conductor y R su radio.

**XIX - 7. Capacidad. Unidades. Capacidad de un conductor esférico**

«CAPACIDAD de un conductor (C) es la relación entre su carga (Q) y su potencial (V)».

$$C = \frac{Q}{V}$$

Si un conductor cargado A se pone en comunicación con otros en estado neutro B, C, etc. (Fig. XIX-7), todos los conductores quedan al mismo potencial, por formar el conjunto un conductor en equilibrio; sin embargo, sus cargas son distintas, indicando que los cuerpos tienen distinta capacidad. Ocurre algo semejante cuando un vaso con un líquido se comunica con otros; el nivel es el mismo en todos los vasos cuando se llega al equilibrio, pero la cantidad de líquido en cada uno de ellos es distinta, indicando diversas capacidades.

Si en un vaso se duplica, triplica, etc., la altura del líquido, el volumen de éste se duplica, triplica, etc. Si a un conductor le duplicamos, triplicamos... el potencial, su carga se duplica, triplica, etc., es decir:

$$\frac{Q}{V} = \frac{Q'}{V'} = \frac{Q''}{V''} = C$$

En resumen, si tenemos un conductor alejado de la influencia de otros cuerpos y está cargado con la carga Q a un potencial V, al aumentar o disminuir Q, V aumenta o disminuye de tal manera que Q/V permanezca constante. A la relación Q/V se le llama capacidad del conductor.

Haciendo Q = 1 UEE y V = 1 UEE, entonces, C = 1 CENTÍMETRO (cm), que será la unidad de capacidad del sistema de UEE.

Si Q = 1 C y V = 1 V, entonces C = 1 FARADIO (F), que es la unidad de capacidad en el SI.

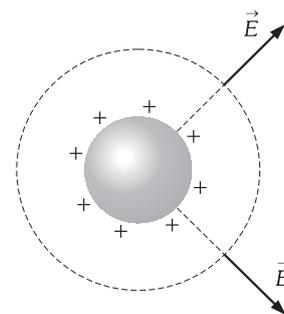


Fig. XIX-5.- Esfera conductora cargada en equilibrio.

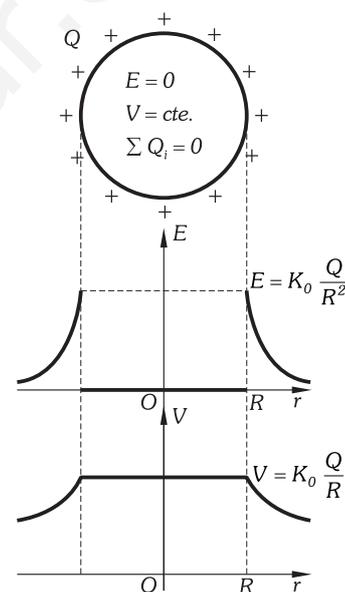


Fig. XIX-6.- Representación gráfica de las funciones E(r) y V(r) para una esfera conductora cargada en equilibrio.

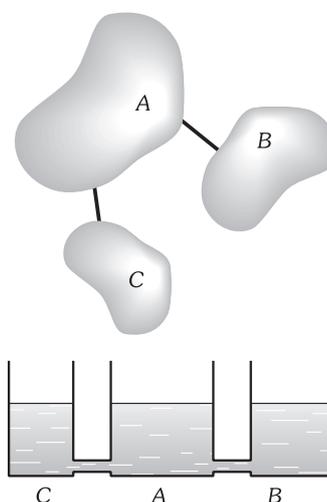


Fig. XIX-7.- Símil hidrostático con la capacidad eléctrica de un cuerpo.

$$1 F = \frac{1 C}{1 V} = \frac{3 \times 10^9}{1/300} \text{ UEE} = 9 \times 10^{11} \text{ cm}$$

En la práctica, el Faradio es excesivamente grande por lo que se emplean el microfaradio ( $10^{-6}$  F), el nanofaradio ( $10^{-9}$  F) y el picofaradio ( $10^{-12}$  F).

La capacidad de un conductor esférico aislado de toda influencia y en el vacío es, en UEE, el número de centímetros de su radio.

En efecto: sustituyendo en la fórmula de la capacidad, el valor hallado en el párrafo XIX-6, para el potencial en una esfera, obtenemos:

$$C = \frac{Q}{Q/4\pi\epsilon_0 R} = 4\pi\epsilon_0 R$$

si expresamos  $R$  en cm, al ser  $\epsilon_0 = 1/4\pi$ , se verifica:

$$C = R$$

Por tal motivo, se llama *centímetro* a la UEE de capacidad; al decir que un cuerpo tiene  $R$  centímetros de capacidad, afirmamos que tiene idéntica capacidad que una esfera de  $R$  cm de radio, aislada de toda influencia.

### XIX – 8. Energía potencial asociada a un conductor cargado en equilibrio

La energía potencial de un conductor cargado con carga  $Q$  y potencial  $V$  en equilibrio, cuando se encuentra aislado (fuera de la influencia de otros en sus alrededores), quedará medida por el trabajo que hay que realizar para trasladar desde el infinito ( $U_\infty = 0$ ) la carga necesaria para que quede con carga  $Q$  y potencial  $V$ , transporte que se realiza por una sucesión de infinitos transportes elementales de carga  $dq$ . Cuando el conductor se encuentra a un potencial  $V$  transportada una carga  $q$ , en una situación intermedia, para trasladar  $dq$  desde el infinito tendremos que realizar un trabajo:

$$dU = V dq = \frac{q}{C} dq$$

continuando el proceso hasta transferir la carga total  $Q$ , por lo que:

$$U = \int_0^Q dU = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

y como  $C = Q/V$ , podemos poner:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} Q V$$

**PROBLEMAS: 1 al 9.**

### XIX – 9. Ecuación de Laplace

Ya hemos considerado el problema fundamental de la electrostática, es decir el cálculo del campo eléctrico debido a las diversas distribuciones de carga; y hemos llegado en el capítulo anterior, en la resolución teórica de este problema, a la ecuación de Poisson:  $\nabla^2 V = \rho/\epsilon_0$ . En muchos problemas de electrostática en que intervienen solamente conductores, la carga se encuentra en la superficie de estos o en forma de cargas puntuales. En estos casos:  $\rho = 0$  y obtenemos:

$$\nabla^2 V = 0$$

que es la llamada ECUACIÓN DE Pierre Simon LAPLACE (1749-1827) que nos resuelve estos determinados problemas.

## B) FENÓMENOS DE INFLUENCIA

### XIX – 10. Fenómenos de influencia. Cargas inducidas sobre un conductor

Cuando en las proximidades de un conductor cargado (inductor) se sitúa un conductor en estado neutro (inducido), las partes de éste más alejadas del inductor se cargan con electricidad del mismo signo a la del conductor cargado, y las partes más próximas se cargan con cargas de signo contrario.

El fenómeno es debido a la atracción o repulsión que ejerce el conductor cargado sobre los electrones del neutro.

Debido a estos fenómenos de influencia, un conductor electrizado, atrae a un conductor ligero en estado neutro, ya que la atracción que ejerce sobre las cargas contrarias es mayor (menor distancia) que la repulsión sobre las cargas de su mismo signo (Fig. XIX-8).

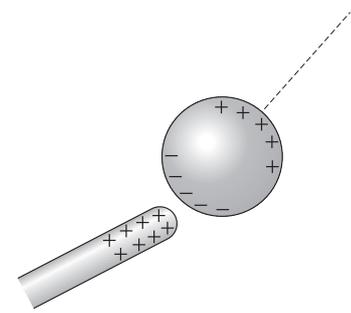


Fig. XIX-8.- Los electrones libres se acumulan a la izquierda del cuerpo neutro, quedando ionizados positivamente los átomos de la derecha.

**XIX - 11. Fuerza entre conductores. Presión electrostática. Propiedad de las puntas. Viento eléctrico**

Si se considera en un conductor cargado una pequeña superficie  $dA$ , las cargas del resto del conductor repelen a las de esta superficie, originando una fuerza hacia el exterior que, considerada por unidad de superficie, se llama PRESIÓN ELECTROSTÁTICA.

Para calcular el valor de esta fuerza es necesario conocer el valor del campo eléctrico sobre el elemento de superficie  $dA$  debido al resto de las cargas. Si es  $\sigma$  la densidad superficial de carga del conductor, según el Teorema de Coulomb, la intensidad del campo en el exterior del conductor es en módulo:  $E = \sigma/\epsilon_0$  y es normal a la superficie  $dA$ . Si llamamos  $E_1$ , al campo que producen las cargas del conductor exceptuando las de  $dA$  y  $E_2$  al campo debido exclusivamente a la carga  $dQ = \sigma dA$  contenida en  $dA$ , por el principio de superposición se cumplirá:

$$E = E_1 + E_2$$

Por aplicación del Teorema de Gauss calculamos la intensidad del campo eléctrico debido al elemento de carga  $\sigma dA$ , ya que el flujo total saliente es  $\sigma dA/\epsilon_0$ , mitad hacia afuera y mitad hacia adentro, según se indica en la Fig. XIX-9, resultando:

$$E_2 dA + E_2 dA = \frac{\sigma dA}{\epsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0}$$

dirigido también normal a  $dA$ ; con lo que  $E_1$  tendrá esta dirección, resultando:

$$E = E_1 + E_2 \Rightarrow E_1 = E - E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0}$$

por lo que la fuerza sobre las cargas localizadas en  $dA$ , debido al resto de las cargas del conductor será:

$$dF = E_1 dQ = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \sigma dA = \frac{\sigma^2}{2 \epsilon_0} dA$$

y el valor de la presión electrostática resulta:

$$p = \frac{dF}{dA} = \frac{\sigma^2}{2 \epsilon_0}$$

que escrita en función del campo neto  $E$  existente en la superficie, resulta:

$$p = \frac{dF}{dA} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

esta expresión es idéntica a la obtenida para la energía de la unidad de volumen en una región donde existe un campo eléctrico, párrafo XVIII-36.

Se podía haber obtenido el valor de la fuerza, a partir de la fórmula de la energía, sin más que permitir que las fuerzas eléctricas realicen un trabajo mecánico, suponiendo un desplazamiento para el elemento  $dA$  muy pequeño  $\delta$  (Principio de los Trabajos Virtuales), a costa de la energía almacenada en el volumen  $\delta dA$  del campo eléctrico, con lo que:

$$dW = \delta dF = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \delta dA \Rightarrow p = \frac{dF}{dA} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

«La densidad de energía del campo eléctrico es igual a la presión electrostática»\*.

Un razonamiento análogo al expuesto, para la determinación de la fuerza entre conductores, nos conduce a idénticas conclusiones, por lo que la expresión obtenida puede utilizarse para su cálculo.

Se ha obtenido que la presión existente sobre las cargas de un conductor es directamente proporcional al cuadrado de la densidad superficial, y será siempre positiva, por lo que tiende a im-

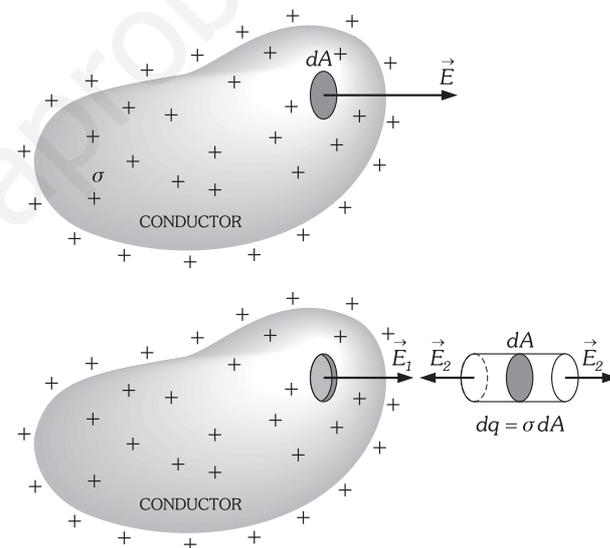


Fig. XIX-9.-  $\vec{E}$  es el campo neto existente en las proximidades de  $dA$ .  $\vec{E}_1$  es el campo debido a las cargas del conductor excluyendo las contenidas en  $dA$ .  $\vec{E}_2$  es el campo debido a las cargas contenidas en  $dA$ .

\* Para un gas contenido en un volumen determinado se emplea un razonamiento análogo, llegándose a la conclusión de que la densidad volumétrica de energía es igual a su presión.

pulsar a las cargas hacia fuera del conductor, independientemente de que su carga sea positiva o negativa.

Si de la forma que sea (luego veremos un procedimiento) conseguimos que un conductor quede con una carga positiva muy grande, antes de salir disparados los núcleos que constituyen el material conductor, para lo cual se necesita una gran energía, lo que ocurre es que el conductor capta los electrones de las moléculas de aire que le rodean (se «ionizan»), que quedan cargadas positivamente y que al ser repelidas por el conductor, producen el fenómeno llamado «VIENTO ELÉCTRICO». Para que ocurra este fenómeno, hace falta una gran carga, ya que el aire es un dieléctrico (aislante) muy fuerte, necesitándose para su ionización un campo eléctrico («POTENCIAL DE RUPTURA DEL AIRE O RIGIDEZ») de aproximadamente  $3 \times 10^6$  V/m, con lo que, por ejemplo, una esfera metálica de 1 m de radio, puede cargarse en el aire hasta que adquiere un potencial de  $3 \times 10^6$  V, y como  $V = K_0 Q/R$  admite como máximo una carga de unos 0,3 mC.

Si al conductor se le «meten» electrones, saldrán fácilmente del conductor, produciéndose el mismo fenómeno de «viento eléctrico»; el flujo de electrones así obtenido será objeto de estudio más adelante, en corriente eléctrica a través de los gases (capítulo XX).

Otro hecho de gran interés, es que en las puntas de un conductor cargado existe una gran presión electrostática; en efecto, veámoslo con un ejemplo: consideremos esferas cargadas conductoras de radios  $R_1 < R_2 < R_3 \dots$  cada una de ellas cargada con una carga  $Q$ . Tal carga estará uniformemente distribuida por su superficie de manera que las densidades superficiales de carga serán respectivamente:

$$\sigma_1 = \frac{Q}{4\pi R_1^2} \quad \sigma_2 = \frac{Q}{4\pi R_2^2} \quad \sigma_3 = \frac{Q}{4\pi R_3^2}$$

si  $R_1 < R_2 < R_3 \dots$ , implica que:  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \dots$ ; luego las presiones sobre las cargas en cada elemento de superficie de las esferas serán:

$$p_1 = \frac{\sigma_1^2}{2 \epsilon_0} \quad p_2 = \frac{\sigma_2^2}{2 \epsilon_0} \quad p_3 = \frac{\sigma_3^2}{2 \epsilon_0} \dots \Rightarrow p_1 > p_2 > p_3 \dots$$

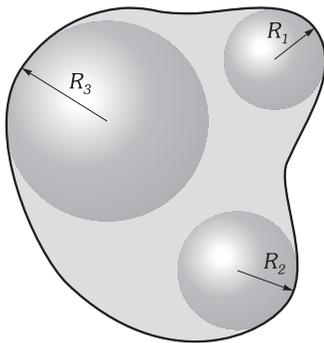


Fig. XIX-10.- Idea intuitiva de radio de curvatura.

Un cuerpo cualquiera lo podemos considerar como una superposición de esferas de distintos radios (idea intuitiva de lo que es el radio de curvatura, Fig. XIX-10). Si ese conductor está cargado, la presión será más intensa en los puntos cuya curvatura posea un radio menor, y por lo tanto la presión electrostática se hace máxima en las puntas (fundamento de los pararrayos, y del microscopio de ionización por campo mediante el cual pueden visualizarse los átomos de las capas superficiales de un metal).

**XIX - 12. Conductores en equilibrio con cavidades interiores. Teorema de Faraday. Generador de Van de Graaff**

«En un conductor cargado y en equilibrio electrostático, que posea una cavidad interior, la carga está localizada únicamente en la superficie exterior».

Demostremos primeramente que el campo eléctrico en el interior de la cavidad es nulo. Si el conductor posee una carga neta  $Q$  sabemos que deberá estar distribuida sobre su superficie, pero en este caso la superficie del conductor es la externa  $A_1$  y la interna  $A_2$  (Fig. XIX-11). Si la cavidad está vacía (no existe carga en su interior), veremos que no existe ninguna distribución de carga sobre la superficie interior. En efecto, tomemos una superficie arbitraria de integración  $A'$  interior al conductor y que rodee la cavidad, como en todos los puntos de  $A'$  el campo es nulo, por ser un conductor en equilibrio, el flujo a través de  $A'$  será nulo:

$$\oint_{A'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0 = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0} \Rightarrow \sum q_i = 0$$

luego la carga encerrada en  $A'$  es nula, según el teorema de Gauss.

Si reducimos la superficie de integración, hasta el límite que coincida con la superficie interna  $A_2$ , llegamos a la conclusión de que no existe carga neta sobre la superficie interior. Ahora bien, nada nos impide pensar que pueda existir una distribución de carga superficial, de tal manera que la carga total sea nula, es decir:

$$\oint_{A_2} \sigma dA = 0$$

con lo cual seguirá cumpliéndose lo anterior. Veamos que esto no puede ser, ya que si así ocurriera, existiría alguna línea de fuerza del campo que iría de alguna carga positiva a otra negativa, como la línea  $P_1 P_2$  de la Fig. XIX-12, indudablemente el campo en el interior de la cavidad sería no nulo. Consideremos la línea cerrada ( $C$ ) formada por la línea de fuerza  $P_1 P_2$  y otra cualquiera que vaya de  $P_2$  a  $P_1$  pero por el interior del conductor. Por ser el campo conservativo se verificará que:

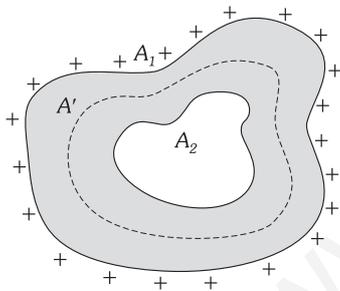


Fig. XIX-11.- En un conductor cargado en equilibrio eléctrico que posee una cavidad interior, la carga eléctrica está localizada en su superficie.

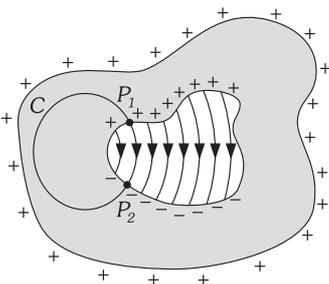


Fig. XIX-12.- Distribución imposible.

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

pero esta integral la podemos calcular así:  $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1(\text{por la cavidad})}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_{P_2}^{P_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$

siendo:  $\int_{P_2(\text{por el conductor})}^{P_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$

ya que  $\mathbf{E} = 0$  en el interior del conductor. Por otra parte, si  $\mathbf{E}$  y  $d\mathbf{r}$  son vectores paralelos, y  $d\mathbf{r}$  un elemento de línea de campo (Fig. XIX-13), se tiene:  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} > 0$ ; además, una suma (integral) de infinitos sumandos positivos no puede ser nunca cero, con lo que:

$$\int_{P_1(\text{por la cavidad})}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$$

llegamos así a que:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$$

lo cual es una contradicción, luego es necesario que el campo en el interior de la cavidad sea nulo y para que sea nulo es preciso que no exista ninguna distribución de carga en la superficie interior.

«Si se introducen una o varias cargas dentro de una cavidad, en el interior de un conductor en estado neutro, ésta se «refleja» en la superficie externa del conductor, es decir, aparece una carga neta igual a la introducida en la cavidad, sobre la superficie externa del conductor». (TEOREMA DE FARADAY)

En efecto: supongamos que el conductor no posee carga neta, excepto la introducida en la cavidad, y que está perfectamente aislado de la influencia de otros cuerpos. Sea  $+q$  la carga introducida. Supongamos también que se ha alcanzado el equilibrio electrostático. Tomemos tres superficies,  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  arbitrarias, tal como se ve en la Fig. XIX-14,  $A_1$  dentro de la cavidad, otra  $A_2$  que rodee a la cavidad y que sea interior al conductor y otra  $A_3$  que rodee externamente al conductor. Apliquemos el teorema de Gauss a cada una de ellas:

$$\oint_{A_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \oint_{A_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (2)$$

puesto que  $\mathbf{E} = 0$  en todos los puntos de  $A_2$  por estar en masa conductora. Y por último:

$$\oint_{A_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Para que se verifique el resultado (2), necesariamente en la superficie de la cavidad se ha tenido que «inducir» una carga  $q'$  tal que  $q + q' = 0 \Rightarrow q' = -q$ , es decir: en la superficie de la cavidad se ha reflejado una carga igual y de signo contrario.

Por otra parte si en la superficie interior ha aparecido una carga neta  $-q$ , la carga «no se ha creado», por el principio de conservación de la carga puede afirmarse que una carga  $+q$  deberá estar localizada en alguna parte del conductor, así la carga neta del conductor será  $+q - q = 0$ ; ya que trabajábamos con un conductor neutro. Como no puede estar localizada en el interior, ni tampoco sobre la superficie de la cavidad, sólo puede aparecer en la superficie exterior (Fig. XIX-15).

Obsérvese que si conectamos el conductor «a tierra» (Fig. XIX-16), es decir, lo sometemos a potencial cero, las cargas positivas de la superficie exterior emigran a los potenciales más bajos (son compensadas por electrones provenientes de tierra) quedando descargada dicha superficie.

Desde el punto de vista eléctrico el espacio interior a la cavidad queda «apantallado» del exterior, en el sentido de que si al dispositivo se le acerca otro conductor cargado (lo sometemos a un campo), el interior no se «enterará» de lo que ocurre en el exterior. Esto se conoce como «CAJA DE FARADAY» y se emplea para aislar de influencias eléctricas externas cualquier dispositivo eléctrico.

Hemos visto que si se introduce una bola cargada positivamente en el interior de un conductor esférico hueco, aparece en su superficie interna una carga igual y de sentido contrario, y en la externa se «refleja» la carga positiva introducida; haciendo que la bola introducida se ponga en contacto con la pared interior (Fig. XIX-17), ésta y la bola quedarán descargadas. Si retiramos la bola descargada y la introducimos nuevamente cargada, repitiendo el proceso tantas veces como se quiera, en principio será posible incrementar la carga de la esfera hueca,

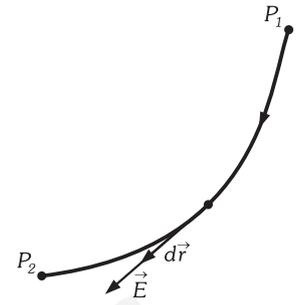


Fig. XIX-13.- Si  $d\vec{r}$  pertenece a una línea de campo,  $\vec{E} \cdot d\vec{r} > 0$  en el caso de la figura.

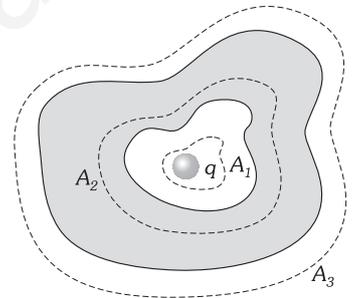


Fig. XIX-14.- Las tres superficies  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  son cerradas.

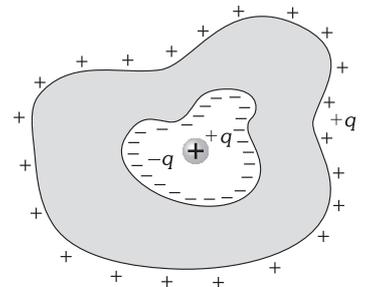


Fig. XIX-15.- La carga  $+q$ , en el interior, se «refleja» sobre la superficie exterior del conductor.

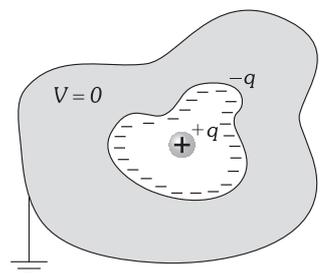


Fig. XIX-16.- Pantalla de Faraday.

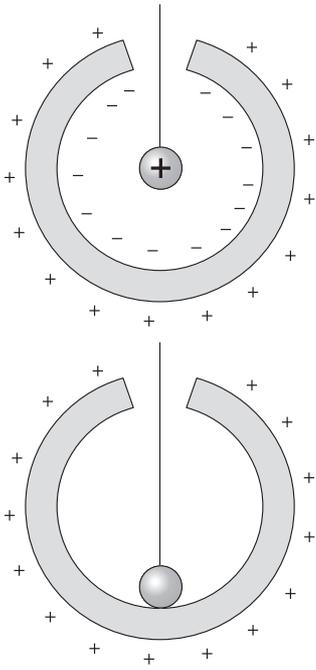


Fig. XIX-17.- Experiencia en la que está basado el generador de Van de Graaff.

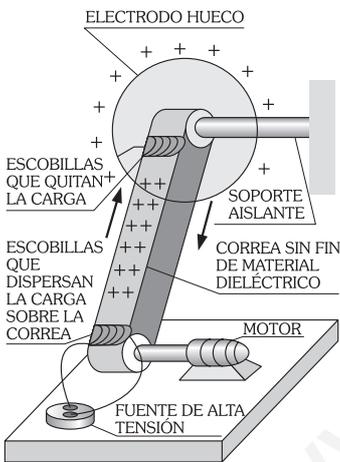


Fig. XIX-18.- Esquema del generador de Van de Graaff.

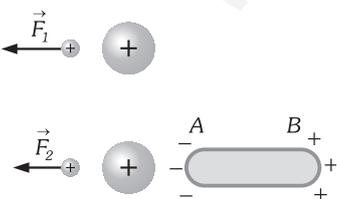


Fig. XIX-19.- Variación del potencial a causa de la inducción electrostática.

y por tanto su potencial, todo lo que queramos. En la práctica, este incremento está limitado, como ya se indicó en el párrafo anterior; la forma de aumentar el potencial de la esfera, sin alcanzar el campo eléctrico que produce la ionización del aire, será incrementar el radio del conductor esférico hueco, y también, colocándolo en el interior de un recipiente con gas a gran presión.

El diseño que hizo posible la construcción de un generador electrostático, entregando continuamente carga a un electrodo de alto voltaje (conductor esférico hueco), fue realizado en 1929 por Robert J. Van de Graaff (1901-1967) (Fig. XIX-18). Este generador, con el que se han podido producir potenciales del orden de  $2 \times 10^7$  V, ha hallado especial aplicación en la Física Nuclear (los protones acelerados a través de tensiones de este orden, tienen energía suficiente como para iniciar reacciones nucleares al chocar con otros núcleos que se empleen como blancos); también son utilizados para la producción de Rayos X muy penetrantes destinados al tratamiento de enfermedades malignas, para el estudio de fenómenos de altísima tensión, aislamiento, etc.

PROBLEMAS: 10 al 14.

C) CONDENSADORES

XIX - 13. Condensadores. Capacidad de un condensador

«Son sistemas de dos conductores, separados por un dieléctrico, en los que se verifica un aumento de capacidad por fenómenos de influencia total» (todas las líneas de fuerza que parten de uno de los conductores deben llegar al otro). Ello permite que los conductores almacenen una gran carga, para pequeñas diferencias de potencial.

Así, un condensador consta de dos armaduras metálicas: COLECTORA y CONDENSADORA; la primera con carga positiva y un mayor potencial que la segunda, en la que existe, en su superficie influida, una carga igual pero de signo contrario.

«CAPACIDAD DE UN CONDENSADOR es la carga que adquiere la armadura colectora al establecer entre las dos la diferencia de potencial unidad».

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

TEORÍA DE LOS CONDENSADORES. El trabajo necesario para transportar la unidad de carga positiva (venciendo a las fuerzas del campo) desde el infinito a un conductor, mide el potencial de éste (Fig. XIX-19).

Si se coloca el conductor cargado en las proximidades de otro neutro, cargándose éste por inducción, se verifica que la fuerza en el transporte de la unidad de carga positiva es menor que antes, puesto que se origina sobre tal carga una atracción de A mayor que la repulsión que origina la región B, por estar ésta última zona a mayor distancia de la carga unidad. Al hacerse menor la fuerza de repulsión, el trabajo realizado en el transporte es menor y el potencial del cuerpo cargado, disminuye. Como la carga es constante, al ser  $C = Q/V$ , la disminución del potencial implica un aumento de la capacidad.

La capacidad es, por lo tanto, una magnitud característica no solo del cuerpo, sino que está influenciada por la naturaleza y posición de los cuerpos que le rodean. Para un mismo cuerpo, la capacidad permanece constante si los cuerpos que le rodean no cambian de posición y no hay modificaciones en el medio.

En la experiencia de la Fig. XIX-19 la capacidad del cuerpo aislado de toda influencia es C; al aproximarse el cuerpo AB el valor de C aumenta hasta hacerse C' (C' > C). Mientras los dos cuerpos conservan la posición relativa de la parte inferior del dibujo y no hay modificaciones del medio, la capacidad del primero será C', aunque modifiquemos la carga o el potencial de cualquiera de los cuerpos o de los dos.

Obedeciendo a lo anterior se verificará que si una de las armaduras de un condensador está unida a un generador productor de un potencial constante, el aumento de capacidad implica un aumento de carga ( $Q' = C' V$ ) y las armaduras adquieren una mayor cantidad de carga, con el mismo potencial, por el hecho de estar una en presencia de la otra.

XIX - 14. Condensador plano. Condensador esférico

Un CONDENSADOR PLANO es un sistema formado por dos láminas metálicas planas cuya distancia es pequeña comparada con sus dimensiones (Fig. XIX-20). Su capacidad es:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

siendo A la superficie de cada armadura y d la distancia entre ellas.

En efecto: existiendo en las armaduras del condensador cargas iguales y de signo contrario, se origina entre ellas un campo prácticamente uniforme y de valor:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

para demostrar esta fórmula basta reproducir el razonamiento que nos sirvió para demostrar el teorema de Coulomb, considerando una superficie  $dA$ , en la parte central de la lámina.

En realidad el campo tiene una pequeña distorsión en los bordes del condensador, tanto menor, cuanto más próximas están las armaduras, y que consideramos nula en nuestro razonamiento. La diferencia de potencial entre ambas armaduras es:

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 E dr = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_1^2 dr = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

pasamos del segundo al tercer miembro considerando un transporte de la carga unidad a lo largo de una línea de fuerza (ángulo entre  $E$  y  $dr$ , cero y el coseno es 1). La carga de la armadura positiva es:

$$Q = \int_A \sigma dA$$

y considerando a  $\sigma$  prácticamente constante en todos los puntos de las armaduras:

$$Q = \sigma \int_A dA = \sigma A$$

La capacidad del condensador es:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{A \sigma}{\sigma d / \epsilon_0} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Modificando la superficie de condensación (superficie de una armadura frente a la otra) se obtienen condensadores o asociaciones de condensadores de capacidad variable (Fig. XIX-21).

**CONDENSADOR ESFÉRICO.** Un condensador esférico está compuesto por dos esferas concéntricas, la interior de radio  $r_A$ , y la exterior (hueca) de radio interior  $r_B$  (Fig. XIX-22). Cargamos la esfera pequeña con carga  $+Q$ , en la superficie interior de la esfera hueca se induce una carga  $-Q$ ; el campo eléctrico entre las dos es el mismo que el debido a una carga puntual  $Q$  situada en el centro de ambas (como se ha visto, la carga de la corteza exterior no contribuye al campo eléctrico en el interior y por tanto no se necesita conocerlo en la región  $r < r_A$  ni en  $r > r_B$ ), el campo en la zona intermedia toma el valor:

$$E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \Rightarrow V_A - V_B = \int_A^B \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right] \Rightarrow C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{4\pi \epsilon_0}{\left[ \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right]}$$

**XIX - 15. Asociación de condensadores**

**ASOCIACIÓN EN PARALELO O DERIVACIÓN:** se realiza con la unión de todas las armaduras colectoras y condensadores entre sí (Fig. XIX-23). «La capacidad del sistema es igual a la suma de las capacidades asociadas».

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

En efecto: el potencial de las armaduras colectoras es el mismo ( $V_1$ ) por estar unidas formando un solo conductor en equilibrio; asimismo el potencial de todas las condensadoras es  $V_2$  y común a todas ellas, con lo que:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= C_1 (V_1 - V_2) \\ Q_2 &= C_2 (V_1 - V_2) \\ \dots & \\ Q_n &= C_n (V_1 - V_2) \end{aligned} \right\} Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n = (C_1 + C_2 + \dots + C_n) (V_1 - V_2)$$

El condensador equivalente (Fig. XIX-23 inferior), que almacena la carga total de la asociación con la misma diferencia de potencial, tiene una capacidad:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad \text{c.q.d.}$$

**ASOCIACIÓN EN SERIE:** se realiza uniendo las armaduras de cada condensador con la condensadora y colectoras del anterior y del siguiente, quedando las dos terminales, funcionando como armaduras del conjunto (Fig. XIX-24). «La inversa de la capacidad del sistema es la suma de las inversas de las capacidades asociadas».

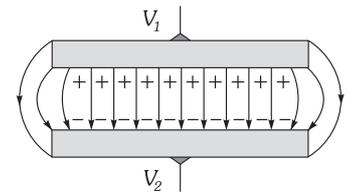
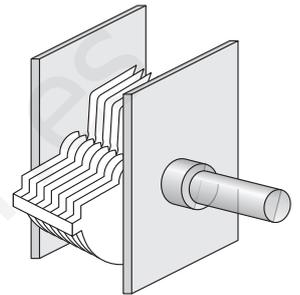


Fig. XIX-20.- Condensador plano.



c.q.d.

Fig. XIX-21.- Condensador de capacidad variable.

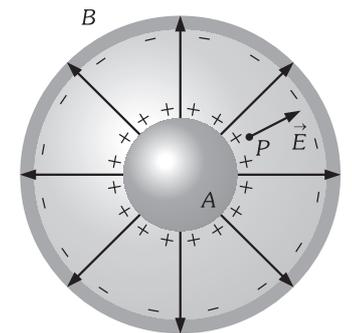


Fig. XIX-22.- Condensador esférico.

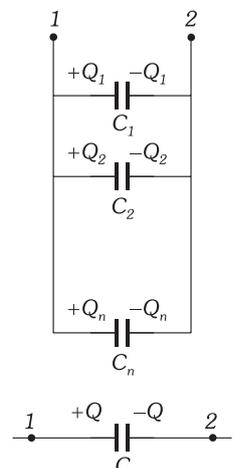


Fig. XIX-23.- Asociación de condensadores en paralelo o derivación.

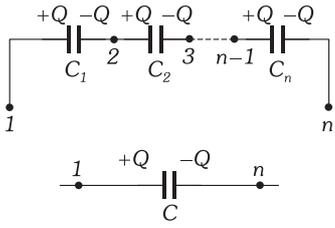


Fig. XIX-24.- Asociación de condensadores en serie.

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

En efecto: el potencial de cada armadura es el mismo que el de la armadura con que se asocia (forman un conductor único en equilibrio). La carga de todas las armaduras es la misma, puesto que la primera produce por inducción en la segunda una carga igual a la suya y de signo contrario, y en la tercera una carga igual y de su mismo signo (puesto que inicialmente el conductor 2 se encontraba en estado neutro, y para que se verifique el principio de conservación de la carga, en la primera armadura del segundo condensador tendrá que aparecer una carga igual y de signo contrario a la que aparece en la segunda lámina del primer condensador), la tercera obra sobre la cuarta y quinta y así sucesivamente, con lo que:

$$\left. \begin{aligned} V_1 - V_2 &= \frac{Q}{C_1} \\ V_2 - V_3 &= \frac{Q}{C_2} \\ \dots & \\ V_{n-1} - V_n &= \frac{Q}{C_n} \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_1 - V_n = Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right)$$

y el condensador equivalente (Fig. XIX-24 inferior), que en este caso almacena la carga Q cuando se conecta a la diferencia de potencial total, tiene una capacidad tal que:

$$\frac{1}{C} = \frac{V_1 - V_n}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad \text{c.q.d.}$$

Se usan las asociaciones en derivación o en serie, para obtener capacidades mayores o menores respectivamente que las componentes.

**XIX – 16. Energía de un condensador cargado**

Queda medida por el trabajo que habría que realizar para llevar de una a otra armadura la carga necesaria para conseguir que quedasen al final con las cargas +Q y -Q, transporte realizado por una sucesión de infinitos transportes de cargas elementales. Supuesta una de las armaduras en contacto con tierra (potencial cero), si el potencial en una situación intermedia es V y la carga de tal armadura en ese momento es q, el trabajo elemental realizado en el paso de la carga dq de una a otra armadura es:  $dW = V dq$ , y la energía del condensador:

$$U = \int_0^Q V dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Considerando una diferencia de potencial  $V_1 - V_2$  entre las armaduras, el resultado es el mismo, y sustituyendo Q o C por sus valores deducidos de la fórmula de la capacidad de un condensador [ $C = Q/(V_1 - V_2)$ ], obtenemos:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q (V_1 - V_2) = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2$$

**XIX – 17. Densidad de energía del campo electrostático en el vacío**

La energía de un condensador (U) queda localizada en el espacio donde existe el campo eléctrico que produce. Supongamos un condensador plano; sustituyamos en su fórmula de la energía los valores de la diferencia de potencial ( $V_1 - V_2 = Ed$ ) y la capacidad ( $C = \epsilon_0 A/d$ ) y se obtiene:

$$U = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2 = \frac{E^2 d^2}{2} \frac{\epsilon^2 A}{d} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 A d = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 v$$

siendo  $v = Ad$ , el volumen comprendido entre las láminas. Suponiendo el campo limitado a tal volumen exactamente, la energía por unidad de volumen o DENSIDAD CÚBICA DE ENERGÍA es:

$$u = \frac{U}{v} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

esta expresión, obtenida para un caso particular, es general, y nos mide la energía almacenada en la unidad de volumen en el interior de un campo eléctrico en el vacío, como ya se vio en el párrafo XIX-36.

**PROBLEMAS: 15 al 40.**

## D) DIELÉCTRICOS. POLARIZACIÓN

## XIX – 18. Dieléctricos. Capacidad de un condensador plano con un dieléctrico entre sus armaduras. Constante dieléctrica del medio

Recuérdese que las sustancias se pueden clasificar en dos grandes grupos: *conductores* y *aisladores* o DIELÉCTRICOS, según sea su comportamiento eléctrico. En los cuerpos conductores perfectos, que coinciden con gran aproximación con los metales, al ser sometidos a un campo eléctrico, los electrones se mueven hasta que se anula el campo eléctrico en su interior. En los dieléctricos, las cargas no tienen libertad de movimiento y los electrones están fuertemente ligados a sus moléculas; veremos que al ser introducidos en un campo eléctrico pueden sufrir pequeños desplazamientos en torno a su posición de equilibrio.

De la misma manera que no existen materiales conductores perfectos, tampoco existen aislantes perfectos, pero sí con una conductividad tan pequeña, que será despreciable en primera aproximación.

Michel Faraday (1791-1867) fue el primero en comprobar que al introducir un material dieléctrico llenando el espacio entre las armaduras de un condensador, su capacidad aumenta en un factor  $\epsilon'$  mayor que uno, que depende solamente de la naturaleza del material aislador. A ese valor  $\epsilon'$  se le llama «CONSTANTE DIELÉCTRICA DEL MEDIO».

Podemos comprobar esta afirmación, tomando un condensador plano cuyas armaduras tengan un área  $A$  separadas una distancia  $d$  (Fig. XIX-25), inicialmente hacemos el vacío en su interior y entonces su capacidad será:  $C_0 = \epsilon_0 A/d$ , conectando este condensador a una fuente de tensión  $V_0$  adquirirá una carga  $Q_0$  de tal forma que:  $C_0 = Q_0/V_0$ . Desconectamos de la fuente de alimentación y lo mantenemos aislado en el espacio e introducimos un material dieléctrico llenando el espacio entre sus armaduras, por el hecho de meter el dieléctrico entre las placas la carga de cada armadura no puede sufrir modificación alguna ni tampoco habrá habido transferencia de carga de una armadura a otra, ya que en el interior del aislante no pueden moverse las cargas. Medida la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador con el dieléctrico en su interior y cargado con la misma carga que cuando estaba el vacío, obtenemos un potencial  $V$  menor que el que teníamos anteriormente  $V = V_0/\epsilon'$  ( $\epsilon' > 1$ ), luego si el potencial ha disminuido permaneciendo la carga constante, la capacidad necesariamente ha tenido que aumentar en la misma proporción,  $C = Q_0/V = \epsilon' C_0$ .

Si no se desconecta el condensador de la fuente de alimentación (Fig. XIX-26) y se introduce el dieléctrico, permanecerá constante el potencial entre sus armaduras ( $V_0$ ), aumentando la capacidad en el mismo valor que en la primera experiencia:  $C = \epsilon' C_0$  ( $\epsilon' > 1$ ) con lo que la carga ha tenido que aumentar:  $Q' = \epsilon' Q_0$ .

*A la relación que existe entre las capacidades de un mismo condensador, cuando entre sus armaduras existe tal sustancia o el vacío se le llama CONSTANTE DIELÉCTRICA DEL MEDIO (o permitividad de una sustancia con relación al vacío, PERMITIVIDAD RELATIVA).*

$$\epsilon' = \frac{C}{C_0}$$

luego podemos poner para la capacidad del condensador plano con dieléctrico llenando sus armaduras:

$$C = \epsilon' C_0 = \frac{\epsilon' \epsilon_0 A}{d}$$

Podemos comprobar que tomando un condensador de distintos parámetros geométricos ( $C'_0$  de capacidad cuando entre sus armaduras está el vacío) y realizando la misma experiencia, introduciendo entre sus armaduras la misma sustancia ( $C'$  de capacidad con el dieléctrico), la relación existente entre las capacidades sigue siendo  $\epsilon'$ , con lo que se intuye una característica especial de los aisladores o dieléctricos inherente a su estructura material.

Ya expresamos que la PERMITIVIDAD es el producto de la permitividad del vacío por la de la sustancia con relación al vacío:

$$\epsilon = \epsilon' \epsilon_0$$

En el primer ejemplo que se ha puesto, en el cual permanecía constante la carga  $Q_0$ , el potencial se reduce de  $V_0$  a  $V_0/\epsilon'$ , y como el campo eléctrico entre las placas del condensador con vacío entre ellas es  $E_0 = V_0/d$ , cuando se introduce el dieléctrico será:  $E = V/d = V_0/\epsilon' d = E_0/\epsilon'$ , quedando disminuido en el mismo factor que el potencial. A pesar de que el campo se reduce en un aislador, no llega a tomar el valor cero como ocurría en los conductores.

En el caso en que se ha hecho permanecer constante el potencial ( $V_0$ ) entre las placas del condensador plano cuando le introducimos el dieléctrico, el campo eléctrico entre ellas sigue siendo  $E_0 = V_0/d$  y las cargas libres en las armaduras del condensador aumentan de tal forma que anulan

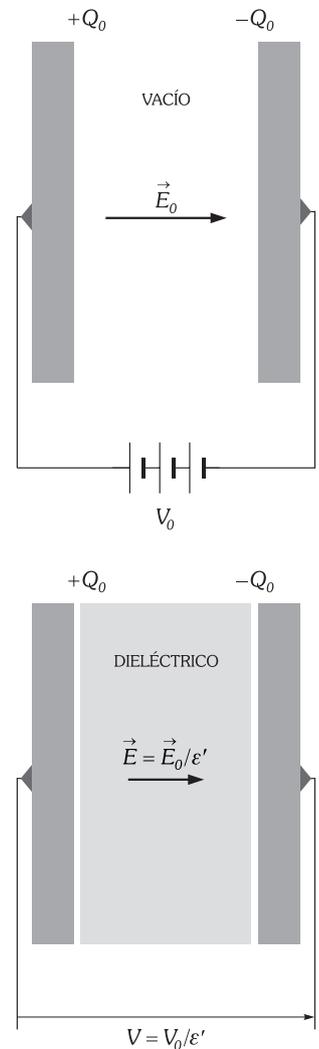


Fig. XIX-25.- Al introducir un dieléctrico entre las placas de un condensador cargado y desconectado de su fuente de alimentación, la diferencia de potencial entre sus armaduras disminuye  $V < V_0$  y al permanecer constante su carga (principio de conservación), su capacidad habrá aumentado.

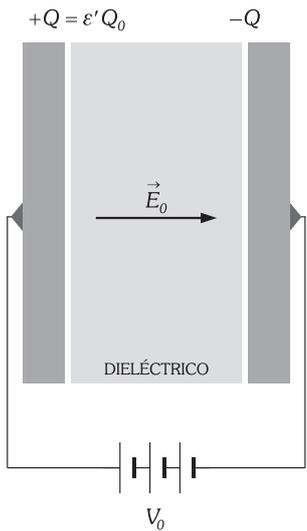


Fig. XIX-26.- Al introducir un dieléctrico entre las placas de un condensador cargado y conectado a su fuente de alimentación, la diferencia de potencial entre sus armaduras permanecerá constante, entonces la fuente suministra más carga a las placas del condensador, aumentando su capacidad.

el campo eléctrico inducido por las cargas de polarización. (Esta última frase se comprenderá a medida que se avance en la lectura de este tema).

Un cálculo que tiene su interés en la determinación de capacidades de condensadores con dieléctricos en su interior, es el que nos determina cuánto tendríamos que acercar las armaduras de un condensador plano ( $\Delta d$ ), suprimiendo el dieléctrico para conservar la misma capacidad (Fig. XIX-27).

Como la capacidad de un condensador plano entre cuyas armaduras existe un dieléctrico es:  $C = \epsilon' \epsilon_0 A/d$ , entonces:

$$C = \frac{\epsilon' \epsilon_0 A}{d} = \frac{\epsilon_0 A}{d - \Delta d} \Rightarrow \Delta d = d \frac{\epsilon' - 1}{\epsilon'}$$

Los materiales que vamos a tratar en este capítulo son los DIELECTRICOS LHI (lineales, homogéneos e isotropos); los cuales son lineales por la proporcionalidad de la carga y el potencial al ser introducidos en un condensador, homogéneos por ser  $\epsilon'$  independiente de la muestra particular de la sustancia que se elija, e isotropos porque  $\epsilon'$  es independiente de la orientación del dieléctrico al ser introducido en un campo eléctrico.

El crecimiento de la capacidad de un condensador parece que puede ser indefinido, sin más que aproximar suficientemente la distancia entre sus armaduras, disminuyendo el espesor del dieléctrico; sin embargo, esto no es posible puesto que el gradiente del potencial a que puede someterse a un dieléctrico, está limitado por lo que ya hemos llamado en el párrafo XIX-11 potencial de ruptura o RIGIDEZ DEL DIELECTRICO ( $k$ ), llegando un momento en el que si vamos aumentando el campo eléctrico entre las placas del condensador, salta una chispa entre sus armaduras (*chispa disruptiva*), y el material aislante deja de serlo (*se perfora*) y conduce.

Otra función de gran interés práctico que realiza un dieléctrico es proporcionar un medio mecánico de separación de los conductores que forman el condensador.

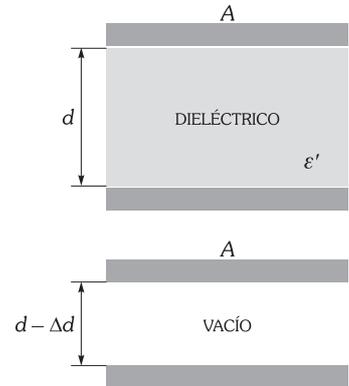


Fig. XIX-27.- Si los condensadores tienen la misma capacidad, ¿cuánto vale  $\Delta d$ ?

CONSTANTES DIELECTRICAS ( $\epsilon'$ ) a 20 °C.

Vacío .....	1,0000
Aire .....	1,0006
Parafina .....	2,2
Ebonita .....	3
Papel .....	3 - 7
Cuarzo .....	4,3
Vidrio .....	4 - 7
Mica .....	5 - 7
Porcelana .....	6 - 8
Alúmina .....	8,5
Aceite .....	2 - 2,5
Benceno .....	2,3
Metanol .....	33
Glicerina .....	42
Agua .....	80

RIGIDEZ DIELECTRICA (k) DE ALGUNAS SUSTANCIAS

DIELECTRICO	RIGIDEZ (MV/m)
Hidrógeno (1 atm)	2
Oxígeno (1 atm)	2,6
Aire seco (1 atm)	3
Aire seco (20 atm)	50
Dióxido de carbono	2,6
Petróleo	65
Aceite	14
Ebonita	42 - 54
Mica	30 - 220
Papel parafinado	30 - 50
Poliestireno	100
Vidrio	25 - 150

**XIX - 19. Fuerzas sobre un dipolo sumergido en un campo eléctrico**

En el párrafo XVIII-32, definíamos el «dipolo eléctrico» y a tal distribución le asociábamos la magnitud vectorial «momento dipolar»  $\mathbf{p} = q \mathbf{l}$ .

Estudiemos el caso de tener un dipolo con libertad de movimiento y «sumergido» en un campo eléctrico uniforme (líneas equidistantes). Si  $q$  es la carga eléctrica de cada extremo o polo, la fuerza que actúa sobre cada uno de ellos es:  $\mathbf{F} = q \mathbf{E}$  (Fig. XIX-28).

Las dos fuerzas, paralelas, iguales y de sentido contrario, originan un par, cuyo momento es en módulo:  $N = Fd = Eq l \sin \varphi$ , siendo  $\varphi$  el ángulo formado por el eje del dipolo y el sentido positivo de las líneas de fuerza.

El dipolo girará hasta una posición en que  $N = 0$ . Ninguno de los factores puede serlo, excepto  $\sin \varphi$ . Al ser:  $\sin \varphi = 0$ , el ángulo  $\varphi = 0$  ó  $180^\circ$ , colocándose el dipolo paralelo a las líneas de fuerza. Cuando  $\varphi = 0$ , corresponde a una posición de equilibrio estable (las líneas de fuerza entran por el polo negativo del dipolo); si  $\varphi = 180^\circ$ , el equilibrio es inestable (las líneas de fuerza entran por el polo positivo del dipolo) y bastaría un pequeño golpecito para que adquiriese la posición de equilibrio estable.

Teniendo en cuenta el valor del momento dipolar, el momento del par lo podremos expresar en forma vectorial:

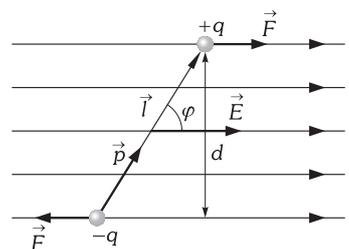


Fig. XIX-28.- Acción de un campo eléctrico uniforme sobre un dipolo.

$$\boxed{\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}}$$

Una vez alcanzado el equilibrio la fuerza resultante sobre el dipolo, sumergido en un campo eléctrico uniforme, es evidentemente nula.

El trabajo que tenemos que realizar desde el exterior, para hacer girar al dipolo en el interior del campo eléctrico, desde una posición inicial, en la que el dipolo forma un ángulo  $\varphi_0$  con el campo eléctrico, hasta que forme un ángulo  $\varphi$ , se acumula en forma de energía potencial  $U$  en el sistema, es decir, en el dipolo y en el campo eléctrico; su valor será:

$$U = \int_{\varphi_0}^{\varphi} dW = \int_{\varphi_0}^{\varphi} N d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi} p E \operatorname{sen} \varphi d\varphi$$

y como se ha considerado a  $\mathbf{E}$  uniforme:

$$U = p E \int_{\varphi_0}^{\varphi} \operatorname{sen} \varphi d\varphi = p E (\cos \varphi_0 - \cos \varphi)$$

como solamente son medibles las variaciones en la energía potencial, podemos convenir en tomar  $U=0$  cuando  $\varphi_0 = \pi/2$ , con lo que:

$$U = -p E \cos \varphi \Leftrightarrow \boxed{U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}}$$

En un campo no uniforme la fuerza neta que actúa sobre el dipolo no es nula, y dependerá de la variación del campo en cada punto, es decir, de los gradientes de las distintas componentes del campo; eligiendo los ejes como en la Fig. XIX-29 y siendo  $\mathbf{E}$  la intensidad del campo eléctrico en el origen, la componente x de la fuerza sobre el dipolo será:

$$F_x = -qE_x + q \left[ E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} \mathbf{l} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial E_x}{\partial y} \mathbf{l} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial E_x}{\partial z} \mathbf{l} \cdot \mathbf{k} \right] = \frac{\partial E_x}{\partial x} p_x + \frac{\partial E_x}{\partial y} p_y + \frac{\partial E_x}{\partial z} p_z = \mathbf{p} \cdot \mathbf{grad} E_x$$

$$F_y = \frac{\partial E_y}{\partial x} p_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} p_y + \frac{\partial E_y}{\partial z} p_z = \mathbf{p} \cdot \mathbf{grad} E_y$$

análogamente

$$F_z = \frac{\partial E_z}{\partial x} p_x + \frac{\partial E_z}{\partial y} p_y + \frac{\partial E_z}{\partial z} p_z = \mathbf{p} \cdot \mathbf{grad} E_z$$

con lo que:

$$\boxed{\mathbf{F} = \left( p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k}) = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}}$$

por tanto el dipolo tendrá a moverse en la dirección y sentido en que el campo aumenta o, lo que es lo mismo, por ser  $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ , en la dirección y sentido en que disminuye su energía potencial.

### XIX - 20. Dipolos atómicos y moleculares. Momentos dipolares inducidos

Consideremos el átomo de hidrógeno como lo imaginaba Niels Bohr(1885-1962), el electrón girando alrededor del núcleo en órbita circular plana, por lo que en un instante determinado, podemos decir, el átomo de hidrógeno posee un momento dipolar de módulo  $e$  veces la distancia electrón protón, y de dirección y sentido la del electrón al protón. El electrón recorre rapidísimamente su órbita alrededor del núcleo (para tomar una «instantánea» en la que aparezca nítidamente la imagen de un electrón situado a una cierta distancia el núcleo, nos haría falta un tiempo de exposición de menos de  $10^{-16}$  s), por lo que la dirección del vector momento dipolar varía continua y rápidamente; sin duda, para tiempos mayores que el dicho, el valor promedio del momento dipolar es nulo para una órbita circular.

En el modelo mecánico-cuántico del átomo, no se conoce con exactitud la posición del electrón en un momento dado, no se mueve en órbita fija, ni ésta es plana; más bien se ha de hablar de la probabilidad de que el electrón se encuentre en un punto determinado dentro del átomo, y como esta probabilidad es diferente para los puntos del espacio en torno al núcleo, el electrón tendrá preferencia por unas determinadas regiones.

Con el fin de aclarar el concepto de probabilidad electrónica, supongamos que se pudieran tomar fotografías sucesivas del átomo de hidrógeno, el electrón aparecería como un pequeño punto y ocupando diferentes posiciones alrededor del núcleo; en la superposición de estas instantáneas imaginarias, nos aparecería como una NUBE DE CARGA como la representada en la Fig. XIX-30. Esta

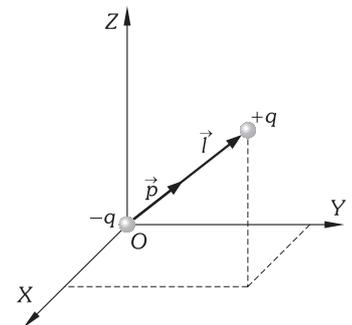


Fig. XIX-29.- Tomamos el origen del sistema de referencia en donde se encuentra la carga negativa del dipolo.

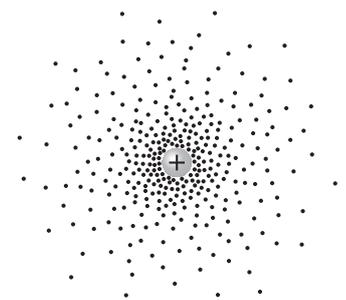


Fig. XIX-30.- Imagen que se obtendría al superponer las sucesivas instantáneas imaginarias del electrón de un átomo de hidrógeno (tridimensional).

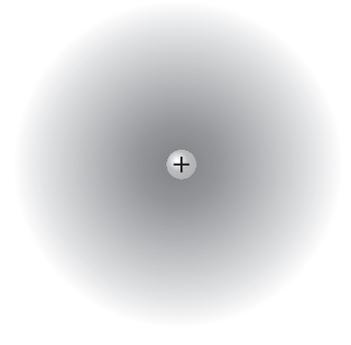


Fig. XIX-31.- Representación del átomo de hidrógeno. El sombreado simboliza la densidad de carga.

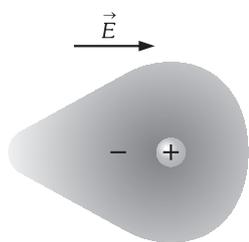


Fig. XIX-32.- Al introducir un átomo de hidrógeno en el interior de un campo eléctrico, la nube de carga negativa se desplaza en sentido contrario a  $\vec{E}$ ; cuando alcanza el equilibrio, el centro de gravedad de las cargas positivas y negativas se ha separado y el átomo poseerá un determinado momento dipolar.

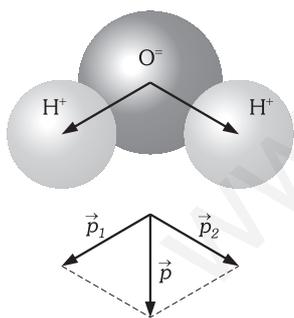


Fig. XIX-33.- Estructura polar de la molécula de agua.

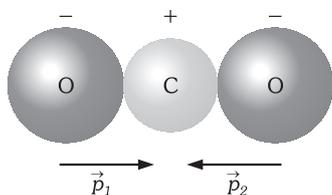


Fig. XIX-34.- La molécula de CO<sub>2</sub> no es polar.

nube, que en realidad sería tridimensional, presenta zonas más densas que otras, correspondiendo los lugares más densos a zonas donde con más probabilidad podemos encontrar el electrón.

Para procesos que duran tiempos mayores que el que necesitamos para hacer una «fotografía» nítida de la posición del electrón-núcleo en un instante determinado, podemos considerar al núcleo del átomo de hidrógeno como una carga puntual y a la corteza como una distribución continua de carga negativa que se extiende en el espacio tridimensional con densidad constantemente decreciente (Fig. XIX-31) y que para el átomo de hidrógeno tomará el valor  $e$ .

Como la nube es difusa y no tiene límites definidos, se define entonces ORBITAL ATÓMICO como la zona del espacio que encierra un determinado tanto por ciento de probabilidad de encontrar al electrón.

Para este modelo de átomo de hidrógeno, y para tiempos mayores que el indicado, el valor promedio del momento dipolar también es nulo para todo su orbital.

Si se sumerge al átomo de hidrógeno dentro de un campo eléctrico, se distorsionará la «nube de carga» negativa (Fig. XIX-32), y el átomo tendrá un momento dipolar ya que el «centro de gravedad» de las cargas positivas y negativas ya no coincide; decimos que el campo eléctrico ha inducido un momento dipolar al átomo.

Para otros átomos adoptamos una representación similar, variando la forma y el tamaño de las orbitales; debido a su simetría esférica, todos los átomos carecen de momento dipolar permanente (siempre coinciden el centro de gravedad de las cargas positivas y negativas) y en presencia de un campo eléctrico, en la mayoría de los casos y para determinados valores del campo eléctrico  $\vec{E}$ , se puede suponer que tienen un momento dipolar  $\vec{p}$  en la misma dirección que  $\vec{E}$ , pudiéndose escribir:  $\vec{p} = \alpha \vec{E}$ , en la que  $\alpha$  es una constante característica de cada átomo, llamada POLARIZABILIDAD ATÓMICA.

Análogamente a lo que ocurre en el átomo, sucede con las moléculas, tendrán unas cargas positivas correspondientes a los núcleos de los átomos que las forman, rodeados de una nube electrónica; sin embargo las moléculas, en general, no tienen por qué ser simétricas, pudiendo en su estado normal, poseer un momento dipolar aun en ausencia de campo eléctrico.

«Se dice que una molécula es POLAR cuando el centro de gravedad del sistema de electrones no coincide con el de los núcleos positivos».

Las moléculas son entonces verdaderos dipolos, no por esto dejan de ser neutras. Un ejemplo de molécula polar es la del agua representada en la (Fig. XIX-33). El momento dipolar de esta molécula es la suma vectorial de momentos dipolares formados por el átomo de oxígeno y el de hidrógeno.

«Una molécula es NO POLAR cuando el centro de gravedad del sistema de electrones coincide con el de los núcleos positivos».

Un ejemplo de molécula apolar es la del dióxido de carbono, pues su estructura es del tipo de la Fig. XIX-34.

En las moléculas, en general, la distorsión de la nube electrónica no será la misma en todas las direcciones; así por ejemplo, la molécula de CO<sub>2</sub>, se polarizará más fácilmente en la dirección paralela a su eje longitudinal que en cualquier otra dirección; esto hace que el momento dipolar inducido  $\vec{p}$  no tenga la misma dirección que el campo aplicado  $\vec{E}$ , no pudiéndose hablar de una constante de polarizabilidad como en los átomos; la relación entre  $\vec{p}$  y  $\vec{E}$ , tendrá que ser a través de un tensor:  $\vec{p} = [\alpha] \vec{E}$ , en donde  $[\alpha]$  es el llamado TENSOR DE POLARIZABILIDAD.

### XIX - 21. Polarización de un dieléctrico

En un material dieléctrico formado por moléculas polares o dipolos permanentes, la distribución al azar hace que no se produzca efecto eléctrico alguno (Fig. XIX-35 a), pero si se somete a un campo eléctrico, los diminutos dipolos moleculares se orientan como se ha expresado en el párrafo XIX-19, anulándose las acciones de los polos opuestos en el interior del dieléctrico pero apareciendo en la superficie de la cara por la que entran o salen las líneas de fuerza del campo eléctrico una densidad superficial de carga negativa o positiva (Fig. XIX-35b).

Cuando un dieléctrico es no polar, está constituido por átomos (elemento químico) o moléculas no polares; si se le somete a un campo eléctrico, los átomos o moléculas adquieren un momento dipolar inducido, y se orientarán en la dirección del campo, alineándose como se indica en la Fig. XIX-36, dado como resultado la aparición de densidades superficiales de carga, análogas a las del caso anterior.

Al fenómeno de aparición de carga en la superficie de los dieléctricos por estar en presencia de un campo eléctrico se le llama «POLARIZACIÓN DE UN DIELECTRICO».

La polarización hace que aparezcan cargas netas positivas y negativas en los lados opuestos de una porción de materia dieléctrica, convirtiéndose en un gran dipolo que tiende a moverse en la dirección en que el campo aumenta, como hemos visto en el párrafo 19 de este capítulo. Esto es-

plica el fenómeno por el cual una varilla de vidrio o ebonita después de frotada (cargada), atraen pequeños pedazos de papel o esferitas de médula de sauco.

Obsérvese que si un conductor está situado en un campo eléctrico, en él se verificará el fenómeno de inducción electrostática apareciendo densidades superficiales análogas a las descritas en el fenómeno de polarización; la diferencia esencial está en que las cargas inducidas en el conductor, pueden tener libertad de movimiento, mientras que las que aparezcan en la superficie del dieléctrico se encuentran fuertemente ligadas a él; además, como veremos a continuación, al sumergir los dieléctricos en un campo eléctrico, éste en su interior no se anula, y para los conductores el campo en su interior se hace cero.

La polarización de un dieléctrico, nos da una explicación del por qué disminuye el campo eléctrico en su interior, y por tanto, del aumento de la capacidad del condensador en el que se ha introducido. En efecto: supongamos un punto  $P$  en el vacío, en el que existe un campo  $E_f$  (Fig. XIX-37a) y coloquemos en él un dieléctrico (Fig. XIX-37b) en el que se verifica el fenómeno de la polarización; las densidades superficiales originadas crearán un campo  $E_b$  de sentido contrario a  $E_f$ . El campo en el interior del dieléctrico ha disminuido adquiriendo el valor:

$$E = E_f - E_b$$

(representaremos este hecho dibujando en el interior del dieléctrico menos líneas de fuerza que en el exterior). Como  $E = E_f/\epsilon'$ , nos queda para el valor del campo eléctrico inducido:

MOMENTO DIPOLAR DE ALGUNAS MOLÉCULAS	
Molécula	M.D. en pm · nC
CO <sub>2</sub>	0
H <sub>2</sub>	0
CH <sub>4</sub>	0
CCl <sub>4</sub>	0
C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	0
HCl	34,3
HBr	26,0
HI	12,6
CO	4,0
H <sub>2</sub> O	62
H <sub>2</sub> S	53,3
SO <sub>2</sub>	53,3
NH <sub>3</sub>	50,3
C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> OH	36,6

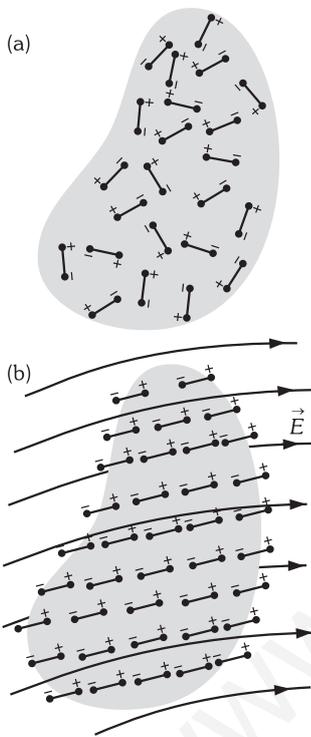


Fig. XIX-35.- Polarización de un dieléctrico polar.

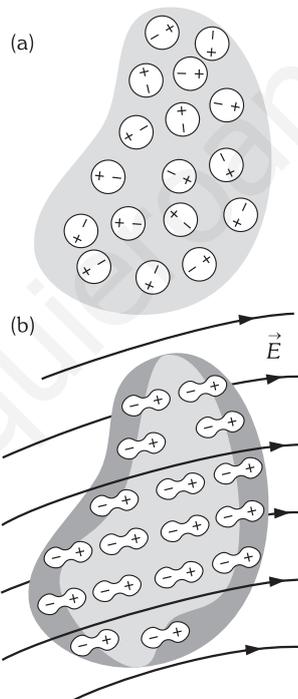


Fig. XIX-36.- Polarización de un dieléctrico apolar.

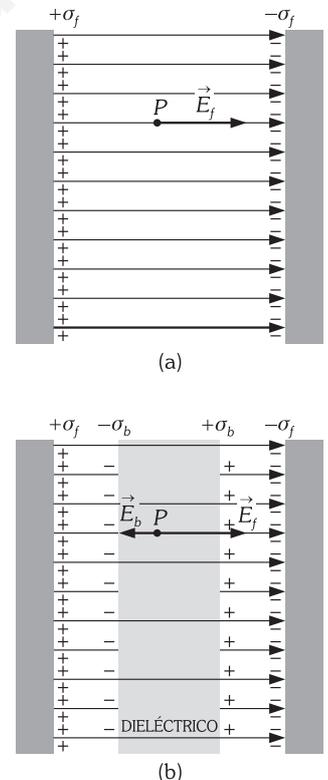


Fig. XIX-37.- Campo eléctrico en el interior de un dieléctrico polarizado

$$E_b = E_f \left( 1 - \frac{1}{\epsilon'} \right) = E_f \frac{\epsilon' - 1}{\epsilon'} \tag{3}$$

y como  $\epsilon' > 1$ , el campo eléctrico inducido en el dieléctrico será siempre menor que el campo debido a las cargas libres.

Obsérvese que la ecuación  $E = E_f/\epsilon'$  es válida aunque el dieléctrico no llene el espacio comprendido entre las placas del condensador plano, ya que la carga inducida en la superficie del dieléctrico será independiente de este hecho, puesto que sus caras las hemos considerado planas y paralelas a las placas. Sin embargo no pueden ser válidas las ecuaciones  $V = V_0/\epsilon'$  y  $C = \epsilon' C_0$  cuando el dieléctrico no llena el espacio entre las placas.

**XIX - 22. El Teorema de Gauss en dieléctricos**

El Teorema de Gauss no deja de ser válido cuando se aplica con la presencia de sustancias dieléctricas, puesto que se dedujo sobre una base completamente general, o si el campo está pro-

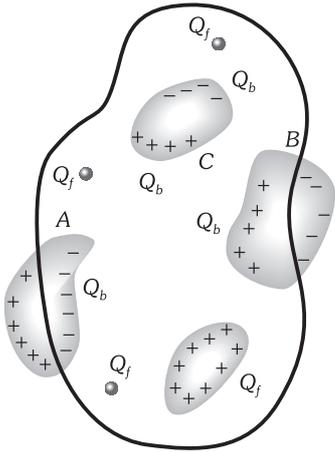


Fig. XIX-38.- Superficie gaussiana en presencia de dieléctricos.

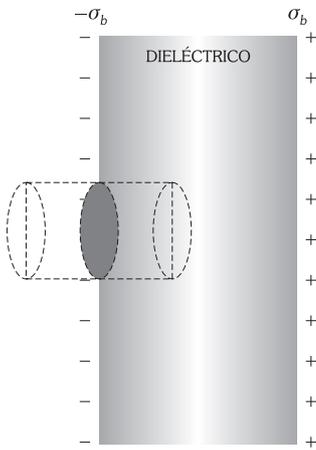


Fig. XIX-39.- Superficie cerrada a la que aplicamos el teorema de Gauss.

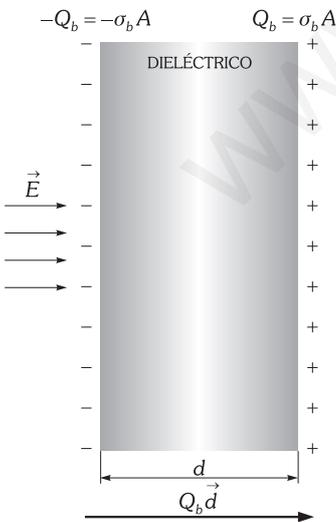


Fig. XIX-40.- El bloque dieléctrico totalmente polarizado equivale a un único dipolo de momento dipolar  $Q_b \vec{d}$ .

ducido por cargas libres y ligadas o de polarización; cuando estén presentes cargas de ambos tipos, se escribirá:

$$\phi = \oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{\Sigma Q_f}{\epsilon_0} + \frac{\Sigma Q_b}{\epsilon_0}$$

en la Fig. XIX-38, la superficie cerrada contiene al dieléctrico C y a unos conductores e intercepta a los dieléctricos A y B; de los dieléctricos, sólo el A y el B contribuyen a  $\Sigma Q_b$ , ya que la carga total encerrada debida a C es cero. La carga exterior a la superficie, como ya sabemos, no contribuye al valor del flujo a través de la superficie gaussiana.

Volviendo al caso del condensador plano con un dieléctrico en su interior, por aplicación del teorema de Gauss a la superficie cerrada que indicamos en la Fig. XIX-39, considerando únicamente el dieléctrico polarizado, llegamos a la conclusión:

$$E_b = \frac{\sigma_b}{\epsilon_0} \tag{4}$$

de forma análoga a como deducíamos la relación entre el campo eléctrico y la densidad superficial de carga en las placas de un condensador en el párrafo XIX-14 y en el que se obtenía:  $E_f = \sigma_f / \epsilon_0$ . En ambas:  $\sigma_b = Q_b / A$  y  $\sigma_f = Q_f / A$ , que sustituidas en la (3) del párrafo anterior, conducen a:

$$\sigma_b = \sigma_f \frac{\epsilon' - 1}{\epsilon'} \Leftrightarrow Q_b = Q_f \frac{\epsilon' - 1}{\epsilon'}$$

y como  $\epsilon' > 1$ , la carga inducida en un dieléctrico es siempre menor que la carga libre contenida en cada una de las placas del condensador.

### XIX - 23. El vector polarización eléctrica P

Vamos a introducir una magnitud macroscópica que nos define el estado de polarización de un dieléctrico cuando se encuentra sumergido en un campo eléctrico, para lo cual, consideremos un trozo de materia polarizada en la que existirán dipolos microscópicos moleculares; tomemos un pequeño volumen ( $dv$ ), lo suficientemente pequeño para poder aplicar el cálculo diferencial, pero lo suficientemente grande para que contenga un número considerable de dipolos. La suma vectorial de los momentos dipolares, microscópicos en todo el volumen ( $dv$ ), da un vector que designamos por  $d\mathbf{p}$ ; dividiéndolo por el volumen elemental, da un vector, cuyo significado es: «MOMENTO DIPOLAR POR UNIDAD DE VOLUMEN» o «VECTOR POLARIZACIÓN» que designamos por  $\mathbf{P}$ , pudiéndose escribir:

$$\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}}{dv}$$

que nos define, para cada punto del dieléctrico, un vector  $\mathbf{P}$  ( $x, y, z$ ), que describe de forma continua y macroscópica el estado del material, que en realidad es una distribución discontinua y microscópica. Sin embargo, esta forma de proceder nos da resultados satisfactorios concordantes con la experiencia.

Imaginemos un bloque de material dieléctrico sometido a un campo eléctrico uniforme y supongamos que se encuentra totalmente polarizado, es decir los momentos dipolares de sus moléculas están totalmente alineados con el campo. Sobre las superficies del bloque normales al campo aparecerán dos cargas iguales y opuestas, separadas una distancia  $d$  y cuyo valor será:  $Q_b = \sigma_b A$ , siendo  $A$  el área de la superficie del bloque normal al campo y  $\sigma_b$  la densidad superficial de carga de polarización. Todo ello equivale a un dipolo único cuyo momento dipolar (Fig. XIX-40) vendrá dado en módulo por:  $Q_b d = \sigma_b A d$ , que considerado en todo el volumen ( $Ad$ ) nos dará el momento dipolar en cada punto por unidad de volumen o la «POLARIZACIÓN»:

$$\mathbf{P} = \sigma_b \tag{5}$$

Lo cual significa que si la polarización es uniforme la densidad superficial de carga ligada o de polarización nos da el módulo del vector polarización.

Un caso más general sería el considerar que el campo eléctrico que causa la polarización no fuese normal a las superficies del bloque (Fig. XIX-41), se demostraría en este caso que la densidad de carga ligada sería:

$$\sigma_b = P \cos \theta = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P_n$$

es decir, igual a la componente del vector de polarización normal a la superficie considerada.

Podemos expresar la polarización de un dieléctrico en función del momento dipolar de cada átomo o molécula  $\mathbf{p}$ , y el número de átomos o moléculas por unidad de volumen  $N$ , como:

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p}$$

**XIX – 24. Susceptibilidad eléctrica**

Cuando un material dieléctrico LHI se somete a un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  se polariza, apareciendo el vector polarización  $\mathbf{P}$  en la misma dirección que  $\mathbf{E}$ . Por tanto podremos expresar  $\mathbf{P}$  como una función lineal del campo eléctrico (experimentalmente se llega a la misma conclusión para la mayor parte de los materiales dieléctricos LHI) siendo esta función de la forma:

$$\boxed{\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}} \tag{6}$$

donde la constante  $\chi$  recibe el nombre de «SUSCEPTIBILIDAD ELÉCTRICA» y es por definición: la «polarización por unidad de campo eléctrico», que para la mayoría de las sustancias es una cantidad positiva.

Volviendo, de nuevo, al caso del condensador plano con un dieléctrico entre sus armaduras, en el que obteníamos que  $E = E_f - E_b$ , teniendo en cuenta las (4) y (5) de este capítulo, obtenemos:

$$E = E_f - \frac{\sigma_b}{\epsilon_0} = E_f - \frac{\chi E}{\epsilon_0} \Rightarrow E \left( 1 + \frac{\chi}{\epsilon_0} \right) = E_f \Rightarrow \boxed{E = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 + \chi} E_f}$$

a la cantidad  $\epsilon_0 + \chi$  se le llama PERMITIVIDAD y se escribe:

$$\boxed{\epsilon = \epsilon_0 + \chi} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} E_f} \Rightarrow E = \frac{E_f}{\epsilon/\epsilon_0}$$

y a la cantidad:

$$\boxed{\epsilon' = \epsilon/\epsilon_0}$$

se le llama PERMITIVIDAD RELATIVA es decir:

$$\boxed{E = \frac{E_f}{\epsilon'}}$$

resultado que ya habíamos previsto razonando sobre el efecto del dieléctrico en la capacidad de un condensador.

La magnitud macroscópica «susceptibilidad eléctrica», que nos da la respuesta de un dieléctrico a la acción de un campo eléctrico externo, tiene que estar relacionada con las propiedades de los átomos y moléculas que lo constituyen. En efecto: Hemos visto en el párrafo 20 de este capítulo que para *dieléctricos no polares*, el momento dipolar inducido del átomo o molécula  $\mathbf{p}$ , al someterlo a un campo eléctrico externo  $\mathbf{E}$ , se alineaba con él, y expresábamos su valor:  $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}$ , a  $\alpha$  le llamábamos «polarizabilidad» atómica o molecular, y es una constante característica de cada átomo. Pues bien: como  $\mathbf{P} = \chi \mathbf{E} = N\mathbf{p}$ , en la que  $\mathbf{P}$  es el vector polarización y  $N$  es el número de átomos o moléculas polarizadas por unidad de volumen, se deduce:

$$\mathbf{P} = N\alpha \mathbf{E} \Rightarrow \boxed{\chi = N\alpha}$$

y por tanto, el cálculo de  $\chi$  se reduce al cálculo de  $\alpha$ , o lo que es lo mismo, a determinar el efecto que produce un campo externo sobre el movimiento de los electrones en el átomo, lo que se hace mediante la aplicación de las leyes de la mecánica cuántica, saliéndose del objetivo de la presente obra.

En el caso de los dieléctricos polares, hemos supuesto que las moléculas se alineaban en la dirección del campo; diferenciamos los distintos tipos de dieléctricos polares por la mayor o menor alineación de sus moléculas en la dirección del campo (Fig. XIX-42). Nunca la alineación es completa, la agitación térmica, tanto mayor cuanto mayor sea la temperatura, se opone a todo tipo de alineación tendiendo a desordenar las direcciones de los dipolos, por ello las propiedades de los dieléctricos dependen fuertemente de la temperatura. (El estudio de esta dependencia es bastante complicado por lo que tampoco viene al caso insistir sobre el tema en el presente texto).

**PROBLEMAS: 41 al 58.**

**E) EL VECTOR DESPLAZAMIENTO**

**XIX – 25. El vector desplazamiento D. Ley de Gauss en un dieléctrico. Primera ecuación de Maxwell**

John Clerk Maxwell (1831-1879) con el único objeto de facilitar el cálculo en un gran número de problemas y permitir una escritura más compacta de determinadas expresiones del electromagnetismo, introdujo el vector DESPLAZAMIENTO ELÉCTRICO definiéndolo por:

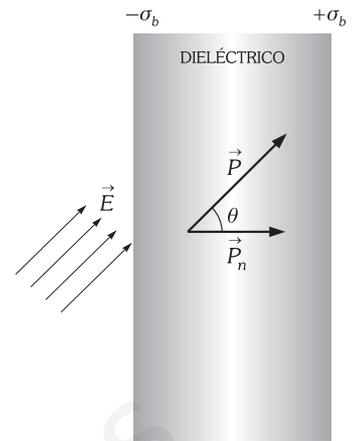


Fig. XIX-41.- El campo eléctrico que produce la polarización no es normal a las superficies polarizadas.

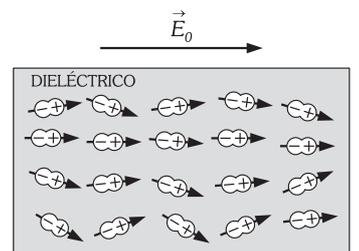
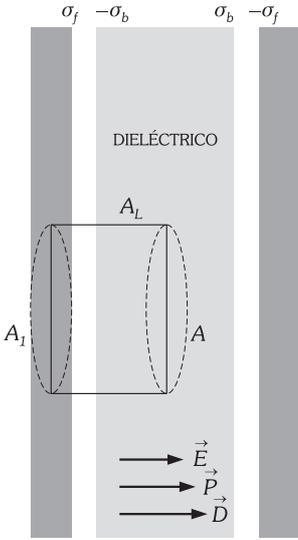


Fig. XIX-42.- Los dipolos eléctricos, al aplicarles un campo eléctrico externo  $\vec{E}_0$ , se alinean parcialmente con él.

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \chi \mathbf{E} = (\epsilon_0 + \chi) \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}}$$

Si el dieléctrico es homogéneo, lineal e isótropo  $\epsilon$  es una constante característica del medio. Si no es homogéneo,  $\epsilon$  puede ser una función de punto, si no es isótropo puede depender de alguna dirección particular del espacio, y si no es lineal puede incluso depender del campo aplicado.

Volvamos al caso del condensador plano y calculemos la integral de superficie del vector  $\mathbf{D}$  a través de la superficie total «caja de píldoras»  $A_T$  de la (Fig. XIX-43):



$$\oint_{A_T} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \epsilon_0 \oint_{A_T} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} + \oint_{A_T} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A} \quad (7)$$

por el teorema de Gauss:

$$\oint_{A_T} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} (A \sigma_f - A \sigma_b) = \frac{1}{\epsilon_0} (Q_f - Q_b) \quad (8)$$

Por otra parte: 
$$\oint_{A_T} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A} = \int_{A_1} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A} + \int_A \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A} + \int_{A_L} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A}$$

La integral sobre  $A_1$  es cero pues  $\mathbf{P}$  es cero (fuera del dieléctrico) y también es nula la integral a lo largo de la superficie lateral  $A_L$ , pues  $\mathbf{P}$  es paralelo a  $\mathbf{E}$  y por tanto el vector  $\mathbf{P}$  es perpendicular al  $d\mathbf{A}$  y el producto escalar será nulo. Queda únicamente:

$$\int_A \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A} = \int_A P dA \cos \theta = \int_A P dA$$

y como  $P = \sigma_b$ :

$$\int_A \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A} = A \sigma_b \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\oint_{A_T} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A} = Q_b} \quad (9)$$

«El flujo del vector polarización a través de una superficie cerrada, es siempre igual a las cargas ligadas a los dieléctricos que se encuentran en su interior».

Las cargas libres no intervienen para nada en el cálculo del flujo del vector polarización a través de una superficie cerrada.

Sustituyendo las (8) y (9) en la (7) nos queda:

$$\begin{aligned} \oint_{A_T} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} &= A \sigma_f - A \sigma_b + A \sigma_b = A \sigma_f = Q_f \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad \boxed{\oint_{A_T} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q_f \text{ (carga libre encerrada en } A_T)} \end{aligned}$$

«Cuando se calcula el flujo del vector  $\mathbf{D}$  en una superficie cerrada, solamente cuenta la carga libre interior a dicha superficie, independientemente de que exista o no dieléctrico».

Este resultado, que se ha obtenido para un caso particular, es general en cualquier situación, pudiéndose aplicar a cualquier región del espacio limitada por una superficie cerrada, y se conoce como la LEY DE GAUSS PARA EL DESPLAZAMIENTO ELÉCTRICO.

Obsérvese que mientras las cargas libres y las ligadas son fuentes del campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , solo las cargas libres son fuentes del vector  $\mathbf{D}$  y solamente las cargas ligadas contribuyen a  $\mathbf{P}$ ; de tal forma que mientras las líneas de campo del vector  $\mathbf{E}$  se representan disminuyéndolas en el interior del dieléctrico, no se disminuyen las líneas de campo del vector desplazamiento, y sólo existen líneas de campo del vector polarización en el interior del dieléctrico (Fig. XIX-44).

Si aplicamos el teorema de Gauss a una región en la que todas las cargas libres encerradas se distribuyen como una densidad de carga  $\rho$  entonces:

$$Q_f = \int_v \rho dv \quad \Rightarrow \quad \boxed{\oint_{A_T} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \int_v \rho dv}$$

por otra parte; si aplicamos al primer miembro de esta ecuación, el teorema de la divergencia:

Fig. XIX-43.- «Caja de píldoras».  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$  y  $\vec{P}$  son aquí paralelos, puesto que  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  y  $\vec{P} = \chi \vec{E}$ .

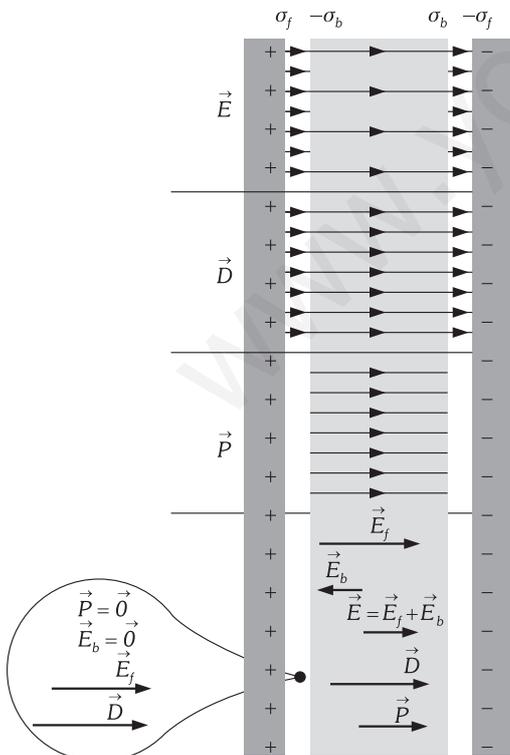


Fig. XIX-44.- Esquema de los vectores y líneas de campo de  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$  y  $\vec{P}$  en un dieléctrico LHI entre las placas de un condensador plano.

$$\oint_{A_T} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \int_v \text{div } \mathbf{D} \, dv$$

comparando las dos últimas ecuaciones obtenemos:

$$\boxed{\text{div } \mathbf{D} = \rho} \quad (\text{PRIMERA ECUACIÓN DE MAXWELL})$$

ecuación que es una, del conjunto de cuatro, conocido como ECUACIONES DE MAXWELL, y que iremos enumerando.

La ley de Gauss es importantísima para el cálculo de campos eléctricos en algunos casos particulares, en los que intervienen materiales dieléctricos, como el que vamos a ver a continuación.

Considerando un ion esférico de carga  $Q$  sumergido en un líquido dieléctrico lineal, homogéneo e isotrópico. Las moléculas del líquido se orientarán en la forma indicada en la (Fig. XIX-45) pues el campo que crea el ion tiene simetría radial. Se trata de calcular el valor del campo a una distancia  $r$  del centro del ion conocida la permitividad dieléctrica del medio líquido, que llamamos  $\epsilon$ . Si tratamos de calcular el campo, aplicando el teorema de Gauss al vector  $\mathbf{E}$  y a una superficie esférica de radio  $r$ , no conseguimos nada pues desconocemos el valor de la carga ligada encerrada en ella; pero sí podemos aplicarlo al vector  $\mathbf{D}$  puesto que la integral de superficie de  $\mathbf{D}$  es igual a la carga libre encerrada, que en este caso es la del ión:

$$\oint_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = 4\pi r^2 D = Q \Rightarrow \mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^3} \mathbf{r} \quad \wedge \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \Rightarrow \boxed{\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon} \frac{Q}{r^3} \mathbf{r}}$$

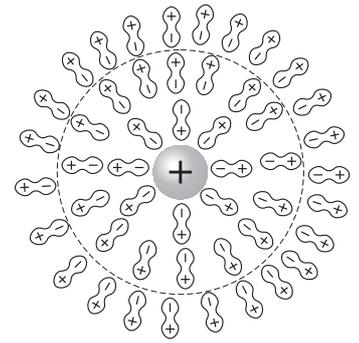


Fig. XIX-45.- Ión esférico de carga positiva sumergido en un líquido dieléctrico.

### XIX - 26. Condensadores con más de un dieléctrico

Supongamos un condensador plano que tiene entre sus armaduras  $n$  dieléctricos LHI en forma de paralelepípedos rectángulos de espesores  $e_1, e_2, \dots, e_n$  y de permitividades  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  (Fig. XIX-46). Lo cargamos conectando sus armaduras a una fuente de alimentación y, en condiciones estáticas, queda cargado con una carga  $Q$  y a una tensión  $V$ . La aplicación del teorema de Gauss a la superficie cerrada  $S$ , de puntos en la Fig. XIX-44, nos conduce a:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q \Leftrightarrow D \, dA = dQ \Rightarrow D = \frac{dQ}{dA} = \frac{Q}{A} = \sigma$$

siendo el vector  $\mathbf{D}$  el mismo en todos los puntos del interior del condensador plano. Los valores de los campos eléctricos en el interior de cada uno de los dieléctricos, serán:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \Rightarrow E_1 = \frac{D}{\epsilon_1}, \quad E_2 = \frac{D}{\epsilon_2}, \quad \dots, \quad E_n = \frac{D}{\epsilon_n}$$

Como las tensiones entre las caras planoparalelas de separación entre los dieléctricos valen:

$$V_1 = E_1 e_1, \quad V_2 = E_2 e_2, \quad \dots, \quad V_n = E_n e_n$$

la tensión total entre las placas del condensador será:

$$V = \sum V_i = \sum E_i e_i = D \sum \frac{e_i}{\epsilon_i} = Q \sum \frac{e_i}{\epsilon_i A} = Q \sum \frac{1}{C_i}$$

en la que hemos llamado  $C_i = \epsilon_i A/e_i$  a la capacidad de un condensador plano con un dieléctrico de permitividad  $\epsilon_i$ , que llena sus armaduras. Llamando  $C = Q/V$  a la capacidad total del sistema (capacidad del condensador equivalente), obtenemos:

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{V}{Q} = \sum \frac{1}{C_i}}$$

luego la capacidad equivalente al de la Fig. XIX-46, es igual a la de  $n$  condensadores colocados en serie.

Si entre las armaduras de un condensador plano que distan  $d$  entre sí, introducimos una lámina plano-paralela de espesor  $e$  y paralela a las armaduras (Fig. XIX-47), el sistema obtenido equivale a conservar el vacío entre ellas y acercaras entre sí una distancia:

$$\boxed{\Delta d = e \frac{\epsilon' - 1}{\epsilon'}} \Rightarrow \boxed{C = \frac{\epsilon_0 A}{d - \Delta d}}$$

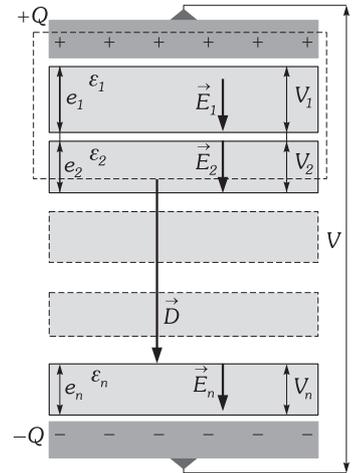


Fig. XIX-46.- Condensador plano con más de un dieléctrico entre sus armaduras.

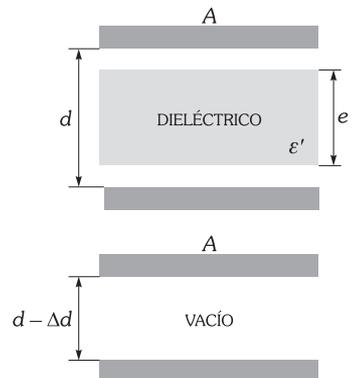


Fig. XIX-47.- Si los condensadores tienen la misma capacidad, ¿cuánto vale  $\Delta d$  ?

En efecto: según acabamos de demostrar, la capacidad equivalente será:

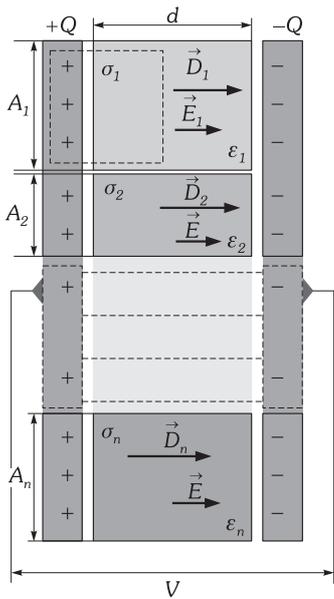


Fig. XIX-48.- Condensador plano con más de un dieléctrico entre sus armaduras.

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d-e}{\epsilon_0 A} + \frac{e}{\epsilon' \epsilon_0 A} \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 A}{d - e(\epsilon' - 1)/\epsilon'} \quad \text{c.q.d.}$$

Un razonamiento parecido, demuestra que se puede obtener la capacidad equivalente del condensador montado como en la Fig. XIX-48, como un conjunto en paralelo. En efecto: la aplicación de la Ley de Gauss al desplazamiento, a superficies cerradas como la que se indica de puntos en la Fig. XIX-48, nos conduce a:

$$D_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \sigma_1, \quad D_2 = \frac{Q_2}{A_2} = \sigma_2 \dots \quad D_n = \frac{Q_n}{A_n} = \sigma_n$$

Obsérvese que en este caso  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \dots \neq \sigma_n$ . Por encontrarse todos los dieléctricos al mismo potencial, el campo eléctrico en su interior será el mismo en todos ellos ( $E = V/d$ ), y de valor:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \Rightarrow E = \frac{D_1}{\epsilon_1} = \frac{D_2}{\epsilon_2} = \dots = \frac{D_n}{\epsilon_n}$$

obteniéndose para la capacidad equivalente al sistema de la Fig. XIX-48:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sum Q_i}{V} = \frac{\sum D_i A_i}{V} = \frac{E \sum \epsilon_i A_i}{V} = \frac{\sum \epsilon_i A_i}{d} \Rightarrow \boxed{C = \sum C_i} \quad \text{c.q.d.}$$

### XIX - 27. Energía asociada a un campo eléctrico con dieléctricos LHI

Obteníamos para valorar de la energía almacenada entre las placas de un condensador en vacío (párrafo XIX-16):  $U_0 = C_0 V^2/2$ ; un razonamiento similar hecho sobre un condensador con dieléctrico LHI, nos conduce a que:

$$U = \frac{1}{2} C V^2$$

pero como:  $C = \epsilon' C_0$ , entonces: 
$$U = \frac{1}{2} \epsilon' C_0 V^2$$

esta energía, en función del campo eléctrico existente entre las placas del condensador con dieléctrico, se obtendrá teniendo en cuenta que  $V = E d$ ; si además sustituimos el valor de  $C_0 = \epsilon_0 A/d$ , se obtiene:

$$U = \frac{1}{2} \epsilon' \frac{\epsilon_0 A}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 (Ad) = \frac{1}{2} \epsilon E^2 v$$

en la que hemos llamado  $v$  al volumen existente entre las placas del condensador. Si tenemos en cuenta que  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ , nos queda para medida de la «ENERGÍA DE LA UNIDAD DE VOLUMEN»:

$$\boxed{u = \frac{dU}{dv} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}$$

esta expresión obtenida para un caso particular, es general, y nos mide la energía almacenada en la unidad de volumen en el interior de un campo eléctrico en el que existen además de conductores cargados, dieléctricos LHI.

Para un volumen  $V$ , la energía resulta:

$$\boxed{U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dv}$$

### XIX - 28. Fuerzas sobre dieléctricos

Sobre un material dieléctrico sumergido dentro de un campo eléctrico, actúan fuerzas y pares que son debidos a la acción del campo eléctrico sobre los dipolos contenidos en el dieléctrico.

La fuerza sobre un solo dipolo eléctrico sometido a un campo eléctrico, la calculábamos en el párrafo 19 de este capítulo, y venía dada por  $\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}$ ; entonces, la fuerza por unidad de volumen del dieléctrico (si es  $N$  el número de dipolos por unidad de volumen del material), será  $N$  veces mayor:

$$\frac{d\mathbf{F}}{dv} = N (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} = (N \mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} = (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E}$$

siendo:  $\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}$ , obtenemos:

$$\frac{dF}{dv} = \chi (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} = \chi \left( E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + E_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + E_z \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) (E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k})$$

y su componente x será:

$$\frac{dF_x}{dv} = \chi \left( E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + E_y \frac{\partial E_y}{\partial y} + E_z \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)$$

por ser el campo electrostático  $\mathbf{E}$  irrotacional (párrafo XIX-25), tendrá que verificarse:

$\text{rot } \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ , con lo que se cumple:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

y en consecuencia:

$$\frac{\partial F_x}{\partial v} = \chi \left( E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + E_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + E_z \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \chi \frac{\partial}{\partial x} E^2$$

Para las componentes y y z se obtendrá:

$$\frac{\partial F_y}{\partial v} = \frac{1}{2} \chi \frac{\partial}{\partial y} E^2 \quad \frac{\partial F_z}{\partial v} = \frac{1}{2} \chi \frac{\partial}{\partial z} E^2$$

luego:

$$\frac{dF}{dv} = \frac{1}{2} \chi \nabla E^2 = \frac{1}{2} \chi \text{grad } E^2$$

y teniendo en cuenta que:

$$\left. \begin{aligned} \chi &= \varepsilon - \varepsilon_0 \\ \varepsilon' &= \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \end{aligned} \right| \Rightarrow \chi = \frac{\varepsilon' - 1}{\varepsilon'} \varepsilon$$

obtenemos:

$$\frac{dF}{dv} = \frac{\varepsilon' - 1}{\varepsilon'} \nabla \left( \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \right) = \frac{\varepsilon' - 1}{\varepsilon'} \text{grad} \left( \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \right)$$

esta fuerza por unidad de volumen del material dieléctrico, lleva la dirección de los valores crecientes del campo, no modificándose por un cambio de sentido del campo.

La cantidad entre paréntesis, corresponde a la densidad volumétrica de energía eléctrica, y podríamos haber calculado la fuerza sobre dieléctricos por la aplicación del principio de los trabajos virtuales, de forma análoga a como se hizo en el párrafo 19 de este capítulo.

La fuerza sobre un conductor que se encuentra en el interior de un dieléctrico, se calculará de la misma manera que cuando está en el vacío, pero tendremos que sustituir  $\varepsilon_0$  por la constante  $\varepsilon$  del dieléctrico, es decir:

$$\frac{dF}{da} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$$

**PROBLEMAS: 59 al 72.**

## PROBLEMAS

### A) CONDUCTORES CARGADOS EN EQUILIBRIO

1. Calcular en  $\mu\text{F}$  la capacidad de una esfera conductora del mismo tamaño que la Tierra.

2. Una esfera metálica de 10 cm de radio tiene una carga de 1  $\mu\text{C}$ . Se pide calcular en unidades del SI: 1) La capacidad de la esfera. 2) El potencial en un punto de su superficie. 3) La energía eléctrica que tiene almacenada la esfera. 4) La densidad eléctrica superficial.

3. Una esfera de 8 cm de radio posee una carga eléctrica de 0,3  $\mu\text{C}$ . Calcular en unidades del SI: 1) El potencial en un punto de su superficie. 2) La densidad superficial de carga, de la esfera. 3) El campo y el potencial en un punto situado a 12 cm de la superficie esférica. 4) La energía eléctrica almacenada en la esfera.

4. El potencial a una distancia de 20 cm de una esfera conductora cargada de 10 cm de radio es de 800 V. Calcular: 1) El potencial de la esfera. 2) El número de electrones que se han extraído del material ( $e = 1,6 \times 10^{-19}$  C). 3) La densidad superficial de carga que tiene tal esfera.

5. Cincuenta gotas idénticas de mercurio se cargan simultáneamente al mismo potencial de 100 V. ¿Cuál será el potencial de la gran gota formada por aglomeración de aquéllas? (Se supone que las gotas son de forma esférica.)

6. Demostrar que si unimos dos cuerpos por un hilo conductor de capacidad despreciable, la capacidad de la unión es la suma de las capacidades de los dos cuerpos.

7. Una esfera metálica de 10 cm de radio, aislada, se carga a una tensión de 5 000 V. ¿Cuál es su carga en culombios? A continuación se une a otra esfera descargada y aislada de 8 cm de radio. Determinar: 1) La carga de cada esfera. 2) El potencial común de ambas.

8. Dos esferas metálicas de 6 y 9 cm se cargan con 1  $\mu\text{C}$  cada una y luego se unen con un hilo conductor de capacidad despreciable. Calcular: 1) El potencial de cada esfera aislada. 2) Potencial después de la unión. 3) Carga de cada esfera después de la unión, y cantidad de carga que circuló por el hilo.

9. Una esfera metálica aislada, de 10 cm de radio, se carga a un potencial de 1 000 V. Se toca esta esfera con otra, también aislada, de 2 cm de radio, que a continuación se descarga; se repite esta operación

cinco veces. Determinar: 1) La carga de la primera esfera, antes de ser tocada. 2) La carga de dicha esfera después de la quinta operación. 3) Su potencial en ese momento.

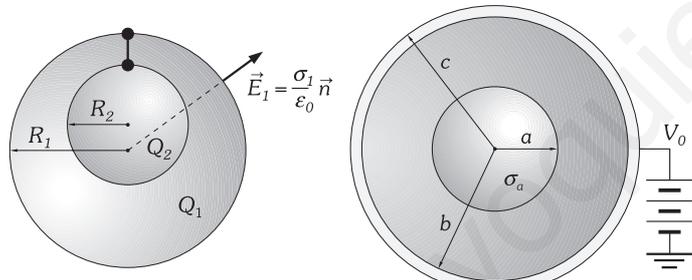
**10.** Calcular el potencial, la carga y la energía máximos a que puede cargarse el electrodo esférico hueco de un generador de Van de Graaff de 10 cm de radio que se encuentra rodeado de aire. (Potencial de ruptura del aire  $k = 3 \text{ MV/m}$ ).

**11.** Dos conductores esféricos de radios 10 y 5 cm están conectados por un hilo conductor de capacidad despreciable como indica la figura; si el campo eléctrico en la superficie del más grande es de  $10^3 \text{ N/C}$ , determínese la densidad superficial de carga de cada esfera.

**12.** ¿Qué diferencia de potencial existe entre dos esferas conductoras, la una sólida y la otra hueca de espesor despreciable, que se sitúan concéntricas, si sus radios son  $R_1$  y  $R_2$  y sus cargas son  $Q_1$  y  $Q_2$  respectivamente?

**13.** Concéntrica con una esfera sólida no conductora de radio  $a$ , colocamos otra hueca conductora de radios interior y exterior  $b$  y  $c$ , respectivamente. La esfera aislante tiene una densidad uniforme de carga  $\rho$  y la esfera hueca no tiene carga neta. Hallar: 1) Las densidades superficiales de carga inducida en las superficies interior y exterior de la esfera hueca. 2) La intensidad de campo y el potencial eléctrico a una distancia  $r$  del centro de las esferas cuando:  $r > c$ ,  $c > r > b$ ,  $b > r > a$ , y en  $r < a$ . 3) ¿Cómo se modifican estos resultados si la esfera hueca se conecta a tierra?

**14.** Un conductor esférico de radio  $a$  tiene una densidad superficial de carga  $\sigma_a$ ; se encuentra en el interior de una esfera también conductora y hueca de radios interior y exterior  $b$  y  $c$  respectivamente, estando esta última conectada a tierra a través de una batería de tensión  $V_0$  como indicamos en la figura. Hallar: 1) Las densidades superficiales de carga sobre las superficies exterior e interior de la esfera hueca. 2) La expresión del campo y el potencial a una distancia  $r$  del centro de las esferas, cuando:  $r > c$ ,  $c > r > b$ ,  $b > r > a$  y en  $r < a$ . 3) Resolver el problema conectando la esfera hueca directamente a tierra. 4) Resolver el problema cuando el conductor hueco se encuentra aislado y su carga neta es nula.



Problema XIX-11.

Problema XIX-14.

**B) CONDENSADORES. FUERZA ENTRE CONDUCTORES**

**15.** Un condensador de  $100 \mu\text{F}$  está cargado al potencial de  $2500 \text{ V}$ . 1) Calcular la carga del condensador y su energía. 2) Determinar el peso del hielo a  $0^\circ\text{C}$  que se podría fundir con el calor que desprendiese la descarga del condensador, suponiendo que en esta descarga toda la energía se transformase en calor ( $I_f = 80 \text{ cal/g}$ ). 3) Determinar el volumen que tomaría 1 g de oxígeno, primitivamente en condiciones normales, si manteniendo la presión constante se le hiciese absorber el calor producido en la descarga precedente. Calor específico del oxígeno a presión constante:  $0,237 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$ .  $M_m(\text{O}_2) = 32 \text{ g/mol}$ .

**16.** Un lago circular de  $1000 \text{ Km}^2$  tiene exactamente encima, a una altura de  $500 \text{ m}$ , una nube tormentosa, también circular, de la misma área. El lago, de  $2 \text{ m}$  de profundidad, está lleno de agua. Calcular la energía disipada en el agua en forma de calor, si la nube se descarga totalmente sobre ella, perdiendo toda su carga eléctrica y todo el calor fuera absorbido por el agua. ¿Sería apreciable la elevación de la temperatura experimentada por el agua? El campo eléctrico existente entre la nube y el estanque es de  $100 \text{ V/m}$ .

**17.** Un sistema formado por dos condensadores asociados en serie tiene una capacidad de  $0,09 \mu\text{F}$ . Asociados en paralelo, la capacidad del conjunto es  $1 \mu\text{F}$ . ¿Qué capacidad tiene cada condensador?

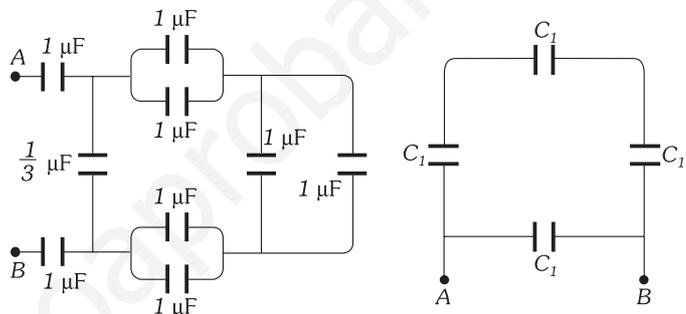
**18.** ¿Qué capacidad tendrá un acoplamiento mixto de 10 condensadores de  $5 \mu\text{F}$  cada uno cuando estén dispuestos en 5 series de 2 condensadores cada una?

**19.** Resolver el problema anterior cuando los condensadores estén dispuestos en dos series de cinco condensadores cada una.

**20.** Se disponen dos condensadores, de capacidad  $1$  y  $2 \mu\text{F}$ , respectivamente, en serie, cargando el conjunto con una tensión de  $3000 \text{ V}$ . Se produce la descarga del conjunto, en 1 l de aire, que se encuentra a  $0^\circ\text{C}$  y presión de  $760 \text{ mm}$ . Suponiendo que todo el calor desprendido en la descarga se invierte en calentar el aire y que el volumen de éste no varía, determinar: 1) Diferencia de potencial entre las armaduras de cada condensador, antes de la descarga. 2) Energía liberada en la descarga. 3) Elevación de la temperatura del aire. 4) Presión final del mismo. Calor específico del aire a volumen constante:  $0,17 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$ . Masa de 1 l de aire en condiciones normales:  $1,293 \text{ g}$ .

**21.** Tenemos tres condensadores iguales de  $2 \mu\text{F}$  cada uno. Dos de ellos, A y B, los montamos en paralelo, y el tercero, C, en serie con los anteriores. Al conjunto se le aplica una diferencia de potencial de  $1000 \text{ V}$ . Se pide: 1) La capacidad equivalente del sistema. 2) La carga de cada condensador. 3) La tensión entre las armaduras de cada condensador. 4) La energía eléctrica almacenada en conjunto.

**22.** Calcular la capacidad del sistema de la figura. Calcular la carga y el voltaje de cada condensador si establecemos entre A y B una diferencia de potencial de  $3000 \text{ V}$ .



Problema XIX-22.

Problema XIX-28.

**23.** Para formar una batería de  $1,6 \mu\text{F}$  que pueda resistir una diferencia de potencial de  $5000 \text{ V}$  disponemos de condensadores de  $2 \times 10^{-6} \text{ F}$ , que pueden soportar  $1000 \text{ V}$ . Calcular: 1) El número de condensadores y la forma de agruparlos. 2) La energía de la batería. 3) La energía máxima almacenada se emplea para fundir 2 g de hielo a  $0^\circ\text{C}$ . ¿Cuál es el estado final? ( $I_f = 80 \text{ cal/g}$ ).

**24.** Un condensador de  $0,1 \mu\text{F}$  está cargado a  $10000 \text{ V}$  y se unen sus armaduras a las de otro descargado, de  $0,3 \mu\text{F}$ . Determinar: 1) La carga de cada condensador después de la unión. 2) La diferencia de potencial común entre las armaduras. 3) La energía que ha pasado del primero al segundo condensador.

**25.** Un condensador de  $1 \mu\text{F}$  se carga a la tensión de  $300 \text{ V}$ , e independientemente otro condensador de  $3 \mu\text{F}$  se carga a  $500 \text{ V}$ . Si una vez cargados unimos sus armaduras: 1) ¿Qué valor adquirirá la tensión en ambos condensadores? 2) ¿Qué carga tendrá ahora cada condensador? 3) ¿Qué energía tiene ahora el conjunto de los dos condensadores?

**26.** Se tienen tres condensadores,  $C_1, C_2, C_3$ , de 2, 3 y 5  $\mu\text{F}$ , respectivamente. El primero se carga a  $2000 \text{ V}$ , el segundo a  $1500 \text{ V}$  y el tercero a  $3000 \text{ V}$ . Calcúlese: 1) La energía almacenada en cada uno de ellos. 2) La diferencia de potencial que existirá entre las placas terminales del sistema formado por dichos condensadores cargados, al conectarlos en paralelo. 3) La energía electrostática del acoplamiento.

**27.** Se tienen dos condensadores de  $0,1 \mu\text{F}$  y  $0,15 \mu\text{F}$  dispuestos en serie: se cargan a una tensión de  $5000 \text{ V}$ . Determinar la carga de cada condensador. Se desconectan los condensadores de la fuente de alimentación y ellos entre sí y sin descargarse, se unen entre sí las armaduras de igual signo; determinar: 1) La diferencia de potencial entre las armaduras. 2) La carga de cada condensador.

**28.** Calcular la capacidad intercalada entre los puntos A y B de la figura. Cada uno de los condensadores es de  $1 \mu\text{F}$  de capacidad. Establecemos entre A y B una diferencia de potencial de  $300 \text{ V}$ ; calcular la carga, el potencial y la energía de cada uno de los condensadores y la energía de la asociación.

**29.** Desconectamos los condensadores cargados del problema anterior y los volvemos a conectar, todos en paralelo con las armaduras del mismo signo unidas. Calcular la carga, el voltaje y energía de cada uno de ellos y la energía de la asociación.



**30.** Dos condensadores de 3 y 4  $\mu\text{F}$  se conectan en paralelo y se cargan a una tensión de 12 V. ¿Qué diferencia de potencial hará falta entre los condensadores conectados en serie, para que almacenen la misma energía que poseen los dos condensadores cargados y conectados como hemos indicado?

**31.** Tenemos  $n$  condensadores idénticos que se conectan a una fuente de alimentación. ¿Almacenarán más energía si se conectan en serie o en paralelo?

**32.** Un condensador plano consta de dos placas metálicas circulares de 5 cm de radio, y separadas 1 cm; les aplicamos una diferencia de potencial de 200 V. Hallar: 1) Su capacidad. 2) La densidad superficial de carga que poseen las armaduras. 3) El campo eléctrico entre sus placas. 4) La energía por unidad de volumen entre las placas. 5) La energía total almacenada en el condensador.

**33.** La superficie de cada placa de un condensador plano paralelo es de 1  $\text{cm}^2$  y sus láminas están separadas 1 mm; sabiendo que el potencial de ruptura del aire es de  $k = 3 \text{ MV/m}$ , determinar el potencial, la carga y la energía máximos que pueden tener.

**34.** Si el potencial de ruptura del aire es de  $k = 3 \text{ kV/mm}$ , ¿cuál es la capacidad máxima que se puede obtener en un volumen de  $10 \times 12 \times 14 \text{ cm}$  con aire en su interior y con un potencial de servicio de 500 V?

**35.** Un condensador esférico está compuesto por dos esferas concéntricas, la interior de radio  $r_A$ , y la exterior (hueca) de radio interior  $r_B$ . Determinar su capacidad.

**36.** La esfera interior de un condensador esférico es de radio  $r_A$ , tiene una carga  $+Q$ ; la exterior (hueca), de radio interior  $r_B$ , posee una carga  $-Q$ . Determinar la expresión de la energía almacenada entre sus placas.

**37.** Las líneas de transmisión, empleadas para el transporte de la corriente eléctrica a distancia, tienen su capacidad distribuida de manera continua y es un factor importante en cualquier fenómeno eléctrico que se produzca. Los cables de transmisión son generalmente de dos tipos: coaxiales y paralelos. Determinar una expresión de la capacidad por unidad de longitud: 1) De los cables coaxiales (capacidad de un condensador cilíndrico). 2) De los cables paralelos suponiendo que la distancia entre ellos es muchísimo mayor que el radio de los hilos que lo forman.

**38.** Una balanza de brazos iguales está en equilibrio. Uno de sus dos platillos tiene una superficie de 200  $\text{cm}^2$  y está situado 1 cm por encima de una lámina metálica horizontal unida a tierra. Entre el platillo y la lámina se establece una diferencia de potencial de 100 V. Calcular: 1) La capacidad del condensador plano. 2) Los gramos que hay que cargar en el otro platillo para restablecer el equilibrio perdido. 3) La carga eléctrica que adquiere el platillo.

**39.** A un condensador plano, cuyas placas tienen una superficie  $A$  y se encuentran separadas una distancia  $d$ , se le carga a una tensión  $V$ ; se le desconecta de la fuente de alimentación y sin descargar se separan las placas hasta una distancia  $2d$ . Hallar: 1) La nueva diferencia de potencial. 2) La nueva energía almacenada. 3) El trabajo que hemos desarrollado con la fuerza externa para producir tal separación con un movimiento muy lento. 4) Demostrar que el trabajo realizado es igual al aumento de la energía potencial almacenada en el condensador.

**40.** Cargamos las placas fijas de un condensador plano de áreas  $A$  y separación  $d$ , con densidades superficiales  $+\sigma$  y  $-\sigma$ . Desconectamos el condensador de la fuente de alimentación y, sin descargarlo, dejamos libre una de ellas. Si es  $M$  la masa de la placa libre, calcular el tiempo que tardan en chocar (considerar únicamente la fuerza eléctrica).

**C) DIELECTRICOS. POLARIZACIÓN**

**41.** La molécula de agua puede representarse, como un triángulo isósceles en el que se colocan dos electrones con carga  $-2e$  (electrones orbitales del oxígeno), en el vértice que une los lados iguales, que forman un ángulo de  $105^\circ$ , y una carga positiva  $+e$  en cada uno de los otros dos vértices (correspondientes a cada uno de los núcleos del hidrógeno). Siendo las longitudes de los lados iguales del triángulo 1 Å, determinar el momento dipolar de la molécula de agua.

**42.** Determinar el momento dipolar resultante de la estructura rómbica y rígida de la figura.

**43.** Cada una de las armaduras de un condensador plano tiene una superficie de 200  $\text{cm}^2$ , el dieléctrico, que llena el espacio entre sus armaduras, es mica, con un espesor de 2 mm y una constante dieléctrica  $\epsilon' = 5$ . Calcular: 1) La capacidad del condensador. 2) La carga de cada armadura cuando la tensión entre ambas sea de 1000 V. 3) La intensidad del campo eléctrico entre las armaduras.

**44.** Un condensador esférico está constituido por dos esferas metálicas concéntricas de radios  $r = 3 \text{ cm}$  y  $R = 8 \text{ cm}$  (radio interno de la superficie esférica hueca). Entre las armaduras existe una sustancia de constante dieléctrica 5. Calcular: 1) La capacidad del condensador. 2) Carga que adquiere al conectar sus armaduras a una tensión de 1000 V. 3) Energía del condensador así cargado.

**45.** 1) La superficie de las armaduras de un condensador plano es de 100  $\text{cm}^2$ , y su distancia, de 3 mm. Se carga uniendo una de las armaduras al suelo y la otra a una tensión de 2000 V. ¿Cuál es la carga del condensador? 2) Se desconecta de la tensión de carga, y sin descargar el condensador se llena el espacio entre ambas armaduras con una sustancia de constante dieléctrica 5. ¿Cuál es la nueva capacidad del condensador? ¿Cuál es la diferencia de potencial, entre ambas armaduras, en este segundo caso?

**46.** Un condensador está formado por dos láminas paralelas de 150  $\text{cm}^2$  de superficie cada una y separadas entre sí 2 mm. Se carga el condensador con una diferencia de potencial de 1 kV. Se pide: 1) La carga del condensador y energía almacenada. 2) Si una vez cargado y aislado de la tensión de carga se llena el espacio entre las armaduras con una sustancia de constante dieléctrica 3, ¿cuál es la nueva capacidad del condensador? 3) En las condiciones de la pregunta 2, ¿cuál es la nueva diferencia de potencial entre las armaduras?, ¿cuál es su nueva energía?

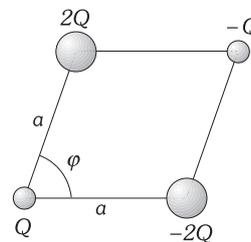
**47.** Disponemos de 16 láminas de aluminio y 15 de vidrio, siendo la superficie de las mismas de  $15 \times 30 \text{ cm}^2$ ; el espesor de las de vidrio es de 1 mm y la constante dieléctrica de este último 5. Calcular: 1) La capacidad y carga adquirida por el condensador formado por dos láminas de aluminio y una de vidrio intercalada entre aquéllas, cuando se le somete a una tensión de 1 kV. 2) La capacidad del sistema formado por las 15 láminas de vidrio intercaladas entre las 16 de aluminio, en las que las pares e impares de aluminio se han conectado entre sí, respectivamente. 3) Carga y diferencia de potencial correspondiente a cada condensador unitario, cuando las conexiones generales del sistema anterior se someten a la tensión de 1000 V.

**48.** Dos condensadores de aire de 1,5 y 3  $\mu\text{F}$  se conectan en serie a una fuente de alimentación que les proporciona una tensión de 50 V. Los desconectamos de la fuente y sin descargarlos los llenamos con dieléctricos de permitividad relativa 3 y 5 respectivamente. ¿Cuáles son las diferencias de potencial finales entre las armaduras de cada uno?

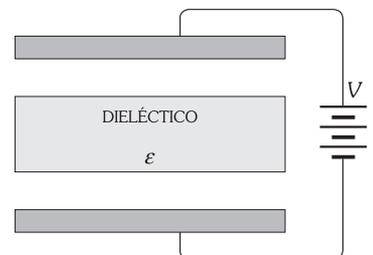
**49.** Se quiere construir un condensador plano de 100 pF de capacidad que soporte una tensión máxima de 30 kV. Disponemos para ello de placas metálicas y de dieléctrico de permitividad relativa 3 y de rigidez  $k = 30 \text{ MV/m}$ . ¿Cuál debe ser el área mínima de las placas del condensador?

**50.** Un condensador de aire, de láminas plano paralelas y de 1 pF de capacidad, se conecta a una batería que le proporciona una tensión de 12 V; sin desconectarlo, se introduce una placa de mica ( $\epsilon' = 5$ ) llenando el espacio entre sus armaduras. Determinese la carga que fluirá de la batería al condensador.

**51.** En la figura, las placas tienen una superficie de 1  $\text{cm}^2$ , la plancha de dieléctrico es de  $\epsilon' = 2$ , la capacidad del condensador es 1 pF y la batería proporciona una tensión de 12 V. Calcular la densidad superficial de carga sobre el dieléctrico.



Problema XIX-42.



Problema XIX-51.

**52.** Entre las armaduras de un condensador plano de 50  $\text{cm}^2$  de área, existe una distancia de 10 mm. Cargamos el condensador, con aire entre sus armaduras, a una tensión de 100 V; desconectamos de la fuente de alimentación y sin descargarlo introducimos una placa de dieléctrico de  $\epsilon' = 5$  y de espesor 3 mm. Calcular: 1) La capacidad del condensador antes de introducir el dieléctrico. 2) La carga libre de las placas del condensador. 3) El campo eléctrico entre las placas en el espacio no ocupado por el dieléctrico. 4) El campo eléctrico en el dieléctrico. 5) La diferencia de potencial entre las placas del condensador. 6) La capaci-

dad del condensador con el dieléctrico. 7) El campo eléctrico inducido en el interior del dieléctrico debido solamente a las cargas de polarización. 8) La carga ligada a las superficies del dieléctrico. (Resolver el problema sin utilizar los vectores desplazamiento y polarización.)

**53.** Mantenemos una tensión de 50 V entre las placas paralelas de un condensador de aire de 100 μF de capacidad; sin desconectarlo de la fuente se llena el espacio entre sus armaduras con un dieléctrico de ε' = 3) Calcular: 1) La nueva carga de sus armaduras. 2) La nueva energía almacenada en el condensador. 3) La relación entre las energías del condensador con y sin dieléctrico.

**54.** Un condensador plano está construido con dos láminas cuadradas de lado l; se cargan sus armaduras con Q<sub>0</sub> y se desconecta de la fuente de alimentación, sin descargarlo se llenan sus armaduras con dieléctrico de constante dieléctrica ε'. Calcular: 1) La variación de energía potencial electrostática en el proceso. 2) La fuerza media que ejerce la placa sobre el dieléctrico al introducirlo.

**55.** Un condensador plano tiene un área de 5 cm<sup>2</sup>, sus placas están separadas 2 cm y se encuentra lleno de un dieléctrico de ε' = 7. Cargamos el condensador así formado a una tensión de 20 V y se desconecta de la fuente de alimentación. ¿Cuánto trabajo se necesita para retirar la lámina de dieléctrico del interior del condensador?

**56.** Entre las armaduras de un condensador plano existe una distancia de 5 mm. Cargamos el condensador estando vacío el espacio entre sus armaduras a una tensión de 4 000 V; desconectamos de la fuente de alimentación e introducimos un dieléctrico que lo llena. Medida la nueva diferencia de potencial existente entre las armaduras nos da 800 V. Calcular: 1) El coeficiente dieléctrico del material introducido. 2) La susceptibilidad eléctrica. 3) La polarización en el dieléctrico.

**57.** El coeficiente dieléctrico del agua es ε' = 81. Calcular la perturbación y la susceptibilidad eléctricas del agua.

**58.** Una muestra de diamante de densidad 3,5 g/cm<sup>3</sup> tiene una polarización de 10<sup>-7</sup> C/m<sup>2</sup>, siendo la masa molecular del carbono 12 g/mol, y el número de Avogadro 6,02 × 10<sup>23</sup>, calcular: 1) El momento dipolar medio por átomo. 2) La separación media entre los centros de las cargas positiva y negativa. El átomo del carbono tiene un núcleo con una carga + 6e rodeada de seis electrones (e = 1,6 × 10<sup>-19</sup> C).

**D) EL VECTOR DESPLAZAMIENTO**

**59.** Determinar la fuerza con que se repelen dos cargas positivas puntuales q<sub>1</sub> y q<sub>2</sub>, que se encuentran sumergidas en el interior de un dieléctrico de permitividad ε.

**60.** Consideremos un ión esférico de carga Q sumergido en un líquido dieléctrico lineal homogéneo e isotrópico, siendo ε la permitividad del medio. Calcúlese el valor del campo eléctrico a una distancia r del centro del ión.

**61.** Un conductor esférico macizo de radio a cargado con Q<sub>f</sub>, se encuentra encerrado dentro de una corteza esférica dieléctrica de radio exterior b y constante dieléctrica ε'. Determinar: 1) Las expresiones de los vectores campo eléctrico, desplazamiento y polarización dentro y fuera del dieléctrico. 2) Las densidades superficiales de carga inducida en el dieléctrico.

**62.** Conectamos las placas de un condensador plano de 10 cm<sup>2</sup> de área a una fuente de alimentación cargándolo con 2 × 10<sup>-8</sup> C. El campo eléctrico en el dieléctrico que llena el espacio entre las placas es de 10<sup>6</sup> V/m. Calcular: 1) La permitividad relativa del material dieléctrico. 2) La carga en cada una de las superficies del dieléctrico.

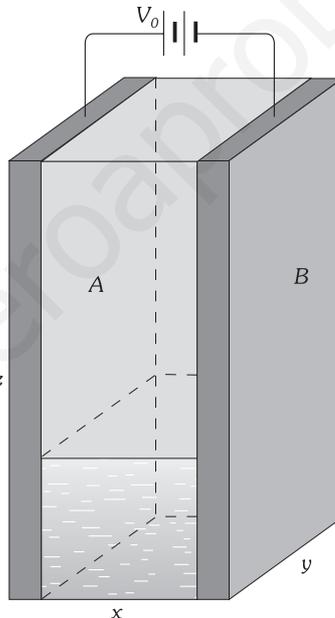
**63.** Un condensador esférico está formado por un conductor macizo de radio a, y por una esfera hueca de radio interior b concéntrica con la anterior y conectada a tierra. Cargamos la esfera interior con una carga Q<sub>f</sub>, desconectamos de la fuente de carga y llenamos el espacio entre ellas con un líquido dieléctrico de constante ε'. Determinar: 1) Las expresiones de **D**, **E** y **P** en el dieléctrico. 2) Los valores máximos y mínimos de **D**, **E** y **P** entre las armaduras del condensador. 3) Las densidades superficiales de carga libre y ligada en las esferas conductoras y en el dieléctrico respectivamente. 4) La diferencia de potencial entre las armaduras del condensador.

**64.** Un cable coaxial de 20 cm de largo está formado por un conductor cilíndrico macizo de radio 1 mm y un tubo conductor de radio interior 4 mm que están separados un dieléctrico de permitividad relativa 3,8, llenando completamente el espacio entre ellos. Cada uno de los cables contiene cargas iguales y opuestas de valor 0,1 μC. Determinar: 1) Las densidades superficiales de carga de polarización en el dieléctrico. 2) La diferencia de potencial entre los hilos. 3) La capacidad por unidad de longitud del cable.

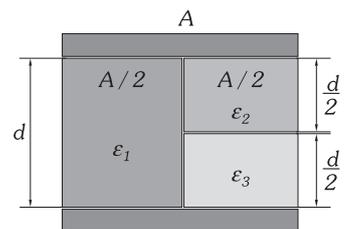
**65.** Un condensador cilíndrico de longitud L, de radios R y 4R, cuyo conductor interno está aislado con una manga de radio 2R y constante dieléctrica ε', está cargado (cada una de sus armaduras con una carga Q<sub>f</sub>). Determinar: 1) Las expresiones de **D**, **E** y **P** en el dieléctrico y en el espacio entre las armaduras en el que hay aire. 2) La capacidad del condensador. 3) Comprobar que la capacidad calculada coincide por su equivalencia con la que se deduce con dos en serie (los dos condensadores concéntricos, uno con aire y el otro con dieléctrico).

**66.** La superficie de cada una de las dos armaduras de un condensador plano es de 100 cm<sup>2</sup>, y su distancia, 1 cm. Se carga uniendo una de sus armaduras a tierra y la otra a una tensión de 3 000 V. Se desconecta de la tensión de carga y, sin descargar el condensador, se llena el espacio entre ambas armaduras con dos dieléctricos, uno de espesor 6 mm y constante dieléctrica 6, y el otro de 4 mm y constante dieléctrica 4. Calcular: 1) La carga del condensador. 2) El desplazamiento eléctrico. 3) El campo eléctrico en cada dieléctrico. 4) Diferencia de potencial entre las armaduras del condensador con los dieléctricos en su interior. 5) Su capacidad.

**67.** Las caras opuestas A y B de la caja de la figura son metálicas y sus aristas miden: x = 1 cm, y = 20 cm, z = 20 cm. Se llena de agua (ε'<sub>1</sub> = 80) hasta la tercera parte de su altura (z) y la terminamos de llenar con aceite (ε'<sub>2</sub> = 2,5). Sometemos las caras metálicas a una tensión de 100 V, si se desprecian los efectos de borde, calcular: 1) La capacidad del condensador así formado. 2) Carga total de cada armadura. 3) **D**, **E** y **P** en cada dieléctrico.



Problema XIX-67.



Problema XIX-69.

**68.** Se tiene un condensador plano cuya superficie de las armaduras es de 200 cm<sup>2</sup> cada una; la separación entre ellas es de 1 mm, habiendo entre ambas un dieléctrico cuyo espesor es de 0,6 mm y constante dieléctrica 4. Sabiendo que la diferencia de potencial entre las armaduras es de 2 000 V, determinar: 1) La capacidad de este condensador. 2) La carga del mismo. 3) La energía eléctrica acumulada en él.

**69.** Calcular la capacidad del condensador de la figura.

**70.** Queremos construir un condensador plano utilizando vidrio como dieléctrico (ε' = 50) teniendo que soportar un voltaje de 5 × 10<sup>4</sup> V. 1) Calcular el espesor mínimo que tiene que tener la placa de vidrio para que no se perfore (rigidez del vidrio: 50 MV/m). 2) Energía por unidad de volumen máxima que puede almacenar el condensador así construido.

**71.** Se introduce en el interior de un condensador plano, cargado a una tensión V<sub>0</sub> y cuya distancia entre armaduras es d, una placa de constante dieléctrica ε', de área igual a la de las placas del condensador y de espesor e. Hallar el cambio de energía en el condensador, si las placas al introducir el dieléctrico se encuentran: 1) Cargadas y desconectadas de la fuente de alimentación. 2) Mantenidas a la tensión V<sub>0</sub>.

**72.** Un condensador esférico está formado por un conductor esférico macizo de radio a y una esfera conductora hueca de radio interior b y situada concéntrica con la anterior. Llenamos el espacio entre las esferas con un líquido dieléctrico de constante ε' y rigidez k. Calcular la energía máxima que puede almacenar.

# CAPÍTULO XX

## CORRIENTE ELÉCTRICA CONTINUA

### A) CORRIENTE ELÉCTRICA: INTENSIDAD Y RESISTENCIA. EFECTO JOULE

#### XX - 1. Corriente eléctrica continua. Movilidad de los portadores de carga

A los materiales en los que existe un gran número de cargas que se mueven con libertad en su interior, lo hemos llamado CONDUCTORES. En los conductores sólidos (los metales, sus aleaciones, y algunas otras pocas sustancias como el carbono) las cargas libres o «portadores de carga» son los electrones de valencia, que se encuentran moviéndose al azar en su interior, como las moléculas de un gas encerradas en un recipiente, y al no tener ninguna dirección privilegiada, los efectos electromagnéticos que puedan producir son nulos.

Téngase en cuenta que la definición de conductor incluye no sólo a los metales y aleaciones, sino también a gases ionizados, electrolitos, semiconductores, a un vacío en la vecindad de un cátodo emisor termoiónico, en fin, toda sustancia en que los portadores de carga se mueven con libertad; y así como los portadores de carga en los metales son los electrones, en otros casos, como en un electrolito, la corriente es conducida tanto por iones positivos como por los negativos y al moverse unos más rápidamente que los otros la «conducción» por un tipo de ión predomina; en los semiconductores es debida a los huecos (+) y a los electrones; en el plasma, contribuyen todo tipo de partículas elementales y moléculas ionizadas.

Hemos visto que al someter un conductor a un campo eléctrico, en condiciones estáticas, éste se anulaba en su interior, y en consecuencia, todos los puntos del material se encontraban al mismo potencial.

Vamos a estudiar, en este capítulo, el que caso en que por causa de una fuente externa de energía, en el interior del conductor y en cada punto de él, mantenemos un campo eléctrico invariable con el tiempo (CORRIENTE CONTINUA ESTACIONARIA); por lo que sobre los portadores de carga libre, actuará una fuerza y se pondrán en movimiento en el interior del material conductor, dando lugar a un transporte de energía eléctrica de un punto a otro.

CORRIENTE ELÉCTRICA es la circulación de la carga a través de un conductor. Convenimos en asignar un sentido a la corriente eléctrica y es el que tiene los portadores de carga positiva; como la corriente eléctrica está producida por un campo eléctrico, ésta tiene el mismo sentido que el campo. Se llama CONDUCCIÓN al proceso por el cual la carga se transporta.

Un estudio detallado del fenómeno microscópico de conducción tiene su explicación en la Física Cuántica, en nuestro análisis establecemos un modelo sencillo para dar una explicación a la conducción en los metales.

Supongamos un hilo metálico (Fig. XX-1) y que por la causa que sea, se ha originado en su interior un campo eléctrico; los electrones libres del metal estarán sometidos a una fuerza en sentido opuesto al campo, cuyo valor es:  $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$  ( $e$  es la carga del electrón). Si no existiera ninguna otra fuerza el electrón se aceleraría indefinidamente bajo la acción del campo; pero los repetidos «choques» de los electrones con los iones positivos del metal que forman su red cristalina, hacen que sean frenados, es decir: existe un cierto tipo de fuerza resistiva (o de rozamiento) proporcional a la velocidad de desplazamiento, que hace que tengan un movimiento de «velocidad media» constante.

Admitamos que la variación media del momento lineal por choque es  $mv$  ( $m$  es la masa del electrón) y que  $\tau$  es el tiempo medio entre choques, que será muy pequeño, la fuerza de resistencia al movimiento del electrón en el interior del material conductor será:  $F = -mv/\tau$  (el signo menos se ha puesto por ser la fuerza de sentido contrario a la velocidad). Aplicando el segundo principio de Newton al movimiento del electrón, obtenemos:

$$F = ma \Rightarrow Ee - \frac{mv}{\tau} = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{m\tau dv}{Ee\tau - mv} = dt$$

integrando nos quedará:

$$\tau \int_0^v \frac{m dv}{Ee\tau - mv} = \int_0^t dt \Rightarrow -\tau \ln \frac{Ee\tau - mv}{Ee\tau} = t \Rightarrow 1 - \frac{mv}{Ee\tau} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

en la que hemos llamado  $\varepsilon$  a la base de los logaritmos neperianos, para no confundirla con la carga del electrón. Para un tiempo  $t \gg \tau$ , y sin entrar en un análisis más detallado, podemos admitir que  $e^{-t/\tau}$  tiende a cero, con lo que:



Fig. XX-1.- Un campo eléctrico origina una fuerza sobre los electrones de un conductor metálico.

$$1 - \frac{mv}{Ee\tau} = 0 \Rightarrow \boxed{\mathbf{v} = \frac{e\tau}{m} \mathbf{E}}$$

«En un conductor en cuyo interior se ha originado un campo eléctrico, la velocidad media de los portadores de carga (electrones en los metales) es proporcional a la intensidad de dicho campo».

$$\boxed{\mathbf{v} = \mu \mathbf{E}}$$

a  $\mu$  se le llama «MOVILIDAD DE LOS PORTADORES DE CARGA» y se mide en el SI en  $m^2/V \cdot s$ . La velocidad de los electrones en un hilo conductor es realmente muy pequeña; una «gran» velocidad de la corriente eléctrica es un metro por hora; no confundir esta velocidad con la rapidez con que viajan los cambios en el campo eléctrico que impulsan a los electrones y producen la corriente a lo largo del hilo conductor, la cual se propaga a la velocidad de las ondas electromagnéticas en ese medio. Cuando se produce una presión en un tubo largo con agua, la «onda de presión» viaja rápidamente a lo largo del tubo; sin embargo, la velocidad con que el agua se mueve a través del tubo es mucho menor.

Según el convenio dado para el sentido de la corriente eléctrica, en los metales la corriente tiene sentido contrario al del movimiento de sus portadores de carga, los electrones (Fig. XX-2).

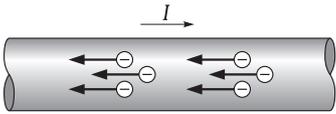


Fig. XX-2.- Sentido de la intensidad de corriente eléctrica en los metales.

**XX - 2. Intensidad de una corriente eléctrica. Unidades**

Ya que la corriente eléctrica es fundamentalmente un movimiento de cargas, debemos definir una magnitud que sea característica de tal corriente para poder hacer un estudio de ella. Esta magnitud es la «intensidad de la corriente de conducción».

Se define la INTENSIDAD DE LA CORRIENTE O CORRIENTE DE CONDUCCIÓN como la velocidad a la que se transporta la carga por un punto dado en un sistema conductor.

$$\boxed{I = \frac{dQ}{dt}} \tag{1}$$

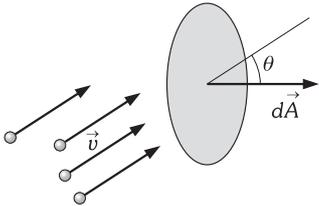


Fig. XX-3.- Portadores de carga de un solo tipo moviéndose a velocidad  $\vec{v}$ .

donde  $Q = Q(t)$  es la carga neta transportada en el instante  $t$ .

La unidad de intensidad en el SI es el Amperio (que debe su nombre a André Marie Ampère 1775-1836); es evidente que:

$$\boxed{1A = \frac{1 \text{ Culombio}}{1 \text{ segundo}} = 3 \times 10^9 \text{ UEE}}$$

En el sistema internacional se toma la intensidad, y no la carga, como magnitud simple, expresándose por A (inicial de amperio); la razón de esta elección se encuentra en que las fuerzas magnéticas entre conductores por los que circulan corrientes (ver definición de amperio internacional en el párrafo XXI-18 se pueden medir con gran exactitud en función de las magnitudes simples de longitud, masa y tiempo.

**XX - 3. Densidad de corriente de conducción. Ecuación de continuidad. Corrientes estacionarias**

«LA DENSIDAD DE CORRIENTE es una magnitud vectorial que depende de las coordenadas del punto del conductor que observemos y del instante en que lo hagamos. Podemos definir su módulo como la intensidad que corresponde a cada unidad de sección normal al hilo conductor».

Consideremos un conductor en el cual sus portadores son de un solo tipo y se están moviendo con una misma velocidad  $\mathbf{v}$  y en una determina dirección como la indicada en la Fig. XX-3. Supongamos que es  $N$  el número de portadores de carga existentes en el conductor por unidad de volumen.

Para calcular la intensidad de corriente que pasa por un elemento de área  $d\mathbf{A}$  (Fig. XX-4) calculamos primeramente la carga que pasa a través de dicha área en un intervalo de tiempo  $dt$ .

Teniendo en cuenta que la distancia recorrida por cada portador en un intervalo de tiempo  $dt$  es  $\mathbf{v} dt$ ; por la sección  $d\mathbf{A}$  pasarán todas las cargas que en el intervalo  $dt$  estuviesen contenidas en un cilindro oblicuo de base  $d\mathbf{A}$  y generatriz  $\mathbf{v} dt$ , como se indica en la Fig. XX-4. (Es fácil darse cuenta que un portador que en el instante  $t$  estuviese en el punto 1 ó 2, al cabo del intervalo de tiempo  $dt$  no habrá atravesado el área  $d\mathbf{A}$ ). El número de cargas contenidas en ese volumen es:

$$\text{Número de cargas} = \text{Volumen} \times N = N dA dh = N dA v dt \cos \theta = N dt \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$$

por tanto la carga que ha atravesado esa área, se obtendrá multiplicando la expresión anterior por la carga  $q$  de un portador; luego la corriente que atraviesa a  $d\mathbf{A}$ , la obtenemos aplicando (1) y nos queda:

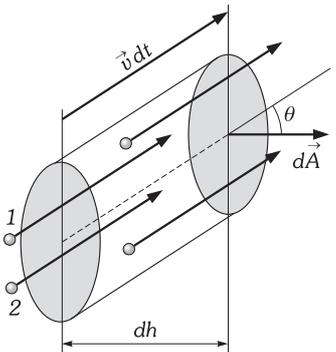


Fig. XX-4.- Para calcular la intensidad de corriente que pasa por el elemento de área  $d\mathbf{A}$ .

$$dI = q N \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \tag{2}$$

es evidente que si existe más de un tipo de portadores de carga, habrá una contribución de la forma (2) de cada clase de portador, luego en general:

$$dI = [\sum N_i q_i \mathbf{v}_i] \cdot d\mathbf{A} \tag{3}$$

al vector:

$$\mathbf{J} = \sum N_i q_i \mathbf{v}_i$$

se le llama DENSIDAD DE CORRIENTE DE CONDUCCIÓN, este nombre se debe a que es la intensidad por unidad de superficie. La ecuación (3) la podemos escribir:

$$dI = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$$

expresión que nos determina la intensidad de corriente a través de una superficie elemental  $d\mathbf{A}$ ; y por tanto, la corriente que pasa por una superficie arbitraria  $A$  vendrá dada por:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} \tag{4}$$

ecuación que representa el flujo del vector densidad de corriente  $\mathbf{J}$  a través de una superficie  $A$ , o lo que es lo mismo *el flujo de cargas por unidad de tiempo a través de la superficie  $A$* .

Consideremos la ecuación (4) aplicada a una superficie cerrada  $A$  que encierra a un volumen  $V$  (Fig. XX-5). Supongamos el hecho de que en el volumen  $V$  penetran más portadores de carga positiva de los que salen de él, produciéndose una acumulación de carga positiva en su interior, entonces: tanto la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  como la densidad de carga  $\rho$  son dependientes del tiempo. La integral de superficie de  $\mathbf{J}$  extendida a  $A$  nos representará el flujo neto de carga por unidad de tiempo a través de esta superficie cerrada; entendiendo por flujo neto, las cargas que por unidad de tiempo salen fuera del volumen menos las que penetran en él, que en el caso que hemos considerado será negativo\*; es decir:

$$I = - \oint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = - \int_V \text{div } \mathbf{J} dV \tag{5}$$

esta última integral se ha obtenido por aplicación del teorema de la divergencia.

Por otra parte, la carga total en el interior de  $V$  en cualquier instante vendrá dada por:

$$Q = \int_V \rho dV$$

y por tanto el aumento de carga en el volumen  $V$  en el tiempo  $dt$ , será:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV \tag{6}$$

como consideramos al volumen  $V$  como fijo y  $\rho$  es una función de punto y del tiempo, la derivada respecto del tiempo influye solamente sobre la función  $\rho(x, y, z, t)$ , transformándose en derivada parcial respecto del tiempo cuando se introduce dentro del signo integral:

$$I = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \tag{7}$$

en virtud del principio de conservación de la carga («la carga ni se crea ni se destruye») las cantidades (5) y (7) tendrán que ser iguales:

$$- \int_V \text{div } \mathbf{J} dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \Rightarrow \int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{J} \right) dV = 0$$

como hemos tomado un volumen arbitrario  $V$ , la única forma válida es que el integrando se anule en cada punto:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{J} = 0 \tag{8}$$

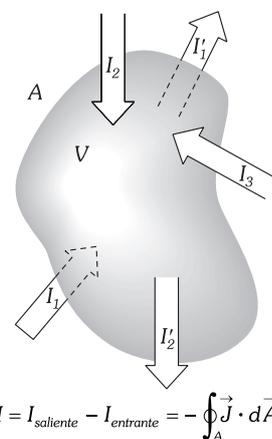


Fig. XX-5.- En el caso de la figura adjunta se ha considerado que penetran en el volumen  $V$  más portadores de carga positiva que los que salen de él, o lo que es lo mismo que:  $I_1 + I_2 + I_3 > I_1' + I_2'$ .

\* En caso contrario lo consideramos positivo y por tanto la carga en el interior decrecería y la ecuación (5) la tomaríamos como negativa, llegando a las mismas conclusiones. Todo esto será exactamente al revés, si los portadores de carga son negativos.

esta ecuación, que nos relaciona la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  y la densidad de carga  $\rho$ , a la que llamaremos ECUACIÓN DE CONTINUIDAD, según hemos visto tiene su origen en el principio de conservación de la carga en un sistema aislado, podemos decir que es la expresión matemática de éste.

Diremos que un conductor se encuentra en condiciones de CONDUCCIÓN EN ESTADO ESTACIONARIO cuando el vector densidad de corriente  $\mathbf{J}$  permanece constante con el tiempo en todo punto de él y en consecuencia, la densidad de carga total  $\rho$  también permanece constante con el tiempo y  $\partial\rho/\partial t = 0$  en todos los puntos del conductor; lo que quiere decir que no puede haber acumulación o disminución de carga en ningún punto del conductor; luego la ecuación (8) nos queda:

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{J} = 0}$$

CORRIENTES ESTACIONARIAS

por tanto son CORRIENTES ESTACIONARIAS todas aquellas en las que permanecen constantes con el tiempo las diferentes magnitudes que la caracterizan.

En todo lo que exponemos a continuación y mientras no digamos lo contrario nos referiremos a corrientes estacionarias.

#### XX – 4. Ley de Ohm. Resistividad y resistencia de un conductor

En el primer apartado de este capítulo hemos dicho que cuando en un conductor se establece, por la causa que sea, un campo eléctrico, las cargas libres del mismo se ponen en movimiento bajo la acción de la fuerza debida al campo, y aunque inicialmente el movimiento sea acelerado, rápidamente se hace uniforme a causa de los sucesivos choques con los iones fijos de la red cristalina y entre ellos mismos. La «velocidad de arrastre» con la cual se mueven no es pues la velocidad real que cada carga experimenta, sino un valor promedio. Consecuencia de ello será que tal velocidad media dependa fuertemente no sólo del campo eléctrico aplicado, sino también de la naturaleza del medio conductor. Por ejemplo: para un mismo campo aplicado a dos conductores diferentes, los electrones se moverán con mayor facilidad en aquel en que experimenten menor número de choques, o sea en aquel cuyo número de iones por unidad de volumen sea menor, o bien que el tamaño de estos iones sea menor, etc.

En el párrafo anterior, en el análisis de la densidad de corriente, hemos visto que es proporcional a la «velocidad media» de los portadores de carga, lo cual está en perfecto acuerdo con la experiencia, puesto que para un gran número de sustancias conductoras, se comprueba que si tenemos un hilo de estas sustancias por el que circula una corriente eléctrica, un cierto número de electrones atraviesan cada segundo la sección unidad, transportando una carga que nos mide la densidad de corriente  $J$ . Como es lógico, a doble, triple, etc., velocidad, atraviesan la sección doble, triple, etc., número de electrones y por tanto: *la densidad de corriente es proporcional a la velocidad de los electrones:*

$$\frac{J}{J'} = \frac{v}{v'}$$

pero como las velocidades son proporcionales a las intensidades de campo eléctrico (párrafo 1), es decir:

$$\frac{v}{v'} = \frac{E}{E'}$$

obtenemos por igualación: 
$$\frac{E}{E'} = \frac{J}{J'} \Rightarrow \frac{E}{J} = \frac{E'}{J'}$$

Considerando otros campos eléctricos  $E''$ ,  $E'''$ , etc. que produjeran en la misma sustancia conductora, densidades de corriente  $J''$ ,  $J'''$ , etc. se obtendría:

$$\frac{E}{J} = \frac{E'}{J'} = \frac{E''}{J''} = \frac{E'''}{J'''} = \dots = \text{constante}$$

o bien, vectorialmente:

$$\boxed{\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}}$$

ecuación que nos determina la LEY DE Georg Simon OHM (1787-1854) en forma local (microscópica).

A los materiales que satisfacen esta relación se les llama CONDUCTORES LINEALES u ÓHMICOS.

La cantidad  $\sigma$  se llama CONDUCTIVIDAD y es característica de la sustancia, para los conductores lineales suele ser constante, su unidad en el SI recibe el nombre de Siemens (S)\* y es el  $(\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ . El valor de  $\sigma$  da idea de la facilidad que presenta el conductor al movimiento de cargas en su interior. Un «buen» conductor como el cobre, el oro, platino, etc., presenta una gran conductividad, al contrario que otras sustancias, como el caucho, típicamente aislador, que presenta valores bajísimos, prácticamente nulos, de la conductividad.

\* En honor a Wemer von Siemens (1816-1892).

A la inversa de la conductividad, se le llama RESISTIVIDAD:

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

El nombre de *resistividad* es debido a que si un campo eléctrico muy grande produce densidad de corriente muy pequeña,  $E/J$  resulta muy grande, dándonos una verdadera medida de la *oposición de la sustancia* al movimiento de los electrones en su seno. Así, un mismo campo eléctrico produce en el interior de dos cuerpos conductores distinta densidad de corriente: *mayor* en el de *menor* resistividad y a la inversa.

La Ley de Ohm también puede escribirse:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{J} = \rho \mathbf{J}$$

Consideremos dos puntos de un hilo conductor que distan entre sí  $L$  y supongamos que el campo eléctrico es uniforme dentro de dicho conductor, entonces la diferencia de potencial entre los puntos 1 y 2 será:

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E L$$

pero según hemos visto:  $E = \rho J$  ( $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{J}$  son paralelos en todo punto, trabajamos sólo con módulos), luego:

$$V_1 - V_2 = \rho J L \quad V_1 - V_2 = \rho J A \frac{L}{A}$$

pero como:  $JA = I$ , siendo  $I$  la intensidad de la corriente que circula por el hilo:

$$V_1 - V_2 = \rho \frac{L}{A} I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{V_1 - V_2}{\rho \frac{L}{A}}$$

A la cantidad  $\rho L/A$  se le llama RESISTENCIA eléctrica ( $R$ ) y es característica del conductor y de su temperatura:

$$R = \rho \frac{L}{A} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{V_1 - V_2}{R}$$

expresión que constituye la LEY DE OHM vista en forma finita (macroscópica).

El nombre de *resistencia* deriva de hecho siguiente: entre los extremos de dos hilos establecemos la misma caída de potencial  $V_1 - V_2$ ; el hilo en que circula *menor* intensidad tiene una *mayor* resistencia (como se deduce de la última fórmula) y a la inversa, siendo, por lo tanto, *la resistencia, la medida de la oposición de los hilos conductores al movimiento de los electrones en su seno.*

De la fórmula anterior obtenemos: *la resistencia de un hilo conductor es directamente proporcional a la longitud e inversamente proporcional a su sección.*

De la misma fórmula podemos obtener el concepto físico de la resistividad de una sustancia haciendo  $L = 1$  y  $A = 1$ :

«La RESISTIVIDAD es la resistencia del conductor cuando tiene la unidad de longitud y la unidad de sección».

De la fórmula anterior deducimos las unidades de resistencia.

$$\text{Haciendo } \left| \begin{array}{l} V_1 - V_2 = 1 \text{ UEE} \\ I = 1 \text{ UEE} \end{array} \right| \quad R = 1 \text{ UEE} \quad \left| \begin{array}{l} V_1 - V_2 = 1 \text{ voltio} \\ I = 1 \text{ amperio} \end{array} \right| \quad R = 1 \text{ ohmio } (\Omega)$$

$$\text{La UEE} \quad \left| \begin{array}{l} \text{es la resistencia de un conductor tal que teniendo} \\ \text{entre sus extremos la diferencia de potencial de} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} 1 \text{ UEE} \\ 1 \text{ voltio} \end{array} \right| \text{ circula por él la intensidad de } \left| \begin{array}{l} 1 \text{ UEE} \\ 1 \text{ amperio} \end{array} \right|$$

$$1 \Omega = \frac{1 \text{ voltio}}{1 \text{ amperio}} = \frac{1}{300} \frac{1}{3 \times 10^9} = \frac{1}{9 \times 10^{11}} \text{ UEE}$$

El ohmio se define de una manera absoluta (patrón internacional) como «*la resistencia de una columna de mercurio de 106,3 cm de longitud y 1 mm<sup>2</sup> de sección a cero grados centígrados.*» En el National Bureau of Standards de los EEUU se encuentran tipos de resistencias patrón construidas con arrollamientos de hilos adecuados.

Una expresión más general de la ley de Ohm es:

RESISTIVIDADES (a 20 °C)	
MATERIAL	RESISTIVIDAD $\Omega \cdot \text{m}$
CONDUCTORES	
Plata	$1,59 \times 10^{-8}$
Cobre	$1,68 \times 10^{-8}$
Oro	$2,44 \times 10^{-8}$
Aluminio	$2,65 \times 10^{-8}$
Tungsteno	$5,6 \times 10^{-8}$
Hierro	$10 \times 10^{-8}$
Platino	$10,6 \times 10^{-8}$
Plomo	$11 \times 10^{-8}$
Nicromio*	$150 \times 10^{-8}$
SEMICONDUCTORES**	
Carbono (grafito)	$(3 - 60) \times 10^{-5}$
Germanio	$(1 - 500) \times 10^{-3}$
Silicio	$0,1 - 60$
AISLADORES	
Vidrio	$10^9 - 10^{12}$
Caucho duro	$10^{12} - 10^{15}$
Azufre	$10^{15}$

\* Aleación de Ni, Fe y Cr usada para elementos calefactores

\*\* Los valores dependen fuertemente de impurezas, incluso en cantidades muy pequeñas (ver capítulo XXIX).

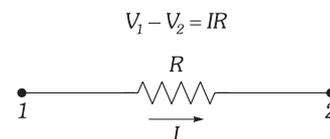


Fig. XX-6.- Ley de Ohm a los extremos de una resistencia.

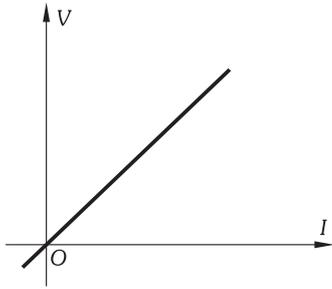


Fig. XX-7.- Representación gráfica de corriente-voltaje de un material óhmico.

$$R = \frac{dV}{dI} = cte$$

y  $R$  es, por tanto, la pendiente de la recta en la representación gráfica  $V = f(I)$  (Fig. XX-7). Esta relación se ha ensayado para corrientes estacionarias en metales y líquidos, siendo válida en márgenes muy amplios de valores; con la excepción del caso de campos eléctricos muy grandes en líquidos, por ejemplo, del orden de 3 MV/m con los que se producen desviaciones respecto de la ley de Ohm de hasta un 50%. El parámetro  $R_{dy} = dV/dI$ , al que se le llama «RESISTENCIA DINÁMICA», tiene gran interés en el estudio de los conductores no-óhmicos, en los que  $R_{dy} \neq cte$ . Así ocurre, por ejemplo, en el diodo semiconductor que tiene características no lineales entre la intensidad y el voltaje (Fig. XX-8).

**XX - 5. Relación entre la conductividad de un metal y la movilidad de los electrones en su interior**

La corriente eléctrica en un metal se produce debido a que los electrones se mueven en su interior por causa del campo eléctrico ( $E$ ) que en él se origina; si es  $N$  el número de electrones por unidad de volumen que tienen por velocidad media  $v$  y carga  $e$ , el valor de la densidad de corriente en dicho metal será:  $J = Nve$ . Por otro lado sabemos que la movilidad de los electrones viene dada por:  $\mu = v/E$ , con lo que según se ha obtenido para la ley de Ohm ( $J = \sigma E$ ), podemos expresar la conductividad en función de la movilidad como:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{J}{E} = Ne\mu$$

**XX - 6. Variación de la resistencia con la temperatura**

Al aumentar la temperatura aumenta la resistencia eléctrica. Si  $R_0$  es la resistencia a 0 °C, y  $R_t$  la resistencia a  $t^\circ$ , se puede escribir en primera aproximación:

$$R_t = R_0 (1 + K t)$$

siendo  $K = (R_t - R_0)/R_0 t$ , un COEFICIENTE DE VARIACIÓN DE LA RESISTENCIA CON LA TEMPERATURA, de un valor aproximado al de dilatación de los gases, ya que está comprendido entre 1/200 y 1/300 y cuyo significado físico es la «variación media que experimenta la unidad de resistencia, al variar un grado la temperatura».

El hecho de que la resistencia dependa de la temperatura es fácilmente explicable cualitativamente. Si la temperatura aumenta, la agitación térmica de los átomos o moléculas que componen el material, aumentará también, y por lo tanto el número de choques entre las partículas de cargas y los iones de la red cristalina será mayor, disminuyendo así la velocidad media de arrastre de estas partículas. En resumen, al aumentar la temperatura aumenta la «dificultad» al movimiento de las cargas, y por tanto, aumenta la resistencia.

**XX - 7. Resistencia equivalente a otras en serie o derivadas**

1º. *Varias resistencias en serie equivalen a otra igual a la suma de todas ellas.* En efecto: en las resistencias en serie se verifica por la ley de Ohm (Fig. XX-9):

$$\begin{cases} V_1 - V_2 = IR_1 \\ V_2 - V_3 = IR_2 \\ V_3 - V_4 = IR_3 \end{cases} \Rightarrow V_1 - V_4 = I(R_1 + R_2 + R_3)$$

En una resistencia equivalente al conjunto, se verifica:  $V_1 - V_4 = I R$ , por igualación se obtiene:

$$R = R_1 + R_2 + R_3$$

2º. *La inversa de la resistencia equivalente a otras en derivación, es igual a la suma de las inversas de todas ellas.* En efecto:

$$\begin{cases} I_1 = \frac{V_1 - V_2}{R_1} \\ I_2 = \frac{V_1 - V_2}{R_2} \\ I_3 = \frac{V_1 - V_2}{R_3} \end{cases} \Rightarrow I_1 + I_2 + I_3 = (V_1 - V_2) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

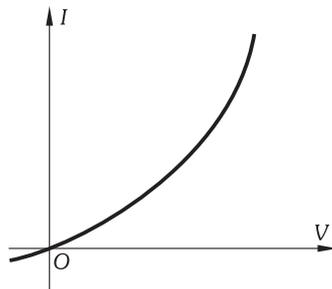


Fig. XX-8.- Curva no lineal voltaje-corriente en un diodo semiconductor; no obedece a la ley de Ohm.

COEFICIENTES DE TEMPERATURA (en °C)	
MATERIAL	COEFICIENTE DE TEMPERATURA
Aluminio	$39 \times 10^{-4}$
Cobre	$39,3 \times 10^{-4}$
Hierro	$50 \times 10^{-4}$
Mercurio	$8,8 \times 10^{-4}$
Plata	$38 \times 10^{-4}$
Plomo	$45 \times 10^{-4}$
Platino	$39,3 \times 10^{-4}$

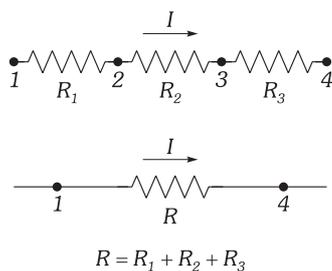


Fig. XX-9.- Resistencias en serie.

En la resistencia equivalente se verifica:  $I = (V_1 - V_2)/R$ . Al ser  $I = I_1 + I_2 + I_3$ , se obtiene por igualación:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

**PROBLEMAS: 1 al 10.**

### XX - 8. Resistencias variables

**CAJAS DE RESISTENCIAS.** Las cajas de resistencia sirven para intercalar en un circuito resistencias conocidas. Constan de unos carretes de hilo conductor muy fino, de resistencias conocidas, instalados en serie sobre una pieza metálica de resistencia prácticamente nula; esta pieza está partida por varios sitios, verificando la unión eléctrica de los extremos de los carretes. Todo el sistema se instala en una caja de materia aisladora. Unas clavijas metálicas de cabeza aisladora se ajustan perfectamente en los orificios de la pieza metálica. La corriente que entra por un extremo de ésta pasa por todos los carretes, si las clavijas no están puestas, intercalándose una resistencia, suma de todas ellas.  $R = R_1 + R_2 + R_3 \dots$

Al poner una clavija se disminuye la resistencia correspondiente al carrete, ya que la corriente pasa, en realidad, a través de la clavija, por ser su resistencia prácticamente nula.

**POTENCIÓMETROS Y REOSTATOS.** Son resistencias variables y están formadas por un hilo metálico arrollado en espiral, con un cursor que hace contacto con él; su finalidad es intercalar resistencias variables en un circuito. Su funcionamiento se comprende claramente a la vista de las figuras XX-12. Al deslizar el cursor a la derecha o izquierda, o girarlo, se introduce más o menos resistencia en el circuito. El símbolo que adoptamos para la existencia de una resistencia variable en un circuito es: .

### XX - 9. Energía consumida en una corriente

La caída de potencial ( $V_1 - V_2$ ) entre dos puntos de un hilo conductor es la pérdida de energía potencial de la unidad de carga, cuando pasa de un punto a otro. Si la carga transportada es  $q$ , la pérdida de energía potencial  $U$  será:

$$U = (V_1 - V_2) q = (V_1 - V_2) I t = I^2 R t = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R} t$$

Diversas expresiones de la energía, obtenidas considerando que  $I = q/t$  y que  $I = (V_1 - V_2)/R$ .

### XX - 10. Potencia de una corriente eléctrica

«Es la energía de la corriente en cada unidad de tiempo».

$$P = \frac{U}{t} = \frac{(V_1 - V_2) q}{t} = (V_1 - V_2) I = I^2 R = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R}$$

expresando las magnitudes en el SI, la potencia quedará expresada en vatios. El VATIO (considerado eléctricamente) es la potencia de una corriente de caída de potencial un voltio e intensidad de corriente de un amperio.

El KILOVATIO-HORA es una unidad de energía que equivale a la energía que produce 1 kW durante 1 hora:  $1 \text{ kW} \cdot \text{h} = 1\,000 \text{ W} \times 3\,600 \text{ s} = 3\,600\,000 \text{ J}$ .

### XX - 11. Efecto Joule

«Es la transformación de la energía eléctrica en calorífica, al circular una corriente por un conductor».

Al pasar una carga eléctrica de los mayores a los menores potenciales, hay una disminución de energía potencial:  $U = (V_1 - V_2) q$ . Sustituyendo  $V_1 - V_2 = R I$  y  $q = I t$ , tenemos:

$$U = R I^2 t$$

La degradación de esta energía hace que se transforme en calor. Si  $R$ ,  $I$  y  $t$  están expresados en ohmios, amperios y segundos, respectivamente,  $U$  viene expresado en julios. Cada julio es capaz de producir  $1/4,18 = 0,24$  calorías. La cantidad de calor (en calorías) es:  $Q = 0,24 I^2 R t$ .

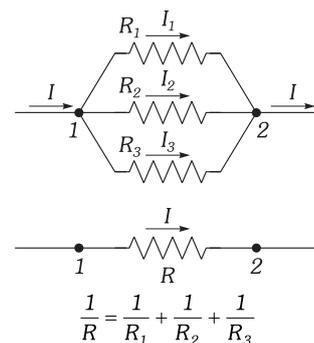


Fig. XX-10.- Resistencias en derivación.

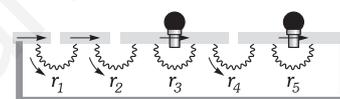


Fig. XX-11.- Caja de resistencias.

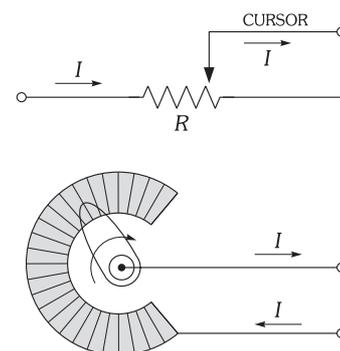


Fig. XX-12.- Reóstatos.

LEY DE JOULE. En una determinada resistencia la cantidad de calor originada en ella al paso de una corriente eléctrica, es directamente proporcional al cuadrado de la intensidad. A igualdad de intensidad, tal calor es directamente proporcional a la resistencia. En todos los casos el calor desprendido es proporcional al tiempo que está pasando la corriente.

PROBLEMAS: 11 al 36.

### B) FUERZA ELECTROMOTRIZ. CIRCUITO FUNDAMENTAL DE CORRIENTE CONTINUA

#### XX - 12. Fuerza electromotriz. Generadores de corriente

Al estudiar el campo electrostático veíamos que era conservativo y en consecuencia su circulación a lo largo de una línea cerrada es nula:

$$\oint \mathbf{E}_{\text{electrostático}} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

lo que nos indica que el trabajo total realizado por el campo electrostático sobre un portador de carga que describe un circuito (línea cerrada) es cero. Sabemos que a un circuito están conectados aparatos tales como las resistencias que producen energía calorífica (efecto Joule) y motores capaces de producir energía mecánica; en definitiva podemos decir que parte de la energía del circuito sale al exterior. Consecuencia de esto es que el campo eléctrico, causa del movimiento de las cargas libres en el interior del circuito no es solamente electrostático o lo que es lo mismo, que para que se produzca el movimiento de las cargas en los conductores que forman el circuito es necesario que sobre ellas actúen fuerzas de origen no electrostático (ej. mecánicas, químicas, etc.). Llamando CAMPO EFECTIVO al campo total causante de estas fuerzas y por tanto del movimiento de las cargas en el interior de los conductores que forman el circuito, deducimos que su circulación a lo largo del circuito es no nula, al valor que toma le llamamos FUERZA ELECTROMOTRIZ (FEM):

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}_{\text{ef}} \cdot d\mathbf{r}$$

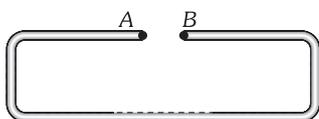


Fig. XX-13.- Si entre los extremos A y B de un conductor establecemos una diferencia de potencial, transcurrido un tiempo determinado se transforma en equipotencial.

Estudiemos el caso de los generadores de corriente. Supongamos que entre los puntos A y B (Fig. XX-13) de un conductor se establece una diferencia de potencial; el conductor deja de ser «equipotencial» por lo que en su interior se crea un campo electrostático, y sobre los portadores de carga libres del conductor actuará una fuerza que los pondrá en movimiento hasta que se anule el campo en su interior y por consiguiente se convierta todo el conductor en equipotencial.

Algo parecido ocurre cuando se tienen dos depósitos de agua a distinto nivel conectados mediante un tubo con una llave; el agua de ambos depósitos se encuentra a distinto potencial gravitatorio, de manera que si abrimos la llave circula el agua por el tubo hasta que se establece el equilibrio y, una vez alcanzado éste, cesa el flujo de agua por el tubo. Si deseamos tener un flujo de agua continuo por el tubo, será preciso «bombear» agua del depósito A al B con un motor M (Fig. XX-14) para lo cual es preciso comunicar una energía que produzca un trabajo contra el campo gravitatorio.

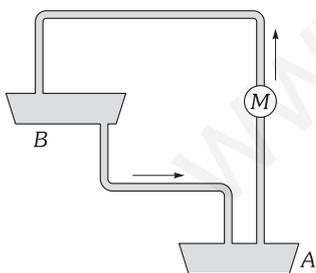


Fig. XX-14.- Símil hidrodinámico.

Algo semejante ocurre si deseamos mantener constante la diferencia de potencial entre los puntos A y B del circuito de la Fig. XX-15, es necesario «bombear» cargas positivas de las zonas de menor potencial a las de mayor potencial, venciendo por tanto al campo electrostático o lo que es lo mismo a las fuerzas electrostáticas. Para realizar este «bombeo» hay que realizar un trabajo a costa de energía exterior, bien sea mecánica (salto de agua), calorífica (centrales térmicas) o química (pilas), etc. Este papel es el que corresponde al que hemos llamado GENERADOR DE CORRIENTE.

Deducimos de todo lo anteriormente dicho que FEM es el trabajo necesario para el transporte de la unidad de carga positiva del polo negativo (menor potencial) al positivo (mayor potencial) por el interior del generador.

$$\mathcal{E} = \frac{U}{q} \Rightarrow U = \mathcal{E}q$$

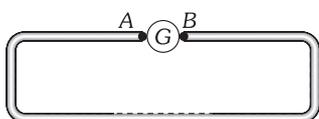


Fig. XX-15.- Para mantener constante la diferencia de potencial, será necesario «bombear» cargas positivas de las zonas de menor potencial a las de mayor.

como  $q = It$  podemos escribir:

$$U = \mathcal{E}It \tag{9}$$

esta energía, se transforma, en parte, en calor en el interior del generador; el resto aumenta la energía potencial de la carga, a la que se ha elevado su potencial; tal energía «acumulada» es la que causa la circulación de la carga por la parte externa del circuito y se transforma en calor y en toda forma de energía que se produzca en los aparatos eléctricos conectados en el circuito.

La unidad de fuerza electromotriz en el SI, la obtendremos, haciendo  $U = 1$  julio y  $q = 1$  coulombio:

$$1 \text{ unidad en el SI de FEM} = \frac{1 \text{ julio}}{1 \text{ culombio}} = 1 \text{ voltio}$$

La FEM se mide en las mismas unidades que el potencial.

**XX – 13. Ley de Ohm aplicada a un circuito con uno o varios generadores**

Supongamos un CIRCUITO CERRADO (o MALLA), es decir, que partiendo de uno de sus puntos se puede retornar a él por hilos conductores, o *atravesando generadores* (Fig. XX-16); representaremos éstos por dos segmentos paralelos, indicándonos el más largo el polo positivo o de mayor potencial y el corto el negativo o de menor potencial. La potencia del generador (energía por segundo) de valor  $\mathcal{E}I$ , se emplea (como hemos indicado en el párrafo anterior) en producción de calor en la resistencia externa ( $R$ ) y en el propio generador; si llamamos  $r$  a la resistencia interior de éste, considerando que la energía por unidad de tiempo transformada en calor es  $I^2 R + I^2 r$ , aplicando el principio de conservación de la energía, obtendremos:

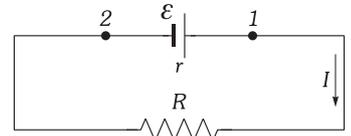


Fig. XX-16.– Circuito cerrado.

$$\mathcal{E}I = I^2 R + I^2 r \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = IR + Ir} \Rightarrow \boxed{I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}} \quad (10)$$

Si suponemos varios generadores (de fuerzas electromotrices  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  etc.; y resistencias internas  $r_1, r_2$ , etc.), la expresión anterior se escribirá:

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \dots}{R + r_1 + r_2 + \dots} = \frac{\sum \mathcal{E}_i}{R_t}$$

siendo  $R_t$  la resistencia total del circuito, suma de todas la resistencias externas e internas intercaladas en serie.

«La intensidad de la corriente es directamente proporcional a la FEM e inversamente proporcional a la resistencia total del circuito».

**XX – 14. Diferencia de potencial entre los polos de un generador. Caída de potencial**

Consideremos la fórmula (10) de esta sección:  $\mathcal{E} = IR + Ir$ , pero como  $IR = V_1 - V_2$  (ley de Ohm aplicada de 1 a 2 de la Fig. XX-17 considerando únicamente la resistencia externa), obtenemos:

$$\mathcal{E} = V_1 - V_2 + Ir \Rightarrow \boxed{V_1 - V_2 = \mathcal{E} - Ir}$$

La diferencia de potencial entre los polos de un generador es igual a su FEM disminuida en la CAÍDA DE POTENCIAL (intensidad por resistencia) en el interior del generador.

Tomaremos para la aplicación de esta fórmula la diferencia de potencial entre el polo positivo y el negativo del generador,  $\mathcal{E}$  será, así, siempre positiva;  $I$  será positiva o negativa según que su sentido sea «saliente» o «entrante» con respecto al polo positivo del generador.

Un generador en circuito abierto, es decir, que sus polos no estén unidos entre sí por conductores, no produce corriente, existe entonces entre sus polos una diferencia de potencial cuyo valor se identifica con el de la FEM, ya que al hacer  $I = 0$ , obtenemos de la fórmula anterior:  $\mathcal{E} = V_1 - V_2$ .

«FUERZA ELECTROMOTRIZ de un generador es la diferencia de potencial entre sus polos cuando no produce corriente, es decir, cuando está en circuito abierto».

Esta definición vuelve a justificar la medida de la FEM en voltios.

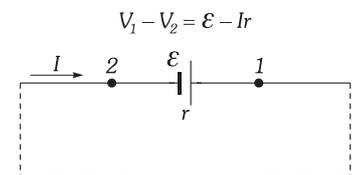


Fig. XX-17.– Ley de Ohm a los extremos de un generador.

**XX – 15. Potencia teórica y útil. Rendimiento de un generador**

De la fórmula (9) de esta sección podemos definir una potencia teórica, cuyo valor es:  $P_t = U/t = \mathcal{E}I$ . La potencia útil o aprovechable es, en realidad:  $P_u = I(V_1 - V_2)$ .

Llamamos rendimiento al cociente:

$$\eta = \frac{P_u}{P_t} = \frac{V_1 - V_2}{\mathcal{E}} = \frac{IR}{I(R + r)} = \frac{R}{R + r}$$

El rendimiento de un generador es tanto mayor cuanto menor es la resistencia interna del generador, comparada con la externa del circuito.

**XX – 16. Ley general de Ohm**

Consideremos el generador de la figura asociado a la resistencia  $R$ , que forma parte de un circuito cerrado por el que circula una intensidad  $I$ ; en tal circuito pueden existir otros generadores y otras resistencias. Calculemos la diferencia de potencial entre los puntos 1 y 3:

$$V_1 - V_3 = (V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) = (V_1 - V_2) - (V_3 - V_2)$$

Pero:  $V_3 - V_2 = IR$  y  $V_1 - V_2 = \mathcal{E} - Ir$ . Por sustitución obtenemos:

$$V_1 - V_3 = \mathcal{E} - Ir - IR = \mathcal{E} - I(R + r)$$

y llamando  $R_t$  a la resistencia total entre los puntos 1 y 3:

$$V_1 - V_3 = \mathcal{E} - IR_t$$

Esta última igualdad es la expresión general de la ley de Ohm; que nos determina la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera de un circuito, entre los que hay intercalados generadores.

Seguiremos para la aplicación de esta fórmula, las mismas normas establecidas en el párrafo XX-14. (Punto 1 el unido al polo positivo del generador;  $\mathcal{E}$  positiva;  $I$  positiva o negativa según que su sentido sea «saliente» o «entrante» con respecto al polo positivo del generador).

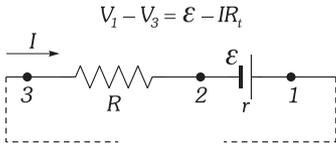


Fig. XX-18.- Ley general de Ohm.

**XX - 17. Receptores. Fuerza contraelectromotriz**

Un RECEPTOR DE ENERGÍA eléctrica es un aparato que verifica un consumo de ella; tal consumo es proporcional a la intensidad y al tiempo:

$$U' = \mathcal{E}'It$$

$\mathcal{E}'$  es la FUERZA CONTRAELECTROMOTRIZ del receptor, que se comporta como una FEM negativa. Así, en un circuito básico con un generador y un receptor, la ley de Ohm se expresa:

$$I = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}'}{R_t}$$

$R_t$  es la suma de las resistencias interiores del generador y el receptor y las exteriores de los hilos que forman el circuito. En el caso de la Fig. XX-19,  $R_t = R + r + r'$

**PROBLEMAS: 37 al 60.**

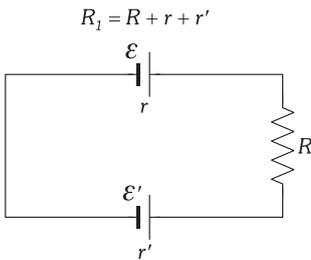


Fig. XX-19.- Circuito con generador motor y resistencia.

**C) ANÁLISIS DE CIRCUITOS: LEYES DE KIRCHHOFF**

**XX - 18. Signo de las FEM y de las intensidades**

En un circuito cerrado o malla, se determina el sentido de las intensidades de corriente, dando el signo positivo (por ejemplo) a las que circulan en el sentido de las agujas de un reloj; las contrarias son las negativas.

En el circuito de la Fig. XX-20  $I_1, I_2$  e  $I_3$  son positivas;  $I_4$  es negativa.

A una fuerza electromotriz se le considera como positiva cuando está instalada de forma que ella, por sí sola, produciría corriente en el sentido que hemos considerado positivo; en caso contrario es negativa.

En el circuito de la Fig. XX-20,  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_3$  y  $\mathcal{E}_4$  son positivas;  $\mathcal{E}_2$  es negativa.

**XX - 19. Leyes de Kirchhoff**

El problema fundamental en el análisis de circuitos es: dada la resistencia y la FEM de cada elemento del circuito, hallar la intensidad en cada uno de estos elementos. Este problema puede resolverse de forma sistemática por medio de dos reglas conocidas como leyes de Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887).

Son aplicables a régimen estacionario, es decir, cuando las intensidades y los potenciales en los distintos puntos del circuito permanecen constantes.

1ª. LEY DE NUDOS. La suma de las intensidades de corriente que llegan a un punto es igual a la suma de las intensidades que salen de él.

2ª. LEY DE MALLAS. En un circuito cerrado, la suma de los productos de las intensidades por las resistencias es igual a la suma de las FEM.

$$\Sigma IR = \Sigma \mathcal{E}$$

otra forma de escribir esta ley es:  $\Sigma V = 0$ , expresión que justificaremos más adelante.

En el circuito de la Fig. XX-20 se verifica:

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 - I_4 R_4 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4$$

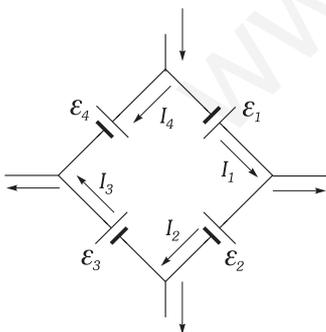


Fig. XX-20.- Malla.

CONSECUENCIA. En un circuito cerrado, en el que no hay FEM, la suma de los productos de las intensidades por las resistencias es igual a cero.

La primera ley de Kirchhoff es consecuencia inmediata del estudio hecho en el párrafo 3 de este capítulo sobre corrientes estacionarias, teniendo en cuenta que en estas corrientes la  $\text{div } \mathbf{J} = 0$ , la fórmula (4) la escribiremos:

$$I = \oint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

que nos indica que la intensidad neta a través de una superficie cerrada es nula, entendiendo por intensidad neta la intensidad que sale del volumen limitado por esta superficie menos la que penetra en él; o lo que es lo mismo, que para corrientes estacionarias la intensidad en los distintos puntos del circuito permanece constante, no pudiendo haber en ninguno de ellos acumulación de carga.

La segunda ley se deduce de la ley General de Ohm, sin más que aplicarla a cada segmento de una malla y sumar el resultado; entonces la suma de las tensiones (primer miembro de esta operación) será nula ya que partimos de un punto y llegamos a él, y en consecuencia:

$$\sum V = \sum (\mathcal{E} - IR) = \sum \mathcal{E} - \sum IR = 0$$

de la que se deduce:  $\sum \mathcal{E} = \sum IR$ .

### XX - 20. Corrientes derivadas

«Son las originadas al dividirse una corriente en otras varias».

Cumplíndose el primer lema de Kirchhoff, se verifica:  $I = I_1 + I_2$ , aplicando la segunda ley al circuito formado por los hilos derivados, se obtiene:

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0 \Rightarrow I_1 R_1 = I_2 R_2 \Rightarrow \boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}}$$

«Las intensidades de las corrientes derivadas son inversamente proporcionales a las resistencias».

Si las derivaciones son varias, siempre se verifica:  $I_1 R_1 = I_2 R_2 = I_3 R_3 = \dots$

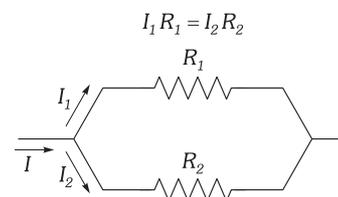


Fig. XX-21.- Corrientes derivadas.

### XX - 21. Shunt

«Es una resistencia en derivación destinada a que por un lugar del circuito pase una fracción determinada de la intensidad principal».

Supongamos que por el aparato G (un galvanómetro, por ejemplo), de resistencia R, interesa que pase una intensidad  $I/n$  (Fig. XX-22); por el shunt debe pasar una intensidad  $(n - 1) I/n$  para que la suma de las dos intensidades derivadas sea I. Se desea conocer la resistencia x del shunt. La aplicación de la ley deducida en el párrafo anterior conduce a:

$$\frac{I}{n} R = \frac{(n - 1)I}{n} x \Rightarrow \boxed{x = \frac{R}{n - 1}}$$

Si se desea que por el aparato G pase una centésima parte de la corriente principal, la resistencia del shunt debe ser 1/99 de la de G.

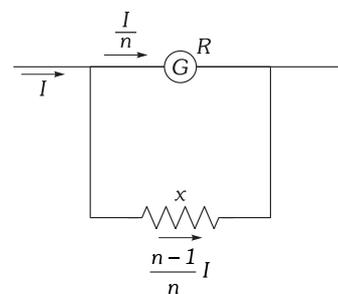


Fig. XX-22.- Shunt.

### XX - 22. Puente de Wheatstone

Sirve para medir resistencias. Consiste en cuatro resistencias en serie, formando circuito cerrado, tres de ellas graduables (cajas de resistencias) y la cuarta es la que se trata de determinar (Fig. XX-23). Entre dos vértices opuestos se instala una pila (generador de corriente continua) y entre los otros dos vértices un galvanómetro (aparato que indica, por desviación de una aguja, el paso de corriente por él). Modificando las resistencias graduables se consigue el equilibrio del puente, es decir, que por el galvanómetro no pase corriente.

«Cuando el puente está en equilibrio el producto de dos resistencias opuestas es igual al producto de las otras dos; las resistencias desconocidas es igual al producto de sus contiguas dividido por la opuesta».

En efecto: la intensidad I que pasa por CA (resistencia  $R_1$ ), es la misma que por AD (resistencia  $R_2$ ), puesto que por AB no pasa corriente; la intensidad I' que pasa por CB (resistencia  $R_4$ ) es la misma que pasa por BD (resistencia  $R_3$ ).

Aplicando el segundo lema de Kirchhoff a los circuitos triangulares CAB y ADB, se obtiene:

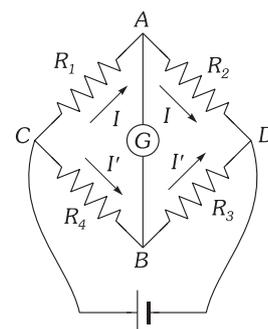


Fig. XX-23.- Puente de Wheatstone.

$$\begin{cases} R_1 I - R_4 I' = 0 \\ R_2 I - R_3 I' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 I = R_4 I' \\ R_2 I = R_3 I' \end{cases} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3} \Rightarrow \boxed{R_1 R_3 = R_2 R_4} \Rightarrow R_1 = \frac{R_2 R_4}{R_3}$$

**XX - 23. Puente de hilo**

Dos cajas de resistencias consecutivas del puente de Wheatstone,  $R_3$  y  $R_4$  pueden ser sustituidas por un hilo homogéneo (CD) por el que se desliza un cursor (B) (Fig. XX-24).

El equilibrio se consigue modificando la posición del cursor a lo largo del hilo. Las resistencias  $R_3$  y  $R_4$  pueden sustituirse en la fórmula final por sus longitudes,  $l_3$  y  $l_4$ . En efecto:

$$R_3 = \rho \frac{l_3}{A} \quad R_4 = \rho \frac{l_4}{A}$$

( $\rho$  resistividad y A sección). La fórmula  $R_1 R_3 = R_2 R_4$ , se transforma en:

$$R_1 \rho \frac{l_3}{A} = R_2 \rho \frac{l_4}{A} \quad \boxed{R_1 l_3 = R_2 l_4}$$

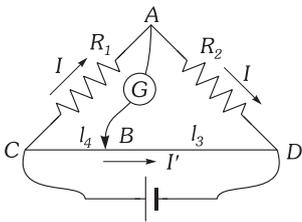


Fig. XX-24.- Puente de hilo.

**XX - 24. Potenciómetro**

Es un aparato que nos sirve para la comparación de las FEM. Entre los extremos A y B de un hilo conductor (Fig. XX-25) se instala una pila  $\mathcal{E}$ , cuyas características ( $\mathcal{E}$  y  $r$ ) no se conocen, ni interesan. En oposición con ella, se monta otra pila (los hilos que parten de A y van a las dos pilas han de hacer contacto con polos de igual signo) cuya FEM,  $\mathcal{E}_1$ , se trata de determinar. En el circuito de esta pila hay instalados un galvanómetro y un cursor que se puede deslizar a lo largo del hilo AB, haciendo contacto con él, cuando interesa.

Se modifica la posición del cursor hasta que el galvanómetro no indica paso de corriente; entonces, la longitud AC tiene por resistencia  $R_1$ . Se sustituye la pila  $\mathcal{E}_1$ , por otra de FEM  $\mathcal{E}_2$  conocida. Se consigue un nuevo equilibrio, con una resistencia AC, cuyo valor es, ahora,  $R_2$ . Se verifica:

$$\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad \boxed{\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 \frac{R_1}{R_2}}$$

En efecto: por el hilo AB circula en los dos equilibrios la misma intensidad:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R_1 + R_1'}$$

$I$  no se modifica por ser  $\mathcal{E}$  y  $r$  constantes características del generador (instalado en la parte superior del dibujo) que es el mismo durante toda la experiencia, y  $R_1 + R_1'$  es la resistencia total del hilo AB. La aplicación del 2º lema de Kirchhoff al circuito AGCA en los dos equilibrios, conduce a:

$$I R_1 = \mathcal{E}_1 \quad I R_2 = \mathcal{E}_2 \quad \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Si AB es un hilo homogéneo y el equilibrio se consigue modificando la posición de C, entonces:

$$\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{l_1}{l_2}$$

**PROBLEMAS: 61 al 84.**

**D) CORRIENTES NO ESTACIONARIAS. CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO**

**XX - 25. Circuito RC**

Un caso de corrientes *no estacionarias*, es el de las corrientes «transitorias» que aparecen en el circuito durante el lapso de tiempo que tarda la corriente en alcanzar su valor estacionario al cerrar o abrir un interruptor o al conectar una FEM. El análisis de las condiciones del sistema en ese corto intervalo de tiempo es muy complicado. Vamos a estudiar un caso sencillo en el que solamente intervienen resistencias y condensadores (CIRCUITO RC).

En la Fig. XX-26, representamos un circuito compuesto por un condensador cargado con  $\pm q_0$  en sus armaduras, una resistencia  $R$  y un interruptor  $S$ . En el instante  $t = 0$ , cerramos el interruptor  $S$  y los electrones de la placa negativa del condensador, fluyen a través de la resistencia hasta neutralizar la otra placa del condensador.

En un determinado instante, la diferencia de potencial  $V(t)$  entre las armaduras del condensador será:

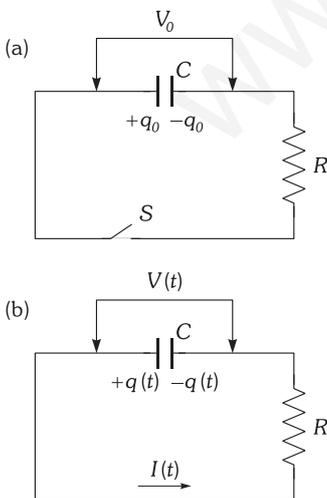


Fig. XX-26.- Circuito básico RC. a) Condiciones iniciales. b) Proceso de descarga del condensador a través de R.

$$V(t) = \frac{q(t)}{C} = R I(t)$$

siendo  $q(t)$  e  $I(t)$ , la carga del condensador y la intensidad de corriente en dicho instante; el condensador «pierde carga» a razón de:

$$I(t) = - \frac{dq}{dt}$$

que sustituida en la anterior nos queda:  $\frac{q}{C} = -R \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{dq}{q} = - \frac{dt}{RC}$

integrando, se obtiene:  $\int_{q_0}^q \frac{dq}{q} = - \frac{1}{RC} \int_0^t dt \Rightarrow \ln \frac{q}{q_0} = - \frac{t}{RC} \Rightarrow \boxed{q = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}}$

y derivando respecto al tiempo calcularemos el valor de la intensidad de corriente en el instante considerado:

$$I = - \frac{dq}{dt} = \frac{q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

que junto con que:  $V_0 = q_0/C$ , la tensión entre las armaduras del condensador en el instante inicial, y que  $I_0 = V_0/R$  corriente inicial que pasa por  $R$  en  $t = 0$ ; se transforma en:

$$\boxed{I = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}}$$

$RC$ , tiene dimensiones de tiempo y se le llama CONSTANTE DE TIEMPO del circuito; representa el tiempo en que la carga inicial  $q_0$  disminuye hasta  $q_0/e = 0,3679 q_0$ , al hacer  $t = RC$ . La representación gráfica de la Fig. XX-27, muestra la variación de la intensidad con el tiempo en el proceso de descarga del condensador; obsérvese que la intensidad se anula solamente cuando  $t$  tiende a infinito, de modo que en teoría, el condensador no se descarga nunca por completo; en realidad, la descarga es completa en un tiempo relativamente corto.

En un condensador real, el aislamiento no es perfecto y transcurrido un tiempo determinado pierde su carga a través del aislante; representaremos esta pérdida de carga con una resistencia en paralelo a la que llamamos RESISTENCIA DE PÉRDIDA ( $R_p$ ) del condensador (Fig. XX-28).

Consideremos ahora el proceso de carga de un condensador, inicialmente descargado, a través de un resistencia, colocando una FEM que proporciona una tensión constante  $V_0$  entre sus armaduras (Fig. XX-29).  $R$  es la resistencia de todo el circuito. Al cerrar el interruptor  $S$ , la corriente que circula por  $R$  será:  $I = (V_0 - V)/R$ , y el condensador poseerá una tensión:  $V = q/C$ , con lo que la velocidad de «crecimiento de la carga» del condensador en un instante determinado será:

$$I = - \frac{dq}{dt} = \frac{V_0 - q/C}{R} \Rightarrow \frac{dq}{C V_0 - q} = \frac{dt}{RC}$$

integrando nos queda:

$$\int_0^q \frac{dq}{C V_0 - q} = \int_0^t \frac{dt}{RC} \Rightarrow \ln \frac{C V_0 - q}{C V_0} = - \frac{t}{RC} \Rightarrow \boxed{q = C V_0 \left[ 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right]}$$

y derivando con respecto al tiempo obtendremos la intensidad de corriente en el instante considerado:

$$\boxed{I = \frac{dq}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}}$$

En la gráfica del Fig. XX-30, representamos la variación de la carga del condensador con el tiempo en el proceso de su carga.  $RC$  será la constante de tiempo, la cual ya se ha considerado.

Obsérvese que el condensador quedará totalmente cargado (carga final  $CV_0$ ) cuando el tiempo se haga infinito, en realidad, la carga es completa en un tiempo relativamente corto.

La gráfica de la variación de la intensidad con el tiempo en el proceso de carga del condensador, será muy parecida a la de la Fig. XX-27.

El retraso en la adquisición de los valores máximos o mínimos de la intensidad en un circuito en funcionamiento, da origen a que los condensadores «amortigüen» un cambio repentino en la tensión, por lo que son imprescindibles en cualquier circuito electrónico.

PROBLEMAS: 85 al 88.

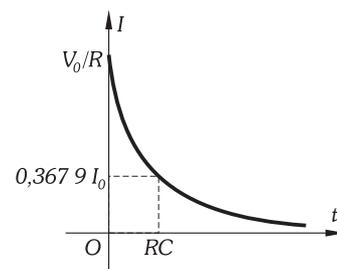


Fig. XX-27.- Curva de variación de la intensidad con el tiempo en el proceso de descarga de un condensador a través de una resistencia.

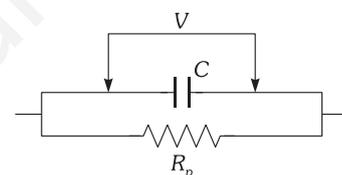


Fig. XX-28.- Representación de un condensador real.

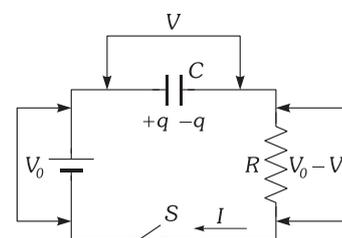


Fig. XX-29.- Proceso de carga de un condensador.

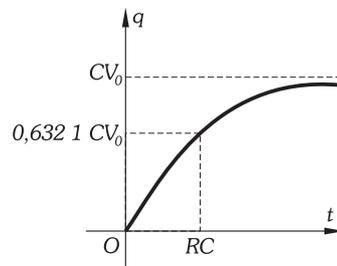


Fig. XX-30.- Variación de la carga con el tiempo durante el proceso de carga de un condensador.

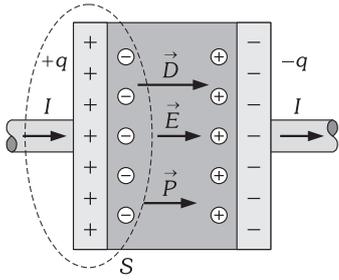


Fig. XX-31.- La corriente de conducción que penetra por la izquierda (saliente por la derecha), no tiene salida (no tiene entrada) por el dieléctrico en forma de corriente de conducción.

**XX - 26. Corriente de desplazamiento**

En un circuito RC, ya se ha dicho que la corriente no es estacionaria, y en cualquiera de los casos considerados, carga o descarga de un condensador a través de una resistencia, no se verifica para la corriente que  $\text{div } \mathbf{J} = 0$ ; lo que queremos decir es que existe acumulación o disminución de carga en las placas del condensador en su carga o descarga; o lo que es lo mismo, no se cumple la primera de las leyes de Kirchhoff.

En el caso de la carga de un condensador (Fig. XX-31), hay una corriente de conducción  $I(t)$  que penetra por la izquierda, pero no existe corriente de conducción alguna saliente de ella a través del dieléctrico; de igual forma, sale una corriente de conducción de la placa derecha pero no entra ninguna. La corriente de conducción  $I$  es el flujo de los portadores de carga a través de los conductores, siendo nula en el dieléctrico (o en el vacío) que está contenido entre las armaduras del condensador. Existe el flujo del vector desplazamiento  $\mathbf{D}$ , limitado al espacio entre las armaduras del condensador, que hace aumentar el valor del vector desplazamiento  $\mathbf{D}$  a medida que la corriente de conducción aumenta la carga del condensador.

Maxwell demostró que se puede definir, en perfecto acuerdo con la experiencia, una corriente «total»  $I_T$  que en cualquier situación es continua en todo el circuito, tanto a través de los conductores como en los dieléctricos, y cuyo valor es en general:

$$I_T = I + I_D$$

siendo  $I_D$  LA CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO; para determinar su valor, consideremos la superficie cerrada  $S$  de la Fig. XX-31, que encierra a una de las placas del condensador, la aplicación del teorema de Gauss al vector desplazamiento, nos conduce a que en un determinado instante:

$$q(t) = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

y como la corriente de desplazamiento hace «aumentar» a  $\mathbf{D}$ , toma el valor:

$$I_D = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

como consideramos a  $S$  invariable con el tiempo, la derivada respecto del tiempo influye solamente sobre la función  $\mathbf{D}(x, y, z, t)$ , transformándose en derivada parcial al introducirla dentro del signo integral:

$$I_D = \oint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

si tenemos en cuenta que  $I_D$  tiene el mismo sentido que  $I$ , puesto que tiene el sentido de  $\mathbf{D}$  (hace aumentar a  $\mathbf{D}$ ) podemos definir LA DENSIDAD DE CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO  $\mathbf{J}_D$ , de forma análoga a como lo hacíamos para la densidad de corriente de conducción, como:

$$\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Para el caso particular del condensador plano que venimos tratando, las líneas de campo del vector desplazamiento se consideran uniformes, y si es  $A$  el área de las placas, por ser el vector  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  paralelo al vector  $\mathbf{A}$ , el valor de  $I_D$  podemos escribirlo:

$$I_D = J_D A = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} A$$

y siendo en este caso  $D = q/A$  obtenemos:  $I_D = \frac{dq}{dt}$

cumpliéndose así el objetivo de Maxwell de definir una corriente única total, que para el condensador plano, en carga, que estamos estudiando y para cualquier punto del circuito será la misma:

$$I_T = I + I_D = \left( 0 + \frac{dq}{dt} \right)_{\text{Dentro del dieléctrico}} = \left( \frac{dq}{dt} + 0 \right)_{\text{En los conductores}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

según se ha obtenido en el párrafo anterior.

De la definición de  $\mathbf{D}$  y de  $\mathbf{J}_D$  se obtiene: 
$$\mathbf{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

y así, cuando el condensador se encuentra en el proceso de carga, la polarización del dieléctrico aumenta, de forma que el término  $\partial \mathbf{P} / \partial t$ , corresponde a un flujo neto de carga positiva en el dieléctrico hacia la armadura positiva cuando aumenta el campo polarizador  $\mathbf{E}$ , y las moléculas del dieléctrico se ordenan polarizándose; de hecho, esto equivale a una corriente en el sentido de  $I$ . Como veremos más adelante, trataremos a la función corriente como productora de un campo magnético, y se confirmará que la corriente de desplazamiento crea un campo magnético, exactamente de la misma forma que lo hace una corriente de conducción normal. Por tanto, la corriente de desplazamiento, lejos de ser un artificio ideado por Maxwell para aplicar la reglas de Kirchhoff incluso en los casos en que se está acumulando carga en cierta región del circuito, es un hecho fundamental en la naturaleza, y como se verá en posteriores capítulos, proporciona el fundamento para la comprensión de las ondas electromagnéticas.

**E) GENERADORES TERMOELÉCTRICOS**

**XX – 27. Fuerza electromotriz de contacto entre dos metales**

*Cuando se ponen en contacto dos metales distintos, se produce en la superficie común una FEM que origina una diferencia de potencial entre ellos; el valor de ésta depende de la naturaleza de los metales.*

Este fenómeno es debido a la libertad relativa que tienen los electrones de los metales, produciéndose un paso de ellos del cuerpo más metálico (menos retención para los electrones) al menos metálico; el primero adquiere carga positiva y mayor potencial; el segundo, carga negativa y potencial menor.

Los metales y, en general, todos los cuerpos, se ordenan en sentido de los potenciales decrecientes, obteniéndose la ESCALA DE TENSIONES DE VOLTA.

En la serie: ... Zn, Pb, Sn, Fe, Cu, Ag, Au... un metal adquiere mayor potencial que cualquiera que los que le siguen, al ponerlo en contacto con él.

**XX – 28. Efecto Peltier**

*«Al pasar una corriente eléctrica por una soldadura de dos metales, ésta se calienta si la corriente va del cuerpo más al menos metálico; en caso contrario, la soldadura se enfría».*

Si se hace pasar una corriente por el circuito de la Fig. XX-32, al pasar la corriente del Zn al Cu hay una caída de potencial en la soldadura, desprendiéndose una energía, en forma de calor, cuyo valor es:  $(V_{Zn} - V_{Cu}) I t$ .

La corriente, en la otra soldadura, pasando del menor a mayor potencial (del Cu al Zn) consume una energía eléctrica igual a la anterior, realizando una absorción de calor en la soldadura.

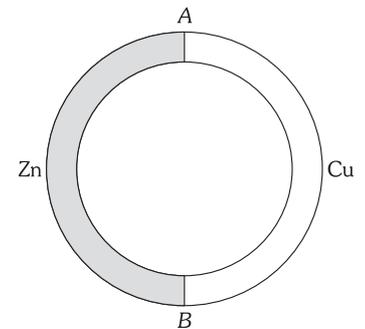


Fig. XX-32.– Fuerza electromotriz de contacto.

**XX – 29. Efecto Seebeck. Par termoeléctrico**

*Si en dos metales distintos, unidos formando circuito, se calienta una de las uniones, se origina una corriente eléctrica. El conjunto forma un par termoeléctrico.*

En el circuito de la Fig. XX-32, si las soldaduras A y B están a la misma temperatura, las fuerzas electromotrices de contacto son iguales y opuestas y, en consecuencia, no hay corriente eléctrica:  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$ .

Al calentar una de las soldaduras hay una tendencia a la igualación del carácter metálico de los cuerpos, conforme aumenta la temperatura y, por tanto, una disminución de la FEM de contacto en la soldadura caliente. La FEM del conjunto es:  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$ , siendo  $\mathcal{E}_1$  y  $\mathcal{E}_2$  las FEM de las soldaduras fría y caliente, respectivamente. La existencia de  $\mathcal{E}$  origina una corriente eléctrica.

Al ir disminuyendo  $\mathcal{E}_2$  por un aumento de la temperatura en la soldadura,  $\mathcal{E}$  aumenta y con ella la intensidad de la corriente (Fig. XX-33). A una diferencia de temperaturas, llamada punto neutro ( $t_n$ ), corresponde la máxima FEM e intensidad de corriente. A partir del punto neutro la intensidad disminuye con el aumento de temperatura, hasta que llegado un valor —temperatura de inversión ( $t_i$ )— la corriente se anula; si se sigue calentando la corriente cambia de sentido. El intervalo de 0 a  $t_n$ , es igual al de  $t_n$  a  $t_i$ .

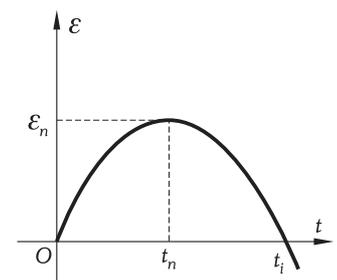


Fig. XX-33.– Variación de la FEM con la temperatura en una soldadura entre dos metales (efecto Seebeck).

**PILAS TERMOELÉCTRICAS.** Son asociaciones en serie de pares termoeléctricos (Fig. XX-34), calentándose soldaduras pares, y permaneciendo frías las impares. Las corrientes obtenidas son de muy pequeña intensidad.

**MEDIDA DE TEMPERATURA.** Una de las aplicaciones de los pares termoeléctricos es su empleo como termómetros. Para ellos se introduce una de las soldaduras en hielo fundente (0 °C) y la otra en el recinto cuya temperatura se trata de medir, determinándose la intensidad de corriente con un amperímetro sensible. Un gráfico, previamente hecho, en el que se relacionan temperaturas e intensidades, da la temperatura de la soldadura caliente.

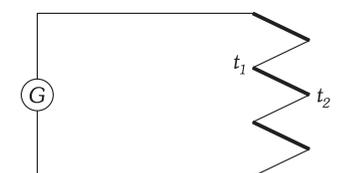


Fig. XX-34.– Pila termoeléctrica.

## F) CORRIENTE CONTINUA EN LÍQUIDOS. ELECTRÓLISIS. PILAS Y ACUMULADORES

### XX – 30. Electrólisis. Ionización. Electrólitos

Hemos estudiado en apartados anteriores el paso de la corriente eléctrica a través de materiales conductores en los cuales los portadores de carga eran fundamentalmente los electrones; en este apartado examinaremos *el fenómeno de conducción de materiales en los que se produce una descomposición (DISOCIACIÓN) de la sustancia que los constituye, a este fenómeno se le llama ELECTRÓLISIS o SEPARACIÓN GALVÁNICA.*

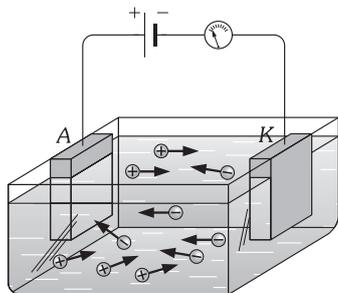


Fig. XX-35.- Paso de la corriente en un voltámetro a través de una disolución electrolítica. Los aniones (iones negativos) se dirigen al ánodo A (polo positivo) y los cationes (iones positivos) van al cátodo K (polo negativo).

EXPERIENCIA FUNDAMENTAL. En una cubeta (CUBA ELECTROLÍTICA O VOLTÁMETRO) con agua destilada, se sumergen dos placas (ELECTRODOS) de platino o níquel, unidos a los bornes de un generador de tensión a través de un amperímetro o una lámpara de incandescencia (Fig. XX-35). El agua pura es un mal conductor de la electricidad, pero si disolvemos en ella cloruro cúprico ( $\text{Cu Cl}_2$ ), por ejemplo, se mueve la aguja del amperímetro o luce la lámpara, indicándonos el paso de la corriente a través de la disolución (DISOLUCIÓN ELECTROLÍTICA); este paso de corriente va asociado a la descomposición química del cloruro cúprico, puesto que del análisis de la sustancia que se desprende en la placa metálica que va conectada al polo positivo de la fuente de alimentación (ÁNODO A) resulta ser cloro, y en la placa conectada al polo negativo (CÁTODO K) se deposita cobre metálico. La atracción de los átomos de cloro (ANIONES) por el polo positivo y de los átomos de cobre (CATIONES) por el negativo, indica que los átomos del primero están cargados negativamente (han ganado electrones) y los del segundo positivamente (han perdido electrones).

Generalizando los hechos observados en la experiencia fundamental descrita, definimos:

*IONIZACIÓN es la ruptura (o disociación) de la molécula en partes cargadas eléctricamente. La ionización se manifiesta cuando el cuerpo se disuelve o se funde.*

*IONES son átomos o radicales (agrupaciones de átomos sin saturar la totalidad de las valencias) con carga eléctrica.*

La carga eléctrica de un ión es siempre múltiplo de una carga elemental (la del electrón), igual en valor absoluto a la carga del ión hidrógeno (positiva). Esta carga se toma como unidad.

*Los iones se clasifican en ANIONES (negativos) y CATIONES (positivos); pudiendo ser unos y otros mono, di, trivalentes, etc., según el número de cargas eléctricas que adquieren.*

Entre todos los iones producidos por una molécula existe siempre el mismo número de cargas positivas que negativas.

*«VALENCIA de un ión ( $v$ ) es el número de cargas elementales que posee».*

*ELECTRÓLITOS son las sustancias que se ionizan; químicamente se clasifican en ácidos, bases y sales.*

Los electrólitos son combinaciones *heteropolares* formadas por átomos cargados o de radicales que hemos llamado iones. Por ejemplo, el  $\text{CuSO}_4$  se compone, también en forma cristalina, de iones  $\text{Cu}^{2+}$  y  $\text{SO}_4^{2-}$ . Al disolverse el cristal estos iones se separan al interponerse moléculas de agua. Los iones se rodean con una envoltura de moléculas dipolares de agua, *están hidratados*; la energía liberada por la disposición de los dipolos de agua es suficiente para separar los iones de la red cristalina, moviéndose libremente en la disolución.

Al establecer un campo eléctrico dentro de una disolución electrolítica, éste impulsa a los iones positivos (cationes) hacia el cátodo y a los negativos (aniones) hacia el ánodo. Los cationes son iones metálicos, incluyendo a  $\text{NH}_4^+$  y  $\text{H}^+$ , los aniones son los iones del resto ácido y los  $\text{OH}^-$  (muchos de estos iones se pueden realmente considerar como complejos más grandes, por ejemplo  $\text{H}_3\text{O}^+$  en lugar de  $\text{H}^+$ , etc.).

Al llegar los iones a los electrodos se neutralizan, los cationes toman electrones del cátodo y los aniones ceden electrones al ánodo; así por ejemplo los iones  $\text{H}^+$  se convierten en átomos de hidrógeno y estos a su vez en moléculas  $\text{H}_2$ , que escapan en forma gaseosa; en la electrólisis del  $\text{CuSO}_4$ , realizada con electrodos de Cu, el ión  $\text{Cu}^{2+}$  capta dos electrones del cátodo que cada vez se hace más pesado al depositarse en él dicho metal; los iones sulfato  $\text{SO}_4^{2-}$  extraen  $\text{Cu}^{2+}$  del ánodo formándose nuevamente  $\text{CuSO}_4$  volviendo nuevamente a la disolución, de esta forma no se modifica su concentración. Si la electrólisis se hubiera realizado con electrodos de platino, por ejemplo, la concentración de la disolución variaría, con lo que *el resultado de una electrólisis dependerá también del material de los electrodos.*

Resumiendo, en la electrólisis se pueden distinguir las siguientes fases:

*Fase previa: IONIZACIÓN.* Antes del paso de la corriente, el cuerpo ha de estar ionizado; para ello se disuelve o se funde.

1ª ORIENTACIÓN. Al paso de la corriente los iones se dirigen hacia sus polos correspondientes.

2ª. DESCARGA. Los aniones (-) ceden electrones al ánodo (+). Los cationes (+) toman electrones del cátodo (-).

La electrólisis de un determinado compuesto, se produce únicamente cuando el generador proporciona una energía potencial mínima, puesto que se necesita energía para romper los enlaces químicos y disociar las moléculas. Cuando se combinan, por ejemplo el cloro y el sodio para formar la sal común se libera energía en forma de calor. Este CALOR DE FORMACIÓN vale 97,37 kcal/mol, y como mínimo hay que suministrar esta cantidad de energía para descomponer el NaCl. Así pues, en el caso de una sola pareja sodio-cloruro:

$$\Delta V = (93,37 \text{ kcal}) (4180 \text{ J/kcal}) \frac{1}{N_A e} = 4,2 \text{ eV}$$

entonces el generador debe suministrar por lo menos una diferencia de potencial de 4,2 V a los electrodos (la FEM real requerida es un poco mayor que ésta, debido a la resistencia del circuito y a las resistencias del movimiento de los iones dentro del voltámetro).

### XX - 31. Leyes de Faraday

Durante el tiempo  $t$  que dura una electrólisis, se deposita en los electrodos una cierta cantidad de sustancia  $M$  (que previamente ha quedado neutralizada en éstos). Michael Faraday (1791-1867) encontró experimentalmente que:

«La masa en gramos de una sustancia depositada en una electrólisis, es directamente proporcional a la intensidad de corriente y al tiempo que dura la electrólisis».

$$M = E I t = E Q$$

a la que llamaremos PRIMERA LEY DE FARADAY, y en la que  $I$  es la intensidad de corriente que circula por la cuba electrolítica, y por tanto:  $Q = I t$  es la cantidad de electricidad que atraviesa la cuba.

El coeficiente  $E$  se llama EQUIVALENTE ELECTROQUÍMICO de una sustancia y su valor es:

$$E = \frac{M_m}{v F}$$

en la que  $M_m$  es la masa (en gramos) de un mol de sustancia depositada;  $v$  es la valencia del ión correspondiente, y  $F$  es una constante universal llamada FARADAY cuyo valor aproximado es 96500 culombios (su valor experimental es 96487 C). Los químicos llaman a  $M_m/v$  el EQUIVALENTE QUÍMICO de una sustancia ( $E_q$ ), pudiéndose expresar las leyes de Faraday por la fórmula:

$$M = \frac{M_m}{v F} I t = \frac{E_q}{F} I t$$

Llamamos SEGUNDA LEY DE FARADAY al enunciado:

«La masa en gramos de una sustancia depositada en una electrólisis, es directamente proporcional a su equivalente químico».

Las leyes de Faraday se deducen de la hipótesis de que los iones llevan tantas cargas elementales como indica su valencia  $v$ ; en efecto: si es  $e$  la carga del electrón, los iones positivos transportan una carga igual a  $+ve$  y los negativos  $-ve$ . En consecuencia, si es  $N$  el número de iones neutralizados en el electrodo correspondiente, entonces la carga total transferida a cada electrodo es en valor absoluto:  $Q = N v e$ .

Por otra parte, suponiendo que  $m$  sea la masa de cada molécula depositada, la masa total será:  $M = N m$ ; por división de ambas obtenemos:

$$\frac{M}{Q} = \frac{m}{v e} \Rightarrow M = \frac{m}{v e} Q = \frac{m}{v e} I t$$

llamando  $N_A$  al número de Avogadro (Número de moléculas de un mol de cualquier sustancia), la masa de un mol de la sustancia (masa molecular) es  $M_m = N_A m$ ; multiplicando y dividiendo la expresión anterior por  $N_A$ , nos queda:

$$M = \frac{N_A m}{v e N_A} I t = \frac{M_m}{v F} I t = \frac{E_q}{F} I t \quad \text{c.q.d.}$$

El valor de  $F = e N_A$  es una constante universal que coincide aproximadamente con el valor experimental; en efecto:

$$\begin{matrix} N_A = 6,022 \times 10^{23} \\ e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad F = 96\,484,55 \text{ C}$$

Las tres constantes universales relacionadas por la ecuación:  $F = e N_A$ , se pueden calcular independientemente utilizando otros procedimientos, resultando estas medidas en perfecto acuerdo con la relación aquí establecida, lo que constituye una confirmación muy significativa de la atomicidad de la materia, de la naturaleza eléctrica del enlace químico, y de la cuantificación de la carga.

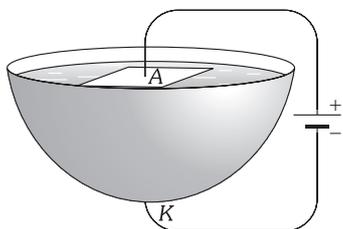


Fig. XX-36.- Voltámetro de plata.

### XX - 32. Medida de la intensidad de corriente con un voltámetro. Amperio internacional

El hecho de ser la masa de una sustancia depositada por electrólisis proporcional a la intensidad de corriente, nos proporciona un método de medida de ésta última. De esta aplicación procede el nombre de voltámetro dado a la cuba electrolítica.

El voltámetro más significativo es el de plata, ya que nos proporciona un método para la definición de la unidad en el SI de la intensidad: el Amperio. Consiste en un crisol de platino que hace de cátodo y a su vez de cuba electrolítica (Fig. XX-36) del cual se conoce su peso inicial; se llena de una disolución acuosa de nitrato de plata, y se emplea como ánodo una lámina de plata. Siendo la masa molecular de la Plata 107,9 y su valencia 1, su equivalente electroquímico será:

$$E_q = \frac{107,9}{1 \times 96\,485} = 1,118 \times 10^{-3} \text{ g}$$

Hacemos pasar por el voltámetro la corriente que queremos medir durante un tiempo conocido  $t$ , depositándose Ag en el crisol, y el ión nitrato reacciona con la plata del ánodo y vuelve a la disolución, por lo que su concentración permanecerá constante. Terminada la electrólisis, se seca perfectamente el crisol y se pesa, obteniéndose, por diferencia con la masa inicial, la masa de Ag depositada. La precisión de estas medidas, aplicadas a las leyes de Faraday, permiten establecer la unidad patrón del SI para la intensidad:

«El AMPERIO es la intensidad de una corriente eléctrica que deposita por electrólisis de una disolución acuosa de nitrato de plata 1,118 mg de plata en un segundo».

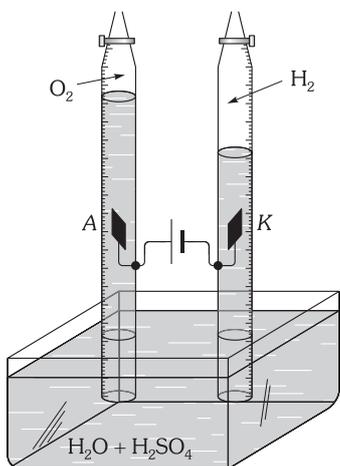


Fig. XX-37.- Voltámetro de gases para la electrólisis del agua.

### XX - 33. Voltámetro de agua. Electrólisis del agua

El agua destilada es un mal conductor de la electricidad, pero si en ella se disuelven determinadas sustancias su conductividad aumenta extraordinariamente.

Si una disolución acuosa de ácido sulfúrico, se introduce dentro de un voltámetro, en el que se colocan dos electrodos de platino, al paso de la corriente se produce un desprendimiento de hidrógeno en el cátodo y oxígeno en el ánodo, como si se hubiera producido la electrólisis del agua (Fig. XX-37). En realidad lo que ocurre es que el disociado es el ácido sulfúrico, desprendiéndose hidrógeno en el cátodo y el residuo  $\text{SO}_4^{2-}$  reacciona con el agua de la disolución, pues los electrodos son de Pt, regenerándose el ácido sulfúrico y dejando oxígeno en libertad como si se hubiera producido la electrólisis del  $\text{H}_2\text{O}$ , y de ahí su nombre.

Para que se produzca este proceso de electrólisis del agua acidulada es necesario un potencial mínimo de 1,49 V.

### XX - 34. Conductividad electrolítica

En una disolución electrolítica situada entre dos placas paralelas suficientemente grandes (Fig. XX-38) existe un campo homogéneo de valor  $E = (V_A - V_K)/l$ . Sobre un ión de valencia  $v$  actúa una fuerza  $F = veE = ve(V_A - V_K)/l$ . Como en el caso de los metales, esto no conduce a un movimiento acelerado, sino a uno uniforme, con velocidad proporcional al campo  $E$ , es decir

$$v_+ = \mu_+ E \quad \text{CATIONES} \qquad v_- = -\mu_- E \quad \text{ANIONES}$$

siendo  $\mu_+$  y  $\mu_-$  las movilidades de los iones; como estas dos cantidades son positivas, hemos puesto el signo menos a la velocidad de los aniones, por moverse en sentido contrario al campo eléctrico.

Como en la disociación aparecen cationes y aniones con la misma carga  $ve$  aunque de sentido contrario, las densidades de corriente respectivas valen:

$$J_+ = veNv_+ = veN\mu_+ E \qquad J_- = -veNv_- = veN\mu_- E$$

Ambos tipos de iones nos proporcionan un valor positivo a la corriente, puesto que el movimiento de los aniones «hacia atrás» lo hemos valorado como aportación positiva; con lo que la densidad de corriente total será:  $J = J_+ + J_- = veN(\mu_+ + \mu_-) E$

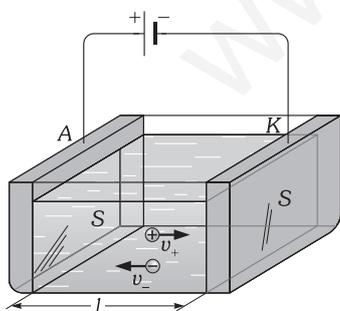


Fig. XX-38.- Velocidades de los aniones y cationes para una disolución electrolítica.

y la conductividad del electrolito es por tanto:

$$\sigma = \frac{J}{E} = veN(\mu_+ + \mu_-)$$

Para una sección de placa  $S$ , la corriente total es:  $I = JS = SveN(\mu_+ + \mu_-) \frac{V_A - V_K}{l}$

que comparada con la ley de Ohm, corresponde a una resistencia\* de la disolución electrolítica:

$$R = \frac{l}{veN(\mu_+ + \mu_-) S} = \rho \frac{l}{S}$$

en la que  $\rho$  será la *resistividad* de la disolución electrolítica, que toma el valor:

$$\rho = \frac{l}{\sigma S} = \frac{l}{veN(\mu_+ + \mu_-)}$$

El número de moléculas disociadas por unidad de volumen ( $N$ ), no suele ser el mismo que el de moléculas disueltas (solute) por unidad de volumen en la disolución electrolítica (concentración  $c$ ), dependiendo del llamado GRADO DE DISOCIACIÓN ( $\alpha$ ), que se define como «la fracción del número de moléculas que se han disociado»; por lo tanto:  $N = c\alpha$ , con lo que la expresión de la conductividad nos queda:

$$\sigma = c\alpha ve(\mu_+ + \mu_-)$$

admitiendo que, dentro de ciertos límites, las movilidades de los iones son independientes de la concentración, resulta que *la conductividad de un electrolito es proporcional a la concentración y al grado de disociación.*

El carácter aproximado de esta ley se debe a que cuando aumente la concentración de iones en el electrolito, las colisiones entre ellos hacen crecer la resistencia al movimiento en la dirección del campo y por tanto las movilidades son «relativamente» dependientes de la concentración.

### XX – 35. Aplicaciones de la electrólisis

**GALVANOPLASTIA.** Tiene por finalidad la reproducción en metal de un objeto por medio de la corriente eléctrica.

El objeto a reproducir se recubre de cera fundida, por ejemplo; separada ésta, después de su solidificación, habremos obtenido un «negativo» que se tapiza *interiormente* con plumbagina y se lava con alcohol; de esta forma hemos hecho conductora a la superficie interna del molde. Este se coloca de cátodo en una cuba electrolítica cuyo electrolito es, por ejemplo, sulfato de cobre. El cobre depositado sobre la superficie interior del cátodo reproduce el objeto original. La cera se separa por calentamiento moderado.

**GALVANOSTEGIA.** Tiene por finalidad el recubrir objetos de una superficie o capa metálica, por medio de la corriente eléctrica (plateado, dorado, niquelado, cromado, etc.)

A los objetos metálicos, bien limpios, se les coloca como cátodo de una cuba electrolítica y cuyo electrolito es una disolución de una sal adecuada del metal que queremos depositar. Las iones de tal metal, descargados en el cátodo, recubren a éste del revestimiento metálico que se pretendía obtener.

Conociendo la intensidad de la corriente con un amperímetro, la masa atómica del metal y su valencia, la aplicación de la fórmula de Faraday nos indicará el tiempo que debe durar la electrólisis, para conseguir el depósito de una masa determinada del metal.

### XX – 36. Potencial de contacto entre un metal y un electrolito

*Al poner en contacto un metal con disolución de una de sus sales, se origina entre ambos una diferencia de potencial, por realizarse un intercambio de electrones, a la que se denomina POTENCIAL DE CONTACTO.*

Al introducir una barra de Zn en agua, el Zn se *disuelve* un poco en forma de iones  $Zn^{2+}$  que emite la barra y pasan al seno del líquido; esta emisión de  $Zn^{2+}$  hace que la barra adquiera carga negativa con respecto al líquido, originándose entre ambos una diferencia de potencial.

El fenómeno de la proyección de los iones al líquido es análogo a la evaporación. Los iones que están en el seno del líquido ejercen una presión osmótica. El metal se sigue disolviendo hasta que esta presión adquiere un determinado valor llamado «tensión de disolución».

\* La resistencia de la disolución de un electrolito se tiene que medir con tensión alterna, con lo que se evita el depósito de iones en los electrodos y la variación en la concentración de la disolución.

TENSIÓN DE DISOLUCIÓN es la presión osmótica que ejercen los iones de un metal cuando el fenómeno de su disolución cesa aparentemente.

Decimos aparentemente pues se establece un equilibrio dinámico; es decir, el mismo número de iones que se proyectan al líquido, se depositan en el metal.

Un metal proyecta iones al seno de un líquido cuando la presión osmótica de sus propios iones es menor que la tensión de la disolución.

Sobre un metal se depositan sus propios iones, cuando la presión osmótica de éstos es mayor que la tensión de la disolución.

### XX - 37. Pilas electrolíticas

«Las PILAS ELECTROLÍTICAS son generadores de corriente basados en los diversos potenciales que adquieren los metales, en contacto con los electrolitos».

PILA de Jhon DANIELL (1766-1844) (Fig. XX-39). Los electrodos son de Zn y Cu; el primero sumergido en una disolución diluida de sulfato de zinc y el segundo en otra concentrada de sulfato de cobre; ambas separadas por una pared porosa. La tensión de disolución del Zn es mayor que la presión osmótica de los iones  $Zn^{2+}$ , y la barra se disuelve en parte, emitiendo  $Zn^{2+}$  y quedando cargada negativamente. En el Cu, el fenómeno es a la inversa por la gran concentración de iones Cu, depositándose  $Cu^{2+}$ , sobre la barra del metal, que queda cargada positivamente (mayor potencial que el Zn). Al unir los electrodos por un hilo conductor, circula una corriente eléctrica del Cu al Zn. La FEM de la pila es aproximadamente, 1 voltio.

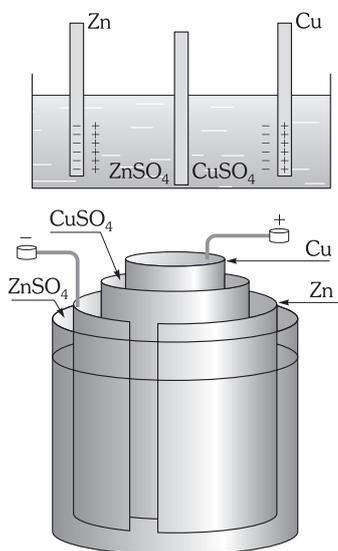


Fig. XX-39.- Pila Daniel.

PILA de Alessandro VOLTA (1745-1827). Los metales son Zn y Cu; el electrolito  $H_2SO_4$ ; el Zn y el Cu se disuelven en el sulfúrico, adquiriendo el Cu un potencial mayor que el Zn. Al unir los dos metales por un hilo conductor, pasa corriente del Cu al Zn (es decir, electrones del Zn al Cu).

Al salir electrones del Zn hacia el Cu por el hilo externo, la atracción que el Zn ejerce sobre sus propios iones en disolución disminuye, venciendo por lo tanto la tensión de disolución y disolviéndose más Zn. Los electrones circulantes, al llegar al Cu, neutralizan los iones  $H^+$  del  $H_2SO_4$  (y no los  $Cu^{2+}$ , por ser el H más electropositivo que el Cu) y se desprende gas  $H_2$ . Por cada valencia gramo de Zn disuelta, o de  $H_2$  desprendida, se ponen en circulación 96 500 culombios. La FEM de la pila es, aproximadamente, 1 voltio.

El  $H_2$ , en parte, se deposita sobre el Cu, formando a modo de una película sobre él, e impidiendo el mecanismo descrito; entonces la pila se ha polarizado, llegándose a anular la producción de corriente.

PILA de Georges LECLANCHÉ (1839-1882). El electrolito es una disolución acuosa de cloruro amónico ( $NH_4Cl$ ). El electrodo negativo es una barra de Zn y el positivo una placa de carbón rodeado de una mezcla de dióxido de manganeso y carbón pulverizado, introducidos en un vaso de porcelana porosa (Fig. XX-40). El  $MnO_2$  actúa de despolarizante.

La tensión de disolución del Zn hace a este disolverse (formación de  $ZnCl_2$ ), haciendo adquirir a tal metal un potencial negativo con respecto a la solución.

Los iones  $NH_4^+$  del cloruro amónico se descargan sobre la placa de carbón, con producción de  $NH_3$  e hidrógeno, que actuando sobre el  $MnO_2$  lo reduce a  $MnO$ .

La FEM de esta pila es de 1,5 voltios, aproximadamente.

PILA FERY. Consiste esta pila en un vaso que contiene una disolución de sal de amoníaco; en el fondo lleva una lámina de zinc a la que va soldada una varilla de cobre debidamente aislada para atravesar el líquido. Un carbón poroso constituye el electrodo positivo (Fig. XX-41).

El despolarizante es el mismo oxígeno del aire, disuelto en la superficie del líquido. Al recubrirse el carbón de hidrógeno, junto al Zn se forma una pila de gases ( $OH$ ) puesta en cortocircuito con el carbón, que equivale a un par despolarizante cuyos polos positivo y negativo son respectivamente las partes superior e inferior del carbón; así en la parte inferior se produce oxígeno que se combina con el hidrógeno.

Por la reacción se produce cloruro de zinc que permanece en la parte inferior, y aunque separado del amoníaco, llega por contacto a formar óxido de zinc hidratado con regeneración por sal amoníaco.

Para su montaje, se vierte la carga de sal amoníaco (unos 170 g) en el vaso; se añade después agua hasta la mitad del vaso, agitando para favorecer la disolución; se coloca el Zn en el fondo con el hilo de cobre soldado y cuidando que quede hacia abajo la soldadura; sobre el Zn se coloca una cruceta de madera o de cristal que hará de aislante puesto que sobre ella se colocará la barra de carbón. A las veinticuatro horas se añade el agua necesaria hasta alcanzar el líquido unas 2/3 partes de la altura del vaso.

Su FEM es de 1,40 V aproximadamente; en gasto continuo decae pronto hasta 1 V, manteniéndose alrededor de este número hasta agotarse.

PILAS SECAS. Son pilas de Leclanché en las que se ha sustituido la disolución de  $NH_4Cl$  y la mezcla de carbón y  $MnO_2$  por una pasta formada por agua, cloruro amónico, cloruro de zinc, dióxido de manganeso, carbón de cok y pequeñas cantidades de grafito.

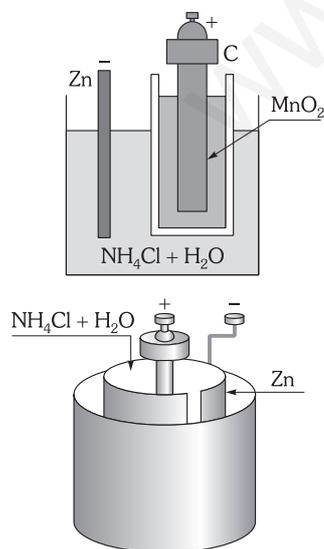


Fig. XX-40.- Pila Leclanché.

El electrodo negativo (Zn) es el propio recipiente donde se introduce la pasta. El electrodo positivo es una barra de carbón. Se cierra la pila herméticamente con un cemento aislante (Fig. XX-42).

Se ofrecen en el mercado completamente cerradas, lo que facilita su transporte y manejo. A pesar de su pronto desgaste y mayor resistencia interior que las demás pilas, son de las más utilizadas para los aparatos del mercado (linternas, telefonía, radios, etc.).

**PILA de Edward WESTON (1886-1936).** La mayoría de las pilas de empleo común en aparatos de precisión que necesitan una diferencia de potencial constante y estable, son modificaciones de la pila normal de Weston; está formada por un tubo de vidrio en forma de H y en donde los electrodos se introducen por las partes inferiores de ambas ramas verticales (Fig. XX-43).

El cátodo es una amalgama de cadmio, compuesta por un 12,5 % en peso de cadmio, disuelto en un 87,5% de mercurio; el ánodo es mercurio puro. El ánodo se cubre con una pasta de cristales de  $\text{Hg}_2\text{SO}_4$  y  $\text{CdSO}_4$  que actuará de despolarizante. El electrolito es una disolución saturada de  $\text{Hg}_2\text{SO}_4$  y  $\text{CdSO}_4$ ; el exceso de cristales de  $\text{CdSO}_4$  sin disolver en el fondo de la disolución asegura que la concentración del electrolito permanezca constante para una temperatura determinada. Si se construye con materiales puros, la pila normal de Weston tiene una FEM de 1,018 V a 25 °C, muy estable y perfectamente reproducible, por lo que suele utilizarse como patrón de diferencia de potencial.

La Fig. XX-44a, nos muestra el proceso que tiene lugar en la base de la disolución y encima del ánodo de Hg, en donde los iones  $\text{Hg}^+$  procedentes del  $\text{Hg}_2\text{SO}_4$  disuelto están adquiriendo electrones procedentes de la corriente que pasa a través del Hg. La Fig. XX-44b, muestra el proceso que se produce encima del cátodo, en donde los iones de Cd están pasando a la disolución.

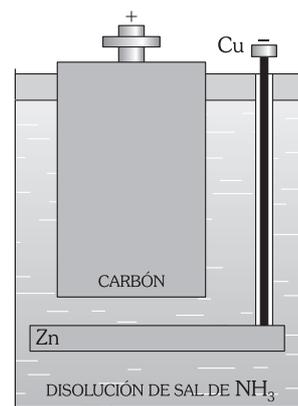


Fig. XX-41.- Pila Fery.

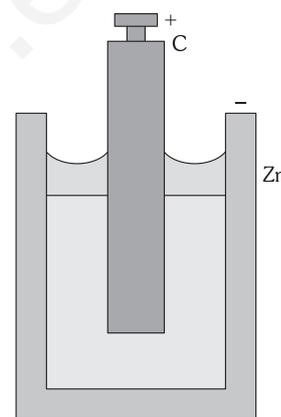


Fig. XX-42.- Pila seca.

### XX - 38. Fuerza electromotriz de polarización

Para verificar una electrólisis es necesario un consumo de energía eléctrica y un mínimo potencial; por ejemplo, para la electrólisis del agua acidulada es necesario un potencial mínimo de 1,49 voltios. Teóricamente, conforme a lo estudiado hasta ahora, la electrólisis debería verificarse con cualquier potencial, por pequeño que éste fuera. Si existe un potencial mínimo, nos indica la existencia de una FEM contraria a la que originaba la electrólisis y a la que hay que vencer.

«Los electrolitos se comportan al paso de una corriente, como productores de una FEM de sentido contrario a la que origina la electrólisis, llamada FEM DE POLARIZACIÓN. Si se suprime la pila que verificaba la electrólisis y se unen entre sí los polos del voltámetro, se pone de manifiesto esta FEM y se origina una corriente de sentido contrario a la de la pila. La corriente originada es tanto más duradera, cuanto mayores han sido las modificaciones químicas de los electrodos».

### XX - 39. Acumuladores

Los ACUMULADORES son generadores de corriente basados en la FEM de polarización. En ellos se produce primero el paso de una corriente (carga) que verifica una electrólisis con cambios químicos en los electrodos. Cuando la modificación ha sido prácticamente total, el acumulador está cargado. Uniendo sus polos por un hilo conductor se origina una corriente (descarga) de sentido contrario a la carga, modificándose los electrodos hasta adquirir su primitiva composición; el acumulador, está descargado.

El proceso de carga de los primitivos acumuladores consistía en el paso prolongado de una corriente eléctrica a través de un voltámetro con electrodos de plomo, conteniendo ácido sulfúrico diluido: en el polo positivo el oxígeno desprendido forma peróxido de plomo ( $\text{PbO}_2$ ) de color pardo, mientras que en el negativo, si hubiese algo de óxido superficial, el hidrógeno lo reduce a plomo metálico.

Los electrodos quedan en la disposición de la Fig. XX-45a. Los símbolos encerrados en círculos indican la valencia del Pb en cada caso.

**DESCARGA.** Durante la descarga, los átomos de Pb del electrodo B (negativo del acumulador), ceden dos electrones, que circulando por el conductor externo pasan a A (Fig. XX-45 a).

El electrodo B atrae a los iones  $\text{SO}_4^{2-}$  captando sus dos electrones y realizando la reacción indicada en la figura (a).

El electrodo A recibe los electrones del B y atrae a los iones  $\text{H}^+$  del  $\text{H}_2\text{SO}_4$ , a los que neutraliza, verificándose la reacción que se indica.

**CARGA.** Durante la carga -instalado el generador G en la disposición de la figura (b)-, los átomos Pb de A ceden dos electrones (por influencia del generador), que circulando por el conductor externo pasan a B.

El electrodo A atrae a  $\text{SO}_4^{2-}$  que verifica las reacciones que se indican. El electrodo B recibe los electrones de A y atrae a los iones  $\text{H}^+$ , que descargados realizan la regeneración de B a su primitivo estado de Pb metálico.

Cuando el sulfato de plomo, producido en la descarga, forma cristales grandes ya no es modificado en el proceso de carga y el acumulador se inutiliza (sulfatado).

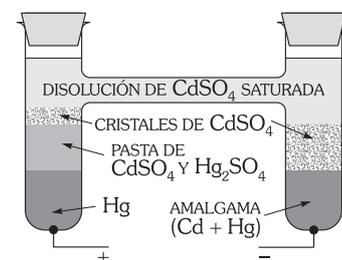


Fig. XX-43.- Pila de Weston (saturada).

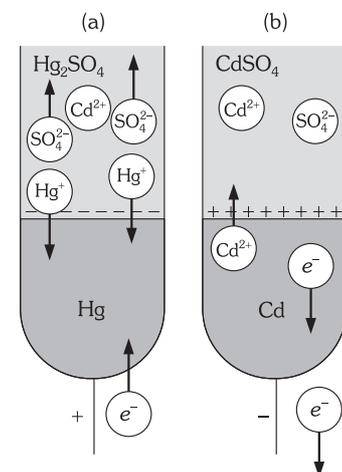


Fig. XX-44.- Semirreacciones de una pila Weston.

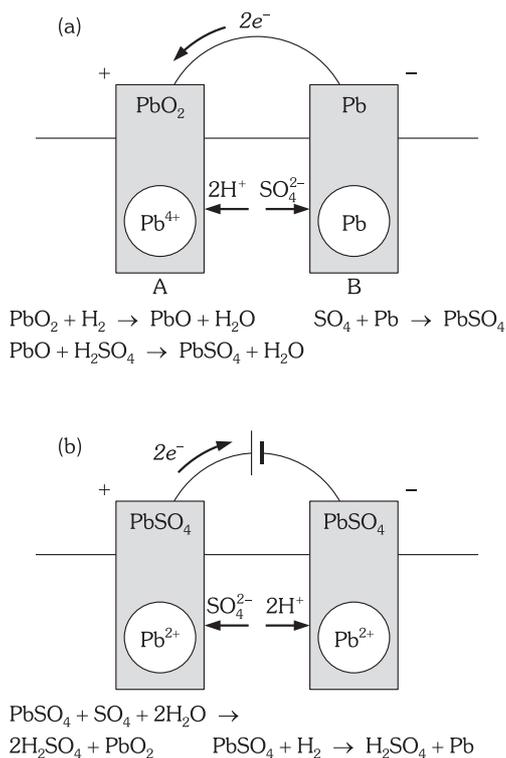
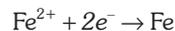
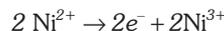


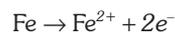
Fig. XX-45.- Descarga y carga de un acumulador de plomo.

ACUMULADORES DE FERRONÍQUEL O ALCALINOS. Sus electrodos son sendas láminas de acero con panales rellenos de óxido de níquel (II), NiO (ánodo) y óxido de hierro (II) FeO (cátodo). El electrolito es una disolución de potasa cáustica, KOH. Durante la carga se realizan los procesos de oxidación anódica y reducción catódica, pasando el óxido de níquel (II) a óxido de níquel (III) Ni<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, y el óxido de hierro (II) a hierro metálico. Los procesos representados esquemáticamente son:



En definitiva, la reacción realizada es:  $2 Ni^{2+} + Fe^{2+} \rightarrow 2 Ni^{3+} + Fe$  (1)

Durante la descarga el proceso oxidación-reducción es a la inversa: el Ni<sub>2</sub>O<sub>3</sub> es reducido a NiO y el hierro metálico oxidado a FeO.



En definitiva:  $2 Ni^{3+} + Fe \rightarrow 2 Ni^{2+} + Fe^{2+}$  reacción inversa a la (1).

CARACTERÍSTICAS DE UN ACUMULADOR

1ª CAPACIDAD UTILIZABLE. «Es la cantidad de electricidad que puede producir en la descarga, se mide en AMPERIOS · HORA (3 600 culombios)».

2ª RENDIMIENTO. «Es la relación que existe entre la cantidad de electricidad aprovechable en la descarga y la empleada en la carga».

PROBLEMAS: 89 al 114.

G) PASO DE LA CORRIENTE A TRAVÉS DE LOS GASES

XX - 40. Ionización de los gases

Los gases son los mejores aisladores de que disponemos, no queriendo decir con esto que sean aisladores perfectos; experimentalmente se observa que un conductor cargado rodeado de un gas conserva su carga durante bastante tiempo siendo, por tanto, su velocidad de descarga a través del gas muy pequeña; esta velocidad aumenta considerablemente cuando se hace actuar sobre el gas los que llamaremos AGENTES IONIZANTES (rayos ultravioleta o X, una llama, radiaciones de sustancias radioactivas, etc.).

Estos hechos comprobables experimentalmente, pueden justificarse suponiendo que la electricidad pasa a través de los gases por un mecanismo análogo a la electrólisis, es decir: la conductividad en los gases se debe a la existencia de iones positivos y negativos en ellos, los cuales aumentan por la influencia del agente ionizante.

XX - 41. Corriente de ionización. Ionización por choque. Chispa eléctrica

Esquemizamos en la Fig. XX-46 un aparato que nos permite estudiar la corriente eléctrica que pasa por un gas ionizado, consistente en una cámara C provista de una ventana transparente al agente ionizante, en la que se ha introducido un condensador cuyas armaduras harán el papel de electrodos. Mediante una batería  $\mathcal{E}$ , establecemos una diferencia de potencial entre las armaduras del condensador, la cual podemos variar con el potenciómetro R; un galvanómetro G nos permite medir la intensidad de corriente.

Si se aumenta la diferencia de potencial que existe entre las placas, la intensidad de la corriente que pasa a través del gas aumenta proporcionalmente para pequeños potenciales (cumpliéndose en consecuencia, la ley de Ohm); si la diferencia de potencial se sigue aumentando se llega a obtener una intensidad constante, llamada CORRIENTE DE SATURACIÓN (Fig. XX-47), cuyo valor depende de la separación entre las armaduras del condensador y de la intensidad con que actúa el agente ionizante.

CORRIENTE DE SATURACIÓN es una corriente eléctrica a través de un gas, que tiene intensidad constante, aunque se aumente la diferencia de potencial que la produce.

Si se sigue aumentando la diferencia de potencial se llega a un valor en el que vuelve a aumentar, rápidamente, la intensidad, hasta que, para un valor determinado de la diferencia de potencial, salta de una a otra placa una chispa eléctrica o descarga disruptiva, circulando, bruscamente, una gran intensidad.

La causa de estos fenómenos, es la siguiente: supongamos un agente ionizante que produce n iones por segundo en el gas existente entre las placas: los iones negativos y positivos pueden «recombinarse» originando, de nuevo, las moléculas neutras de que proceden. La probabilidad de encuentro de los iones de signo contrario es tanto mayor, cuanto mayor es el número de iones y, así,

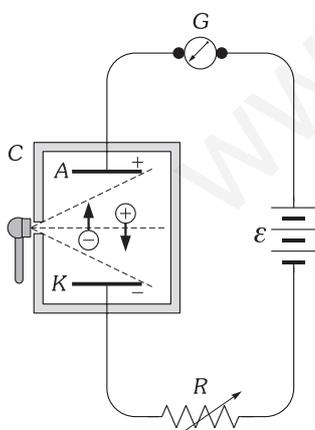


Fig. XX-46.- Cámara de ionización.

se llega a una cierta concentración de éstos para la cual el número de iones que se forman por el agente ionizante es igual al número de iones que desaparecen por recombinación.

Al establecerse una diferencia de potencial los iones son arrastrados hacia las placas, adquiriendo un movimiento tanto más acelerado cuanto mayor sea la diferencia de potencial. Si la velocidad es débil existe «recombinación», lo que impide a algunos iones alcanzar los electrodos; conforme aumenta la diferencia de potencial, aumenta la velocidad y, por lo tanto, la recombinación es menor, llegando cada segundo a los electrodos un mayor número de iones (Región C de la curva).

A partir de una diferencia de potencial determinada, los iones adquieren velocidades suficientemente grandes para que no se produzca «recombinación» y todos los iones que produce el agente ionizante se depositan en las placas; aunque se aumente  $V_A - V_K$ , únicamente los  $n$  iones producidos cada segundo llegan a las placas (saturación). (Región D de la curva).

Si continuamos aumentando  $V_A - V_K$ , la velocidad de los iones sigue aumentando, llegando a adquirir una energía cinética ( $1/2 mv^2$ ) suficiente para que al chocar un ión con una molécula «arranque» de ella electrones, verificándose el fenómeno de IONIZACIÓN POR CHOQUE.

Además de los  $n$  iones por segundo producidos por el agente ionizante llegan, entonces, a la placa los iones producidos por el choque y la intensidad de la corriente crece (Región E de la curva). Para potenciales grandes el número de iones producido por choque es enorme, colaborando con los producidos inicialmente en nuevas ionizaciones, circulando intensidades elevadísimas y verificándose el fenómeno de la CHISPA ELÉCTRICA (región F de la curva), la cual no cesa aunque deje de actuar el agente ionizante, bastando la ionización por choque para mantenerla (ver párrafo XXX-20).

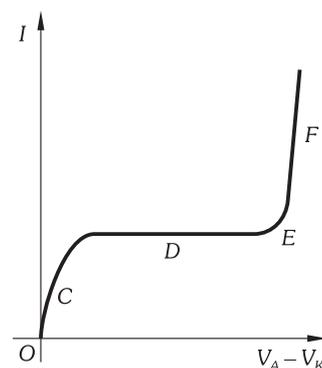


Fig. XX-47.— Curva de la intensidad con el potencial en bornas del condensador en la cámara de ionización.

### XX – 42. Paso de la electricidad a través de gases enrarecidos

Si en el interior de un tubo de vidrio, en el que hemos introducido dos electrodos entre los cuales hacemos pasar la descarga disruptiva (Tubo de Geissler), se hace el vacío, se observa que al disminuir la presión por debajo de 1 mm de Hg se produce un régimen permanente de descarga si la diferencia de potencial es lo suficientemente alta (del orden de 1 kV para una separación de 0,1 m entre los electrodos); originándose en el tubo una serie de luminosidades distribuidas de la forma siguiente: 1. Brillo catódico. 2. Espacio oscuro de Hirtoff o Crookes. 3. Luz negativa. 4. Espacio oscuro de Faraday. 5. Luz positiva (estratificada).

El fenómeno es debido a que el campo eléctrico a lo largo del tubo no es constante, teniendo su intensidad un valor enormemente mayor en las proximidades del cátodo que en el resto del tubo. Imaginemos un ión positivo del gas en la región del campo intenso (proximidades del cátodo). Si el valor del campo es  $E$ , la carga del ión  $q$  y su masa  $m$ , la fuerza que actúa sobre él es:  $F = Eq = ma$ , adquiriendo una aceleración a tanto mayor cuanto mayor es la intensidad del campo  $E$ . Debido a tal aceleración adquiere el ión la energía cinética ( $1/2 mv^2$ ) suficiente para provocar, en las moléculas próximas al cátodo y en las de éste, la ionización por choque, con un desprendimiento de energía radiante que es la causa del brillo catódico. Por esta ionización se originan iones positivos, que son captados por el cátodo, y electrones que atraídos por el ánodo, se mueven aceleradamente en el espacio de Hirtoff o Crookes, hasta que adquieren la energía cinética necesaria para producir la ionización por choque produciendo luz (luz negativa) por el mecanismo citado.

De la colisión de electrones y moléculas resultan electrones e iones positivos; éstos se dirigen hacia el cátodo produciendo los fenómenos ya descritos; los electrones son atraídos por el ánodo recorriendo el espacio de Faraday, a través del cual vuelven a adquirir la energía cinética suficiente para producir la ionización por choque (luz positiva); las estratificaciones de ésta representan las nuevas colisiones verificadas con ionización.

A una presión del orden de 1 mm de Hg para un gas (como, por ejemplo, vapor de mercurio) la columna positiva llena por completo el tubo cualquiera que sea su longitud; tapizando la superficie interna del tubo con una sustancia fluorescente (silicatos de metales de tierras raras, por ejemplo) la cual tiene la propiedad de absorber las radiaciones ultravioleta produciendo más luz, se obtienen los que normalmente llamamos TUBOS FLUORESCENTES.

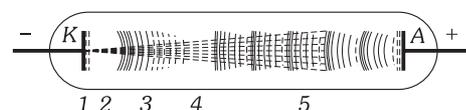


Fig. XX-48.— Descarga en gases enrarecidos.

### XX – 43. Rayos catódicos y canales

A medida que disminuimos la presión en un tubo de Geissler, el espacio oscuro de Crookes o Hirtoff aumenta, ya que el menor número de moléculas de gas disminuye la probabilidad de colisiones y el campo intenso se reduce, aun más, a las proximidades del cátodo. Al llegar a un vacío de centésimas de mm de Hg el espacio oscuro ocupa todo el tubo, lo que indica que los electrones salientes del cátodo no ionizan moléculas a su paso. *Este chorro de electrones salientes del cátodo y acelerados por el campo eléctrico existente en el tubo, constituye los RAYOS CATÓDICOS.*

Los rayos catódicos se pueden obtener también en los tubos de alto vacío sometiendo a un campo eléctrico a los electrones liberados por un filamento en incandescencia (EFECTO TERMOIÓNICO). El filamento metálico  $F$  (Fig. XX-49) libera electrones al ser puesto en incandescencia; la batería  $B$  origina en la placa metálica  $A$  (ánodo) un fuerte potencial positivo. Los electrones liberados

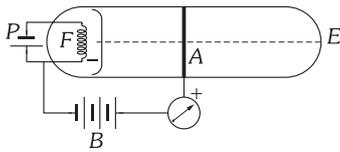


Fig. XX-49.- Producción de rayos catódicos en tubos de alto vacío.

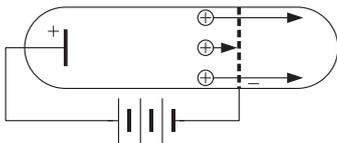


Fig. XX-50.- Rayos canales.

en  $F$  son atraídos por  $A$ ; parte de ellos son captados por la placa, originándose en el circuito  $FBAF$  una corriente eléctrica que señala un amperímetro. Otros electrones atraviesan a gran velocidad un orificio practicado en  $A$ . Este *pinzel de electrones* propagado de  $A$  a  $E$ , constituye los rayos catódicos.

El filamento suele estar envuelto por una caperuzita metálica, con un pequeño orificio, para seleccionar un pinzel muy fino.

Los rayos catódicos se propagan en línea recta y provocan fluorescencia de muchos cuerpos.

La naturaleza negativa de los rayos catódicos se demuestra por la desviación que experimentan hacia la placa positiva de un condensador; se comprueba su masa interponiendo en su trayecto una ruedecilla de paletas de platino muy ligera, la cual se pone en movimiento.

Los rayos catódicos son portadores de una gran energía, puesto que son capaces de poner en incandescencia una laminilla de platino, interpuesta en su marcha.

En los tubos Geissler aparecen otro tipo de radiaciones colocando el cátodo en su centro (Fig. XX-50), abriéndose en él unos canales u orificios. Se observa que parte de los iones positivos del gas, que se dirigen hacia el cátodo, atraviesan los orificios propagándose por lo tanto, por detrás del cátodo y en sentido contrario a los rayos catódicos. Estos rayos fueron descubiertos por Goldstein en 1896 y los denominó RAYOS CANALES o positivos.

Las propiedades son parecidas a las de los rayos catódicos, difiriendo en su carga que es positiva e igual o múltiplo entero de la del electrón. Los rayos canales son desviados por los campos magnéticos y eléctricos en sentido contrario a los rayos catódicos.

*La naturaleza de los rayos catódicos es independiente de la del gas que hay en el tubo, ya que todos los electrones son idénticos; sin embargo: la naturaleza de los rayos canales depende de la del gas que hay en el tubo, ya que están formados por iones positivos del propio gas.*

PROBLEMAS

A) CORRIENTE ELÉCTRICA. RESISTENCIA. EFECTO JOULE

1. Se ha encontrado que cuando la diferencia de potencial entre los extremos de una resistencia es de 10 V, la intensidad de la corriente es de 2 A. ¿Cuánto valdría si la diferencia de potencial fuese de 100 V? ¿Cuál será la diferencia de potencial si la intensidad de la corriente es de 0,1 A? ¿Cuál el valor de la resistencia?

2. Se trata de sustituir una conducción eléctrica de hilo de cobre por hilo de aluminio de la misma longitud, de tal suerte que ambas tengan la misma resistencia óhmica. Calcular: 1) La relación entre las secciones de los hilos. 2) La relación entre los pesos del cobre y del aluminio. DATOS: Resistividad del cobre:  $\rho = 1,8 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{cm}$ . Resistividad del aluminio:  $\rho = 2,6 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{cm}$ . Densidad del cobre:  $d = 8,93 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ . Densidad del aluminio:  $d = 2,70 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ .

3. Un circuito eléctrico está formado por tres alambres de igual longitud y del mismo material unidos en serie. Los tres alambres tienen distinta sección:  $1 \text{ mm}^2$ ,  $2 \text{ mm}^2$  y  $3 \text{ mm}^2$ . La diferencia de potencial entre los extremos del circuito es de 12 V. Determinar la caída de tensión que tiene lugar en cada uno de los alambres.

4. Los conductores que unen las resistencias de la figura los suponemos de resistencia despreciable. Calcular la resistencia equivalente del conjunto.

5. Tenemos una instalación por la que circula una corriente de 6 A que está formada por dos conductores: A y B, colocados en serie, y a continuación tres conductores, C, D y E, en derivación; todos ellos de  $4 \Omega$  de resistencia. Calcular: 1) La resistencia total de la instalación. 2) La diferencia de potencial entre los extremos del conductor A. 3) La diferencia de potencial entre los extremos del conductor C.

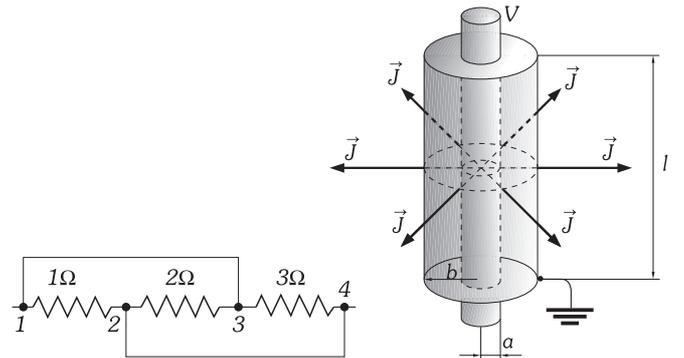
6. Por un hilo metálico de  $1 \text{ mm}^2$  de sección transversal, circula una corriente de 1 A. Si la densidad de electrones libres es de  $10^{27} \text{ m}^{-3}$ , determinar la velocidad media de estos electrones.

7. Un conductor cilíndrico de 0,6 cm de diámetro, transporta una corriente de densidad  $0,40 \text{ mA/m}^2$ . Determinar el tiempo que tarda en pasar un mol de electrones por un determinado punto del conductor. DATOS:  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ,  $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ .

8. Sabemos que para la plata, el número de portadores de carga es de un electrón por átomo; suponiendo que por un hilo de este metal, de  $1 \text{ mm}^2$  de sección, circula una corriente de intensidad 30 mA, determínese: 1) La densidad de corriente que circula por el hilo. 2) El campo eléctrico en su interior. 3) La movilidad de los electrones que circulan por el hilo. 4) La velocidad media de los electrones en su interior.

DATOS:  $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ .  $M_m = 108 \text{ g}$ . Densidad de la plata:  $10,5 \text{ g/cm}^3$ . Resistividad de la plata:  $1,59 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{cm}$ .  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ .

9. La variación de la resistencia con la temperatura se utiliza para hacer mediciones muy precisas de temperaturas (TERMÓMETRO DE RESISTENCIA). Consiste en una resistencia de platino, eligiéndose este metal por su elevado punto de fusión y por ser muy resistente a la corrosión. Supongamos que a  $0^\circ \text{C}$  la resistencia del hilo de platino es de  $100,0 \Omega$ , cuando se pone en un ambiente a otra temperatura es de  $137,6 \Omega$ , ¿cuál es la temperatura de ese ambiente? Coeficiente de temperatura del platino  $39,3 \times 10^{-4} \text{ }^\circ \text{C}^{-1}$



Problema XX-4.

Problema XX-9.

10. En un conductor cilíndrico hueco de longitud  $l$  y de radios interior y exterior  $a$  y  $b$  como se indica en la figura, el flujo de corriente es radial; si es  $\rho$  la resistividad del material conductor, determínese la resistencia.

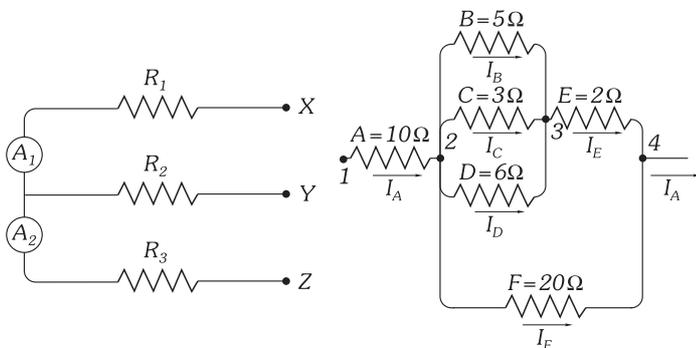
11. La resistencia de una lámpara eléctrica de 120 V, 100 W es 10 veces mayor cuando la lámpara está encendida que cuando está apagada. Determinar la resistencia en un caso y en otro, así como el coeficiente de temperatura si la temperatura de incandescencia del filamento es de  $200^\circ \text{C}$ . Suponer la temperatura del filamento apagado  $0^\circ \text{C}$ .

12. Tres resistencias,  $R_1, R_2, R_3$ , y dos amperímetros,  $A_1$  y  $A_2$ , de resistencia despreciable, se montan como indica el adjunto esquema. Se pide: 1) Calcular el valor de cada una de las resistencias conociendo los siguientes datos: a) Si se establece entre X e Y una diferencia de potencial de 100 V, la corriente que circula es de 2 A. b) Si se establece entre Y y Z la tensión necesaria para que la intensidad sea de 3 A, entonces la potencia total disipada en virtud del efecto Joule es de 630 W. c) Si se



establece entre X y Z una diferencia de potencial de 150 V, la potencia disipada es de 375 W. 2) ¿Qué marcan en cada uno de los tres casos anteriores los dos amperímetros?

13. En el circuito de la figura la caída de tensión a través de la resistencia A es de 100 V. Encontrar: 1) La intensidad que atraviesa cada una de las resistencias B, C, D. 2) La caída de tensión en la resistencia B. 3) La potencia disipada en la resistencia F.



Problema XX-12.

Problema XX-13.

14. Sabiendo que un hilo metálico de 1 m de longitud y 1 mm de diámetro tiene una resistencia de 2 Ω, calcular: 1) La resistencia de otro hilo del mismo metal de 2 m de longitud y 0,6 mm de diámetro. 2) En el caso de que por el conductor a que se refiere la cuestión anterior circule una corriente de 5 A, calcular la energía consumida por unidad de tiempo expresada en kW y el calor disipado al cabo de media hora, expresado en cal (1 J = 0,24 cal).

15. Una cafetera eléctrica comienza a hervir 3 min después de haberla conectado a la red. La calefacción procede de un arrollamiento de alambre de 6 m de longitud. ¿Cómo modificaríamos este elemento para que la cafetera comenzase a hervir a los 2 min de conectada? (Despreciar las pérdidas de calor al exterior.)

16. En un calorímetro cuyo equivalente en agua es de 10 g hay una mezcla de 20 g de hielo y 90 g de agua. Dentro del calorímetro se encuentra una resistencia de 10 Ω por la que pasa una corriente de 2 A ( $c_h = 0,5 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{°C}^{-1}$ ;  $c = 1 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{°C}^{-1}$ ;  $l_f = 1 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1}$ ;  $1 \text{ J} = 0,24 \text{ cal}$ ). Determinar: 1) El tiempo que ha de estar pasando la corriente para que se funda el hielo, sin que varíe la temperatura. 2) La misma pregunta para que la temperatura final sea de 50 °C. 3) Energía consumida en este segundo caso expresada en W · h.

17. Una masa de agua contenida en un matraz se somete a ebullición mediante el calor suministrado por una resistencia eléctrica por la que circula una corriente de 2,5 A, siendo la diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia de 24 V. El vapor desprendido durante 5 min desde que se inicia la ebullición se condensa en el exterior y se pesa, obteniéndose 7,0 g de agua ( $c = 1 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{°C}^{-1}$ ;  $1 \text{ J} = 0,24 \text{ cal}$ ). 1) Calcular el calor de vaporización del agua que se obtendría con estos datos. 2) Sabiendo que el verdadero valor de vaporización del agua es de 540 cal/g, determinar las pérdidas de calor por minuto existentes entre el matraz y el exterior. 3) ¿Qué masa de agua se hubiera obtenido de no existir dichas pérdidas?

18. En un recipiente aislado térmicamente hay 3 l de agua a la temperatura de 15 °C. Se echa en él un trozo de hielo de 1 kg enfriado previamente a -10 °C. Por un hilo conductor de 10 Ω de resistencia y de capacidad calorífica despreciable introducido en la mezcla se hace pasar una corriente eléctrica, conectando el conductor a una tensión de 220 V. Dígase cuánto tiempo habrá de estar circulando la corriente para que la mezcla indicada alcance la temperatura de ebullición a la presión normal. Se desea saber la cantidad de vapor de agua sobrecalentado a 120 °C que se necesitaría para producir el mismo efecto que la corriente ( $c_h = 0,5 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{°C}^{-1}$ ;  $c = 1 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{°C}^{-1}$ ;  $c_v = 0,45 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{°C}^{-1}$ ;  $l_f = 80 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1}$ ;  $l_v = 540 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1}$ ;  $1 \text{ J} = 0,24 \text{ cal}$ ).

19. Queremos construir un cazo eléctrico que en 5 min caliente hasta que empiece a hervir 1 l de agua colocado inicialmente a 15 °C ( $c = 1 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{°C}^{-1}$ ;  $1 \text{ J} = 0,24 \text{ cal}$ ). Calcular: 1) La potencia eléctrica necesaria (suponiendo que todo el calor se utiliza íntegramente en calentar el agua). 2) La intensidad de la corriente cuando se conecte a una red de 110 V. 3) El valor de la resistencia.

20. Mediante una resistencia eléctrica de 10 Ω conectada a 120 V se desea calentar 1200 g de un líquido de calor específico de 0,95 cal/g · °C. Si se ha partido de una temperatura de 10 °C: 1) ¿A qué temperatura se encontrará el líquido a los 5 min de iniciar el paso de corriente? 2) ¿Qué tiempo tardaría en alcanzar su temperatura de ebullición  $t_e = 120 \text{ °C}$ ? 3) ¿Cómo se modificaría este último resultado si el calentador tuviese unas pérdidas caloríficas del 25 %?

21. El vaso de un calorímetro de latón (calor específico: 0,0939 cal · g<sup>-1</sup> · °C<sup>-1</sup>) pesa 50 g y contiene 205,3 g de agua ( $c = 1 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{°C}^{-1}$ ;  $1 \text{ J} = 0,24 \text{ cal}$ ) que se calienta de 15 °C a 76 °C, mediante una corriente de 1,3 A y 110 V en 7 min. Calcular: 1) Equivalente en agua del vaso calorimétrico. 2) La potencia y la energía eléctrica. 3) Cantidad de calor producido por la corriente eléctrica y su rendimiento.

22. Se tiene un aparato eléctrico de destilar éter, el cual permite destilar 900 g de éter por hora, empleando una fuente de corriente continua de 220 V. El hilo metálico de calefacción del aparato tiene 0,15 mm de diámetro y 110 μΩ · cm de resistividad. Se admite que ésta no varía con la temperatura y que las pérdidas de calor en el aparato son despreciables. Se pide: 1) Potencia consumida por el aparato. 2) Intensidad de la corriente en el circuito de calefacción. 3) Resistencia de este circuito. 4) Longitud del hilo de calefacción. 5) Coste de la destilación de 9 kg de éter. DATOS: Calor de evaporación del éter a la temperatura de ebullición: 91 cal/g. Precio de la energía eléctrica: 0,08 euros el kW · h (1 cal = 4,18 J).

23. Un cazo eléctrico recibe corriente a una tensión de 120 V y en 24 min eleva la temperatura de 200 g de hielo de -20 °C a 90 °C. En el supuesto de que el rendimiento térmico del cazo sea del 60 %, calcular: 1) La potencia consumida, en W. 2) La intensidad de la corriente. 3) La resistencia eléctrica del cazo. 4) Lo que ha costado la energía eléctrica consumida, sabiendo que el kW · h cuesta 0,08 €. Calor específico del hielo: 0,5 cal/g · °C. Calor de fusión del hielo: 80 cal/g. Calor específico del agua: 1 cal · g<sup>-1</sup> · °C<sup>-1</sup>;  $J = 4,18 \text{ cal} \cdot \text{J}^{-1}$ .

24. Disponemos de un hilo conductor de 1 mm<sup>2</sup> de sección, cuya resistividad es de 10<sup>-6</sup> Ω · m, con el cual queremos hacer la resistencia de un cazo que nos permita llevar en 5 min 1 l de agua desde 20 °C hasta 100 °C, suponiendo que las pérdidas de calor representan el 20 % de las calorías producidas y que la tensión en la red es de 125 V. Calcular: 1) El valor que debe tener la resistencia (tomar los datos necesarios del problema 18). 2) La longitud que debemos tomar del hilo. 3) La intensidad de la corriente. 4) Lo que cuesta calentar el litro de agua, suponiendo que el kW · h vale 0,08 €.

25. Un calorímetro cuyo equivalente en agua es de 30 g contiene 750 g de un líquido en el que se introduce una resistencia de calefacción de 10 Ω y entre los extremos de esta resistencia se establece una diferencia de potencial de 12 V. Al paso de la corriente durante 5 min se observa una elevación de temperatura de 5 °C. (Tomar los datos necesarios del problema 18) 1) ¿Cuál es el calor específico del líquido? 2) ¿Cuál sería el incremento de temperatura si se completara el contenido del calorímetro con 250 g de agua y se repitiera en iguales condiciones durante el mismo tiempo? 3) ¿Qué cantidad de hielo habría que añadir al final de la operación citada en segundo lugar para que el contenido del calorímetro recuperase la temperatura inicial de 0 °C?

26. Se quiere construir un hornillo para corriente de 110 V, capaz de calentar 1 l de agua desde la temperatura de 15 °C a 100 °C en 50 min, teniendo en cuenta que sólo se aprovecha el 20 % del calor que produce, y se dispone de hilo conductor de 0,1 mm<sup>2</sup> de sección y resistividad de 10<sup>-6</sup> Ω · m. Determinar: 1) La longitud del hilo necesario para ello. (Tomar los datos necesarios del problema 18) 2) Intensidad de la corriente que pasará por el hornillo. 3) Lo que cuesta calentar el litro de agua si el kW · h vale 0,08 €.

27. Una bombilla eléctrica de 60 W a 110 V se conecta por error a la red de 220 V; luce durante unos momentos con gran brillo y acaba por fundirse. Calcúlese: 1) La potencia efectiva manifestada por la bombilla en su conexión errónea. 2) La resistencia que habría que haber intercalado en serie con la bombilla en su conexión a la red de 220 V para que hubiera funcionado correctamente. 3) La potencia total puesta en juego en el caso anterior y los kW · h consumidos por el sistema resistencia bombilla durante 24 h de funcionamiento.

28. La intensidad en los bornes de una lámpara de arco es de 40 V y está conectada en un circuito cuya tensión es de 110 V. Calcular: 1) La resistencia que se debe intercalar, en el referido circuito, para que la lámpara funcione a su tensión normal y con una intensidad de 10 A. 2) La potencia expresada en W, disipada por la resistencia. 3) La potencia ex-

presada en CV, consumida por la lámpara. 4) El calor producido en un minuto por la lámpara ( $1 \text{ J} = 0,24 \text{ cal}$ ).

**29.** Una bombilla lleva las siguientes indicaciones:  $120 \text{ V}$  y  $100 \text{ W}$ . 1) ¿Qué intensidad atraviesa el filamento cuando la bombilla está conectada a un enchufe de  $120 \text{ V}$ ? ¿Cuál es, entonces, la resistencia del filamento incandescente? 2) Si conectamos la bombilla a un enchufe de  $220 \text{ V}$ , ¿qué resistencia es preciso intercalar para que la bombilla funcione en las mismas condiciones que en el caso anterior? 3) La resistencia que se intercala está constituida por un hilo metálico de  $1 \text{ mm}$  de diámetro, cuya resistividad es de  $46 \mu\Omega \cdot \text{cm}$ . ¿Cuál será la longitud de este hilo? 4) Si el  $\text{kW} \cdot \text{h}$  vale  $0,08$  euros, ¿cuál será el gasto correspondiente a  $10 \text{ h}$  de funcionamiento de la bombilla en el sector de  $120 \text{ V}$ ?

**30.** Una lámpara de incandescencia conectada a  $120 \text{ V}$  se sumerge en un calorímetro que contiene  $400 \text{ g}$  de petróleo de calor específico  $0,5 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$ . Al cabo de  $1 \text{ min } 40 \text{ s}$  la temperatura del petróleo se ha elevado a  $6 ^\circ\text{C}$  ( $1 \text{ J} = 0,24 \text{ cal}$ ). Calcular: 1) La cantidad de calor desarrollado. 2) La intensidad de la corriente y la resistencia de la lámpara. 3) El gasto que supone tenerla encendida  $5 \text{ h}$  a  $0,08$  euros el  $\text{kW} \cdot \text{h}$ . 4) Poniendo en serie con la lámpara una resistencia,  $R'$ , fuera del calorímetro, se tiene la misma elevación de temperatura en el petróleo en  $6 \text{ min } 40 \text{ s}$ . ¿Cuál es el valor de esta resistencia?

**31.** En la calefacción de un piso se emplea  $1 \text{ kg}$  de carbón por hora. 1) Sabiendo que la combustión de ese  $\text{kg}$  de carbón produce  $8000 \text{ kcal}$ , de las cuales sólo el  $80 \%$  son eficaces en la calefacción, calcular la potencia eléctrica de que necesitamos disponer para obtener una calefacción equivalente, suponiendo que el rendimiento de los radiadores eléctricos es del  $100 \%$ . 2) La anterior potencia la obtenemos con cuatro radiadores eléctricos, cada uno de los cuales está conectado directamente a una tensión de  $200 \text{ V}$ . Calcular la intensidad que atraviesa cada radiador y el consumo marcado por el contador en  $\text{kW} \cdot \text{h}$  al cabo de  $24 \text{ h}$  de marcha ininterrumpida. 3) Calcular la resistencia eléctrica de cada radiador y la longitud del hilo metálico que la constituye, sabiendo que su sección es de  $0,4 \text{ mm}^2$  y su resistividad es de  $80 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{cm}$ .

**32.** Un motor de combustión interna de  $50 \text{ CV}$  consume  $253 \text{ g}$  de aceite combustible de  $0,9 \text{ g/cm}^3$  de densidad y de  $10\,000 \text{ kcal/kg}$  por cada  $\text{CV} \cdot \text{h}$  producido. Calcular: 1) El rendimiento total del motor. 2) El consumo diario de aceite a esta potencia. 3) Si el motor transmite su potencia a un generador eléctrico, ¿cuál será la intensidad de la corriente máxima que puede producir si el generador mantiene una tensión eléctrica de  $220 \text{ V}$  en la salida, siendo el rendimiento global del transformador de energía mecánica en eléctrica del  $80 \%$ ? 4) ¿Cuál es el coste del  $\text{kW} \cdot \text{h}$  eléctrico, sabiendo que el litro de aceite cuesta  $0,7 \text{ €}$ ?

**33.** Un motor eléctrico mueve una bomba hidráulica que toma agua del río y la eleva a un depósito cilíndrico de  $6 \text{ m}^2$  de base y  $2 \text{ m}$  de altura. Desde el río hasta el borde superior del depósito hay un desnivel de  $15 \text{ m}$  y el depósito se llena en  $1 \text{ h}$ . Se pide: 1) Volumen del depósito en litros, caudal en la tubería expresado en  $\text{l/s}$  y velocidad del agua en la tubería, cuya sección es de  $0,6 \text{ dm}^2$ . 2) Trabajo teórico necesario para elevar el agua hasta llenar el depósito. 3) El motor funciona con una diferencia de potencial de  $220 \text{ V}$  y una intensidad de  $5 \text{ A}$ . ¿Qué potencia toma este motor de la red eléctrica? ¿Qué parte de esta potencia se transforma en calor en el motor mismo, cuya resistencia interna vale  $4 \Omega$ ? ¿Cuánto trabajo mecánico proporciona el motor a la bomba? Comparando este trabajo con el calculado en la segunda parte de este problema, calcular el rendimiento de la bomba hidráulica.

**34.** En la terraza de una casa hay un depósito de  $1\,800 \text{ l}$  de capacidad que se llena elevando agua desde un pozo por medio de un motor eléctrico. El depósito tarda  $15 \text{ min}$  en llenarse y el desnivel es de  $10 \text{ m}$ . El motor funciona con corriente de  $220 \text{ V}$  de tensión y con una intensidad de  $1,2 \text{ A}$ . La resistencia del motor es de  $20 \Omega$ . Calcular: 1) La potencia útil del motor. 2) La potencia desarrollada por el motor y su rendimiento mecánico. 3) Cantidad de calor que se producirá en el motor por el efecto Joule durante el tiempo que funciona.

**35.** En un salto de agua caen desde una altura de  $30 \text{ m}$ ,  $4 \text{ m}^3/\text{s}$ . La turbina sobre la que caen tiene un rendimiento del  $80 \%$ , y ésta acciona un alternador cuyo rendimiento es también de un  $80 \%$ . La tensión a la salida del transformador es de  $50\,000 \text{ V}$  y se supone que en la transformación no hay pérdida de potencia. Esta corriente se transporta para su aprovechamiento a una distancia de  $20 \text{ km}$  mediante hilos de cobre de  $2 \text{ mm}^2$  de sección ( $\rho = 1,7 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ ). Calcular: 1) La intensidad de la corriente que circula por la línea. 2) La pérdida en la línea por el efecto Joule. 3) Lo que vale esa pérdida en euros diarios si el  $\text{kW} \cdot \text{h}$  a la salida de la central resulta a  $0,12 \text{ €}$ .

**36.** Un salto de agua tiene un caudal de  $6 \text{ m}^3/\text{s}$  y una altura de  $25 \text{ m}$ . Calcúlese su potencia en  $\text{kW}$  y en CV. Este salto acciona una turbina cuyo rendimiento es  $4/5$ , y esta turbina mueve una dinamo cuyo rendimiento es  $5/6$ . La corriente producida por la dinamo se transporta a un lugar distante  $5 \text{ km}$ . La tensión entre los bornes de la dinamo es de  $10\,000 \text{ V}$ . Se pide calcular: 1) La potencia en  $\text{kW}$  disponible en los bornes de la dinamo. 2) La resistencia interior de ésta. 3) El diámetro del hilo que debe utilizarse en el transporte, sabiendo que la potencia disipada en la línea no debe ser superior al  $10 \%$  de la potencia disponible en los bornes de la turbina. 4) El peso del cobre empleado en la línea. DATOS: Resistividad del cobre:  $1,6 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{cm}$ . Densidad del cobre:  $8,9 \text{ g/cm}^3$ .

## B) FUERZA ELECTROMOTRIZ. CIRCUITO FUNDAMENTAL DE CORRIENTE CONTINUA

**37.** Para cargar un acumulador es necesario emplear una corriente de  $2 \text{ A}$  de intensidad durante  $6 \text{ h}$ . Calcular la cantidad de electricidad que suministrará en la descarga si su rendimiento es  $0,8$  y la intensidad que proporcionará el acumulador cuando la descarga se produce en  $6 \text{ h}$ .

**38.** Un acumulador puede suministrar  $10 \text{ A} \cdot \text{h}$ . ¿Durante cuánto tiempo podrá lucir una lámpara que consume  $0,25 \text{ A}$  si en la descarga suministra el acumulador los  $4/5$  de su capacidad utilizable?

**39.** El rendimiento de un acumulador es del  $80 \%$  y su capacidad utilizable  $8 \text{ A} \cdot \text{h}$ . ¿Qué intensidad de corriente será necesaria para cargarlo en  $5 \text{ h}$ ?

**40.** Una batería de acumuladores de plomo de tres vasos, cuya fuerza electromotriz es de  $6,6 \text{ V}$ , tiene una resistencia interna de  $2 \text{ m}\Omega$  en cada vaso. Determinar: 1) La tensión entre los bornes cuando la intensidad de la corriente es de  $200 \text{ A}$ . 2) El calor desarrollado dentro de la batería si la anterior intensidad se mantiene durante  $10 \text{ s}$ . 3) Tiempo que esta batería, de  $90 \text{ A} \cdot \text{h}$ , puede mantener una intensidad de  $10 \text{ A}$ .

**41.** La intensidad de la corriente producida por un generador es de  $10 \text{ A}$  cuando el circuito exterior es de  $10 \Omega$ , y de  $8 \text{ A}$  al duplicar la resistencia exterior. Calcular la resistencia que ha de tener un conductor para que al formar con él la resistencia exterior del circuito pase una intensidad de  $9 \text{ A}$ , y determinar la resistencia interna del generador y su FEM.

**42.** Se dispone de un acumulador eléctrico, con una energía almacenada en él de  $0,1 \text{ kW} \cdot \text{h}$ . Este acumulador suministra corriente eléctrica a un circuito de resistencia  $30 \Omega$ . Si la intensidad de la corriente es de  $1 \text{ A}$ , determinar: 1) Valor de la energía acumulada en  $\text{kgm}$ . 2) La tensión en los bornes del generador. 3) Tiempo en que pasa dicha corriente (suponemos prácticamente nula la resistencia del acumulador). 4) Calor desprendido por segundo en el circuito.

**43.** Un generador de  $32 \text{ V}$  de fuerza electromotriz se une a una resistencia eléctrica mediante conductores de resistencia despreciable, produciéndose en los extremos de ella una diferencia de potencial de  $30 \text{ V}$ . En estas condiciones el desarrollo de calor en la resistencia corresponde a una potencia de  $6 \text{ W}$ . Calcular: 1) La resistencia interna del generador. 2) La resistencia exterior. 3) El tiempo necesario para que la corriente dé lugar al paso de  $720 \text{ C}$ .

**44.** Una dinamo de FEM  $\mathcal{E} = 130 \text{ V}$  y resistencia interior  $r = 0,65 \Omega$ , puesta en circuito con una resistencia exterior, da corriente de  $20 \text{ A}$ . Calcular: 1) La diferencia de potencial en los bornes de la dinamo. 2) La potencia útil. 3) La resistencia exterior del circuito. 4) El rendimiento eléctrico de la dinamo.

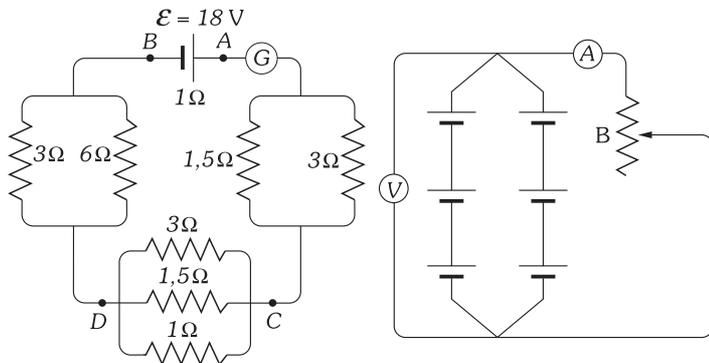
**45.** Los polos de un generador se reúnen por medio de dos derivaciones: la primera contiene un hilo metálico de resistencia  $15 \Omega$ ; la segunda contiene un condensador de  $3 \mu\text{F}$  de capacidad. El generador está constituido por tres elementos de fuerza electromotriz  $20 \text{ V}$  cada uno que poseen una resistencia interna de  $1 \Omega$ . Cuando el circuito se encuentra en estado estacionario, calcular: 1) La carga del condensador. 2) La energía eléctrica acumulada en el condensador.

**46.** La corriente de una dinamo, de resistencia interior  $0,5 \Omega$ , alimenta una instalación de  $150$  bombillas, montadas en paralelo, cada una de las cuales consume  $33 \text{ W}$ . Cada bombilla funciona bajo una tensión de  $110 \text{ V}$ . Se pide: 1) La intensidad que recorre cada bombilla. 2) La resistencia que ofrece cada bombilla. 3) La resistencia equivalente al conjunto de bombillas. 4) La potencia perdida en los conductores de distribución, sabiendo que la tensión entre los bornes de la dinamo es de  $120 \text{ V}$ . 5) La fuerza electromotriz de la dinamo.

**47.** Una batería de  $50 \text{ V}$  de fuerza electromotriz y una resistencia interior  $r$  de  $0,15 \Omega$  alimenta un conjunto de lámparas cuya resistencia

eléctrica efectiva total es  $R_L = 10 \Omega$ . La resistencia de los conductores precisos para las conexiones es  $R_C = 0,25 \Omega$ . Calcular: 1) La resistencia total del circuito. 2) La corriente que lo recorre. 3) La diferencia de potencial en los bornes de la batería. 4) La diferencia de potencial en los terminales del conjunto de las lámparas. 5) La potencia disipada en el circuito exterior. 6) Potencia disipada en los conductores de conexión. 7) Potencia disipada en las lámparas.

**48.** Determinar, en el circuito de la figura, la resistencia equivalente; la indicación del galvanómetro (G); la intensidad en todos los hilos y las diferencias de potencial  $V_{AB}$ ,  $V_{AC}$ ,  $V_{CD}$  y  $V_{DB}$ .



Problema XX-48.

**49.** Con seis conductores iguales de  $2 \Omega$  cada uno construimos un tetraedro regular y conectamos a dos de sus vértices los polos de un acumulador de  $\varepsilon = 1,5 \text{ V}$ . La resistencia de los hilos de conexión y la interior del acumulador las suponemos despreciables. Se pide calcular la intensidad que pasa: 1) A través del acumulador. 2) A través de cada una de las aristas del tetraedro. 3) La resistencia equivalente del conjunto.

**50.** Un motor eléctrico desarrolla una potencia de  $220 \text{ W}$ , con un rendimiento de  $0,8$ , cuando funciona sometido a una tensión de  $110 \text{ V}$ . En estas condiciones calcular: 1) La intensidad de la corriente que atraviesa el motor. 2) La fuerza contraelectromotriz del motor. 3) La resistencia interna del motor.

**51.** Una bomba, cuyo caudal es de  $120 \text{ l/min}$ , eleva el agua a  $6 \text{ m}$  de altura. Esta bomba esta movida por un motor eléctrico de corriente continua y la diferencia de potencial entre sus bornes es de  $220 \text{ V}$ . 1) Calcular en  $\text{kgm/s}$  la potencia útil de la bomba (se despreciarán los rozamientos y las pérdidas de carga). 2) Admitiendo que, como consecuencia de los rozamientos el rendimiento del motor es  $0,8$ , calcular la potencia del motor y la potencia absorbida por los rozamientos. 3) Si el motor está atravesado por una corriente de  $1 \text{ A}$ , determina su fuerza contraelectromotriz y su resistencia interior. 4) Potencia suministrada por la red al motor y el rendimiento total de la instalación.

**52.** Un generador de corriente continua tiene una resistencia interna de  $1 \Omega$  y una FEM de  $100 \text{ V}$ . Se conectan sus bornes simultáneamente a un voltímetro ( $R_V \approx \infty$ ) y a un motor. Cuando el motor gira en régimen normal el voltímetro marca  $95 \text{ V}$ , y cuando impedimos el giro del motor, el voltímetro indica  $85 \text{ V}$ . Calcular: 1) La resistencia del motor. 2) La fuerza contraelectromotriz del motor. 3) La potencia del motor.

**53.** Una dinamo tiene una fuerza electromotriz de  $400 \text{ V}$  y alimenta un motor cuya fuerza contraelectromotriz es de  $300 \text{ V}$  en régimen normal de funcionamiento, estando unidos entre sí mediante conductores, cuya resistencia total es de  $5 \Omega$ . Calcular: 1) La potencia del motor. 2) El rendimiento de la instalación. 3) La diferencia de potencial en los bornes de la dinamo y del motor. 4) La intensidad en el momento del arranque, sabiendo que las dos máquinas tienen una resistencia de  $10 \Omega$  cada una.

**54.** Un circuito está formado por cinco pilas en serie y un pequeño motor. Cada pila tiene una fuerza electromotriz de  $2 \text{ V}$  y una resistencia interna de  $0,6 \Omega$ , el motor tiene una fuerza contraelectromotriz de  $6 \text{ V}$  y una resistencia de  $4 \Omega$ . Determinar: 1) Potencia eléctrica disipada en el motor por efecto Joule. 2) Potencia eléctrica aprovechada mecánicamente. 3) Rendimiento del motor. 4) Se aplica un voltímetro en los bornes del motor ( $R_V \approx \infty$ ). ¿Qué diferencia de potencial indica?

**55.** 1) Un voltímetro de gran resistencia se conecta a los dos bornes de una batería de acumuladores y marca  $120 \text{ V}$ . ¿Qué representa la indicación de este aparato? 2) Se intercala entre los bornes de la batería anterior una resistencia  $R$ ; ahora el voltímetro marca  $100 \text{ V}$ . Calcular la

intensidad de la corriente proporcionada por la pila y el valor de la resistencia  $R$ , sabiendo que la resistencia interna de la batería es  $1 \Omega$ . 3) Sumergimos la resistencia anterior  $R$  en agua contenida en un calorímetro cuya capacidad calorífica total equivale a  $500 \text{ g}$  de agua, siendo su temperatura inicial  $15 \text{ }^\circ\text{C}$ . ¿Cuánto tiempo tardará en comenzar a hervir el agua? ( $c = 1 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ). 4) Se sustituye la resistencia anterior  $R$  por un motor al que impedimos que gire; entonces el voltímetro marca  $80 \text{ V}$ . Calcular la intensidad de la corriente proporcionada por la batería y la resistencia del motor. 5) Si se deja girar al motor, el voltímetro marca  $110 \text{ V}$ . ¿Qué intensidad recorre el circuito? ¿Cuánto vale la fuerza contraelectromotriz del motor? ¿Qué potencia desarrolla el motor?

**56.** Una dinamo, cuya tensión en los bornes es de  $220 \text{ V}$ , acciona un motor situado a  $1 \text{ km}$  de distancia y cuya tensión en los bornes es de  $190 \text{ V}$ . 1) ¿Cuál debe ser la resistencia de la línea para que la dinamo suministre  $20 \text{ kW}$ ? 2) ¿Cuál debe ser la sección del hilo de línea, sabiendo que es de cobre, de resistividad  $1,6 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{cm}$ ? 3) ¿Cuál es la relación entre la potencia que recibe el motor y la que suministra la dinamo?

**57.** Una batería formada por  $160$  pilas iguales de FEM  $1,5 \text{ V}$  cada una asociadas en serie, suministra corriente a un circuito formado por un cable de resistencia despreciable y en el que hay un motor de resistencia  $12 \Omega$  que produce, con un rendimiento del  $80 \%$ , una potencia de  $0,5 \text{ CV}$ . Calcular: 1) La intensidad de la corriente. 2) La resistencia interna de cada una de las pilas que forman la batería. 3) La tensión en bornes de la batería. 4) La potencia que produciría el motor si en el circuito se intercala en serie una resistencia de  $100 \Omega$ , y la tensión en bornes que se obtendrá en la batería.

**58.** Una batería formada por  $60$  acumuladores es cargada utilizando una fuente de corriente continua de  $115 \text{ V}$ . La corriente de carga debe ser de  $2,5 \text{ A}$ . Sabiendo que inicialmente la FEM de cada elemento es  $1,2 \text{ V}$  y la resistencia interna individual de  $0,02 \Omega$ , determinar la resistencia del resto que debe conectarse entre la fuente y la batería.

**59.** Con un motor se hace funcionar un montacargas, capaz de elevar un peso de  $300 \text{ kg}$  a  $20 \text{ m}$  de altura, con una velocidad constante de  $0,5 \text{ m/s}$ , siendo el rendimiento de la instalación del  $80 \%$ . Calcular: 1) La potencia del motor. 2) El aumento de temperatura que experimentará una mezcla de  $1 \text{ kg}$  de hielo y  $2 \text{ kg}$  de agua al comunicarle el calor equivalente a la energía mecánica, no empleada en trabajo útil en  $100$  ascensiones ( $c_i = 80 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1}$ ;  $c = 1 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ). 3) Siendo la diferencia de potencial en los bornes del motor de  $150 \text{ V}$  y la intensidad de la corriente de  $10 \text{ A}$ , determinar su resistencia eléctrica. 4) Si no existiera resistencia de arranque, calcular la intensidad de corriente inicial.

**60.** Se conecta a la red de distribución industrial ( $220 \text{ V}$ ) un motor de fuerza contraelectromotriz de  $150 \text{ V}$  y  $15 \Omega$  de resistencia interna mediante cables de conexión de  $20 \Omega$ . Para obtener una intensidad lo más homogénea posible para pequeñas variaciones del potencial de la red se dispone en paralelo con el motor una batería de condensadores de  $100 \mu\text{F}$  de capacidad. Calcúlese la energía que acumula el condensador cuando el circuito se encuentra en estado estacionario.

### C) LEYES DE KIRCHHOFF

**61.** Dos resistencias están montadas en derivación en un circuito cuya corriente principal es de  $0,5 \text{ A}$ . Una de las resistencias está en el interior de un calorímetro, produciendo  $288 \text{ cal}$  en  $10 \text{ min}$  ( $1 \text{ J} = 0,24 \text{ cal}$ ). 1) Sabiendo que la intensidad de la corriente que pasa por la otra resistencia es de  $0,4 \text{ A}$ , calcular el valor de la resistencia introducida en el calorímetro. 2) Calcular la resistencia equivalente a las dos montadas en derivación. 3) Calcular la FEM del generador capaz de mantener en el circuito la intensidad de  $0,5 \text{ A}$ , siendo su resistencia interior de  $1 \Omega$ . 4) Si se sustituyen las dos resistencias en derivación por un conductor cilíndrico de  $32,805 \text{ g}$ , calcular su longitud para que no se modifique su intensidad. Resistividad del conductor,  $1,8 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{cm}$ ; densidad del metal,  $9 \text{ g/cm}^3$ .

**62.** En el circuito de la figura las seis pilas son iguales;  $V$  es un voltímetro cuya resistencia es tan grande que se puede despreciar la intensidad que lo atraviesa;  $A$  es un amperímetro y  $B$  es un reóstato que nos permite variar la intensidad. Cuando el amperímetro marca  $1 \text{ A}$ , el voltímetro marca  $3 \text{ V}$ , y cuando el amperímetro marca  $2 \text{ A}$ , el voltímetro marca  $1,5 \text{ V}$ . Calcular: 1) La fuerza electromotriz y la resistencia interna del conjunto de las seis pilas. 2) La fuerza electromotriz y la resistencia interna de cada pila.

**63.** Una batería de pilas cuya FEM  $\varepsilon = 8 \text{ V}$  y cuya resistencia interior es despreciable, cerrada sobre un circuito constituido por una resis-

tencia  $R = 4 \Omega$  y por un galvanómetro  $R_G = 12 \Omega$ , da una corriente de intensidad  $I$  en el circuito. Se shunta el galvanómetro con una derivación de resistencia  $R_S = 4 \Omega$  y se hace variar la resistencia del circuito de manera que se obtenga la misma intensidad que anteriormente en la porción del circuito que contiene la pila. Se pide: 1) Determinar el valor nuevo de la resistencia  $R'$ . 2) Determinar el valor de la intensidad  $I_G$  en el galvanómetro e  $I_S$  en el shunt. 3) Determinar la caída de potencial  $V$  en los bornes del galvanómetro.

64. Se montan en serie tres acumuladores de 2 V de FEM cuya resistencia interna es de  $0,6 \Omega$  en cada uno de ellos, y se disponen en un circuito con dos resistencias en derivación, una de las cuales tiene  $1 \Omega$  de resistencia y la recorre una corriente de  $0,9$  A. Calcular: 1) El valor de la otra resistencia. 2) La intensidad de la corriente que circula por dicha resistencia. 3) Si se comunica el calor desarrollado por esta resistencia durante 30 min a una mezcla de 100 g de agua y 5 de hielo, determinar la temperatura final ( $c_l = 80 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1}$ ;  $c = 1 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}$ ). 4) Si el calor desarrollado en 10 min se comunica a un trozo de plata de 500 g, calcular la elevación de temperatura producida, sabiendo que el calor específico de la plata es  $0,056 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$  ( $1 \text{ J} = 0,24 \text{ cal}$ ).

65. Una batería formada por 10 pilas iguales, de 2 V de fuerza electromotriz y  $0,1 \Omega$  de resistencia interna cada una, se unen a un conjunto de tres resistencias iguales de  $10 \Omega$  cada una, montadas una de ellas en serie con las otras dos en paralelo. Determinar: 1) La diferencia de potencial entre los bornes extremos de la batería. 2) Cantidad de calor que en cada hora se desarrolla dentro de la batería ( $1 \text{ J} = 0,24 \text{ cal}$ ). 3) Intensidad de la corriente que atraviesa una de las dos resistencias montadas en paralelo.

66. 1) Una bobina  $B$  tiene una longitud de 60 cm, comprende 504 espiras y tiene una resistencia de  $4,4 \Omega$ . Está constituida por un hilo de  $1 \text{ mm}^2$  de sección, cuya resistividad es de  $1,6 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{cm}$ . Calcular la longitud del hilo. 2) Tres resistencias  $r_1 = 63 \Omega$ ,  $r_2 = 27 \Omega$  y  $r_3 = x$ , se montan en paralelo para tener una resistencia equivalente a  $R = 6,3 \Omega$ . Calcular  $x$ . 3) La bobina  $B$  y la resistencia  $R$  se montan en serie conectadas a los bornes de una batería de acumuladores, cuya fuerza electromotriz es  $54 \text{ V}$  y cuya resistencia interior es  $r = 0,1 \Omega$ . Calcular la resistencia total del circuito y la intensidad de la corriente en la bobina  $B$  y en las tres resistencias  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$ .

67. Una pila de 4 V de FEM y  $0,5 \Omega$  de resistencia interna se coloca formando circuito con cuatro lámparas de 1, 2, 3 y 4  $\Omega$ , respectivamente. Las tres primeras en derivación y la cuarta en serie con el grupo. Calcular: 1) Resistencia equivalente del conjunto. 2) Intensidad de la corriente a través de la pila y en cada lámpara. 3) Diferencia de potencial entre los bornes de la pila y entre los de cada una de las lámparas. 4) Potencia suministrada por la pila y su distribución.

68. Cuatro resistencias iguales, de  $10 \Omega$  cada una, se unen formando un cuadro; uniendo dos vértices opuestos se coloca otra resistencia de  $5 \Omega$  y los otros dos vértices se unen a los polos de una pila de 10 V de FEM y resistencia interna despreciable. Determinar: 1) La resistencia equivalente del conjunto de las resistencias. 2) Intensidad de la corriente que pasa por la resistencia de  $5 \Omega$ . 3) Intensidad de la corriente que pasa por la pila.

69. Cuatro resistencias de  $8 \Omega$  cada una se unen formando un cuadro. Uniendo dos vértices se coloca otra resistencia de  $4 \Omega$ . Los otros dos vértices se unen a los bornes de un generador de 30 V y  $0,5 \Omega$  de resistencia interna. Calcular: 1) Resistencia equivalente del conjunto. 2) Intensidades de la corriente en cada resistencia y en la pila. 3) Diferencia de potencial entre los vértices opuestos del cuadrado cuando se conectan con el generador. 4) Potencia suministrada por el generador y su distribución.

70. Se toman cuatro pilas iguales cuya fuerza electromotriz es de 2 V cada una, en paralelo, y se cierra el circuito intercalando una resistencia y un amperímetro; éste señala una corriente de 1,14 A (primer caso). Se asocian tres de las pilas anteriores en paralelo y la pila restante en serie; se cierra el circuito intercalando la misma resistencia que en el caso anterior y el amperímetro; éste señala una corriente de 1,66 A (segundo caso). 1) ¿Cuál es la resistencia interior de cada pila? ¿Cuál es la resistencia exterior? En el caso segundo, ¿qué diferencia de potencial marcará un voltímetro colocado en derivación? 2) Sobre los extremos de la resistencia exterior. 3) Sobre los polos de la pila que se halla en serie. 4) Sobre los polos de cada una de las pilas asociadas en paralelo?

71. Se asocian en serie ocho pilas iguales; cada una tiene una FEM de 1,5 V. Si se cierra el circuito mediante un conductor de resistencia  $R$ , se obtiene una intensidad de 2,3 A. Asociándolas luego en paralelo y ce-

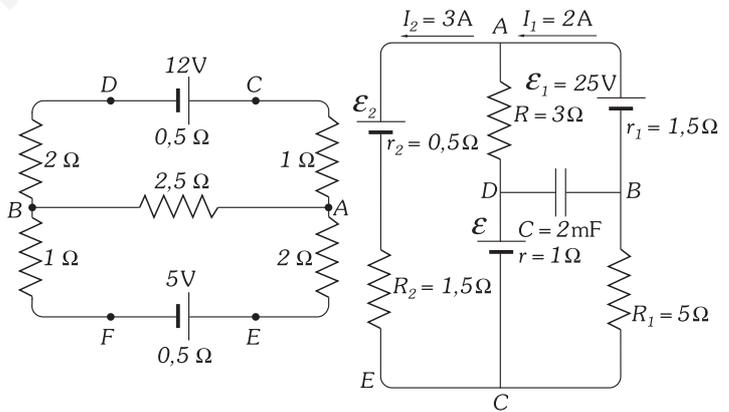
rando el circuito con la misma resistencia  $R$ , se obtiene una intensidad de 0,37 A. Calcular: 1) El valor de  $R$ . 2) La resistencia interior de cada pila. 3) La intensidad que se obtendrá disponiendo las ocho pilas en dos series de a cuatro, ambas series en paralelo, suponiendo que la resistencia exterior es la misma  $R$  que antes. 4) La diferencia de potencial entre los extremos de  $R$  en el caso 3. 5) Dibujar los esquemas de los circuitos anteriores.

72. Una pila de 3 V de fuerza electromotriz y resistencia interior  $0,2 \Omega$ , una su polo positivo con el polo positivo de otra pila de fuerza electromotriz 1,5 V y resistencia interior de  $0,1 \Omega$ . Los polos negativos se unen a los extremos de una derivación de dos resistencias, una de 4 y otra de  $6 \Omega$ . Determinar: 1) Intensidad total de la corriente que circula. 2) Diferencia de potencial entre los polos de la primera pila. 3) Calor desprendido en 1 h en la resistencia de  $6 \Omega$  ( $1 \text{ J} = 0,24 \text{ cal}$ ).

73. Los dos polos, A y B, de un generador, G, se reúnen por medio de dos derivaciones. La ACB es un hilo metálico de resistencia constante  $r = 15 \Omega$ . La otra, AMB, de resistencia total constante  $r' = 30 \Omega$ , incluye un pequeño motor eléctrico, M. El generador G está constituido por 60 elementos de acumuladores dispuestos en serie; la FEM de un elemento es de 2 V, y la resistencia interior, despreciable. 1) ¿Cuáles son los valores de la intensidad de la corriente en la batería y en cada derivación cuando el motor no gira? 2) Evaluar la potencia proporcionada por la batería. ¿Cómo se reparte esta potencia entre las diversas regiones del circuito? 3) El motor gira y desarrolla una potencia mecánica de 120 W. ¿Cuáles son los nuevos valores de la intensidad de la corriente en cada parte del circuito? ¿Cómo se reparte la nueva potencia gastada?

74. Los dos extremos de una resistencia eléctrica de  $10 \Omega$  se unen a los polos de una pila de FEM 5 V y resistencia interior de  $0,2 \Omega$ ; el extremo de la resistencia unida al polo positivo de la pila se une al polo positivo de una segunda pila, de 8 V de FEM y resistencia interior de  $0,3 \Omega$ ; el polo negativo de esta segunda pila se une al punto medio de la resistencia de  $10 \Omega$ . Determinar: 1) La intensidad de la corriente a través de cada una de las pilas. 2) Intensidad de la corriente en cada una de las dos mitades de la resistencia. 3) Diferencia de potencial entre los dos puntos extremos de la resistencia.

75. Calcular la intensidad que circula por cada uno de los hilos conductores de la figura y las diferencias de potencial:  $(V_A - V_B)$ ,  $(V_C - V_D)$  y  $(V_E - V_F)$ .



Problema XX-75.

Problema XX-76.

76. Determinar  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{E}_2$ , la carga y la energía del condensador en circuito de la figura cuando se encuentra en estado estacionario.

D) APARATOS DE MEDIDA DE CORRIENTE CONTINUA

77. Realizamos un montaje que comprende: una batería de acumuladores, un reóstato y un amperímetro; entre los bornes de la batería conectamos un voltímetro. Para distintos valores de la resistencia del reóstato hacemos las siguientes lecturas:

Amperímetro .....	4,70	3,50	2,15	1,45	0 A
Voltímetro .....	15,30	16,45	17,85	18,60	20 V

Se pide: 1) Contruir y estudiar la curva que representa la diferencia de potencial en función de la intensidad. 2) Deducir la fuerza electromotriz de la batería. 3) Calcular la resistencia interior de la batería. 4) Montamos la anterior batería en serie con un motor, un amperímetro de resistencia despreciable y una resistencia  $R$  de  $5 \Omega$  que sumergimos en un

calorímetro. Si impedimos que el motor gire, observamos que en 5 min la resistencia  $R$  desprende 1 440 cal, y si permitimos que el motor gire, sólo se desprenden 90 cal en el mismo tiempo. Calcular la fuerza contra-electromotriz del motor.

**78.** Se montan en paralelo dos series de 6 acumuladores cada serie; cada uno de los 12 acumuladores tiene una FEM de 2,1 V y una resistencia interna de 0,1  $\Omega$ . Los bornes de la asociación están unidos al circuito exterior, formando por una resistencia de 6  $\Omega$  en serie con un amperímetro de 1  $\Omega$  de resistencia; este amperímetro va provisto de un shunt de 0,25  $\Omega$ . Calcular: 1) La FEM y la resistencia de la batería de acumuladores. 2) La intensidad total que pasa por el circuito. 3) Valor de la resistencia única, equivalente a todo el circuito exterior. 4) La intensidad de la corriente que circula por el amperímetro.

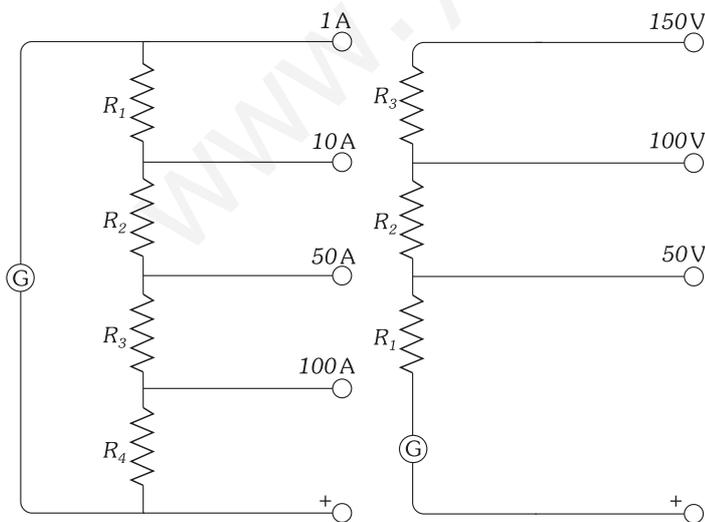
**79.** Con 20 pilas eléctricas se han formado cuatro series de 5 elementos cada una, que se unen en paralelo. La fuerza electromotriz de cada pila es de 1,5 V y su resistencia interior es de 1,2  $\Omega$ . Para medir la intensidad de la corriente se emplea un amperímetro shuntado a 1/10 por medio de un conductor de cobre cuya sección tiene un diámetro de 0,4 mm y posee una resistividad de  $\rho = 1,58 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{cm}$ . La aguja del amperímetro señala 0,4 A. Hay que calcular: 1) La resistencia interior del amperímetro. 2) La longitud del conductor de cobre utilizado como shunt. 3) El generador único equivalente al sistema de pilas.

**80.** Para medir la resistencia de una lámpara de incandescencia se la coloca en serie en un circuito que tiene una resistencia total  $R = 10 \Omega$ . El circuito está alimentado por una serie de acumuladores. En el circuito se intercala también un amperímetro (que marca 1,4 A) y en derivación, conectado a los bornes de la lámpara, un voltímetro marca 110 V. 1) ¿Qué valor se atribuye a la resistencia de la lámpara? 2) ¿Qué potencia se calcula que consume la lámpara? Al retirar el voltímetro el amperímetro marca entonces 1,2 A. 3) ¿Cuál es la verdadera resistencia de la lámpara? 4) ¿Cuál es la resistencia del voltímetro?

**81.** La escala de un galvanómetro de resistencia interna 150  $\Omega$  está dividida en 100 divisiones, cada una de las cuales equivale a 1  $\mu\text{A}$ . ¿Qué resistencia debe agregársele en derivación para que puedan medirse con él intensidades máximas de 1 mA?

**82.** Disponemos de un galvanómetro cuya escala está calculada para una intensidad máxima de  $2 \times 10^{-4}$  A y cuya resistencia vale  $R_G = 200 \Omega$ . 1) Calcular el shunt que debemos colocar para utilizarlo como amperímetro que mida hasta 1 A. 2) Calcular la resistencia que debemos añadir en serie para utilizarlo como voltímetro y poder medir hasta 100 V. 3) Dibujar en ambos casos el esquema correspondiente.

**83.** La escala de un galvanómetro ( $G$  en la figura), de resistencia interna 20  $\Omega$ , está dividida en 100 divisiones, cada una de las cuales equivale a 1 mA. ¿Qué valor tienen que tener las resistencias  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  y  $R_4$  para convertirlo en un amperímetro de alcance múltiple que produzca la desviación máxima con intensidades de 1 A, 10 A, 50 A y 100 A?



Problema XX-83.

Problema XX-84.

**84.** Disponemos de un galvanómetro cuya escala está calculada para una intensidad máxima de  $2 \times 10^{-4}$  A y cuya resistencia vale  $R = 200 \Omega$ . Calcular los valores de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  de la figura para utilizarlo como voltímetro de tres alcances cuyos bornes estén marcados con 50 V, 100 V y 150 V.

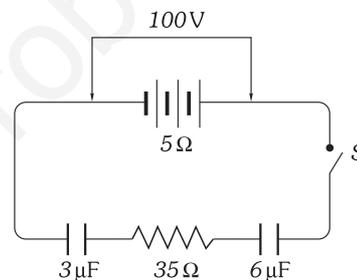
**E) CIRCUITOS RC**

**85.** En un circuito están conectados en serie un condensador de 0,40  $\mu\text{F}$  de capacidad, una resistencia de 2 k $\Omega$  y una batería cuya FEM es de 100 V. Calcular: 1) La constante de tiempo del circuito. 2) La carga máxima que tiene el condensador. 3) El tiempo necesario para que al abrir el interruptor del circuito se descargue hasta el 99 % de su máxima carga.

**86.** Un procedimiento de medida de resistencias de valores muy grandes, consiste en medir el tiempo de semidescarga de un condensador a través de su resistencia de pérdida  $R_p$  y luego el tiempo de semidescarga a través de la resistencia desconocida  $R$ . Encontrar la expresión de  $R$  en función de la capacidad del condensador y de los dos tiempos indicados.

**87.** Un condensador de 1  $\mu\text{F}$  de capacidad se encuentra conectado en serie con una resistencia de  $10^4 \Omega$  y una FEM. Cerramos el interruptor del circuito y el condensador se carga a través de la resistencia. Determinar el tiempo que tarda el condensador en almacenar la tercera parte de la energía que posee cuando se encuentra en equilibrio.

**88.** Se cargan dos condensadores de 3 y 6  $\mu\text{F}$  conectados en serie como se indica en la figura. 1) Calcular la constante de tiempo del circuito. 2) Abrimos el interruptor  $S$  transcurrido el tiempo calculado en el apartado anterior; determinar la energía y el voltaje en el condensador de 3  $\mu\text{F}$ .



Problema XX-88

**F) CORRIENTE CONTINUA EN LÍQUIDOS. ELECTROLISIS**

**89.** Calcular el peso equivalente del hierro cuando forma parte de una sal ferrosa o de una férrica. Masa atómica del hierro: 55,84 g.

**90.** Para determinar la intensidad de una corriente se emplea el voltímetro de cobre. Anodo y cátodo son laminillas de cobre puro y el electrolito una disolución de sulfato cúprico. El cátodo, perfectamente limpio y seco, se pesa antes y después de la electrolisis, habiéndose obtenido  $M_1 = 7,215$  g y  $M_2 = 10,167$  g. El tiempo de duración de la electrolisis es de 1/4 de h. Determinar la intensidad de la corriente. (Equivalente electroquímico del cobre:  $328 \times 10^{-6}$  g/A · s.)

**91.** Se desea platear una esfera metálica de 1 cm de radio. Para ello se le hace funcionar como cátodo en una cuba electrolítica, empleando como electrolito una disolución de nitrato de plata y como ánodo una lámina de plata pura. Calcular el tiempo necesario para depositar una capa uniforme de plata de espesor 1 mm, empleando en la electrolisis una intensidad de corriente de 1 A. (Densidad de la plata: 10,5 g/cm<sup>3</sup>. Equivalente electroquímico de la plata:  $1118 \times 10^{-6}$  g/A · s.)

**92.** Calcular los volúmenes de hidrógeno y oxígeno que en condiciones normales de producen en una electrolisis de agua acidulada con ácido sulfúrico, circulando por un voltímetro de gases una corriente de 2 A durante 1 h.

**93.** Una corriente de 5 A pasa durante 10 min a través de una disolución de ácido sulfúrico contenida en un voltímetro de gases. Determinar: 1) Peso de agua descompuesto por la corriente. 2) Peso del hidrógeno recogido. 3) Volumen ocupado por este hidrógeno, sabiendo que la temperatura es de 20 °C, la presión exterior 740 mm y la tensión de vapor de agua dentro de la campana que contiene el hidrógeno es de 18 mm.

**94.** Un sistema formado por 10 condensadores de 4  $\mu\text{F}$  de capacidad cada uno y conectados en paralelo se carga a cierta tensión y se descarga inmediatamente a través de un voltímetro de gases con agua acidulada. Repitiendo este proceso 20 veces seguidas se separan 20,8 mm<sup>3</sup> de hidrógeno medido en condiciones normales. 1) Calcúlese el equivalente electroquímico en volumen del hidrógeno. 2) ¿Cuántos coulombios

han atravesado el voltámetro? 3) ¿A qué tensión se cargaron los condensadores? 4) ¿A qué tensión habría sido necesario cargar los condensadores si la asociación hubiera sido en serie?

**95.** Se monta en serie un amperímetro con un voltámetro de plata, y se regula la intensidad de modo que el amperímetro marque 0,50 A, manteniendo esta intensidad durante 20 min. El aumento de peso del cátodo ha sido de 0,6435 g. Calcular: 1) El equivalente electroquímico de la plata (masa atómica: 107,88 g). 2) Intensidad de la corriente. 3) Error absoluto y relativo del amperímetro cuando marca 0,50 A. 4) Cantidad de cobre que la misma cantidad de electricidad depositará al pasar por una disolución de una sal cúprica (masa atómica del cobre: 63,44 g).

**96.** La superficie de cada uno de los electrodos de una cuba electrolítica es de 10 cm<sup>2</sup>. El electrolito es una disolución acuosa de ácido sulfúrico. Al cabo de 5 min de pasar la corriente se han obtenido 100 cm<sup>3</sup> de hidrógeno, medidos sobre agua, siendo la presión de 700 mm de mercurio y la temperatura de 27 °C. Determinar: 1) El peso de hidrógeno que se ha obtenido. 2) La intensidad de corriente utilizada. 3) La densidad de corriente en los electrodos. Tensión de vapor de agua a 27 °C: 27 mm de mercurio.

**97.** Se tiene una bombilla que consume 60 W cuando está conectada a una tensión de 120 V. 1) ¿Cuál es su resistencia? 2) ¿Qué cantidad de calor se genera en el filamento de la lámpara en un minuto? 3) Si la corriente que pasa por la bombilla pasara por un voltámetro con agua acidulada, ¿qué masa de hidrógeno se desprendería en 10 min? 4) ¿Qué volumen ocuparía dicha masa de hidrógeno si la presión es de 767 mm y la temperatura es de 27 °C? Tensión de vapor de agua a 27 °C: 27 mm de Hg.

**98.** Se hace pasar una corriente eléctrica por un hilo conductor de 15 Ω de resistencia. Para ello se conecta con una pila de 12 V y 5 Ω de resistencia interna. Se pide calcular: 1) La intensidad de la corriente que circula por el conductor. 2) El calor desprendido por el hilo conductor al pasar por él la corriente eléctrica. 3) ¿Cuántos g de hielo se fundirían en 5 min con el calor desprendido por el conductor? 4) Si dicha corriente se aplica a un voltámetro lleno de agua acidulada con electrodos de platino, calcular el volumen de hidrógeno producido durante 10 min, medido en condiciones normales de presión y temperatura. (No considerar ni la resistencia ni la fuerza contraelectromotriz del voltámetro.)

**99.** En una vasija de electrolisis se utilizan electrodos rectangulares de 20 × 15 cm colocados a una distancia de 15 cm. El electrolito es una disolución de nitrato de plata, cuya resistividad es de 15 Ω · cm y la tensión aplicada es de 7,5 V. Calcular: 1) La resistencia de la disolución entre los electrodos. 2) El tiempo necesario para depositar 100 g de plata en el cátodo utilizando la tensión citada. Masa atómica de la plata: 108 g. 3) Lo que ha costado la energía eléctrica para realizar este depósito electrolítico a 0,08 € el kW · h.

**100.** Tenemos 10 l, medidos a 18 °C y 750 mm, de una mezcla gaseosa con 10 % de hidrógeno, 15 % de oxígeno y 75 % de nitrógeno (los % son en volumen). 1) Calcular las masas que de cada uno de estos tres gases que existen en ella. 2) Calcular también sus respectivas presiones parciales. 3) Si dichas masas de oxígeno y de hidrógeno se obtuvieran por electrolisis de agua acidulada, con una corriente de 2 A, ¿cuánto tiempo se emplearía? 4) Si la tensión entre los bornes del voltámetro son 10 V, ¿qué energía se consumiría?

**101.** Un voltámetro de nitrato de plata con electrodos de plata y resistencia de 20 Ω debe funcionar con corriente de 0,5 A, en un sector de corriente cuya tensión es 110 V, intercalando en el circuito una resistencia auxiliar. Se pide: 1) La longitud del hilo de hierro de 0,1 mm de diámetro necesaria para realizar la resistencia auxiliar (resistividad del hierro: 15,7 μΩ · cm). 2) ¿Cómo se podría construir una resistencia análoga con ayuda de lámparas de incandescencia que consumiesen 0,1 A bajo 100 V? 3) El peso de plata depositado por hora en el voltámetro. 4) La cantidad de calor desprendida en la resistencia auxiliar durante el mismo tiempo.

**102.** Un voltámetro con electrodos de platino contiene una disolución de ácido sulfúrico; su fuerza contraelectromotriz es de 1,5 V y su resistencia interior de 4,5 Ω. Está conectado en serie con un generador cuya FEM es de 12 V y entre el generador y el voltámetro hay también colocada una resistencia R, de 4 Ω. Suponemos cerrado el circuito y despreciable la resistencia de los conductores que forman las conexiones y el generador. 1) Dibujar un esquema del circuito. 2) Calcular la intensidad de la corriente que circula. 3) Hallar el tiempo que ha de transcurrir para que en el voltámetro se desprendan 25 cm<sup>3</sup> de H<sub>2</sub>, medido en

condiciones normales. 4) ¿Cuál es la cantidad de calor que se desprende en la resistencia R durante dicho tiempo?

**103.** Un circuito eléctrico consta de una pila cuya fuerza electromotriz es de 3 V, una resistencia de 15 Ω y un voltímetro de resistencia interior muy grande en conexión con los bornes de la pila. Calcular: 1) La resistencia interna de la pila si el voltímetro marca 2,7 V. 2) El calor desarrollado en la resistencia durante 2 h. 3) El cinc (Masa atómica = 65,4 g) consumido por la pila cada hora.

**104.** En un circuito eléctrico se montan en serie un acumulador, una resistencia variable y un voltímetro de gases. El acumulador tiene una FEM de 4 V y una resistencia interior despreciable. El voltímetro tiene una resistencia interna de R = 1 Ω y una fuerza contraelectromotriz de 1,5 V. La intensidad de la corriente es de 1 A. Calcular: 1) Potencia suministrada por el acumulador. 2) Resistencia total del circuito. 3) Gramos de hidrógeno desprendidos en una hora. 4) Volumen que ocupará este hidrógeno, recogido sobre agua, siendo la temperatura de 20 °C, la presión de 740 mm de Hg y la tensión de vapor de agua a esa temperatura 17,5 mm de Hg.

**105.** Un circuito eléctrico está integrado por las siguientes partes conectadas en serie: una batería de 13 elementos, cada uno de los cuales tiene 2 V de FEM, y una resistencia interna de 0,003 Ω; un voltímetro de sulfato de cobre con electrodos de platino, cuya resistencia interna es de 7,5 Ω, y los cables de conexión, cuya resistencia es de 2 Ω y en los cuales, por el efecto Joule, se desprenden 180 cal/min. Calcular: 1) La intensidad de la corriente. 2) El peso de cobre depositado por minuto. 3) Fuerza contraelectromotriz del voltímetro. 4) Intensidad de la corriente en el caso de que los electrodos fuesen de cobre.

**106.** Un circuito eléctrico está formado por las siguientes partes conectadas en serie: a) Una batería de acumuladores en la que cada elemento tiene 2 V de FEM. b) Una resistencia de 8 Ω introducida en un calorímetro con agua, cuya capacidad calorífica equivale a 500 g de agua. c) Un voltímetro de agua acidulada, con electrodos de platino. d) Un voltímetro de nitrato de plata con electrodos de plata. Se desea averiguar lo siguiente: 1) La intensidad de la corriente. 2) El volumen de hidrógeno producido durante 15 min en el voltímetro de agua acidulada, medido en condiciones normales. 3) El peso de plata depositado durante un cuarto de hora en el cátodo del voltímetro de AgNO<sub>3</sub>. 4) El número de elementos que tendrá la batería de acumuladores, sabiendo que la resistencia total del circuito es de 12 Ω. DATOS: Peso atómico de la plata: 108 g. Fuerza contraelectromotriz del voltímetro de agua: 1,5 V. Para elevar un grado la temperatura del agua del calorímetro tiene que pasar la corriente durante 15 min.

**107.** Un circuito eléctrico está formado por los siguientes aparatos conectados en serie: a) Una resistencia formada por un hilo metálico de 2 m de longitud y 0,4 mm de diámetro. Esta resistencia está sumergida en un calorímetro de cobre que pesa 167 g y contiene 600 g de agua. b) Un voltímetro con electrodos de plata que contiene una disolución de AgNO<sub>3</sub>. c) Un voltímetro con electrodos de platino que contiene agua acidulada por H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>, provisto de una bureta para recoger juntos los gases desprendidos en ambos electrodos. Se hace pasar por el circuito una corriente continua y constante durante 30 min. Al cabo de este tiempo en el voltímetro de plata se han depositado 1,37 g de Ag y la temperatura del calorímetro ha aumentado 6,2 °C. 1) Calcular el volumen del gas recogido, medido en condiciones normales. 2) Calcular la resistencia sumergida y deducir la resistividad del material. DATOS: Calor específico del cobre: 0,09 cal/g · °C. Peso atómico de la plata: 108 g.

**108.** Un generador eléctrico de 10 V de fuerza electromotriz y 0,5 Ω de resistencia interna alimenta un circuito con dos derivaciones. En una existe un voltímetro de 2 V de fuerza contraelectromotriz y 5 Ω de resistencia interna, y en la otra, una resistencia de 30 Ω. Calcular: 1) Intensidad de la corriente en el generador y en cada derivación. 2) Diferencia de potencial entre los bornes del generador. 3) El conjunto está funcionando 10 min. Calcular: a) Energía suministrada por el generador. b) Energía perdida en él, en forma de calor.

**109.** Se conecta un hilo metálico de 4 Ω de resistencia a los bornes de un generador de corriente continua de 6 V de FEM y 0,5 Ω de resistencia interior. Calcular: 1) Las intensidades de corriente que circula. 2) El calor desprendido en el hilo durante 2 min. 3) Se conecta al generador anterior, en derivación con el hilo metálico, a los bornes de un voltímetro de cobre con electrodos de cobre y de 1,5 Ω de resistencia interna. Calcular: a) Las intensidades de corriente que circulan por el hilo y por el voltímetro. b) El peso de cobre que se depositará en el cátodo en 1 min. Peso atómico del cobre: 63,5 g.

**110.** Se montan en serie tres generadores idénticos de  $3,18 \text{ V}$  de FEM y  $0,65 \Omega$  de resistencia interna cada uno, que alimentan mediante conductores de  $0,85 \Omega$  de resistencia total, a una cuba electrolítica con nitrato de plata con electrodos de plata de  $4,3 \Omega$  que lleva en derivación una resistencia de  $3,7 \Omega$ . Calcular: 1) La intensidad que recorren los conductores de alimentación. 2) La plata depositada en la cuba en  $1 \text{ h}$ . 3) El calor producido simultáneamente en la resistencia de  $3,7 \Omega$ . 4) La diferencia de potencial en los bornes de cada generador y de la cuba. 5) La potencia consumida por los generadores, la suministrada por los mismos al circuito, la consumida por la cuba y el rendimiento de la instalación.

**111.** Entre dos bornes de diferencia de potencial constante, igual a  $110 \text{ V}$ , están montados en serie un reóstato, un motor y una cuba electrolítica que contiene una disolución de sulfato de cobre (II) con electrodos de cobre. 1) Cuando el motor no gira se depositan en el cátodo  $3,522 \text{ g}$  de cobre en  $18 \text{ min}$ . Calcular la resistencia total de todo el circuito. Peso atómico del cobre:  $36 \text{ g}$ . 2) Cuando el motor funciona el mismo peso de cobre es depositado en  $30 \text{ min}$ . Calcular la fuerza contraelectromotriz del motor y su potencia.

**112.** Una batería de pilas (FEM:  $0,9 \text{ V}$  cada una; resistencia interna:  $1,6 \Omega$  cada una) está formada por  $30$  elementos conectados de  $10$  en  $10$  en serie y formando tres grupos idénticos asociados en paralelo. Al paso de la corriente se deposita cobre en los cátodos respectivos. Si la resistencia externa es de  $205 \Omega$  y la batería está  $1 \text{ h}$  en funcionamiento, ¿qué cantidad total de cobre se habrá depositado? Peso atómico del cobre:  $63,5 \text{ g}$ .

**113.** Se dispone de  $12$  pilas de Lechanché, cada una de  $1,5 \text{ V}$  de fuerza electromotriz y de resistencia interna  $r_1$ . Agrupadas en dos series paralelas de seis elementos cada una, alimentan una resistencia  $R$  sumergida en  $400 \text{ g}$  de petróleo ( $c = 0,5 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$ ) contenido en un calorímetro. La intensidad de la corriente es de  $0,5 \text{ A}$  y la temperatura del petróleo sube  $1,5 ^\circ\text{C}$  en  $7 \text{ min}$ . Calcular: 1) La resistencia  $R$ . 2) La diferencia de potencial entre los bornes de la batería de pilas. 3) La resistencia interior  $r_1$  de una pila. 4) El peso de cinc desaparecido en el conjunto de las pilas durante los  $7 \text{ min}$  que dura la experiencia. Dibujar un esquema del montaje. Peso atómico del cinc:  $66 \text{ g}$ .

**114.** Un circuito comprende: a) Doce acumuladores, cada uno con una fuerza electromotriz  $\mathcal{E}_1 = 2 \text{ V}$  y una resistencia interna  $r_1 = 0,3 \Omega$ , agrupados en tres series de cuatro elementos, montados en paralelo. b) Una cuba electrolítica que contiene una disolución de sulfato de cobre (II) en la que sumergen dos electrodos de cobre; la resistencia de la cuba es de  $0,9 \Omega$ . c) Un pequeño motor. Se pide lo siguiente: 1) Cuando el motor está inmovilizado, el peso de cobre depositado es de  $2,56 \text{ g}$  en  $32 \text{ min } 10 \text{ s}$ . ¿Cuánto vale la resistencia del motor? (Peso atómico del cobre:  $64 \text{ g}$ .) 2) Cuando el motor gira el peso de cobre depositado en el mismo tiempo es de  $0,96 \text{ g}$ . ¿Cuánto vale la fuerza contraelectromotriz del motor? ¿Cuánto vale su potencia? ¿Cuál es la diferencia de potencial entre sus bornes? 3) Quitamos el motor y agrupamos los  $12$  acumuladores de tal manera que nos proporcionen el máximo depósito de cobre en un tiempo dado. ¿Cómo hemos de agruparlos? Razónese la contestación.

# CAPÍTULO XXI

## EL CAMPO MAGNÉTICO

### A) INTRODUCCIÓN

#### XXI – 1. Imanes naturales y artificiales. Polos y línea neutra. Magnetómetro

Determinados cuerpos y especialmente la magnetita ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ) tienen la propiedad de atraer limaduras de hierro. A tales cuerpos se les llama IMANES NATURALES.

IMANES ARTIFICIALES son cuerpos metálicos a los que se ha comunicado la propiedad del magnetismo por frotamiento con imanes naturales o por la acción de corrientes eléctricas en forma adecuada; tales imanes suelen ser de acero, en forma de barra o de herradura.

La máxima atracción de los imanes reside en sus extremos, llamados POLOS; en su parte central (LÍNEA NEUTRA) la atracción es nula.

Se pueden demostrar estos hechos introduciendo un imán en limaduras de hierro; al sacarlo de ellas, se observa cómo quedan adheridas a sus extremos en cantidad que decrece hacia la zona central, en la cual las limaduras no se adhieren.

Una laminilla de acero imantado, de forma rómbica constituye un MAGNETÓMETRO (DIPOLO MAGNÉTICO).

Un magnetómetro, que puede girar libremente alrededor de su centro, se orienta con uno de sus polos hacia el N geográfico y el otro hacia el S. Al extremo orientado hacia el norte se llama polo norte del imán; al opuesto, polo sur\*

Colocando dos largos imanes con sus polos N muy próximos se observa una repulsión; lo mismo ocurre si los polos aproximados son los S. Si se aproxima un polo norte a uno sur, se observa una atracción. «Polos magnéticos de la misma naturaleza se repelen y de distinta se atraen».

Lo anteriormente dicho sugiere la existencia de polos magnéticos separados (MONOPOLOS), sin embargo, todo intento de aislar a uno de estos polos ha fracasado. Si se corta una barra magnética por la línea neutra, en su separación se obtienen dos imanes, ambos completos, con sus polos norte y sur. Se pueden efectuar la división, tantas veces como se quiera, obteniéndose otros tantos imanes completos, y aunque consiguiéramos partir el imán hasta reducirlo a dimensiones atómicas encontraríamos sus dos polos correspondientes de «signos opuestos».

Este es un hecho que difiere sustancialmente de la electrostática. Las cargas eléctricas pueden tenerse aisladas. Podemos hablar de un cuerpo electrizado con cierta cantidad de carga positiva o negativa, es decir con electricidad de un cierto signo, pero nunca encontraremos un material con una cierta cantidad de polo norte o sur, pues podemos tener la seguridad de que si existe un polo, existe otro de distinto nombre y por lo tanto la cantidad de polo, o de «carga magnética» neta será rigurosamente nula.

Hemos hablado de acciones entre materiales magnéticos, o más correctamente de interacciones magnéticas, por lo que cabe hablar de CAMPO MAGNÉTICO, que podemos definir de momento como aquella zona del espacio en la cual se hace patente la acción de un imán.

Comprobaremos la existencia de un campo magnético en el espacio, cuando introduciendo en él un magnetómetro, lo oriente en una determinada posición.

#### XXI – 2. Líneas de fuerza

Si colocamos una hoja de papel espolvoreada con limaduras de hierro, sobre una barra imantada, y la golpeamos cuidadosamente, las limaduras se orientan en líneas en la forma indicada en la Fig. XXI-2, obteniéndose el llamado ESPECTRO MAGNÉTICO. Las líneas en que se colocan las limaduras, serán las líneas de fuerza del campo magnético creado por la barra imantada.

Convendremos: «En todo imán las líneas de fuerza salen del polo norte y entran por el polo sur y van del sur al norte por el interior del imán».

Supongamos un magnetómetro (NS) con libertad de movimientos y colocado en el interior de un campo magnético creado por imanes como indica la Fig. XXI-3. Sobre el magnetómetro actúa un par de fuerzas cuyo momento es en módulo:

$$N = F d = F l \sin \varphi$$

\* El nombre de polo magnético sur y norte, es totalmente arbitrario, su origen es por el hecho de orientarse el magnetómetro apuntando hacia los polos terrestres.

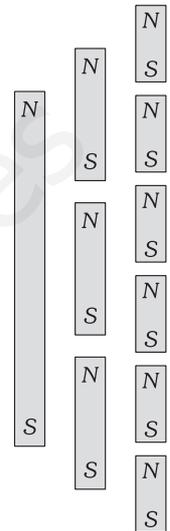


Fig. XXI-1.- Dividiendo un imán tantas veces como se quiera se obtienen otros tantos imanes completos.

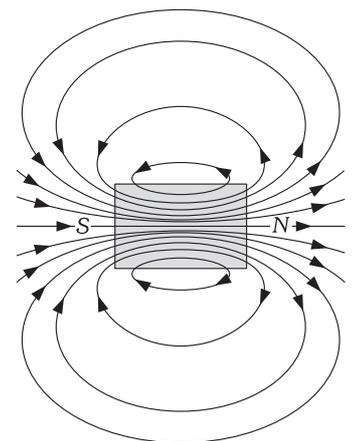
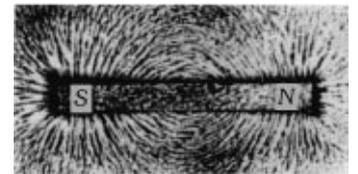


Fig. XXI-2.- Espectro magnético.

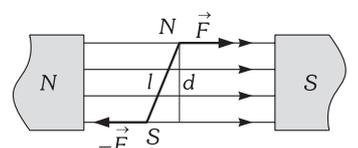


Fig. XXI-3.- Acción de un campo magnético sobre un magnetómetro.

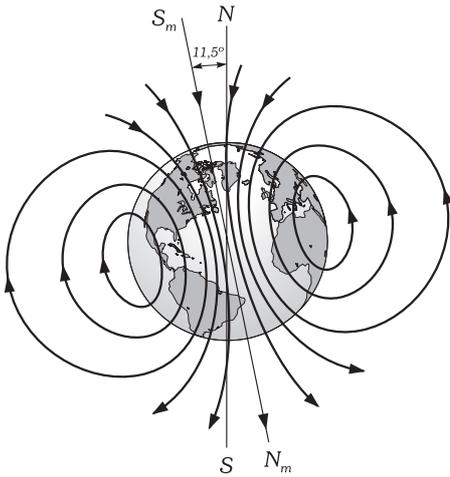


Fig. XXI-4.- Magnetismo terrestre.

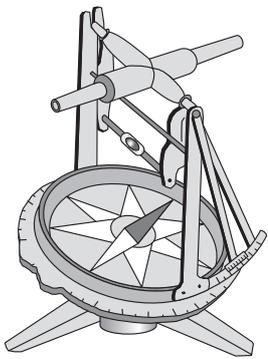


Fig. XXI-5.- Brújula de declinación.

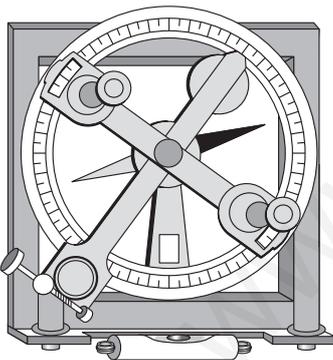


Fig. XXI-6.- Brújula de inclinación.

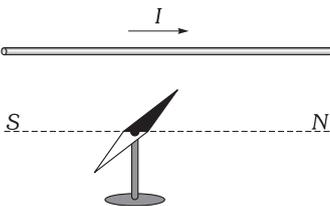


Fig. XXI-7.- Un magnetómetro se desvía al encontrarse en presencia de una corriente continua con respecto a la dirección Norte-Sur.

siendo  $l$  la longitud del imán y  $\varphi$  el ángulo que forma su eje con el sentido positivo de las líneas de fuerza.

El imán gira hasta una posición en la que  $N = 0$ . Ninguno de los factores pueden serlo, excepto  $\sin \varphi$ . Al ser:  $\sin \varphi = 0$ , el ángulo  $\varphi = 0$  ó  $180^\circ$ , colocándose el imán en la dirección de las líneas de fuerza. Cuando  $\varphi = 0$  corresponde a una posición de equilibrio estable; si  $\varphi = 180^\circ$ , el equilibrio es inestable (las líneas de fuerza entran por el N del imán) y basta un pequeño golpecito para que el imán gire  $180^\circ$  y adquiera la posición de equilibrio estable.

Un magnetómetro nos indicará el sentido de las líneas de fuerza de un campo magnético cuando se coloque en su posición de equilibrio estable.

**XXI - 3. Magnetismo terrestre**

La orientación de un magnetómetro, siempre de la misma forma, en un lugar de la Tierra indica la existencia de un campo *magnético terrestre*, cuyas líneas de fuerza tienen la dirección de la aguja imantada.

En las proximidades del N geográfico existe un S magnético, y a la inversa; sin embargo, al polo magnético situado en las proximidades del N geográfico, se le llama N magnético y al situado en las cercanías del S geográfico, S magnético; los nombres de los polos magnéticos terrestres están invertidos. El polo S magnético está en el Canadá y el polo N, diametralmente opuesto, en una pequeña isla de Oceanía.

*MERIDIANO MAGNÉTICO de un lugar es el plano vertical que pasa por la aguja imantada.*

*ÁNGULO DE DECLINACIÓN es el ángulo formado por el meridiano geográfico y el magnético.*

La declinación es occidental cuando el polo N de la aguja se sitúa al oeste del meridiano geográfico; en caso contrario, es oriental.

La aguja imantada no se coloca horizontalmente, sino que, en nuestro hemisferio, se coloca de forma que el polo N está más bajo que el sur.

*ÁNGULO DE INCLINACIÓN es el formado por la aguja magnética con la horizontal.*

**BRÚJULAS.** Para la medida del ángulo de declinación se emplean los *declinómetros* o *brújulas de declinación* (Fig. XXI-5). Son, en esencia, un magnetómetro que puede girar horizontalmente alrededor de un eje vertical, instalado en el centro de un limbo graduado. La aguja determina el meridiano magnético; la dirección del geográfico se determina por procedimientos astronómicos.

Una *brújula de inclinación* (Fig. XXI-6) es idéntica a la anterior, pero la aguja gira en un plano vertical, apoyada en un eje horizontal. Para la determinación del ángulo de inclinación, el plano de giro de la aguja debe coincidir con el meridiano magnético. Para conseguirlo se busca una posición de la brújula en que la aguja se coloque verticalmente; entonces se le hace girar, conservando vertical el plano de la brújula, un ángulo de  $90^\circ$ .

**CARTAS MAGNÉTICAS.** Las cartas magnéticas son mapas en los que se unen los puntos de la misma declinación por medio de líneas llamadas *ISOGÓNICAS*; las líneas de declinación cero se llaman *AGÓNICAS*. Las líneas que unen los puntos de la misma inclinación son las *ISOCLÍNICAS*; la línea de inclinación cero es el *ECUADOR MAGNÉTICO*.

**XXI - 4. Unión Electricidad Magnetismo. Interacciones eléctricas y magnéticas**

Hasta este momento hemos descrito algunos fenómenos que presentan determinadas sustancias a los cuales llamamos fenómenos magnéticos. En principio, el Magnetismo no parece tener nada en común con la Electricidad, de hecho, así se pensaba en los primeros tiempos del desarrollo de la Física como ciencia; pero vamos ahora a describir una serie de experiencias básicas que obligan a reconsiderar la cuestión.

En 1820 Hans Christian Oersted (1777-1851) observó la facultad que tiene una corriente eléctrica de desviar una aguja magnética (Fig. XXI-7). Si por un hilo horizontal se hace pasar una corriente de varios amperios, una aguja, situada en sus proximidades se desvía con respecto a la dirección Norte-Sur del campo magnético terrestre. La consecuencia de esta experiencia es que una corriente eléctrica *crea un campo magnético*.

Se puede también comprobar este hecho atravesando una cartulina por un hilo conductor por el que pasa una corriente eléctrica (Fig. XXI-8); en la cartulina se colocan limaduras de hierro, y golpeándola suavemente se observa que las limaduras se orientan en circunferencias concéntricas, alrededor del hilo conductor. Por tanto:

*El campo magnético creado por una corriente eléctrica es de líneas de fuerza circulares, situadas en el plano perpendicular al hilo conductor.*

Para determinar el sentido de las líneas de campo, coloquemos varios magnetómetros rodeando al hilo (Fig. XXI-9) y observamos que los imanes se orientan *crucados perpendicularmente con el hilo*. Como las líneas de campo magnético han de *entrar* por el polo sur de los magnetómetros y salir por el norte, la orientación de los imanes nos indica que *el sentido de las líneas de campo es*

el de giro de un sacacorchos que avanza con la corriente. La intensidad de la corriente que pasa por el hilo debe ser tal que las acciones del campo magnético terrestre sean despreciables frente a las del campo creado por la corriente.

Además de la experiencia de Oersted, existen otros fenómenos descubiertos por Faraday conocidos con el nombre global de «Fenómenos de inducción» en los que todavía más directamente se pone de manifiesto la interacción entre campos magnéticos y eléctricos, hasta el punto que es necesario pensar que el magnetismo es una parte de la electricidad. Esta idea es confirmada al tratar cuidadosamente (relatividad) los campos eléctricos cuando las cargas que lo producen se encuentran en movimiento. Haciendo un estudio relativista de estos campos se encuentra que los campos magnéticos son una «parte» de los campos eléctricos que aparece cuando las cargas se mueven (corrientes eléctricas), según esto no nos debe extrañar el hecho de que una corriente eléctrica (cargas en movimiento) cree un campo magnético, y que otra corriente que se halle dentro del campo sufra alguna interacción, como es el caso de dos hilos conductores rectilíneos y colocados paralelos a cierta distancia, en los que si la corriente circula en el mismo sentido en ambos conductores los hilos se atraen, y si es en sentidos contrarios se repelen. Cabe la duda de que esa fuerza de interacción pudiera tener origen electrostático de repulsión o de atracción entre las cargas de los hilos, pero no tiene razón de ser, puesto que salvo alguna carga estática de escaso valor, los hilos conductores que transportan corriente permanecen prácticamente neutros «no poseen carga neta». Aun en el caso de tener alguna carga neta, las fuerzas electrostáticas serían de tan escaso valor que resultarían totalmente inapreciables.

Pero continuamos con una gran duda. Acabamos de decir que el origen de los campos magnéticos (y por tanto el origen de las interacciones magnéticas, como son las fuerzas entre los conductores anteriores) es una «corrección» relativista de los campos eléctricos creados por cargas en movimiento y por consiguiente es un efecto extraordinariamente menos intenso que las interacciones o fuerzas electrostáticas. Sin embargo, y he aquí nuestra duda, mientras que las fuerzas electrostáticas que encontramos en la naturaleza son muy leves (recuérdense los fenómenos tales como la atracción de pequeños trozos de papel por una barra de ámbar electrizada, etc.) las fuerzas magnéticas son enormes, se construyen grúas capaces de atrapar toneladas de chatarra mediante poderosos electroimanes.

¿Cómo se explica esta paradoja? La respuesta se encuentra en la gran neutralidad de la materia. Existe un equilibrio completo entre la carga positiva y negativa que componen la materia y es muy difícil lograr romper este equilibrio, de forma que si a un cuerpo conseguimos arrancarle algo de carga, tendrá carga neta, pero siempre muy poca cantidad. Sin embargo, a los efectos magnéticos contribuyen todas las cargas en movimiento tanto positivas como negativas, es decir contribuyen todas las cargas con tal que estén en movimiento.

En un conductor normal el balance de carga está compensado, es decir, por unidad de volumen existe prácticamente el mismo número de cargas positivas que de electrones, si suponemos que ese conductor transporta una corriente eléctrica, podemos suponer que es debida al movimiento de sus electrones, pero siempre la neutralidad se mantiene, en cada unidad de volumen «sale» el mismo número de electrones que «entra». Si tenemos en cuenta el número elevadísimo de cargas libres (electrones) que existe en un conductor normal, podremos comprender que el campo magnético creado por la totalidad del conductor sea muy considerable, es la suma de las contribuciones del campo magnético que crea el movimiento de cada electrón; si bien cada término de la suma es muy pequeño, el número de términos de la suma es enormemente grande.

Con las ideas expuestas puede comprenderse algo del mecanismo de producción de campos magnéticos por corrientes eléctricas. Pero hay sustancias naturales que por sí solas también producen campos magnéticos (imanes naturales), y otras, sometidas a corrientes determinadas, adquieren esa propiedad (imanes artificiales) ¿cómo pueden ser compatibles estos hechos con las ideas anteriores?

Antes de responder a esto estudiaremos la siguiente experiencia (Fig. XXI-10): un magnetómetro situado en el centro de un circuito circular, se orienta perpendicularmente al plano del circuito (siempre que la intensidad de la corriente sea tal que las acciones del campo magnético terrestre sean despreciables frente a las del campo magnético creado por el circuito). Considerando que las líneas del campo magnético entran por el polo S del magnetómetro y salen por su polo N, podemos determinar que el sentido de las líneas de campo, dentro del circuito, es el de avance de un sacacorchos que gira en el sentido de la corriente.

Colocando unas limaduras de hierro sobre una cartulina, atravesada por el circuito, se agrupan en direcciones que determinan la forma de las líneas: circunferencias rodeando a los hilos.

Llamaremos *cara sur* o *negativa* de un circuito cerrado aquella por donde penetran las líneas de campo magnético y *cara norte* o *positiva* la cara de la que salen.

La corriente circula en la cara S en el sentido de las agujas de un reloj y en la cara N en sentido contrario.

Colocando una espira de corriente en un campo magnético experimenta el mismo par (párrafo 2) y se produce el mismo efecto que si fuese un dipolo magnético (o magnetómetro). André Marie Ampère (1775-1836) en 1820, basándose en esta observación, enunció el llamado TEOREMA DE LA EQUIVALENCIA DE AMPÈRE:

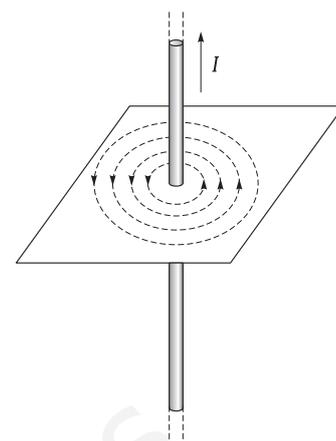


Fig. XXI-8.- Líneas de campo magnético producido por una corriente rectilínea.

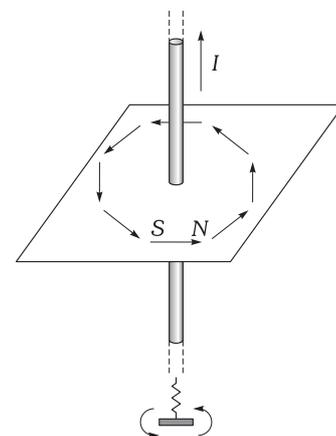


Fig. XXI-9.- Magnetómetros orientados por una corriente rectilínea.

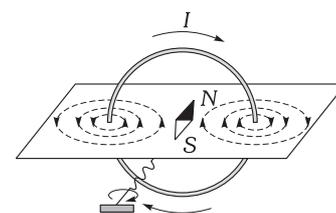
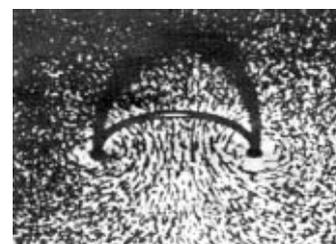


Fig. XXI-10.- El magnetómetro colocado en el centro del circuito circular se orienta perpendicular al plano del circuito.

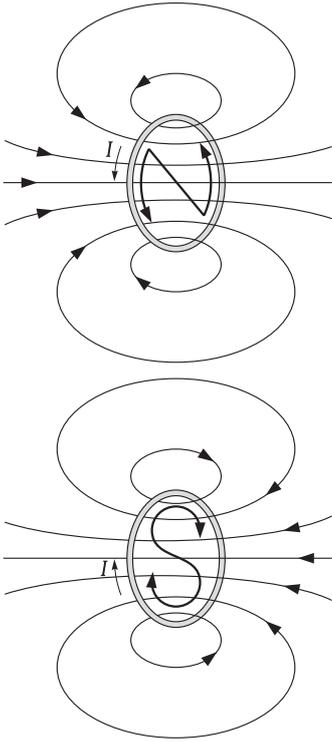


Fig. XXI-11.- Equivalencia entre imanes y corrientes.

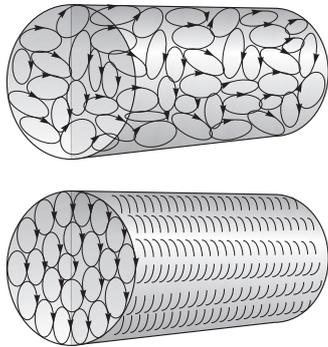


Fig. XXI-12.- En la figura superior visualizamos los circuitos de dimensiones atómicas de un material; si por la causa que sea, orientamos estos circuitos como se representa en la figura inferior, el material se magnetiza.

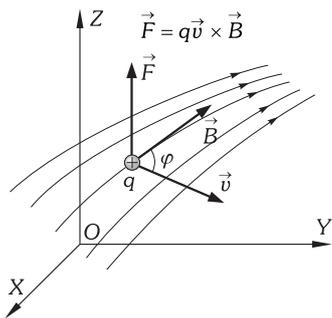


Fig. XXI-13.- Fuerza de Lorentz.

«Una espira de corriente es equivalente en todas sus propiedades magnéticas a un dipolo magnético a distancias grandes comparadas con las dimensiones de la espira».

Ampère postuló que el origen de los imanes (naturales y artificiales) está en pequeños circuitos de dimensiones atómicas o moleculares, de tal forma que en las sustancias magnetizadas (imanes) todos esos circuitos son coplanarios o casi coplanarios y recorridos por intensidades en los mismos sentidos, de tal manera que los efectos magnéticos de cada uno se suman intensificándose su acción. En los cuerpos no magnéticos, estos pequeños circuitos están desordenados y por ello no producen efecto alguno (Fig. XXI-12). La causa de estas corrientes atómicas son los electrones que en su movimiento equivalen a pequeños circuitos eléctricos, puesto que todos los electrones tienen un momento cinético de «spin» característico en torno a cierto eje, cuyo valor es  $S=0,527\,294\,3 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ , podemos imaginar que tal carga en rotación es equivalente a una espira de corriente, y ésta a su vez, a un dipolo magnético.

El norteamericano Barnett (1915), experimentó que al hacer girar rápidamente una barra de hierro, los electrones tienden a girar en el mismo sentido, y por el efecto giroscópico tienden a colocar su eje de rotación paralelo al eje de giro, obteniéndose una imanación por medios puramente mecánicos.

Einstein y De Haas encontraron en el mismo año que Barnett el efecto contrario: en una barra de acero imantada, por efecto del giro de sus electrones, se produce un pequeño giro, poniendo claramente de manifiesto el origen eléctrico de las sustancias magnéticas.

Con esta exposición cualitativa puede obtenerse una idea de conjunto que ayudará a la comprensión de los apartados siguientes, en los que estudiaremos las leyes fundamentales que nos permitirán la resolución de numerosos casos prácticos.

Señalaremos únicamente que, con arreglo a las teorías modernas sobre el magnetismo, no es preciso hablar de «cargas magnéticas» sino que las fuentes que crean los campos magnéticos son corrientes, en particular las densidades de corriente  $\mathbf{J}$ , es decir, a diferencia del campo eléctrico cuyas fuentes son las cargas eléctricas, magnitudes escalares, las fuentes del campo magnético son fuentes vectoriales: las densidades de corriente.

No nos hemos de extrañar, pues, de que si intentamos encontrar cargas magnéticas o polos aislados, subdividiendo un imán (por ejemplo), llegamos siempre a un resultado negativo.

## B) FUERZA DE LORENTZ: APLICACIONES

### XXI - 5. El campo magnético: Vector inducción magnética $\mathbf{B}$ . Fuerza de Lorentz. Unidad de inducción magnética

En el estudio de la electrostática definíamos campo eléctrico como la razón de la fuerza que actúa sobre una carga en reposo al valor de dicha carga:  $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q$ , en esta definición está supuesto que no actúa ninguna otra fuerza aparte de la electrostática.

Para definir la inducción magnética  $\mathbf{B}$ , haremos un razonamiento parecido: supongamos que existe en el espacio un campo magnético creado por un material magnetizado (imán) o simplemente por algún tipo de corriente, de tal manera que en cada punto  $(x, y, z)$  del espacio está definido un vector  $\mathbf{B}(x, y, z)$  al cual lo llamamos INDUCCIÓN MAGNÉTICA. Si en el punto considerado  $(x, y, z)$  en un cierto instante, se encuentra una partícula cuya carga es  $q$  y se está moviendo con una velocidad tal que en ese instante su valor sea  $\mathbf{v}$ , experimenta una fuerza debida solamente al campo magnético cuyo valor viene dado por:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{1}$$

esta fuerza es pues, siempre perpendicular a  $\mathbf{v}$  y a  $\mathbf{B}$ . A esta fuerza se le llama FUERZA DE Hendrik Anton LORENTZ (1853-1928). En la Fig. XXI-13 está representado un campo magnético indicando sus líneas de inducción y una partícula cargada positivamente moviéndose con una determinada velocidad.

El módulo de la fuerza de Lorentz es:  $F = qvB \sin\varphi$  siendo  $\varphi$  el ángulo que forma la velocidad de la partícula y la inducción magnética en el punto considerado.

La expresión de la fuerza de Lorentz puede fácilmente generalizarse para obtener la fuerza que actúa sobre un elemento de longitud de un hilo conductor que transporta una intensidad  $I$ , y «sumergido» dentro de un campo magnético caracterizado en cada punto por  $\mathbf{B}(x, y, z)$ .

En efecto: Por el interior de un conductor «sumergido» en un campo magnético se mueven un cierto número de portadores de carga, este número de portadores lo podemos calcular conociendo la sección  $A$  del conductor y el número  $N$  de cargas libres por unidad de volumen:  $dn = NA \, dl$  siendo  $dl$  la longitud del elemento de volumen que consideramos. Luego si es  $e$  la carga de cada portador, la carga que se mueve en el elemento de volumen será:  $dq = e \, dn$ .

Por otra parte la intensidad de corriente que circula por el hilo tiene por valor:  $I = dq/dt$ , multiplicando los dos miembros de esta igualdad por  $dl$  (espacio recorrido por los portadores en el tiempo  $dt$ ) tendremos:

$$I dl = \frac{dq}{dt} dl$$

pero  $dl/dt$  es la velocidad media de las cargas libres del conductor y llamándola  $v$ , obtendremos:  $I dl = v dq$ . Al elemento de longitud le asociamos un vector  $d\mathbf{l}$  cuyo módulo es la longitud  $dl$ , dirección tangente al hilo conductor en el punto que consideramos y sentido el de la intensidad de corriente, y como la velocidad media de los portadores la consideramos paralela a este vector, podemos poner:

$$I d\mathbf{l} = v dq \tag{2}$$

La fuerza de Lorentz sobre un portador es  $\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , luego sobre los  $dn$  que hay en el elemento de volumen del hilo conductor, será la suma de las fuerzas sobre todos ellos, es decir:  $d\mathbf{F} = e dn \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , pero  $e dn$  es la carga total  $dq$  que se está moviendo en el elemento de hilo conductor, luego:  $d\mathbf{F} = dq \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , y tenido en cuenta la (2), la fuerza sobre un elemento de conductor que transporta una intensidad  $I$  viene dada por la expresión:

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \tag{3}$$

En la Fig. XXI-14 está representado un diagrama en el cual se ven las direcciones y sentidos de los vectores que entran en juego.

Si tratamos de calcular la fuerza que actúa sobre una longitud finita de un hilo conductor por el que circula una corriente  $I$  (Fig. XXI-15), habría que integrar la ecuación (3):

$$\mathbf{F} = \int_C I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

en la que  $C$  representa la longitud del alambre; tanto  $I$ , como  $d\mathbf{l}$ , como  $\mathbf{B}$  pueden variar en cada punto. Si  $I$  es constante entonces:

$$\mathbf{F} = I \int_C d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

si además  $\mathbf{B}$  es uniforme en el espacio en que está situado el hilo conductor, entonces:

$$\mathbf{F} = I \left[ \int_C d\mathbf{l} \right] \times \mathbf{B}$$

pero la integral entre paréntesis, nos representa la suma vectorial de todos los elementos del hilo de longitud  $C$  (Fig. XXI-15), cuyo valor es igual al vector que une los extremos del hilo, pudiéndose escribir:

$$\mathbf{F} = I \mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

lo que nos indica que la fuerza magnética sobre un hilo conductor sumergido en un campo magnético uniforme, cualquiera que sea su forma, es equivalente a la que correspondería a un segmento recto que uniera los extremos del hilo. Es consecuencia inmediata que: la fuerza neta sobre cualquier espira cerrada de corriente (Fig. XXI-16), sumergida en un campo magnético uniforme, es nula.

$$\mathbf{F} = I \left[ \oint_C d\mathbf{l} \right] \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

De cualquiera de las fórmulas (1) o (3), sacando la ecuación de dimensiones del campo magnético en el SI, obtenemos:  $[B] = [F]/[I][L] = MT^{-2}A^{-1}$ , de donde deducimos que la unidad de campo magnético que llamamos TESLA (T)\*, será:  $1T = 1N/A \cdot m$ , también recibe los nombres de «Weber/m<sup>2</sup>»\*\* y «Miriagauss».

**PROBLEMAS: 1 al 5.**

**XXI - 6. Medida de la inducción magnética. Balanza de Cottón**

Para realizar una medida de la inducción magnética emplearemos un dispositivo como el de la Fig. XXI-17, conocido con el nombre de BALANZA DE AIME COTTON (1869-1951). En el platillo de una balanza colocamos una pila que alimenta un circuito situado en el seno de un campo magnético producido por un electroimán, de forma que el campo magnético entre sus polos es perpendicular a los hilos que hay entre las piezas polares. Antes de establecer contacto entre pila y circuito se coloca en el otro platillo de la balanza una tara, de mayor masa que la existente en  $A$  y se equilibra la balanza mediante pesas. Se hace circular la corriente y sobre el hilo  $EF$  actúa una fuerza

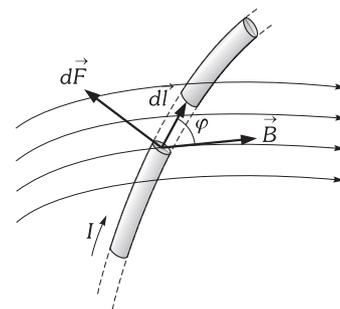


Fig. XXI-14.- Fuerza de Lorentz sobre un elemento de longitud ( $dl$ ) de línea de corriente.

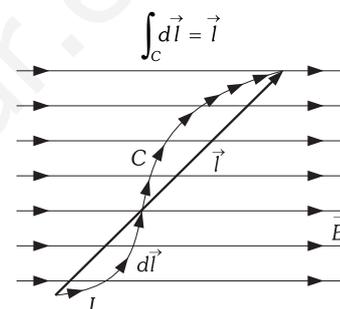


Fig. XXI-15.- La fuerza sobre el hilo conductor es la misma que la que haría el campo sobre un hilo recto que uniera los extremos del hilo  $l$ .

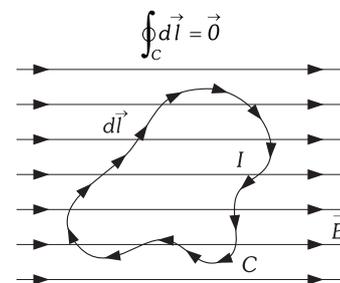


Fig. XXI-16.- La fuerza neta sobre cualquier espira cerrada de corriente sumergida en un campo magnético uniforme es nula.

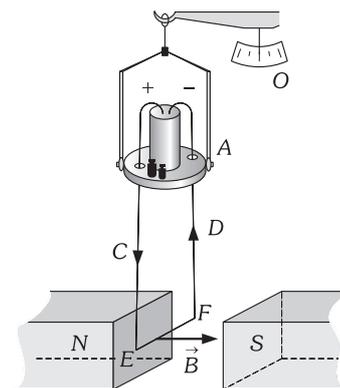


Fig. XXI-17.- Balanza de Cottón.

\* Nikola Tesla (1884-1943).

\*\* La razón de esta denominación la veremos cuando definamos flujo magnético. Ernes Menrich, Weber (1795-1891).

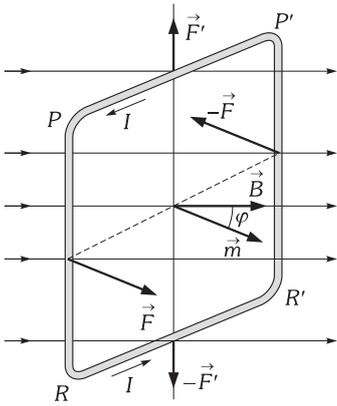


Fig. XXI-18.- Acción de un campo magnético sobre una espira.

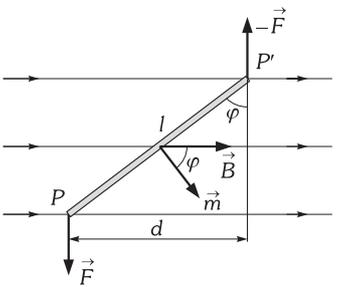


Fig. XXI-19.- La figura anterior vista desde arriba.

hacia abajo que desequilibra la balanza. Para conseguir un nuevo equilibrio es necesario quitar del platillo pesas; este peso ( $Mg$ ), nos mide la fuerza que actúa sobre el hilo. Tal fuerza tiene por valor, según la (3):  $Mg = BIl$  en la que la longitud  $EF = l$ , y  $\text{sen } \varphi = 1$ . El valor de  $B$  es:  $B = Mg/Il$ .

**PROBLEMA: 6.**

**XXI - 7. Acción de un campo magnético sobre un circuito. Momento magnético de una espira**

«Un circuito plano se orienta en un campo magnético perpendicularmente a las líneas de campo, de forma que éstas entran por su cara S y le salen por la N».

En efecto: la aplicación de la fuerza de Lorentz a los hilos  $PP'$  y  $RR'$  del circuito de la Fig. XXI-18 nos hace ver la existencia de las fuerzas  $F'$  y  $-F'$ , iguales, de la misma dirección y de sentido contrario, que anulan sus efectos. Sobre los hilos  $PR$  y  $P'R'$  actúan las fuerzas  $F$  y  $-F$ , que originan un par que hace girar al cuadro hasta que el momento sea igual a cero, lo que ocurre cuando las fuerzas están una en prolongación de la otra, colocándose el circuito perpendicularmente a las líneas de campo.

El sistema anterior visto desde arriba tiene la forma indicada en la Fig. XXI-19. El momento del par de fuerzas es:  $N = Fd$ , si  $PR = l'$  y  $PP' = l$ , el valor de la fuerza es:  $F = BIl'$  y  $d = l \text{sen } \varphi$ . Sustituyendo estos valores, el momento del par queda:  $N = BIl'l \text{sen } \varphi = BIA \text{sen } \varphi$ , puesto que  $Il'$  es la superficie  $A$  del circuito.

Para que el momento sea igual a cero es necesario que  $\varphi$  sea igual a  $0^\circ$  o a  $180^\circ$ , colocándose el circuito perpendicular a las líneas de campo. En la posición para la que  $\varphi = 0^\circ$ , las líneas de campo magnético entran por la cara S de la espira y corresponde a una posición de equilibrio estable. Si  $\varphi = 180^\circ$  las líneas entran por la cara N de la espira y basta un pequeño golpecito sobre ésta, para que gire  $180^\circ$  y adquiera la posición de equilibrio estable.

Si representamos al área encerrada por esta espira rectangular, por el vector  $\mathbf{A}$  normal al plano que contiene a la espira, y de sentido el de avance de un sacacorchos que gira en el sentido que viene dado por la rotación de la corriente en la espira, podemos expresar el valor del momento del par por el producto vectorial:

$$\mathbf{N} = I \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

si llamamos MOMENTO MAGNÉTICO DE UNA ESPIRA (por analogía con la fórmula correspondiente al par de fuerzas que actúa sobre un dipolo eléctrico:  $\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ ) a:

$$\mathbf{m} = I \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \tag{4}$$

También por analogía con el estudio hecho para la energía potencial acumulada en un dipolo eléctrico, al hacerle girar desde  $\varphi_0 = \pi/2$  hasta un ángulo cualquiera  $\varphi$ , en el interior de un campo eléctrico (párrafo XIX-19), se calcula que para una espira, la energía potencial acumulada es:

$$U = -m B \cos \varphi = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$$

Una espira plana de forma cualquiera, puede aproximarse tanto como se quiera, por la integral (suma) de un número indefinido de espiras rectangulares elementales, como se indica en la Fig. XXI-20; las corrientes interiores se compensan por parejas en los contornos comunes de las espiras elementales, dejando únicamente la corriente  $I$  a lo largo de la espira en cuestión. Igual que para el caso de la espira rectangular, sobre cada espira elemental de área  $dA$ , actuará un par de fuerzas cuyo momento tomará el valor:  $d\mathbf{N} = I d\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ , y para la espira de corriente como un todo:

$$\mathbf{N} = \int_A d\mathbf{N} = I \left[ \int_A d\mathbf{A} \right] \times \mathbf{B} = I \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

con lo que quedan generalizadas las fórmulas obtenidas para cualquiera que sea la forma de la espira, con la condición de que sea plana.

El comportamiento de una espira de corriente en un campo magnético es análogo al de un magnetómetro, como ya se intuyó en el párrafo XXI-4 y se representó en la Fig. XXI-11.

Una aplicación muy importante de todo lo anteriormente dicho, se hará un poco mas adelante en el estudio de los aparatos de medida de intensidades y potenciales (Amperímetros y Voltímetros).

**PROBLEMAS: 7 al 10.**

**XXI - 8. Movimiento de una partícula cargada en el interior de un campo magnético**

En el momento en que penetra una partícula cargada en el interior de un campo magnético, comienza a actuar sobre ella la fuerza de Lorentz:  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  que siempre será perpendicular a la velocidad de esa partícula, y por tanto perpendicular a la trayectoria seguida por ella

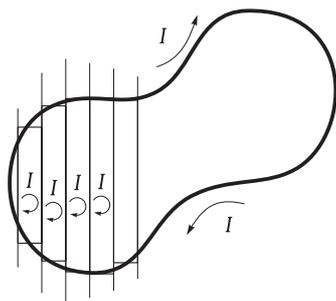


Fig. XXI-20.- Aproximación a una espira de forma cualquiera por un número indefinido de espiras rectangulares tan pequeñas como queramos.

(puesto que  $\mathbf{v}$  es siempre tangente a la trayectoria), con lo que *el trabajo realizado por la fuerza magnética será nulo* y por tanto:

«Un campo magnético (estático) puede cambiar la dirección de la velocidad pero no hace variar la rapidez o la energía cinética de una partícula cargada que se mueve en su interior».

Consideremos primeramente el caso en el que una carga  $q$  (positiva), de masa  $m$ , se mueve dentro de un campo magnético uniforme de inducción  $\mathbf{B}$  perpendicular a la velocidad  $\mathbf{v}$  que posee (Fig. XXI-21) (en esta Fig. y en las siguientes, seguiremos el convenio de que  $\oplus$  representa un vector dirigido hacia dentro del papel, mientras que  $\ominus$  nos representará un vector dirigido hacia afuera). La aplicación de la fuerza de Lorentz, teniendo en cuenta que  $\varphi = 90^\circ$ , nos conduce a:  $F = qvB$ , la cual producirá una aceleración:

$$a = \frac{qvB}{m}$$

Si el campo es uniforme, esta aceleración es constante ya que no hay fuerza ninguna en la dirección de la velocidad que pudiese modificar el valor de ésta; tal aceleración, normal a la velocidad, tiene por valor (aceleración centrípeta):

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{qvB}{m} \Rightarrow r = \frac{mv}{qB} \quad (5)$$

y por tanto, el radio de la trayectoria es constante, produciéndose un movimiento circular y uniforme; el valor de la velocidad es:

$$v = \frac{qBr}{m} = \omega r = \frac{2\pi}{T} r \Rightarrow T = \frac{2\pi m}{qB} \quad (6)$$

de la que sacamos la consecuencia que *el período de este movimiento es independiente del radio de la trayectoria de la carga*. Esta consecuencia nos fundamenta los aceleradores de partículas.

En el caso en que la partícula cargada penetre en el interior de un campo magnético uniforme, con una velocidad que forma un ángulo arbitrario con la inducción magnética, seguirá una trayectoria helicoidal. Por ejemplo, si la inducción magnética tiene la dirección del eje  $Z$  (Fig. XXI-22), no existirá componente alguna de la fuerza en la dirección  $OZ$ , por lo que  $a_z = 0$  y la componente de la velocidad  $v_z$ , permanecerá constante. Por otra parte, la fuerza magnética  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  hace que las componentes  $v_x$  y  $v_y$  cambien con el tiempo, y el movimiento resultante es una hélice que tiene su eje paralelo a la inducción magnética  $\mathbf{B}$ .

**PROBLEMAS: 11 al 17.**

**XXI - 9. Botella magnética. Cinturones de radiación de Van Allen**

Las trayectorias seguidas por partículas cargadas en campos magnéticos no uniformes, son un tanto complicadas. Un caso de particular interés es el de la Fig. XXI-23, que nos representa un campo tridimensional con simetría axial alrededor de un eje horizontal, siendo muy intenso en sus extremos y débil en la zona central. Un campo de este tipo se denomina BOTELLA MAGNÉTICA, debido a que las partículas cargadas pueden quedar atrapadas en su interior. En efecto: supongamos que una partícula positiva penetra con una velocidad inicial por el punto A dirigida hacia el interior del papel; si  $\mathbf{B}$  fuese horizontal en dicho punto y en el plano del papel, la partícula se movería en una trayectoria circular, pero como  $\mathbf{B}$  tiene una pequeña componente vertical, la fuerza de Lorentz, tendrá una pequeña componente hacia la derecha, que produce a la partícula una aceleración hacia la derecha, moviéndose ésta en una trayectoria casi circular alrededor del eje de simetría del campo; puesto que la velocidad de la partícula no puede alterar su módulo por la fuerza magnética, que es perpendicular a la velocidad, a un aumento de la componente axial de la velocidad le tendrá que corresponder una ligera disminución de la componente perpendicular al eje, y cuando la partícula se desplace hacia la derecha, penetrando en una región del campo magnético más débil, tendrá que aumentar el radio de su trayectoria casi circular (fórmula 5). En el punto B la inducción magnética es horizontal, la partícula no tiene aceleración axial en dicho punto, pero sigue moviéndose hacia la derecha por inercia; a la derecha del punto B, la fuerza magnética tiene una componente dirigida hacia la izquierda que hace que la partícula disminuya su componente axial de la velocidad hasta pararse en el punto C, en donde la partícula comienza su movimiento hacia la izquierda. La partícula oscilará moviéndose hacia la derecha y hacia la izquierda entre los puntos A y C, quedando encerrada en el espacio representado en la figura.

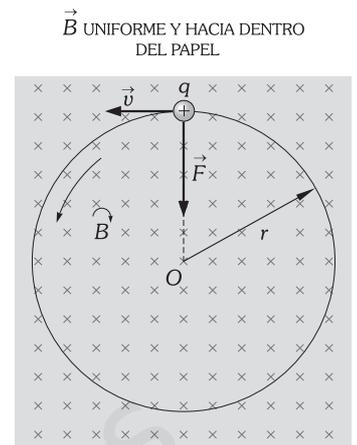


Fig. XXI-21.- Trayectoria de una carga  $q$  que se mueve en el interior de un campo magnético  $\mathbf{B}$  con una velocidad  $\mathbf{v}$  perpendiculares entre sí.

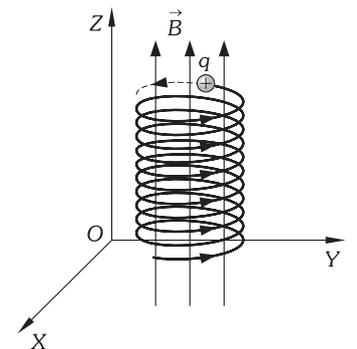


Fig. XXI-22.- Si una partícula cargada penetra en un campo magnético uniforme con una velocidad que tenga una componente paralela al campo, se mueve con trayectoria helicoidal.

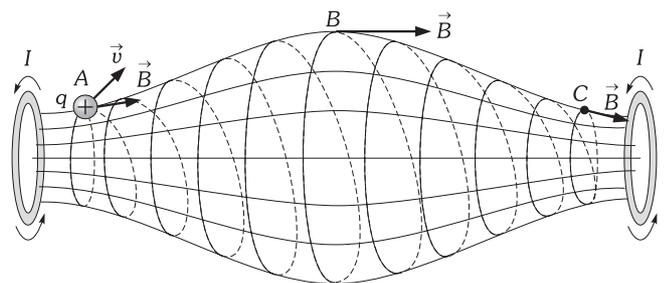


Fig. XXI-23.- La partícula indicada se mueve hacia adelante y hacia atrás oscilando entre los puntos extremos, quedando atrapada en el interior del campo (botella magnética).

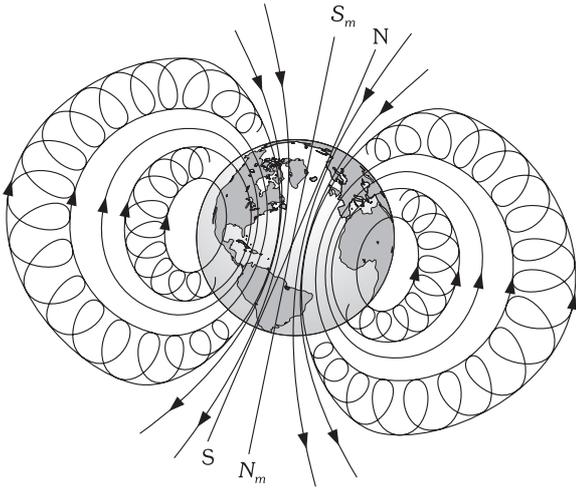


Fig. XXI-24.- Cinturones de Van Allen. Las partículas cargadas de los rayos cósmicos están atrapadas en el campo magnético terrestre y se mueven a lo largo de las líneas de campo que existen entre los polos norte y sur de forma semejante a como lo hacen dentro de una botella magnética.

Se ha aplicado la botella magnética para confinar a alta temperatura ( $10^6$  °C) gases que constan de electrones e iones positivos (plasma), con el fin de lograr un proceso de fusión nuclear controlado, lo que proporcionaría una fuente casi ilimitada de energía; pero la botella magnética tiene sus problemas; al confinar en ella altas densidades de partículas y chocar entre ellas, ocurre que se «fugan» del sistema, y se ha fracasado en el intento.

Un movimiento semejante al que tiene lugar en la botella magnética, es el de las oscilaciones de los llamados RAYOS CÓSMICOS (partículas cargadas que se originan en el Sol, las estrellas y otros cuerpos del Universo; los protones, que son átomos de hidrógeno ionizados, son expulsados por el Sol durante las grandes tormentas magnéticas); estos rayos cósmicos quedan atrapados en los llamados CINTURONES DE RADIACIÓN DE James Alfred VAN ALLEN (1914) (Fig. XXI-24), debido a la interacción entre dichas partículas cósmicas con el campo magnético terrestre. Los cinturones están compuestos principalmente de electrones y protones rápidos. El cinturón inferior se encuentra a unos 3 200 km de la superficie terrestre, mientras que el superior se forma a unos 25 000 km de la Tierra. Fueron detectados por primera vez por el satélite artificial norteamericano Explorer I en 1958, y posteriormente estudiados por la sonda lunar Pioneer III.

**XXI - 10. El ciclotrón y el sincrotrón**

El CICLOTRÓN (Fig. XXI-25) es un aparato destinado a proporcionar una gran velocidad a partículas atómicas electrizadas. Inventado por Ernest O. Lawrence (1901-1958) en 1930, está constituido por una gran caja metálica cilíndrica de pequeña altura, dividida diametralmente en dos partes separadas entre sí por un pequeño espacio. A causa de su forma, a las dos partes del ciclotrón se les llama «des». Se comunica a éstas un campo eléctrico alterno unos instantes hacia  $D_1$  y otros hacia  $D_2$ . Un potente electroimán origina un campo magnético perpendicular al eléctrico.

Si se introduce entre las «des» una partícula  $P$  (positiva); el campo eléctrico origina una fuerza sobre la carga que la arrastra hacia la «de» superior del dibujo y al penetrar en ella lleva una velocidad  $v_1$ ; en el interior de la «de» existe solamente el campo magnético ya que las propias «des» actúan de pantalla eléctrica. La carga en el interior de  $D_2$  recorre una trayectoria semicircular de radio dado por (5):

$$r_1 = \frac{m v_1}{q B}$$

A la salida de  $D_1$  la partícula sufre otro «empujón» por efecto del campo eléctrico que origina una fuerza, ahora hacia  $D_2$ , lo que provoca un aumento de velocidad. Si esta es  $v_2$ , el nuevo recorrido semicircular tiene un mayor radio que el del recorrido anterior:

$$r_2 = \frac{m v_2}{q B}$$

Así, en sucesivas trayectorias semicirculares, cada vez de mayor radio y recorridas en el mismo tiempo, (6) hace que la partícula electrizada vaya adquiriendo mayor velocidad y, por tanto, una mayor energía cinética, cuyo valor será:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{q^2 B^2 r^2}{2m}$$

Cuando la energía de las partículas electrizadas se hace mayor que 20 MeV aproximadamente, entran en juego los efectos relativistas, aumentando el período de su órbita y desfasándose de la tensión aplicada. Para resolver este problema, los ciclotrones se han ido sustituyendo (en el estudio de la física nuclear) por máquinas más recientes tales como la llamada SINCRICLOTRÓN, en estos aparatos se ha modificado el período de la tensión aplicada, de manera que permanezca siempre en fase con el período de giro de la partícula electrizada; el elevado costo de la construcción de estos aparatos (necesitan radios muy grandes y en consecuencia el volumen del metal utilizado en la construcción de los imanes, también es muy grande) hizo que se desarrollaran otro tipo de máquinas denominadas SINCROTRONES (Fig. XXI-26), en las cuales el valor del campo magnético se incrementa gradualmente con objeto de mantener a las partículas cargadas moviéndose en órbitas de radio constante, de forma que se ven aceleradas en una cámara de forma toroidal en las que se hace el vacío. Cada vez que un grupo o «racimo» de partículas realiza una revolución, se impulsa o acelera al pasar por una sección del toroide que contiene campos eléctricos pulsantes de alta frecuencia y es entonces cuando se incrementa el campo magnético en el toroide de forma correspondiente para conseguir que permanezca constante el radio  $r = mv/qB$ ; alcanzada la máxima

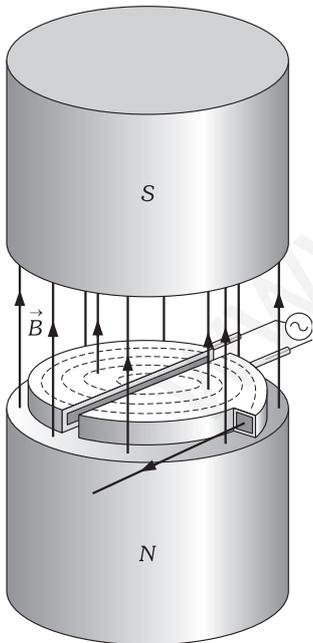
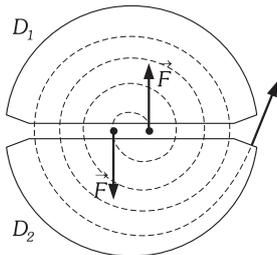


Fig. XXI-25.- Esquema del ciclotrón.

energía posible, las partículas son desviadas hacia el exterior de la máquina mediante campos magnéticos, dirigiéndose hacia los blancos experimentales. Un acelerador construido en Batavia, Illinois, al que se le llama Fernilab (Fermi National Accelerator Laboratory), es el acelerador segundo mayor del mundo. El sincrotrón más grande en la actualidad, se encuentra en el Centro Europeo para la Investigación Nuclear (CERN), cuenta con una circunferencia de 27 km aproximadamente, y las partículas que en él se aceleran hasta velocidades cercanas a las de la luz rodean el acelerador hasta 11 000 veces por segundo.

**PROBLEMAS: 18 y 19.**



SECCIÓN DE ACCELERADO

**XXI – 11. El selector de velocidades y el espectrómetro de masas**

El SELECTOR DE VELOCIDADES es un aparato que proporciona un haz de partículas que se mueven con la misma velocidad.

Para lograr esto, establecemos entre dos placas paralelas una diferencia de potencial que nos suministra un campo eléctrico uniforme, y perpendicularmente a él un campo magnético también uniforme. Suponiendo que las partículas procedentes de una fuente tienen carga positiva, seleccionando con un diafragma circular las que tienen una dirección perpendicular a ambos campos, al penetrar en ellos, sólo aquellas partículas sobre las que se equilibre la fuerza eléctrica  $qE$  y la magnética  $qvB$  no se desviarán, es decir, aquellas que poseen una velocidad tal que:

$$qE = qvB \Rightarrow v = \frac{E}{B}$$

aquellas partículas, procedentes de la fuente, que tengan velocidades mayores que ésta, chocarán con la placa superior, las de menor velocidad se desviarán hacia abajo. (Fig. XXI-27).

El ESPECTRÓMETRO DE MASAS es un aparato que separa iones atómicos y moleculares (partículas cargadas) cuya razón «masa/carga» sea diferente. Por ejemplo, si se introducen en el aparato iones de los ISÓTOPOS (átomos de distinta masa, que en su núcleo poseen el mismo número de protones) de una sustancia, por tener la misma carga y distinta masa, el aparato los separa.

El espectrómetro de masas consta de una fuente  $F$  de iones acelerados a través de un potencial de algunos miles de voltios, que se hacen penetrar en un «selector de velocidades», con lo que se conocerá la velocidad de salida (la misma para todos) de los iones de éste. A la salida del selector, los iones se desplazan perpendicularmente a un campo magnético uniforme que hace que los iones que no tengan el mismo valor en su relación «masa/carga», describan distintas trayectorias circulares, puesto que el radio de éstas es:  $r = m v/q B$ . Haciéndolas incidir sobre una placa fotográfica  $AA'$  (Fig. XXI-28), una vez revelada, podremos medir los radios de las trayectorias de los diferentes iones, con lo que conoceremos la razón  $m/q = B r/v$  (en la placa fotográfica se obtiene el espectro de masas, razón por la que a este aparato se le llama también ESPECTRÓGRAFO DE MASAS). Si los iones introducidos en el aparato son de la misma sustancia, y conocemos su carga, podremos calcular las masas de los isótopos de la sustancia.

**PROBLEMAS: 20 al 23.**

**XXI – 12. El efecto Hall**

Edwin Herbert Hall (1855-1938), en 1879, descubrió que cuando un conductor por el que circula una corriente, se sumerge en un campo magnético, se genera una tensión en una dirección perpendicular a la corriente y al campo magnético. Este fenómeno, llamado EFECTO HALL, proviene de la desviación de los portadores de carga hacia uno de los lados del conductor, debida a la fuerza ejercida por el campo magnético sobre estos portadores. El análisis experimental de los resultados obtenidos por este efecto, proporciona información sobre el signo de los portadores de carga en los conductores, el número de ellos por unidad de volumen (densidad numérica de portadores de carga), y proporciona un método para la medida de campos magnéticos.

El dispositivo experimental para observar el efecto Hall consta de un conductor metálico en forma de cinta plana por la que circula una intensidad de corriente  $I$ ; admitamos, de momento, que los portadores de carga son positivos y que se mueven en la dirección de la corriente; por la fuerza de Lorentz habrá una acumulación de carga positiva en la parte izquierda de la cinta (Fig. XXI-29a), dejando en la parte derecha un exceso de carga negativa; la carga seguirá acumulándose en los bordes hasta que la fuerza sobre los portadores de carga debida al campo eléctrico producido por esta separación, equilibre la fuerza debida al campo magnético sobre estos portadores. En esta posición de equilibrio, si colocamos un voltímetro, como se indica en la figura, podremos medir la diferencia de potencial generada en los bordes de la cinta. Por otra parte, si los portadores son negativos, estos se acumularán en la parte izquierda de la cinta (Fig. XXI-29b) y la parte derecha quedará cargada positivamente; una vez alcanzado el equilibrio, un voltímetro colocado de la misma manera que en el caso anterior, nos medirá la diferencia de potencial entre los bordes de la cinta. Los experimentos realizados con la corriente y el campo en las direcciones indicadas en la figura, demuestran que la parte izquierda de la cinta lleva una carga negativa (posee un po-

Fig. XXI-26.– Esquema de un sincrotrón.

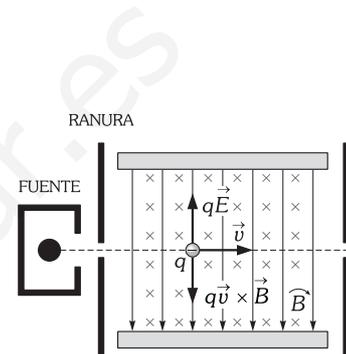


Fig. XXI-27.– Selector de velocidades.

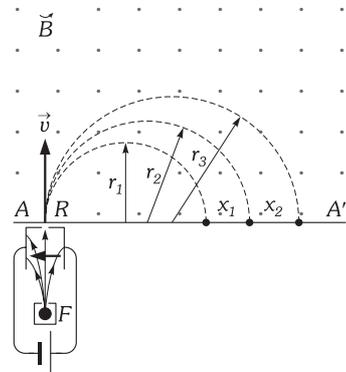


Fig. XXI-28.– Espectrógrafo de masas.

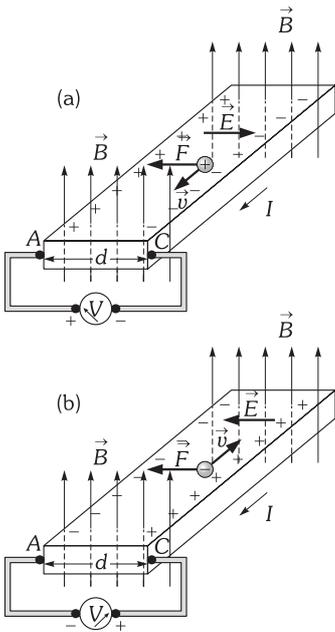


Fig. XXI-29.- a) Si los portadores de carga fueran positivos el borde derecho adquiriría carga negativa y A estaría a un potencial mayor que C. b) Cuando los portadores sean negativos, el borde derecho se carga positivamente y A queda a un potencial menor que C (efecto Hall).

tencial menor que la parte derecha), lo que conduce a la conclusión de que los portadores de carga en los conductores metálicos son negativos.

Uniendo los bordes de la cinta por un hilo conductor, los electrones fluirán por él, rompiéndose el equilibrio que describíamos anteriormente, manteniendo la fuerza de Lorentz una diferencia de potencial; la cinta es, por consiguiente, un asiento de FEM, conocida como FEM HALL; su valor se calcula teniendo en cuenta que la fuerza magnética sobre los portadores es  $qvB$ , la cual está equilibrada por la electrostática de valor:  $qE$ , en la que  $E$  es el campo eléctrico debido a la separación de las cargas; así pues:  $E = vB$ . Llamando  $d$  a la anchura de la cinta, la FEM Hall es:

$$\mathcal{E} = E d = v B d \tag{7}$$

Podemos determinar el número de portadores de carga por unidad de volumen  $N$ , ya que pueden medirse todas las cantidades que aparecen en la fórmula anterior, midiendo además la intensidad de corriente  $I$  que circula por la cinta y su sección  $A$ , puesto que el valor de la densidad de corriente en ella será:

$$J = \frac{I}{A} = N q v \Rightarrow N = \frac{I}{q v A} \tag{8}$$

La FEM Hall, proporciona un procedimiento de medida de campos magnéticos, ya que de las (7) y (8) se obtiene:

$$\mathcal{E} = \frac{I d}{N q A} B \Rightarrow B = \frac{N q A}{I d} \mathcal{E}$$

Para determinar el valor de una inducción  $B$  desconocida, se sumerge la cinta conductora en el campo que queremos medir y en uno de inducción conocida; igualando las relaciones  $B/\mathcal{E}$  en ambos obtenemos el valor buscado.

**PROBLEMA: 24.**

**C) LEY DE BIOT Y SAVART: APLICACIONES**

**XXI – 13. Ley de Biot y Savart. Permeabilidad magnética**

Hemos hablado de la fuerza que actúa sobre una carga que se mueve en un campo magnético, lo cual nos ha servido como definición de campo magnético, pero no sabemos aún calcular la inducción magnética creada por una distribución de corrientes.

LA LEY DE Jean Baptiste BIOT (1774-1862) y Felix SAVART (1791-1841) es una expresión mediante la cual, dado un hilo conductor por el que circula una intensidad de corriente estacionaria  $I$ , podemos calcular la inducción magnética creada por un elemento diferencial de ese conductor en un punto cualquiera del espacio.

Esta ley la vamos a considerar como empírica, es decir, una expresión que nos permite confrontar teóricamente los resultados experimentales y puede enunciarse así:

«La inducción magnética producida por un elemento de corriente estacionaria en un punto del espacio, es un vector perpendicular al plano determinado por el elemento de corriente y el punto; de sentido el de giro de un sacacorchos que avanza con la corriente». (Fig. XXI-30)

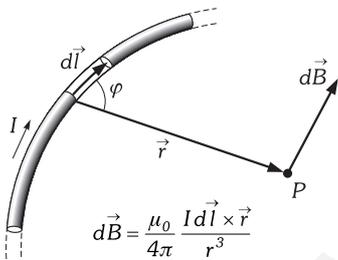


Fig. XXI-30.-  $d\vec{B}$  es perpendicular al plano al que pertenecen  $d\vec{l}$  y  $P$ .

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \tag{9}$$

$r$ : vector de posición de  $P$  referido al elemento de corriente,  $I$ : intensidad de la corriente que circula por el hilo,  $d\vec{l}$ : el elemento de corriente cuyo módulo es el elemento diferencial de longitud del hilo, tangente a él y sentido el de avance de la intensidad que circula por él.

De (9) sacamos que el módulo de la inducción magnética en el punto  $P$  será:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sen \varphi}{r^2}$$

$\varphi$ : ángulo que forma  $d\vec{l}$  y  $\vec{r}$ .

Si se trata de calcular la inducción en un punto del espacio producida por un circuito de dimensiones finitas, habría que ir sumando las contribuciones diferenciales de campo magnético creado por cada elemento diferencial del circuito. En una palabra, hay que integrar la expresión (9). Si el circuito es cerrado (Fig. XXI-31) será:

$$\vec{B} = \oint d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

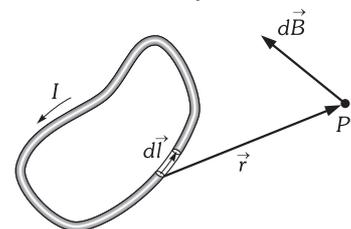


Fig. XXI-31.- Ley de Biot y Savart para un circuito cerrado.

Podemos aplicar esta ley de Biot y Savart a cargas en movimiento diciendo:

«Una carga en movimiento origina un campo magnético cuyas líneas de inducción son circunferencias situadas en un plano perpendicular al vector velocidad, cuyo centro está en el trayecto y cuyo sentido es el de giro de un sacacorchos que avanza con la carga si ésta es positiva (Fig. XXI-32) y el contrario si es negativa.»

La expresión analítica de esta ley se obtiene teniendo en cuenta que:  $I d\mathbf{l} = \mathbf{v} dq$  y sustituyendo en (9):

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dq \mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (10)$$

y su módulo será:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{v dq \operatorname{sen} \varphi}{r^2}$$

$r$ : en este caso es la distancia de la carga al punto en el instante considerado y  $\varphi$ : el ángulo formado por  $\mathbf{r}$  y la dirección del movimiento.

Las fórmulas (9) y (10) y el PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN (La inducción creada por un sistema de corrientes y cargas en movimiento, es la suma vectorial de las inducciones que producirían cada una de las corrientes, o cada una de las cargas en movimiento, por separado), en principio, nos resuelven el problema de calcular el valor de la inducción magnética  $\mathbf{B}$  ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) en cualquier punto del campo.

La cantidad  $\mu_0/4\pi$  es una constante de proporcionalidad, que la escribimos de esta manera por conveniencia. A la magnitud  $\mu_0$  se le llama PERMEABILIDAD MAGNÉTICA. Su ecuación de dimensiones según la (9) ó (10) en el SI es:  $[\mu_0] = [F]/[I]^2 = MLT^{-2} A^{-2}$ . Elegido en este sistema, por convenio, el Amperio como unidad de intensidad, la medida de la permeabilidad magnética del vacío ( $\mu_0$ ) es:

$$\mu_0 = \frac{4\pi}{10^7} \frac{N}{A^2}$$

este valor fue obtenido experimentalmente con gran exactitud por Curtis en el National Bureau of Standards de Washington.

En otro medio que no sea el vacío, se obtiene  $\mu$ , multiplicando la permeabilidad del vacío por un número abstracto (igual para todos los sistemas) llamado, PERMEABILIDAD RELATIVA al vacío ( $\mu'$ ):

$$\mu = \mu_0 \mu'$$

Hemos partido en el estudio cuantitativo del electromagnetismo, de las expresiones analíticas de la FUERZA DE LORENTZ y la LEY DE BIOT Y SAVART, adoptándolas como leyes empíricas, de la misma manera que en el estudio de la Electroestática partíamos de la ley de Coulomb como postulado fundamental, pero realmente las leyes electromagnéticas, no son tales leyes empíricas, puesto que son absolutamente demostrables cuando se aplica la mecánica relativista al estudio de los campos eléctricos creados por cargas en movimiento. No vamos a desarrollar aquí estas deducciones y las adoptaremos como leyes experimentales (históricamente así han ido los acontecimientos) pero siempre debemos pensar en lo anteriormente dicho.

**PROBLEMA: 24.**

**XXI - 14. Representación del campo magnético. Líneas de campo. Flujo de la inducción magnética a través de una superficie\***

La inducción magnética es siempre tangente a sus líneas de campo (o líneas de inducción) y para concretar su valor en un punto se conviene en dibujar las líneas de campo de forma que el número de ellas que corte normalmente a la unidad de superficie, localizada en dicho punto, sea precisamente el valor de la inducción. Los campos uniformes (igual módulo y dirección en todo sus puntos) quedan representados por líneas de campo paralelas y equidistantes.

Como en el caso de las líneas de campo eléctrico, la propiedad de que una línea de campo sea tangente al vector inducción magnética podemos expresarla:

$$\mathbf{B} \times d\mathbf{r} = 0$$

expresión que nos proporciona un procedimiento para determinar las ecuaciones de las líneas de campo; siendo este método, en general, matemáticamente muy complicado, igual que nos ocurría con campo eléctrico, no lo trataremos en este texto.

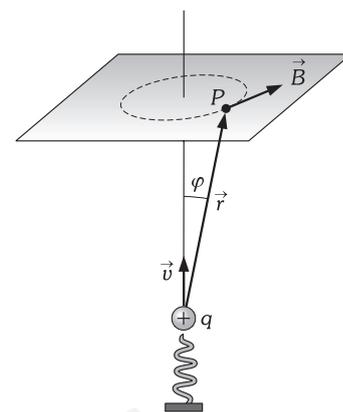


Fig. XXI-32.- Vector inducción magnética producida por una carga en movimiento.

\* Las definiciones que vamos a dar no son nada nuevo para nosotros, sino generalidades de cualquier campo vectorial, tal como se hiciera en el caso del campo eléctrico (párrafos XVIII-19 y 20). Sirven para recordar y afianzar ideas muy importantes.

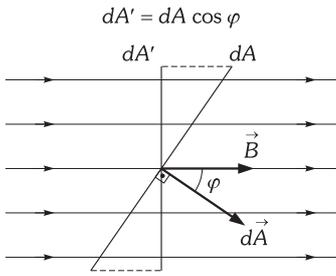


Fig. XXI-33.-  $dA'$  es la proyección de  $dA$  sobre el plano normal al vector inducción magnética.

Considerada la anterior representación, se llama FLUJO DE INDUCCIÓN MAGNÉTICA a través de una superficie al número de líneas de campo que atraviesan a ésta.

En la Fig. XXI-33 el número de líneas de campo que atraviesan a la superficie  $dA$  es el mismo que el que atraviesa a  $dA'$  (proyección de  $dA$  sobre la superficie normal al campo); como  $B$  es el número de líneas de fuerza que atraviesan a la unidad de superficie normal al campo, a  $dA$  le atravesarán:

$$d\phi = B dA' \tag{11}$$

pero como:  $dA' = dA \cos \varphi$ , nos queda para valor del flujo a través de  $dA$ :

$$d\phi = B dA \cos \varphi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \Leftrightarrow \phi = \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

Haciendo  $B = 1T = 1 \text{ N/A} \cdot \text{m}$ ,  $A = 1 \text{ m}^2$  y  $\cos \varphi = 1$ , obtenemos para la unidad de flujo en el SI: 1 WEBER (Wb) =  $1 \text{ N} \cdot \text{m/A}$

Podemos definir la inducción magnética como el flujo por unidad de área normal al campo (fórmula 11), o DENSIDAD SUPERFICIAL DE FLUJO. Con tal criterio, se le llama también a la unidad del SI de inducción magnética  $\text{Wb/m}^2$ .

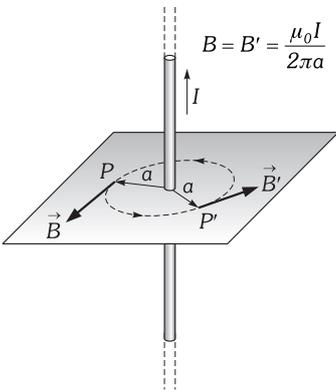


Fig. XXI-34.- Inducción magnética producida por una corriente rectilínea.

**XXI - 15. Campo magnético creado por una corriente rectilínea indefinida**

El vector inducción en un punto del campo magnético creado por una corriente rectilínea indefinida es perpendicular al plano formado por la corriente y el punto; de sentido el de giro de un sacacorchos que avanza con la corriente, y su módulo es directamente proporcional a la intensidad de la corriente e inversamente proporcional a la mínima distancia del punto considerado hasta el conductor (Fig. XXI-34).

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

Esta expresión se demuestra por integración de la ley de Biot y Savart, en efecto: consideremos un elemento del hilo conductor  $dl$  de la Fig. XXI-35, el vector  $d\mathbf{B}$  que le corresponde es un vector perpendicular a  $d\mathbf{l}$  y a  $\mathbf{r}$ , por tanto perpendicular al plano de la figura y hacia afuera. Si consideramos  $d\mathbf{l}'$ , su correspondiente  $d\mathbf{B}'$  también será perpendicular al plano de la figura y por consiguiente paralelo al anterior; lo mismo ocurrirá para cualquier otro elemento que consideremos en el hilo, por lo cual el módulo de la inducción magnética total será la suma (integral) de los módulos de las inducciones creadas por cada elemento. Así, como el módulo de la expresión (9) es:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl \sin \varphi}{r^2}$$

y de la Fig. XXI-35, obtenemos:

$$r = \frac{a}{\cos \theta} \wedge \varphi = \theta + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \varphi = \cos \theta \wedge l = a \tan \theta \Rightarrow dl = \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta$$

sustituyendo en la anterior:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos \theta d\theta$$

e integrando para los límites  $\theta = -\pi/2$  y  $\theta = \pi/2$ , abarcamos todo el conductor rectilíneo indefinido, obteniéndose:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} [\sin \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} 2$$

y en definitiva:  $B = \mu_0 I / 2\pi a$ , como queríamos demostrar.

**PROBLEMAS: 25 al 33.**

**XXI - 16. Campo magnético creado en el centro de un circuito circular**

«El vector inducción en el campo magnético creado en el centro de un circuito circular, es perpendicular al plano del circuito, de sentido el de avance de un sacacorchos que gira con la corriente y cuyo módulo es directamente proporcional a la intensidad de la corriente e inversamente proporcional al radio del circuito».

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

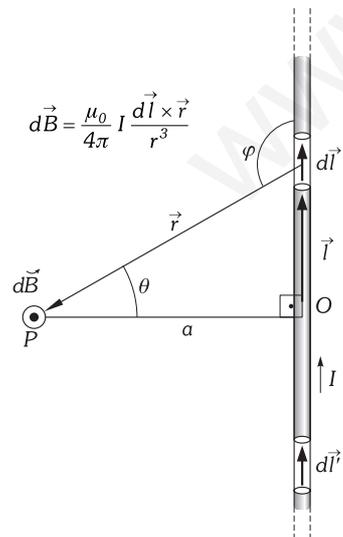


Fig. XXI-35.- La inducción magnética  $d\mathbf{B}$  producida por el elemento  $d\mathbf{l}$  es perpendicular al plano del dibujo y hacia afuera.

En efecto: aplicando la fórmula de Biot y Savart y considerando que el ángulo  $\varphi$  es  $90^\circ$ , obtendremos para valor de la inducción producida por cada uno de los elementos de un circuito circular, en su centro (Fig. XXI-36):

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{R^2}$$

Todos estos campos se suman aritméticamente, ya que tienen la misma dirección (perpendicular al plano del circuito) y el mismo sentido (hacia el exterior), con lo que:

$$B = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \oint dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad \text{c.q.d.}$$

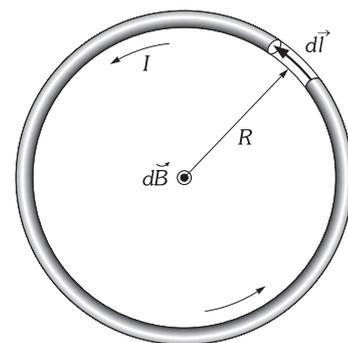


Fig. XXI-36.- La inducción magnética  $\vec{dB}$  debida al elemento de corriente  $\vec{dl}$  en el centro del circuito circular, es perpendicular al plano del dibujo y hacia afuera del papel.

### XXI - 17. Campo magnético creado por un circuito circular en un punto del eje

«El vector inducción en el campo magnético creado en un punto del eje de un circuito circular es perpendicular al plano de la espira y sentido el de avance de un sacacorchos que gira con la corriente y cuyo módulo es:

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2 [R^2 + a^2]^{3/2}}$$

$I$  es la intensidad de corriente que circula por el circuito,  $R$  es el radio de la espira y  $a$  es la distancia del punto del eje al centro del circuito».

Demostremos lo dicho anteriormente aplicando la fórmula de Biot y Savart; la inducción del campo magnético creada por el elemento  $dl$  (Fig. XXI-37) en un punto  $P$  del eje, teniendo en cuenta que la dirección de la corriente y la distancia  $r$  son perpendiculares ( $\varphi = 90^\circ$ ), nos quedará:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2}$$

Descomponiendo el vector  $\vec{dB}$  en los ejes  $X$  e  $Y$  de la figura, y teniendo en cuenta que la componente del eje  $Y$  se nos anulará con la componente de la inducción creada por el elemento  $dl'$  en el punto  $P$ , y que esto nos ocurrirá con todas las componentes en el plano  $\pi$  de las inducciones creadas por todos los elementos que constituyen la espira (Fig. XXI-38), sacamos en consecuencia que la inducción activa será la suma (integral) de todas las componentes de las inducciones magnéticas creadas por todos los elementos de corriente, según el eje  $X$ . Teniendo en cuenta que la componente  $dB_x$  toma el valor:

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2} \cos \beta$$

y que de la Fig. XXI-37, se deduce:

$$r^2 = R^2 + a^2 \quad \wedge \quad \cos \beta = \sin(90^\circ - \beta) = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2}}$$

sustituyendo tenemos:

$$dB_x = \frac{\mu_0 I R}{4\pi [R^2 + a^2]^{3/2}} dl$$

e integrando para todo el circuito:

$$B = \oint dB_x = \oint \frac{\mu_0 I R}{4\pi [R^2 + a^2]^{3/2}} dl = \frac{\mu_0 I R}{4\pi [R^2 + a^2]^{3/2}} \oint dl = \frac{\mu_0 I R}{4\pi [R^2 + a^2]^{3/2}} 2\pi R = \frac{\mu_0 I R^2}{2 [R^2 + a^2]^{3/2}} \quad \text{c.q.d.}$$

Si tenemos un arrollamiento de  $n$  espiras, y suponiendo que el circuito así formado es plano, la inducción magnética creada por él en un punto del eje a una distancia  $a$  (mucho mayor que el espesor del arrollamiento) será:

$$B = \frac{\mu_0 n I R^2}{2 [R^2 + a^2]^{3/2}} \quad (12)$$

DISCO Henry Augustus DE ROWLAND (1848-1901). Si en un disco construido de material aislante, fijamos una pequeña superficie conductora cargada (positivamente en la Fig. XXI-39), y se hace girar, en sus proximidades se orientan magnetómetros de la misma forma que lo harían en las proximidades de un circuito circular. Las medidas experimentales realizadas de la intensidad del campo magnético, coinciden con el valor que se obtendría al determinarlo con la expresión que teóricamente hemos obtenido.

PROBLEMAS: 34 al 41.

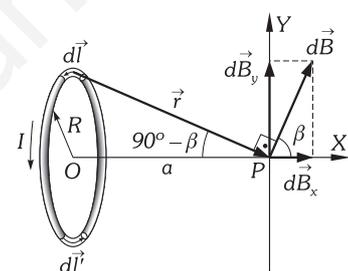


Fig. XXI-37.- Vector inducción en el campo magnético producido por elemento de corriente  $\vec{dl}$ , en el punto  $P$  perteneciente al eje.

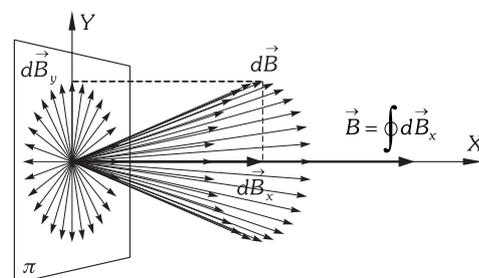


Fig. XXI-38.- Las componentes de la inducción magnética en el plano  $\pi$  se anulan.

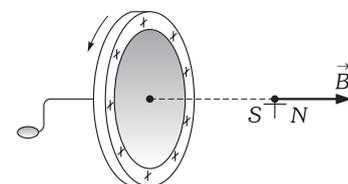


Fig. XXI-39.- Disco de Rowland.

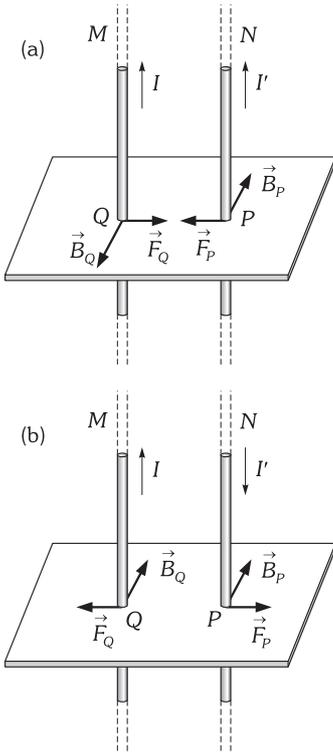


Fig. XXI-40.- Acciones mutuas entre corrientes.

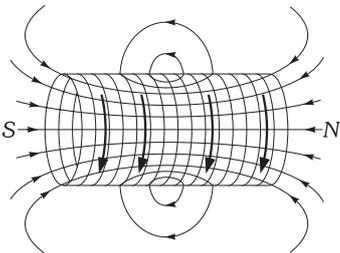


Fig. XXI-41.- Campo magnético de un solenoide.

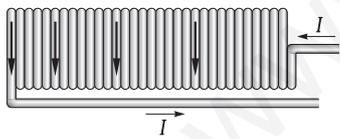


Fig. XXI-42.- Solenoide práctico.

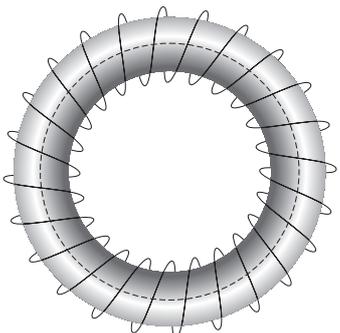


Fig. XXI-43.- Solenoide cerrado.

**XXI - 18. Acciones entre corrientes. Amperio absoluto**

CORRIENTES ELÉCTRICAS DEL MISMO SENTIDO SE ATRAEN. En efecto: la corriente  $M$  de intensidad  $I$  (Fig. XXI-40a) crea en el punto  $P$  del conductor  $N$  un campo magnético, de inducción  $B_p$  perpendicular al plano del dibujo y hacia el interior. Sobre el conductor  $N$  actuará, por lo tanto, una fuerza perpendicular al plano formado por  $I'$  y  $B_p$ ; la fuerza estará situada en el plano del dibujo. La aplicación de la regla del producto vectorial, nos indica que el sentido de tal fuerza  $F_p$  es hacia la izquierda.

Por otra parte, la corriente  $N$ , crea en el punto  $Q$  del conductor  $M$ , un campo magnético, de inducción  $B_q$  perpendicular al plano del dibujo, y hacia el exterior. Sobre el conductor  $M$ , por aplicación de las mismas leyes, determinamos la existencia de la fuerza  $F_q$ .

Las fuerzas  $F_p$  y  $F_q$ , tienden a mover los conductores en el sentido de su atracción.

CORRIENTES ELÉCTRICAS DE SENTIDO CONTRARIO SE REPELEN. En efecto (Fig. XXI- 40b) la corriente  $M$ , crea en  $P$  una inducción magnética  $B_p$ , análoga a la del caso anterior; la fuerza que actúa sobre  $N$  es  $F_p$ . La corriente  $N$  crea en  $Q$  una inducción magnética  $B_q$  hacia el interior del dibujo; la fuerza que actúa sobre  $M$ , es  $F_q$ .

Las fuerzas  $F_q$  y  $F_p$ , tienden a mover los conductores en el sentido de su repulsión.

Si el conductor  $M$  es indefinido, la inducción  $B_p = \mu I / 2 \pi a$ , siendo  $a$  la distancia entre los conductores. El conductor  $N$  está, así, en el seno de tal campo magnético y una longitud  $l$  del mismo estará sometida a una fuerza de valor:

$$F = B_p I' l = \frac{\mu_0 I}{2 \pi a} I' l$$

En la aplicación de la fórmula de la fuerza de Lorentz hemos tenido en cuenta la constancia de  $B_p$  para la longitud  $l$  y su perpendicularidad a  $N$ .

Si en la expresión anterior hacemos  $a = l = 1$  m e  $I = I' = 1$  A, siendo el vacío el medio en que están los conductores ( $\mu_0 = 4 \pi / 10^7$ ), obtenemos:

$$F = \frac{4 \pi}{10^7 \times 2 \pi} = 2 \times 10^{-7} \text{ N}$$

Pudiéndose definir la unidad patrón de intensidad: AMPERIO, como la intensidad de una corriente que circulando por dos conductores rectilíneos muy largos y paralelos, situados en el vacío, a la distancia de 1 metro, produce en cada metro de uno de ellos una fuerza de  $2 \times 10^{-7}$  newtons.

**PROBLEMAS: 42 y 43.**

**XXI - 19. Solenoides.**

Un solenoide está constituido por una serie de circuitos iguales, colocados paralelamente, por los que circula la misma corriente eléctrica en el mismo sentido.

Un solenoide se comporta como un imán, ya que posee una cara  $N$  en uno de sus extremos y una cara  $S$  en el otro; las líneas de campo tienen la forma y sentido indicado en la Fig. XXI-41, como se puede demostrar colocando magnetómetros en el interior y exterior del solenoide y observando su orientación.

Un solenoide práctico (Fig. XXI-42) está formado por un hilo arrollado en espiral por el que circula una corriente; la corriente espiral se puede considerar formada por un conjunto de corrientes paralelas y una rectilínea, consiguiéndose la anulación de las acciones magnéticas de ésta haciendo retornar al hilo hasta su punto de partida.

Si construimos un solenoide cerrado como el de la Fig. XXI-43 y hacemos circular por él una corriente eléctrica se crea en su interior un campo magnético, lo que nos demuestra que no es necesaria la existencia de «polos» para que exista campo magnético.

**XXI - 20. Orientación de un solenoide recto en un campo magnético. Momento magnético de un solenoide.**

Sobre cada una de las espiras del solenoide actúa un par cuyo momento es:  $N_1 = B I A \text{ sen } \varphi$  (párrafo XXI-7). Los momentos que actúan sobre cada espira se suman aritméticamente por su coincidencia en dirección y sentido (perpendicularmente al papel y hacia el interior, en el caso de la Fig. XXI-44); si el solenoide tiene  $n$  espiras, el momento que actúa sobre él es:  $N = n I A B \text{ sen } \varphi$ . El solenoide, si es libre, gira hasta una posición en la que  $N = 0$ . Ninguno de los factores puede serlo, excepto  $\text{sen } \varphi$ , es decir  $\varphi = 0$  ó  $\varphi = 180^\circ$ , colocándose el eje del solenoide en la dirección de las líneas de campo. El primer caso (líneas de campo entrando por la cara  $S$ ) corresponde a un equilibrio estable y el segundo (líneas de campo entrando por la cara  $N$ ) a equilibrio inestable, bastando un pequeño movimiento para que el solenoide gire  $180^\circ$  y adquiera la posición de equilibrio estable.

El momento total que actúa sobre el solenoide lo podemos expresar de la forma:

$$N = n I A \times B$$

llamando MOMENTO MAGNÉTICO DEL SOLENOIDE a:

$$\boxed{\mathbf{m} = nI \mathbf{A}} \Rightarrow \boxed{\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}} \quad (13)$$

idéntica a la (4) obtenida para una espira.

**XXI - 21. Campo magnético en el exterior de un solenoide indefinido o cerrado**

El campo magnético creado en un punto exterior por un solenoide indefinido es nulo, ya que la inducción magnética producida por los polos es nula por ser infinitas sus distancias al punto considerado. Esta afirmación es cierta cuando, sin ser indefinido, el solenoide es lo suficientemente largo para poder despreciar el campo producido en el punto que se considera.

El campo creado en un punto exterior por un solenoide cerrado (Fig. XXI-43) es nulo, ya que podemos considerar a tal solenoide como abierto, con sus polos infinitamente próximos, de forma que las líneas de campo quedan confinadas en su interior sin dispersarse.

**XXI - 22. Campo magnético en el interior de un solenoide recto de longitud  $l$  en un punto de su eje**

Llamemos  $n$  al número total de espiras que tiene el solenoide  $n/l$  será el número total de espiras que existen en la unidad de longitud y por tanto un elemento  $dx$  del solenoide tendrá  $n dx/l$  espiras. La inducción magnética creada por estas espiras en un punto  $P$  del eje será según la (12) de este capítulo:

$$dB = \frac{\mu_0 I n R^2}{2l [R^2 + x^2]^{3/2}} dx$$

siendo  $R$  el radio del solenoide y  $x$  la distancia indicada en la Fig. XXI-45. Teniendo en cuenta que:  $x = R/\text{tg } \varphi$ , diferenciándola obtenemos:

$$dx = -\frac{R}{\text{sen}^2 \varphi} d\varphi$$

sustituyendo y simplificando obtenemos:  $dB = -\frac{\mu_0 I n}{2l} \text{sen } \varphi d\varphi$

e integrando para toda la longitud del solenoide entre los límites  $\beta$  y  $\alpha$  nos queda:

$$B = \int_{\beta}^{\alpha} -\frac{\mu_0 I n}{2l} \text{sen } \varphi d\varphi = \frac{\mu_0 I n}{2l} \int_{\alpha}^{\beta} \text{sen } \varphi d\varphi = \frac{\mu_0 I n}{2l} (\cos \alpha - \cos \beta)$$

con lo que podemos afirmar:

En el interior de un solenoide recto de longitud  $l$  y en un punto de su eje, existe un campo magnético cuyo vector inducción sigue la dirección del eje del solenoide, siendo su sentido el de avance de un sacacorchos que gira con la corriente y su módulo viene dado por la expresión:

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I n}{2l} [\cos \alpha - \cos \beta]} \quad (14)$$

En uno de los extremos del solenoide, siendo éste lo suficientemente largo, y en un punto del eje, al ser  $\alpha = 0$  y  $\beta = 90^\circ$  nos queda para el valor de la inducción magnética:

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I n}{2l}}$$

**XXI - 23. Campo magnético en el interior de un solenoide recto e indefinido y en el interior de un solenoide cerrado**

Si hacemos en la fórmula (14)  $\alpha = 0$  y  $\beta = 180^\circ$  nos quedará el valor de la inducción magnética en un punto del eje de un solenoide recto e indefinido:

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I n}{l}}$$

Esta fórmula, obtenida para un punto del eje, la podremos aplicar con gran aproximación para el valor de la inducción magnética creada por un solenoide recto en cualquier punto del interior de

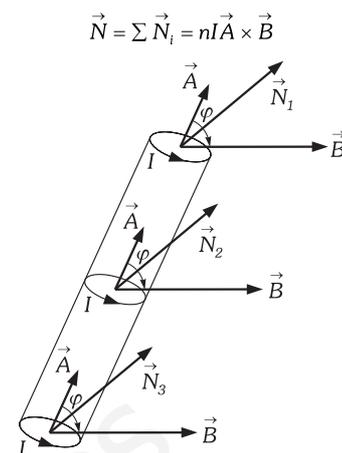


Fig. XXI-44.- El momento resultante que actúa sobre el solenoide es la suma de cada uno de los momentos que actúan sobre cada una de las espiras.

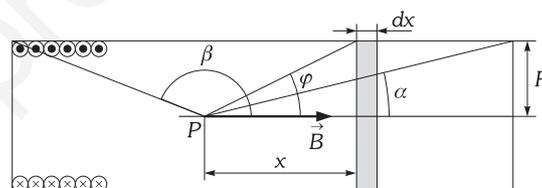


Fig. XXI-45.- Campo magnético en el interior de un solenoide recto.

un solenoide lo suficientemente largo comparado con su radio, exceptuando su aplicación a puntos próximos a sus extremos.

Un solenoide recto e indefinido lo podemos considerar como un solenoide cerrado de radio infinito, pudiendo aplicar la fórmula del valor de la inducción en el interior de un solenoide recto e indefinido a cualquier solenoide cerrado y su valor vendrá dado por la fórmula anterior. En este caso,  $l$  será la longitud media del solenoide (línea de puntos de la Fig. XXI-43). Podremos decir en consecuencia: El valor de la inducción  $B$ , en el interior de un solenoide cerrado es independiente de la forma del solenoide y depende tan sólo la intensidad de la corriente, del número de espiras en cada unidad de longitud ( $n/l$ ) y (como se verá más adelante) del medio que rellena al solenoide ( $\mu$ ).

**PROBLEMAS: 44 y 45.**

## D) PROPIEDADES GENERALES DEL CAMPO MAGNÉTICO. LEY DE AMPÈRE.

### XXI – 24. Introducción

La aplicación de la ley de Biot y Savart para el cálculo de los campos magnéticos, al igual que nos ocurría en Electroestática para la ley de Coulomb, nos conduce muy a menudo a dificultades matemáticas muy complicadas, no solamente por la existencia dentro de la integral del inverso del cuadrado de la distancia, sino también por la presencia del producto vectorial en el numerador de esta ley. Al igual que se hacía en Electroestática, vamos a resolver este problema, tratando de dar una solución menos complicada, calculando las características fundamentales de todo campo vectorial, es decir, los valores microscópicos del campo: la divergencia y el rotacional en cada punto, o bien, magnitudes finitas como son el valor de la integral de superficie de la inducción a través de una superficie cerrada, o flujo a través de una superficie, y el valor de la integral curvilínea del campo a lo largo de una línea cerrada, o circulación. Estas cantidades nos van a proporcionar métodos menos complicados que los empleados anteriormente en la resolución de algunos problemas que ya hemos visto, y nos resuelven otros muchos más.

### XXI – 25. Segunda ecuación de Maxwell.

Recordemos que para el campo electrostático se obtenía que el flujo a través de una superficie cerrada era igual a la carga neta encerrada en ella dividido por el coeficiente dieléctrico:

$$\phi = \oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}$$

consecuencia inmediata de ésta era que:  $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$  expresión local (en un punto) del Teorema de Gauss; esta ecuación nos permitía caracterizar aquellos puntos del campo vectorial electrostático en que éste, valga la expresión, se crea o se destruye; es decir: clasifica los «manantiales» y «sumideros» del campo.

El origen del campo magnético está en las corrientes eléctricas (esta afirmación es experimental, no se ha encontrado un campo magnético que no pueda describirse en función de una distribución de corriente) y por tanto no existen polos magnéticos aislados, es decir, las líneas del campo son siempre cerradas\* (a diferencia de las líneas del campo electrostático que «nacen» en las cargas positivas, «fuentes», y «mueren» en las negativas, «sumideros») y por lo tanto:

$$\oint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

a la que denominaremos LEY DE GAUSS PARA CAMPOS MAGNÉTICOS, de la que deducimos:

$$\oint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \text{div } \mathbf{B} \, dv = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{div } \mathbf{B} = 0} \quad 2^{\text{a}} \text{ ECUACIÓN DE MAXWELL}$$

El hecho experimental de que  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  está de acuerdo con la ley de Biot y Savart, que en nuestra exposición hemos tomado como empírica. En efecto, si calculamos la divergencia en un punto de la inducción magnética creada por una distribución de corrientes totalmente general, llegamos a demostrar que es siempre nula. La demostración analítica la omitimos por ser algo complicada y no aportar ninguna idea nueva dentro del alcance de este libro. (En el problema 46 de este capítulo proponemos una confirmación a esta ley para un caso particular relativamente sencillo).

La ley de Gauss para el campo magnético tampoco nos proporciona métodos sencillos para el cálculo de  $\mathbf{B}$ , por consiguiente, busquemos otra alternativa que nos proporcione un procedimiento más fácil.

\* El lector puede comprobar en los casos anteriores que hemos estudiado que las líneas de campo son siempre cerradas, no tienen principio ni fin.

**XXI – 26. Ley de Ampère**

«En un campo magnético, la circulación del vector inducción a lo largo de una curva cerrada  $C$  es igual a  $\mu_0$  veces la intensidad de corriente que corta el área de dicha curva».

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

La ley de Ampère solamente es válida para corrientes estacionarias, y es útil para determinar  $B$  en configuraciones geométricas de corriente que tienen un alto grado de simetría.

Para comprender perfectamente el significado de esta ley observemos la Fig. XXI-46, en ella se consideran varios conductores cualesquiera. Cada uno de ellos creará un campo magnético. La inducción magnética total será, en virtud del principio de superposición, la suma de todas ellas. Si consideramos una línea cerrada  $C$  arbitraria, en la figura el área  $C$  está atravesada por  $I_2, I_3$  e  $I_4$  (la intensidad  $I_3$  atraviesa a la superficie de  $C$  en sentido contrario a  $I_2$  e  $I_4$ ), el valor de la circulación de  $\mathbf{B}$  a lo largo de esa línea, será:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (I_2 - I_3 + I_4)$$

tomamos como positiva a la corriente que atraviesa a  $C$  en el sentido de avance de un sacacorchos cuyo sentido de giro coincide con el de la circulación en torno a la curva, y negativa si el sentido es opuesto. Obsérvese que la circulación del vector  $\mathbf{B}$ , solamente depende de la magnitud y sentido de la intensidad de corriente eléctrica encerrada por la curva cerrada y no de su situación particular dentro de la curva donde ésta la atraviesa.

Vamos a demostrar el teorema de Ampère para un caso particular (la demostración general es compleja y no la tratamos en este curso de Física General). Consideremos un hilo conductor rectilíneo e indefinido por el cual circula una intensidad  $I$  (Fig. XXI-47). Calculemos la circulación de la inducción magnética creada por él en una línea cerrada  $C$  arbitraria pero contenida en un plano perpendicular al hilo. El campo que crea el hilo conductor en cualquier punto que dista  $r$  del hilo viene caracterizado por la inducción  $B = \mu_0 I / 2\pi r$ , que es tangente a la circunferencia con centro el punto del hilo que corta al plano. Según esto:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_C B dl \cos \theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_C \frac{dl \cos \theta}{r}$$

pero  $dl \cos \theta$  es la proyección de  $dl$  sobre  $B$ :  $dl \cos \theta = dr$ , y por otra parte:  $dr = r d\varphi$  luego:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \int_C \frac{r d\varphi}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi} I 2\pi \Rightarrow \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

El mismo razonamiento hubiéramos seguido si el área de  $C$  estuviese atravesada por otro hilo conductor. El resultado sería la superposición de los dos.

Si existen conductores que no atraviesan el área de  $C$  no influyen para nada en el valor de la circulación. Dejamos para el lector como ejercicio la comprobación de que:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

si la curva  $C$  no encierra ninguna corriente.

Teniendo en cuenta que la corriente que pasa por una superficie cualquiera  $A$ , expresada en función de la densidad de corriente viene dada por:

$$I = \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} \Rightarrow \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_A \mathbf{rot} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

expresión diferencial de la ley de Ampère. Insistimos de nuevo en que la expresión obtenida se debe a corrientes estacionarias, esto es a corrientes que satisfacen:  $div \mathbf{J} = 0$ . Más adelante modificaremos esta ecuación para expresarla en su forma general.

Esta ley, permite, en un gran número de casos, calcular inducciones magnéticas con gran facilidad. Pero no constituye un método general para su cálculo. Recuérdese que en Electroestática, es muy sencillo calcular el campo eléctrico utilizando la ley de Gauss cuando previamente se conoce «algo» del campo: su simetría. En el caso presente, sí conocemos de antemano cómo ha de ser el campo magnético, es decir: sabemos la forma de sus líneas de campo; mediante la ley de Ampère podremos calcular el valor de la inducción en cada punto.

En Electroestática el teorema de Gauss era cómodo cuando la simetría del campo es esférica, cilíndrica o plana; en magnetismo la ley de Ampère es práctica si las líneas de campo o son circulares o el campo es uniforme. Veremos a continuación algunos casos prácticos, en los que aparecen estas simetrías.

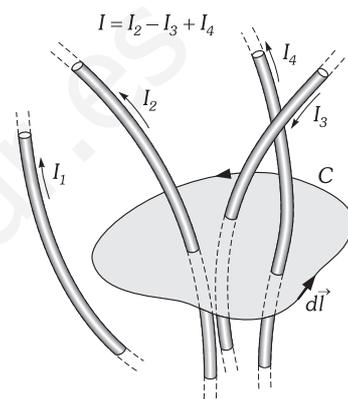


Fig. XXI-46.- La circulación de la inducción magnética a lo largo de una línea cerrada  $C$  es proporcional a la corriente neta encerrada por la curva.

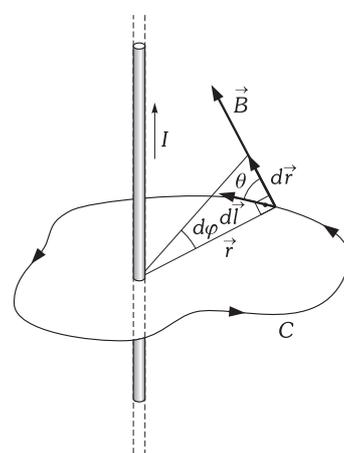


Fig. XXI-47.- Circulación de la inducción magnética producida por una corriente rectilínea e indefinida a lo largo de una línea cerrada  $C$ .

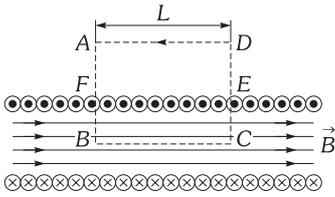


Fig. XXI-48.- Inducción magnética en el interior de un solenoide largo con  $N$  espiras por unidad de longitud.

**XXI – 27. Campo magnético en el interior de un solenoide largo**

Representamos en la figura XXI-48 la sección de un solenoide muy largo comparado con su diámetro, de tal forma, que si nos interesa sólo el cálculo de la inducción en un punto interior alejado de los extremos podemos suponerlo como indefinido, y sabemos (de antemano) que la inducción en el interior es uniforme y en el exterior es nula. Sabiendo esto, calculemos la circulación de  $\mathbf{B}$  a lo largo de una trayectoria que nos interese, es decir, que sea cómoda de cálculo, y en este caso de campo uniforme, elegimos un rectángulo ABCD parte del cual este dentro del campo y parte fuera. Tenemos que calcular:

$$\oint_{ABCD} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_B^C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_C^D \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_D^A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

pero:

$$\int_A^B \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_E^D \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_D^A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

puesto que  $\mathbf{B} = 0$  en el exterior. Además:

$$\int_B^C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_C^E \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

porque  $\mathbf{B}$  y  $d\mathbf{l}$  en los tramos FB y CE son siempre perpendiculares, luego el producto escalar será nulo. Por tanto el valor de:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_B^C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_B^C B dl = B \int_B^C dl = BL$$

ya que en el tramo BC, todo  $d\mathbf{l}$  es paralelo a  $\mathbf{B}$ , y al ser el campo uniforme el módulo de B es constante en todo punto, por lo que se puede sacar de la integral. Apliquemos ahora la ley de Ampère:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

teniendo en cuenta que  $I$  es la intensidad que atraviesa el área de la curva C. En nuestro caso, el área del rectángulo ABCD es cortada sucesivas veces por el conductor que suponemos que transporta una intensidad  $I$ . Cada espira la corta una vez, y si hay  $N$  espiras por unidad de longitud, el número total de veces que la intensidad corta al área del rectángulo será:  $NL$ . Luego tendremos que:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 N L I$$

e igualando ambas expresiones de la circulación nos queda:  $BL = \mu_0 N L I$ . Si la longitud total del solenoide fuese  $l$  y  $n$  el número total de espiras:  $N = n/l$ , luego:

$$B = \mu_0 \frac{nI}{l}$$

que es exactamente igual a la obtenida en el párrafo XXI-23.

**XXI – 28. Campo magnético en el interior de una bobina toroidal**

Una bobina de este tipo es un solenoide cuyos extremos se juntan formando un toroide. La simetría del problema exige que las líneas de campo sean circulares con centro el del toroide. En la Fig. XXI-49 representamos una sección de tal toroide, indicando alguna de las líneas del campo magnético. En el exterior el campo magnético es nulo.

Ahora la inducción en el interior no es uniforme (líneas circulares) y no podemos asegurar que su módulo sea independiente de la distancia al centro. Únicamente, si  $r_2 - r_1$  es pequeño frente a  $r_1$  ( $r_1$  y  $r_2$  son los radios mínimo y máximo del toroide) podemos asegurar que el módulo de  $\mathbf{B}$  será prácticamente independiente de la distancia al centro. Para calcular el módulo de  $\mathbf{B}$  tomaremos una línea circular de radio:  $r_m = (r_1 + r_2)/2$  (única línea que se adapta a la simetría del problema), y calcularemos la circulación a lo largo de esta línea media (C). Como  $\mathbf{B}$  es paralelo a todo  $d\mathbf{l}$  de la línea de integración obtenemos:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C B dl = B \oint_C dl = B 2\pi r_m$$

en este cálculo hemos sacado el módulo  $B$  fuera de la integral puesto que es constante en todos los puntos de la línea. Por otra parte, el área de la línea C está cortada por todas las espiras del enrollamiento, si hay  $n$  espiras, la aplicación de la ley de Ampère nos dará:

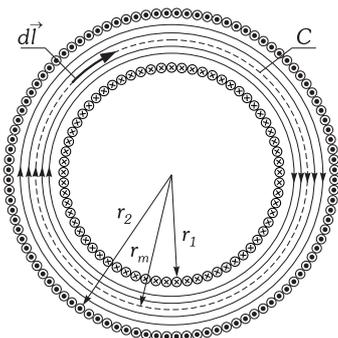


Fig. XXI-49.- Inducción magnética en el interior de una bobina toroidal.

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 n I$$

que igualada a la anterior, nos queda:

$$B 2\pi r_m = \mu_0 n I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 n I}{2\pi r_m} \Rightarrow \boxed{B = \mu_0 \frac{n I}{l}}$$

siendo  $l = 2\pi r_m$  (longitud de la línea media).

### XXI - 29. Campo magnético producido por un hilo conductor cilíndrico rectilíneo e indefinido

Calcularemos la inducción en un punto que diste  $r$  del eje del conductor cilíndrico de radio  $a$ , para  $r > a$  y para  $r < a$ . Por simetría, la inducción magnética tiene que ser tal que sus líneas de campo sean circulares con centro en el eje del conductor, como se indica en la Fig. XXI-50. Como es un caso de simetría muy particular, la ley de Ampère nos servirá para calcular el módulo de la inducción en cualquier punto. Su dirección y sentido lo conocemos, pues ha de ser tangente a las líneas de campo, y el sentido de éstas el de giro de un sacacorchos que avance en la dirección de la corriente.

a) CÁLCULO DE LA INDUCCIÓN EN UN PUNTO  $P_1$  QUE DISTE  $r > a$  (Fig. XXI-50).

Elegimos como línea de integración una circunferencia  $C$  que coincida con la línea de campo de radio  $r$ . De esta manera el campo  $\mathbf{B}$  y  $d\mathbf{l}$  son paralelos en todo punto de la línea, por tanto se verifica que:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C B dl = B \oint_C dl = B 2\pi r$$

hemos sacado fuera de la integral el módulo de  $B$  pues es constante en todo punto de la línea  $C$ . Por otra parte, la aplicación de la ley de Ampère nos dará:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

ya que la intensidad que atraviesa el área de la línea  $C$  es la que circula por el conductor. Igualando a la anterior nos queda:

$$B 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}} \quad (15)$$

expresión ya conocida, pero deducida ahora de una forma más sencilla.

b) CÁLCULO DE LA INDUCCIÓN EN UN PUNTO  $P_2$  INTERIOR AL CONDUCTOR,  $r < a$  (Fig. XXI-51).

Elegimos como línea de integración una circunferencia  $C$  que coincida con una línea de campo de radio  $r$ . Operando exactamente igual que en el caso (a), la circulación del campo a lo largo de dicha línea será:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B 2\pi r \quad (16)$$

La intensidad que atraviesa el área de  $C$  no será la misma que circula por el conductor «entero». Como la corriente circula uniformemente a través del conductor, podemos decir que la intensidad por unidad de área es constante, o lo que es lo mismo, que la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  es uniforme en todo el conductor (corrientes estacionarias). El valor de la densidad de corriente será:  $J = I/\pi a^2$ , luego la intensidad  $I'$  que circula por la sección de área  $C$  será:  $J = I'/\pi r^2$ , es decir:

$$J = \frac{I'}{\pi r^2} = \frac{I}{\pi a^2} \Rightarrow I' = I \frac{r^2}{a^2}$$

por lo que la aplicación de la ley de Ampère nos dará:  $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \frac{r^2}{a^2}$

igualando a (16) nos queda:  $B 2\pi r = \mu_0 I \frac{r^2}{a^2} \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r} \quad (17)$

Obsérvese que las expresiones (15) y (17) coinciden cuando  $r = a$  dando:

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}}$$

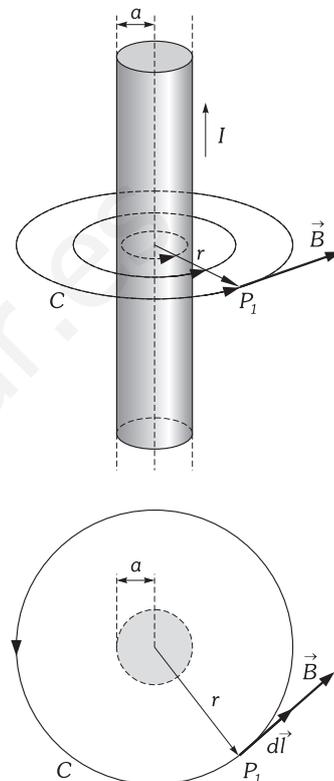


Fig. XXI-50.- Inducción magnética producida por un hilo conductor rectilíneo e indefinido en un punto que dista  $r > a$ .

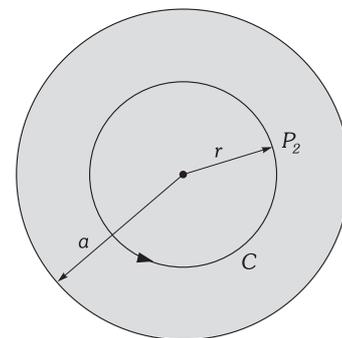


Fig. XXI-51.- Inducción magnética producida por un hilo conductor rectilíneo indefinido en un punto que dista  $r < a$ .

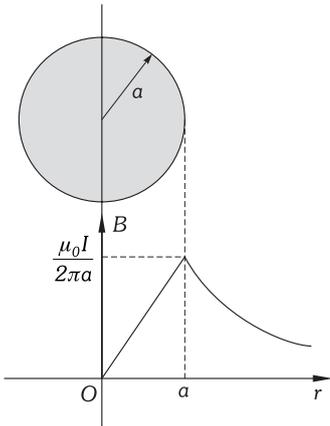


Fig. XXI-52.- Variación de la inducción magnética con la distancia al eje del hilo conductor.

por tanto, este es el valor del campo en la superficie del conductor. La Fig. XXI-52 nos representa la variación de  $B$  con la distancia al eje del hilo conductor.

**PROBLEMAS: 46 al 54.**

**E) CAMPOS MAGNÉTICOS PRODUCIDOS POR CORRIENTES NO ESTACIONARIAS**

**XXI - 30. El campo magnético producido por una corriente de desplazamiento**

En el párrafo XX-26, se introdujo el concepto de densidad de corriente de desplazamiento, como:

$$\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

y fue justificada para el caso particular de un condensador en carga con un dieléctrico que llenaba sus armaduras en función del término  $\partial \mathbf{P} / \partial t$ . Vamos a justificar, también para un caso particular, el valor de esta corriente de desplazamiento, cuando no exista dieléctrico; en tal caso:

$$\mathbf{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{18}$$

Confirmada experimentalmente la existencia de la corriente de desplazamiento, ésta tendrá que contribuir a la producción del campo magnético de forma idéntica a como lo hace la corriente de conducción  $I$ , por lo que la ley de Biot y Savart y la ley de Ampère, serán:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} (I + I_D) \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (I + I_D)$$

distíngase  $d\mathbf{l}$  en las dos fórmulas, puesto que no quieren decir lo mismo; en la ley de Biot y Savart es un elemento de corriente, mientras que en la ley de Ampère es un elemento de curva que limita a un área, a lo largo de la cual se integra.

Como ejemplo, consideremos el caso de un condensador en carga como se indica en la Fig. XXI-53, en la que consideramos que la pequeña separación entre las placas circulares y paralelas del condensador con vacío en su interior, es mucho menor que su radio  $R$ ; por tanto, el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  producido por las cargas que se van localizando en sus placas, es prácticamente homogéneo en un instante dado y se encuentra encerrado entre ellas. El valor del flujo de campo eléctrico, a través de la superficie  $A_1$  (igual a la superficie  $A$  de las placas del condensador) es evidente que toma el valor:

$$\phi = \int_{A_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = A E(t)$$

para un determinado instante, y para él, la aplicación del teorema de Gauss a la superficie cilíndrica cerrada que se indica en la figura nos conduce a:

$$\phi = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q(t)}{\epsilon_0}$$

y puesto que el flujo del campo eléctrico a través de  $A_2$  y del área lateral del cilindro es nulo, podemos igualar las dos anteriores, y nos queda:

$$A E(t) = \frac{Q(t)}{\epsilon_0} \Rightarrow E(t) = \frac{Q(t)}{\epsilon_0 A} \tag{19}$$

Por otro lado, la expresión (18) y las condiciones de nuestro caso particular en estudio nos conducen a que:

$$I_D = A J_D = \epsilon_0 A \frac{dE}{dt}$$

sustituyendo la (19), después de derivarla, nos queda:

$$I_D = \frac{dQ}{dt} = I$$

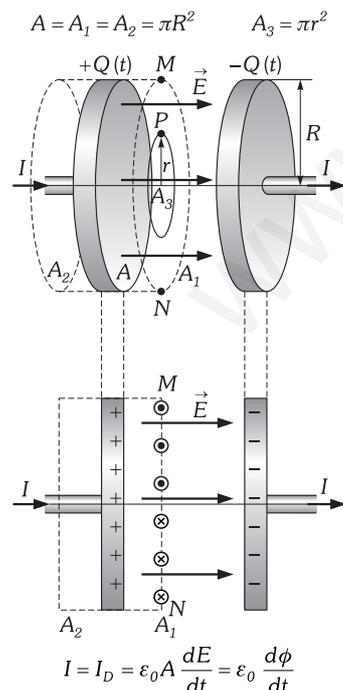


Fig. XXI-53.- La corriente de desplazamiento  $I_D$  entre las placas es igual a la corriente de conducción.

es decir: *la corriente de desplazamiento es igual a la corriente de conducción*, lo que está en perfecto acuerdo con la idea general expresada por Maxwell, para la definición de la corriente de desplazamiento en general.

Para calcular la inducción magnética  $\mathbf{B}$  en algún punto en el interior del condensador, por ejemplo en  $P$  a una distancia  $r$  del eje de simetría de la figura, aplicaremos la ley de Ampère aprovechando la simetría del campo, ya que sus líneas de campo magnético tienen que ser circulares y coaxiales con dicho eje, y en cualquier punto de una determinada línea de campo, la inducción tiene que tener el mismo módulo y es tangente al círculo (así en los puntos  $M$  y  $N$ , la inducción magnética  $\mathbf{B}$  es la misma, apuntando en  $M$  hacia afuera de la hoja y en  $N$  hacia dentro). Si además tenemos en cuenta que el plano  $A_3$  (círculo de radio  $r$ ), limitado por la curva  $C_3$  (circunferencia), sólo es atravesado por una parte ( $I'_D$ ) de la intensidad total de la corriente de desplazamiento ( $I_D$ ) que sale de la placa izquierda del condensador, la aplicación de la ley de Ampère, y el cálculo de la integral de línea de  $\mathbf{B}$  a lo largo de la circunferencia  $C_3$  de radio  $r$ , nos conduce a:

$$\oint_{C_3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I'_D = B 2\pi r \quad (20)$$

Por otro lado, hemos visto, que para el instante que estamos considerando,  $\mathbf{E}$  es uniforme en la región comprendida entre las placas del condensador, con lo que la densidad de corriente de desplazamiento  $\mathbf{J}_D$  también lo será, y la intensidad total de corriente de desplazamiento  $I_D$  a través de las placas del condensador será:  $I_D = A J_D = \pi R^2 J_D$ . En consecuencia, la fracción de intensidad de corriente de desplazamiento  $I'_D$ , toma el valor:

$$I'_D = A_3 J_D = \frac{A_3}{A} I_D = \frac{r^2}{R^2} I$$

en la que se ha sustituido  $I_D$  por la corriente de conducción  $I$ , puesto que ya se ha visto que son iguales. Sustituyendo en (20), nos queda:

$$B = \frac{\mu_0 r}{2\pi R^2} I$$

este resultado nos demuestra que  $B = 0$  en la región comprendida entre las placas en el eje de simetría de la Fig. XXI-53; aumentando linealmente con la distancia al mismo eje hasta el límite del espacio comprendido entre las placas del condensador. Un cálculo análogo al realizado, muestra que fuera del espacio comprendido entre las placas del condensador,  $\mathbf{B}$  es el mismo que si el conductor fuera continuo y no existiera el condensador, es decir:  $B = \mu_0 I / 2\pi r$ .

El hecho general de que un campo eléctrico variable en una región del espacio es equivalente a una corriente de desplazamiento (fórmula 18), que a su vez nos produce un campo magnético en el espacio circundante, aunque no existan corrientes de conducción ni materia, proporciona la clave para la comprensión del análisis de las radiaciones electromagnéticas y por tanto de la luz como caso de estas radiaciones; trataremos este tema en el capítulo XXIII.

**PROBLEMAS: 55 y 56.**

## F) PROPIEDADES MAGNÉTICAS DE LA MATERIA

Los estudios realizados hasta ahora de las propiedades del campo magnético, relacionados con las intensidades de corriente, han sido hechos en el vacío (o a lo sumo en el aire en el que la permeabilidad magnética  $\mu_0$  es prácticamente la misma que en el vacío). La experiencia nos pone de manifiesto la gran influencia que tienen determinadas sustancias sobre los campos magnéticos.

Hay sustancias (imanes naturales) que por sí mismas son capaces de crear campos magnéticos, otras por el hecho de «estar» en un campo magnético se imanán, etc. Estas y muchas otras propiedades de los materiales son de gran importancia práctica, siendo una de las principales bases de la construcción de dispositivos eléctricos.

Las razones de las propiedades magnéticas de la materia, las encontramos en su estructura íntima, siendo este el tema que vamos a tratar.

### XXI – 31. Cuerpos ferromagnéticos, paramagnéticos y diamagnéticos

Así como las sustancias neutras, al ser sometidas a la acción de un campo eléctrico, son siempre atraídas hacia las fuentes del campo, los efectos magnéticos son de dos tipos, existen materiales que son atraídos a los lugares en que los campos magnéticos son más intensos y otros son repelidos de dichos lugares.

El comportamiento magnético de los cuerpos nos hace clasificarlos en tres grandes grupos: *Ferromagnéticos*, *paramagnéticos* y *diamagnéticos*. Todas las sustancias sean sólidas, líquidas o gaseosas tienen su clasificación en estos tres grupos.

*Los cuerpos FERROMAGNÉTICOS y PARAMAGNÉTICOS son siempre atraídos hacia las zonas en que el campo magnético es más intenso (Fig. XXI-54), por el contrario los materiales DIAMAGNÉTICOS son repelidos, es decir, se dirigen hacia los lugares en que el campo magnético es menos intenso.*

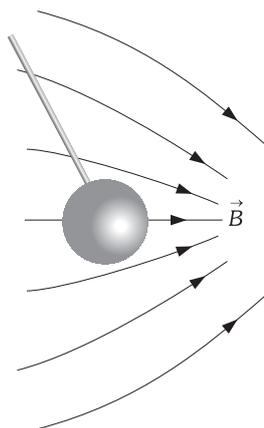


Fig. XXI-54.- Acción de un campo magnético sobre una sustancia ferromagnética.

La diferencia existente entre las sustancias ferromagnéticas y paramagnéticas está en el orden de la magnitud de la fuerza de atracción hacia las zonas en que los campos magnéticos son más intensos. Mientras que los materiales ferromagnéticos son atraídos fuertemente los paramagnéticos son atraídos por los efectos magnéticos en orden de magnitud mil a un millón de veces menor. Los efectos sobre los materiales diamagnéticos son en orden de magnitud muy parecidos a los efectos en cuerpos paramagnéticos.

Son sustancias ferromagnéticas el Fe, Co, Ni y determinados compuestos y aleaciones de ellos; entre las paramagnéticas se encuentran el Al, Pt, Na, aire y oxígeno. Ejemplos de sustancias diamagnéticas son, entre otras, el Cu, Bi, Pb, agua y NaCl.

Nuestro siguiente estudio es dar razones de la modificación del campo magnético debida a la presencia de una sustancia; para lo cual lo primero que es preciso saber es cómo se mide el campo magnético en el interior de un material.

**XXI - 32. Medida de un campo magnético en el interior de una sustancia**

Supongamos un arrollamiento toroidal  $N$  [Fig. XXI-55, llamados anillos de Henry Augustus-Rowland (1848-1901)], por el que puede circular una corriente; rodeando tales espiras tenemos otras  $P$ , conectadas con un galvanómetro balístico; al abrir rápidamente el interruptor  $S$ , varía el flujo magnético que atraviesa  $P$  y se produce en él una corriente inducida, cuya intensidad es\*:

$$I = -\frac{n}{R} \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow I dt = -\frac{n}{R} d\phi \Rightarrow q = \int I dt = -\frac{n}{R} \int d\phi = \frac{n}{R} \phi \Rightarrow \phi = \frac{qR}{n}$$

siendo  $n$  es número de espiras del arrollamiento  $P$ ,  $\phi$  el flujo magnético que atraviesa a cada una de sus espiras,  $R$  la resistencia de  $P$  y del galvanómetro balístico, y  $q$  la carga que atraviesa al galvanómetro y que queda medida por él. Como el valor del flujo magnético a través de una espira es  $\phi = BA$ , siendo  $B$  la inducción magnética en el interior del material y  $A$  la sección de éste:

$$BA = \frac{qR}{n} \Rightarrow \boxed{B = \frac{qR}{An}}$$

quedando determinada la inducción a través del toroide.

**XXI - 33. Campo magnético en los cuerpos ferro, para y diamagnéticos. Permeabilidad relativa**

En el párrafo XXI-27 hemos visto que en un arrollamiento toroidal con vacío en su interior, el campo magnético en un punto del anillo es:

$$B = \mu_0 \frac{nI}{l}$$

$n$  = número de espiras,  $l$  = longitud de la línea media,  $I$  = intensidad que circula por el arrollamiento a la que llamamos CORRIENTE DE CONDUCCIÓN. Realicemos la siguiente experiencia: Si en vez de vacío, el mismo arrollamiento (no variamos  $I$ ,  $n$  y  $l$ ) lo hacemos sobre un medio material y se mide el campo en el interior del anillo de la forma indicada en el apartado anterior se observa:

- a) Si la sustancia que constituye el anillo sobre el que hacemos el arrollamiento es ferromagnética, el campo en el interior es extraordinariamente mayor (en ocasiones más de cinco mil veces mayor que el campo magnético en vacío).
- b) Si el medio material que constituye el anillo es paramagnético observamos que el campo magnético es ligeramente mayor que cuando había vacío.
- c) Si la sustancia que constituye en anillo es diamagnética el campo magnético en su interior es ligeramente inferior que cuando había vacío.

Definimos, por el momento, la PERMEABILIDAD RELATIVA  $\mu'$  de un medio como:

$$\boxed{\mu' = \frac{B}{B_0}}$$

donde  $B_0$  es el valor de la inducción magnética producida por el arrollamiento en el vacío y  $B$  la del mismo arrollamiento con el medio llenando completamente el espacio que antes ocupaba el vacío.

\* Ver en el capítulo siguiente CORRIENTES INDUCIDAS. Estas corrientes por ser función del tiempo, no son estacionarias.

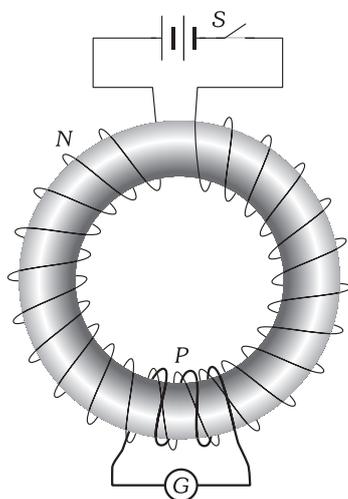


Fig. XXI-55.- Muestra de un material en forma toroidal bobinado (anillo de Rowland). Se ha colocado un segundo bobinado  $P$  conectado a un galvanómetro.

**XXI – 34. Corrientes superficiales equivalentes**

A la vista de los resultados experimentales señalados en el apartado anterior vamos a hacer una nueva experiencia que esquematizamos en la Fig. XXI-56.

En el arrollamiento toroidal con vacío en el interior vamos a suponer un nuevo arrollamiento de  $n'$  espiras por el cual hacemos circular una corriente  $I_M$  de tal manera que el módulo de la inducción magnética en un punto interior es:

$$B = \mu_0 \frac{nI}{l} + \mu_0 \frac{n' I_M}{l}$$

llamaremos a:

$$\frac{nI}{l} = j \quad \wedge \quad \frac{n' I_M}{l} = j_M \tag{21}$$

cantidades que tienen dimensiones de intensidad de corriente por unidad de longitud, y se les llama DENSIDADES SUPERFICIALES DE CORRIENTE, cuyo significado físico trataremos más adelante.

Si por el segundo arrollamiento hacemos circular una corriente  $I_M$  elegida adecuadamente, podemos lograr que la inducción magnética  $B$  sea la misma que la que existe en el arrollamiento toroidal hecho sobre una determinada sustancia. De esta forma hemos sustituido el material por una distribución de corrientes obteniendo para el campo magnético los mismos resultados. Por lo que llegamos a la conclusión siguiente:

«Sobre las sustancias sometidas a un campo magnético aparecen corrientes que tienden a incrementar (ferro y paramagnéticas) o disminuir (diamagnéticas) el campo en su interior. A estas corrientes las llamamos CORRIENTES DE MAGNETIZACIÓN».

Estas corrientes son particularmente intensas y circulan en el mismo sentido que las de conducción si la sustancia es ferromagnética.

Según sean los materiales para o diamagnéticos las corrientes superficiales (muy débiles en comparación con las ferromagnéticas) circulan en el mismo sentido o sentido contrario que la corriente de conducción.

Si construimos el anillo con una sustancia magnetizada, entonces sin necesidad de corrientes de conducción, existe en su interior un campo magnético, por lo que en esa sustancia existe una distribución de corrientes superficiales que se mantienen con el tiempo.

Para la explicación del comportamiento eléctrico de la materia, en Electricidad, admitíamos la existencia de cargas de polarización que superponíamos a las cargas libres. El comportamiento magnético de la materia es «similar», superpuestas a las corrientes de conducción aparecen otras que llamamos corrientes de magnetización cuya existencia se trata en la cuestión siguiente.

Antes de seguir estudiando el comportamiento de la materia nos conviene dejar claro el concepto de las densidades superficiales de corriente. Supongamos una «cinta» conductora por la que circula una corriente  $I$  (Fig. XXI-57). Si el espesor de la cinta es muy pequeño, tiene poco sentido hablar de corriente por unidad de área transversal, es más lógico hablar de corriente por unidad de longitud transversal.

Como consecuencia de todo lo anterior, tenemos que modificar la formulación matemática vista hasta ahora (expresiones de cálculo de campos en el vacío) añadiendo los términos correspondientes a las corrientes de magnetización. Así escribiremos la ley de Biot y Savart que nos da la inducción magnética en un punto, de la forma:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int I \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int I_M \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

y el Teorema de Ampère:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (I + I_M)$$

**XXI – 35. Interpretación física de las corrientes superficiales equivalentes: Teoría molecular del paramagnetismo y del diamagnetismo**

Hasta ahora nos hemos limitado a describir cualitativamente el comportamiento magnético de la materia, llegando a la conclusión de que se pueden «reproducir» los efectos magnéticos de los materiales con corrientes eléctricas adecuadas. Vamos a ver que tales corrientes tienen sentido físico (existen realmente) y que su causa radica en la estructura atómica de la materia.

Ampère (1825) fue el primero en exponer la teoría de la existencia de ciertas «corrientes particulares» capaces de interpretar los fenómenos magnéticos relacionados con la materia incluso los concernientes a los imanes permanentes.

Modernamente se ha demostrado que los átomos se comportan como si sus electrones periféricos estuviesen girando continuamente en torno al núcleo y poseyendo además cada electrón algo equivalente a un movimiento de rotación propia (a cuyo momento angular correspondiente se le denomina «spin»). Se puede, por consiguiente, atribuir a los átomos de cada molécula un momento magnético.

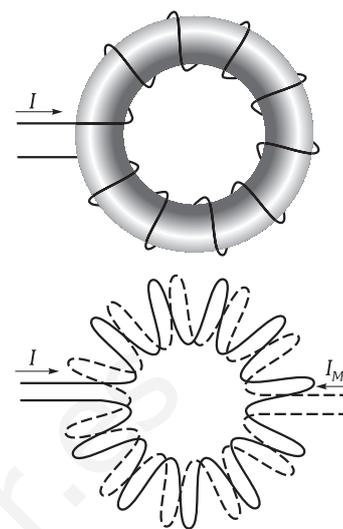


Fig. XXI-56.– El esquema superior representa un anillo de Rowland construido sobre un material. El inferior son dos bobinados superpuestos, el primero transporta una corriente igual a la de la Fig. superior y al segundo le hacemos circular otra corriente ( $I_M$ ) de tal manera que el campo magnético en el interior del arrollamiento sea el mismo que en el interior del esquema superior.

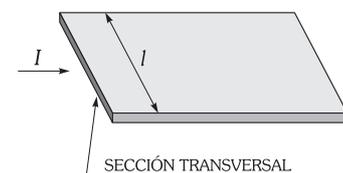


Fig. XXI-57.– Corriente por unidad de longitud transversal.

Para aclarar lo dicho razonemos sobre un «modelo» sencillo. Supongamos que una carga  $q$  describe una trayectoria circular de radio  $R$  con velocidad angular  $\omega$  (Fig. XXI-58). Comprobemos que el movimiento de tal carga equivale a una espira circular de radio  $R$  por la cual circularía una intensidad de corriente  $I$  cuyo valor es:

$$I = \frac{qL}{2\pi R^2 M}$$

$M$  = masa de la partícula de carga  $q$ ,  $L$  = momento angular orbital de la partícula. En efecto: si la trayectoria es la de la figura y la velocidad angular es  $\omega$ , la frecuencia será:  $\nu = \omega/2\pi$ , y por el punto  $P$  pasa la partícula  $\nu$  veces en un segundo, luego, en un segundo por el punto  $P$  pasa una carga  $q\nu$ , por tanto, en un intervalo de tiempo  $dt$  la carga  $dq$  que pasará por  $P$  será:  $dq = \nu q dt$ , luego la intensidad de la corriente a que da lugar (equivale) el movimiento de esa partícula cargada será:

$$I = \frac{dq}{dt} = \nu q = \frac{\omega}{2\pi} q$$

Por otra parte, el momento angular de la partícula es:  $L = \Lambda \omega$ , ( $\Lambda$  = momento de inercia respecto al centro =  $MR^2$ ), entonces:

$$I = \frac{1}{2\pi} q \frac{L}{\Lambda} = \frac{qL}{2\pi MR^2} \quad \text{c.q.d.}$$

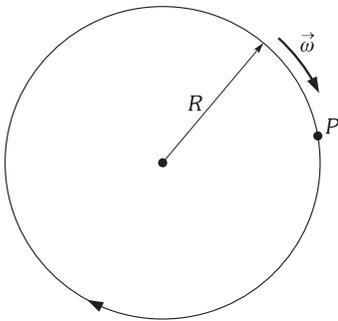


Fig. XXI-58.- Trayectoria seguida por una carga  $q$  con velocidad angular  $\omega$ .

El «c circuito» obtenido tendrá un momento magnético (ver párrafo XXI-7) cuyo valor será:  $m = I \pi R^2$ , es decir:  $m = qL/2M$ . Como  $\mathbf{m}$  es un vector perpendicular al plano del circuito y el momento angular  $\mathbf{L}$  también, se verifica que:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \frac{q}{M} \mathbf{L}$$

Este resultado obtenido con un «modelo» muy sencillo, se demuestra que tiene una validez mucho más general, de forma que si consideramos una partícula cargada con un momento angular  $\mathbf{J}$  cuyo valor según vimos en mecánica es:  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ , a tal momento cinético le está asociado un momento magnético cuyo valor es:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \frac{q}{M} \mathbf{J}$$

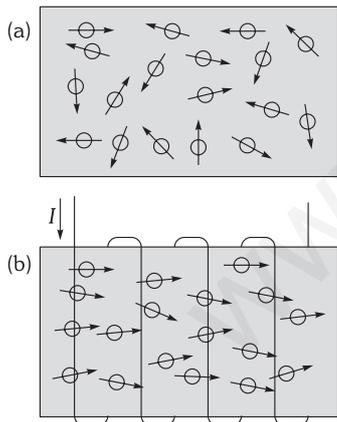


Fig. XXI-59.- Sustancias en las que los momentos magnéticos de sus átomos o moléculas tienen un determinado valor.

Existen sustancias en que los momentos magnéticos de sus átomos o moléculas son nulos, en otras tiene un valor determinado. Si en las segundas los momentos magnéticos atómicos o moleculares están orientados al azar su resultante es nula en todo el volumen del material (Fig. XXI-59a). Si a los materiales de este tipo se les somete a un campo magnético externo, los momentos magnéticos «tienden» a orientarse en la dirección del campo (Fig. XXI-59b), de manera que dan resultante *no nula* en la dirección del campo.

Teniendo en cuenta que a cada momento magnético le corresponde un «pequeño circuito» que podemos suponer circular o elíptico, podemos representar una sección transversal del cilindro anterior en el supuesto que la orientación fuera total, de la forma indicada en la (Fig. XXI-60).

Las corrientes moleculares están orientadas de tal forma que cada circuito elemental está junto a otro (Fig. XXI-61a) con lo que las influencias de sus corrientes se cancelan entre sí, excepto las de la periferia del material. El conjunto es equivalente (Fig. XXI-61b) a un circuito que se extiende por el perímetro de la sección y recorrido por una corriente  $I$ , del mismo sentido que la del solenoide que crea el campo exterior. Esta corriente creará un campo que se sumará al del solenoide. QUEDA DE ESTA FORMA EXPLICADO CUALITATIVAMENTE EL PARAMAGNETISMO.

Obsérvese que la alineación de los momentos magnéticos nunca es total, ya que la agitación térmica de las moléculas tiende a desordenarlas, por ello cuanto más baja sea la temperatura menor es la agitación térmica y por lo tanto más perfecta es la orientación de los momentos magnéticos, haciéndose más intensos los efectos paramagnéticos.

LOS EFECTOS DIAMAGNÉTICOS SE EXPLICAN CUALITATIVAMENTE DE LA SIGUIENTE FORMA:

Nos basamos, igual que antes, en el giro de los electrones en torno al núcleo equivaliendo a verdaderas corrientes circulares o elípticas que engendran campos magnéticos. El distinto sentido de giro de los electrones puede provocar una compensación de los campos magnéticos creados y el átomo es, en sí, magnéticamente neutro. Al situarlo en un campo magnético las corrientes electrónicas obedecen a la ley de Lenz (ver en el capítulo siguiente: «corrientes inducidas»), oponiéndose al aumento de flujo, es decir, aumentando o disminuyendo su velocidad para crear un campo de *sentido contrario* al inductor y que se resta de él. Por esta razón el campo en el interior de los cuerpos diamagnéticos es menor que el campo que provoca la imanación. (Aunque los campos magnéticos de las corrientes electrónicas no estén compensados este efecto diamagnético

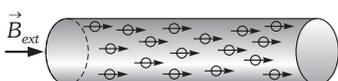


Fig. XXI-60.- Orientación total de los momentos magnéticos de los átomos o moléculas.

se realiza). Al cesar el campo inductor los átomos vuelven a su estado primitivo y el campo magnético se anula en el interior del cuerpo.

Consecuencia de esto es que todo material se comporta como diamagnético, pero en algunos materiales los efectos diamagnéticos quedan enmascarados tras los paramagnéticos y por supuesto por los ferromagnéticos que son muchísimo más intensos (ver párrafo XXVIII-18).

**XXI – 36. Imanación:  $M$**

En el estudio microscópico que hemos realizado (dejando aparte los materiales diamagnéticos) observamos que la causa responsable de las propiedades magnéticas de la materia son los momentos magnéticos ( $m$ ) de los átomos o moléculas que forman la sustancia. El hecho de estar más o menos magnetizado consiste en que los momentos magnéticos estén más o menos orientados.

Vamos a introducir una magnitud macroscópica que nos defina el estado magnético de las sustancias; para lo cual, consideremos un trozo de materia que se encuentra magnetizada; tomemos un pequeño volumen ( $dv$ ), lo suficientemente pequeño para poder aplicar el cálculo diferencial, pero lo suficientemente grande para que contenga un número considerable de átomos o moléculas. La suma vectorial de los momentos magnéticos microscópicos en todo el volumen ( $dv$ ), da un vector que designaremos por  $d\mathbf{m}$ ; dividiéndolo por  $dv$ , da un vector, cuyo significado es: «MOMENTO MAGNÉTICO POR UNIDAD DE VOLUMEN» o «IMANACIÓN» que designaremos por  $\mathbf{M}$ , pudiéndose escribir:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{m}}{dv} *$$

que nos define, para cada punto del material magnetizado, un vector  $\mathbf{M}(x, y, z)$ , que nos describe de forma continua y macroscópica el estado de la sustancia, la que en realidad es una distribución discreta y microscópica; sin embargo, esta forma de proceder nos da resultados satisfactorios concordantes con la experiencia.

La unidad de Imanación en el SI será el Amperio  $\cdot$   $m^{-1}$  (A/m).

Consideremos un elemento de volumen  $\Delta v$  de un material que se encuentra magnetizado (Fig. XXI-62), el momento magnético de este elemento de volumen será la suma de los momentos magnéticos de las  $N$  moléculas o átomos que están contenidas en este elemento de volumen. Si  $m$  es el momento magnético de un átomo o de una molécula, el de  $\Delta v$  será:  $\Delta m = N m$ , y como  $M = \Delta m / \Delta v$ , se obtiene:  $\Delta m = M A \Delta l$ .

Considerando a este volumen elemental como una espira por la que circula una corriente  $I_M$ , aplicando (21) nos queda para valor de ésta:  $I_M = j_M \Delta l$ , que sustituida en el valor del momento magnético de esta espira, nos queda:  $\Delta m = I_M A = j_M A \Delta l$ . Igualando obtenemos:

$$j_M A \Delta l = M A \Delta l \Rightarrow \mathbf{M} = j_M$$

«El módulo de la imanación es igual al valor del módulo de la densidad de corriente superficial».

**XXI – 37. Excitación magnética o intensidad del campo magnético (vector  $H$ )**

Para calcular la inducción magnética en el interior de un material, recordemos el estudio realizado en el párrafo 34 de este capítulo, en el que decíamos que podíamos lograr la inducción  $B$  que existe en el interior de un arrollamiento toroidal por el que circula una corriente que vamos a llamar  $I_C$  (CORRIENTE DE CONDUCCIÓN. Fig. XXI-63), hecho sobre una sustancia, sustituyendo ésta por otro arrollamiento por el que hacíamos pasar una corriente  $I_M$  que llamábamos CORRIENTE DE MAGNETIZACIÓN (Fig. XXI-64); de esta forma se obtenía:

$$B = \mu_0 \frac{n I_C}{l} + \mu_0 \frac{n' I_M}{l}$$

si tenemos en cuenta la definición dada en el mismo apartado para la densidad de corriente superficial podremos escribir:

$$B = B_C + B_M = \mu_0 (j_C + j_M)$$

y teniendo en cuenta la (22) nos queda:

$$B = \mu_0 (j_C + M)$$

este resultado deducido en condiciones muy particulares, con un tratamiento matemático más adecuado puede demostrarse que es general; de él se deduce:

\* Obsérvese el paralelismo existente con el comportamiento eléctrico de los materiales dieléctricos y en concreto, con la introducción del vector  $\mathbf{P}$ .

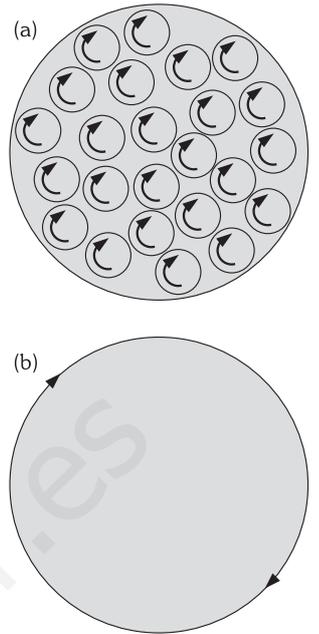


Fig. XXI-61.– El conjunto de circuitos en el gráfico superior equivale a un solo circuito, que se extiende por el perímetro de la sección del material.

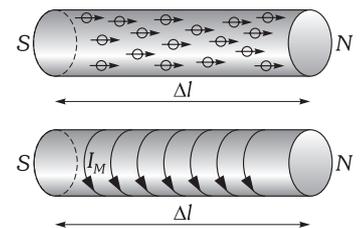


Fig. XXI-62.– Elemento de volumen de un material magnetizado.

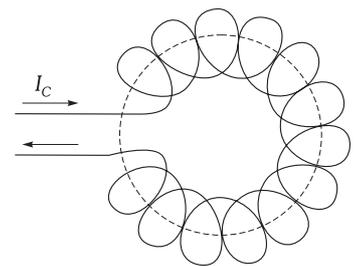


Fig. XXI-63.– Corriente de conducción.

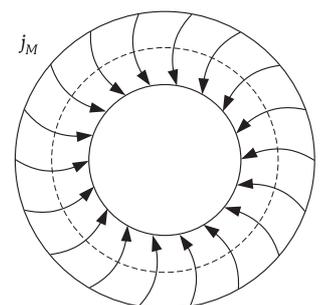


Fig. XXI-64.– Corriente de magnetización.

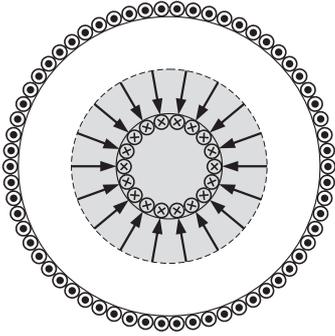


Fig. XXI-65.- La zona sombreada es el área limitada por la línea media.

$$\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = j_C + \mathbf{M} \Rightarrow \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} = j_C$$

calculando la integral curvilínea de esta cantidad a lo largo de la circunferencia media del toroide (fig. XXI-65), nos queda:

$$\oint_C \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) d\mathbf{l} = \frac{1}{\mu_0} \oint_C \mathbf{B} d\mathbf{l} - \oint_C \mathbf{M} d\mathbf{l} \tag{23}$$

según el Teorema de Ampère la primera de las integrales debe ser igual a  $\mu_0$  por la intensidad de corriente total que atraviesa el área encerrada por la línea de integración. En nuestro caso está atravesada por la corriente de conducción que circula por las espiras del arrollamiento y por la corriente de magnetización del material. (En la figura representamos un corte esquemático del anillo de Rowland indicando las espiras del arrollamiento y con flechas las corrientes superficiales de magnetización con el fin de que se vea claro que ambas corrientes «cortan» el área limitada por la línea media). Según esto:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (I_C + I_M)$$

y como:

$$I_M = l j_M = l M \Rightarrow \oint_C \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I_C + \mu_0 M l$$

En la segunda integral de (23)  $M$  es siempre tangente a la línea media y su valor en módulo es siempre constante. Luego:

$$\oint_C \mathbf{M} d\mathbf{l} = M \oint_C d\mathbf{l} = M l$$

sustituyendo estos dos últimos valores en (23) nos queda:

$$\oint_C \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) d\mathbf{l} = \frac{1}{\mu_0} (\mu_0 I_C + \mu_0 M l) - M l = I_C$$

este resultado obtenido en un caso particular para el toroide es general, y su expresión para una línea cerrada cualquiera  $C$  es:

$$\boxed{\oint_C \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{l} = I}^*$$

«La circulación del vector  $(\mathbf{B}/\mu_0) - \mathbf{M}$  a lo largo de una curva cerrada es igual a la intensidad de corrientes convencionales que atraviesa el área de la curva y no depende para nada de las corrientes equivalentes de magnetización que puedan existir en el medio considerado».

A este vector, que desempeña un papel importantísimo en el Electromagnetismo, se le da el nombre de EXCITACIÓN MAGNÉTICA o INTENSIDAD DE CAMPO MAGNÉTICO  $\mathbf{H}$ .

$$\boxed{\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}} \tag{24}$$

cuya propiedad es:

$$\boxed{\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I} \tag{25}$$

Al tener ecuación de dimensiones de una intensidad dividida por una longitud su unidad es el amperio/metro.

El objeto de introducir la excitación magnética (o intensidad del campo magnético)  $\mathbf{H}$  es el de simplificar los cálculos cuando se trata de resolver problemas en los que intervienen materiales magnéticos y distribuciones de corrientes convencionales. La excitación  $\mathbf{H}$  se calcula exactamente igual que la inducción magnética  $\mathbf{B}$  cuando las distribuciones se encuentran en vacío. Puede comprobarse que la expresión general de  $\mathbf{H}$  creado por una corriente  $I$  es:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \int_C I \frac{d\mathbf{l} \wedge \mathbf{r}}{r^3}$$

\* Hemos prescindido del subíndice  $C$  de la intensidad de corriente ya que es la convencional con la que hemos tratado normalmente.

y una vez conocido  $\mathbf{H}$  es inmediato el cálculo de  $\mathbf{B}$  siempre que se conozca la magnetización  $\mathbf{M}$  del material. La razón por la que es más complicado el cálculo directo de  $\mathbf{B}$  es que éste depende de las corrientes convencionales y de las equivalentes de magnetización, y estas últimas son mucho más difíciles de manejar que las primeras.

**PROBLEMAS: 57 al 63.**

**XXI – 38. Ecuaciones del campo**

Se habían obtenido para la inducción magnética  $\mathbf{B}$  debida a corrientes convencionales las siguientes ecuaciones:

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad \text{y} \quad \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \tag{26}$$

para establecer las ecuaciones generales del campo habrá que deducirlas incluyendo las contribuciones de los materiales magnéticos, es decir, habrá que contar con las corrientes equivalentes de magnetización. La primera de estas ecuaciones no está limitada a los campos magnéticos producidos por corrientes convencionales, estaba basada en la afirmación experimental de la «no existencia de polos magnéticos aislados» en consecuencia esta ecuación:

$$\boxed{\text{div } \mathbf{B} = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\oint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0}$$

que hemos incluido en las del grupo de Maxwell, no pierde su generalidad.

La ecuación (26), es la expresión diferencial de la ley de Ampère; para su generalización, y como ya hemos aplicado en el apartado anterior en el caso particular del toroide, tenemos que tener en cuenta todas las corrientes que pueden producir el campo. Volviendo a la figura XXI-61a, podemos considerar ahora el caso de un material en el que los circuitos elementales representados no sean todos iguales, por corresponder, por ejemplo, a átomos distintos. Las influencias de dos circuitos contiguos pueden no anularse, con lo que, además de la densidad de corriente superficial  $\mathbf{J}_M$  ya tratada, aparecerá una densidad de corriente establecida en el volumen del material. Esta densidad volumétrica de corriente, a diferencia de las corrientes convencionales, no produce arrastre de electrones a lo largo del material ni choques entre ellos, con lo que no ocasiona calentamiento de la sustancia.

Si llamamos  $\mathbf{J}_M$  a esta DENSIDAD DE CORRIENTE EQUIVALENTE DE MAGNETIZACIÓN, la ecuación (26) se expresará, en el caso más general, de la forma:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_M) \tag{27}$$

Esta ecuación incluye el manejo de las corrientes equivalentes de magnetización; para una resolución más sencilla de los problemas magnéticos hemos introducido en el párrafo anterior el vector  $\mathbf{H}$ . Tratamos pues de obtener una expresión general en la que se prescindiera de estas corrientes equivalentes de magnetización, para lo cual, si tenemos en cuenta que:

$$I = \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$$

y la (25), podemos poner:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I = \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = \int_A \text{rot } \mathbf{H} \cdot d\mathbf{A}$$

esta última integral se ha obtenido al aplicar a la primera el teorema de Stokes; por tanto:

$$\boxed{\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I}$$

en consecuencia, el vector  $\mathbf{H}$  está relacionado con la densidad de corriente convencional por su rotacional.

Las ecuaciones:  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  junto con  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$  constituyen las fundamentales del campo; ecuaciones que junto con una relación experimental entre  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  son las que nos resuelven los problemas magnéticos.

Por último, para establecer la relación existente entre  $\mathbf{J}_M$  y  $\mathbf{M}$ , tendremos en cuenta que:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad \Rightarrow \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} - \text{rot } \mathbf{M} \quad \Rightarrow \quad \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 [\mathbf{J} + \text{rot } \mathbf{M}]$$

que comparada con (27) nos queda:

$$\boxed{\mathbf{J}_M = \text{rot } \mathbf{M}}$$

«La densidad de corriente equivalente de magnetización es el rotacional de la imanación».

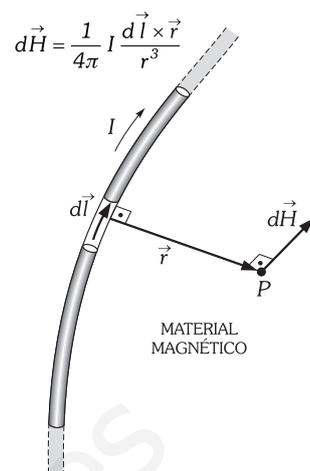


Fig. XXI-66.– Ley de Biot y Savart.

## XXI – 39. Susceptibilidad y permeabilidad magnéticas

Hemos indicado en el párrafo anterior que junto con las dos ecuaciones fundamentales del campo, para resolver los problemas magnéticos había que encontrar una relación experimental entre  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  o lo que es lo mismo, en virtud de (24) entre  $\mathbf{M}$  y uno de los vectores  $\mathbf{B}$  o  $\mathbf{H}$ . Estas relaciones dependen de la naturaleza del material magnético.

Al someter a campos magnéticos las sustancias se observa que la imanación no es nula mientras dura éste y si se anula el campo también lo hace la imanación  $\mathbf{M}$ , esto es verdad salvo en los materiales que presentan una magnetización permanente (los ferromagnéticos, de los que haremos un estudio aparte). Es consecuencia de esto el pensar que  $\mathbf{M}$  es una función del campo magnético al cual se somete la sustancia. Es decir: los momentos magnéticos de la sustancia permanecen orientados mientras un campo magnético los mantiene, pero si éste se anula vuelven a desordenarse y la sustancia se «desmagnetiza»; según esto la relación funcional entre  $\mathbf{M}$  y el campo deberá ser del tipo:

$$\mathbf{M} = \chi_M (\mathbf{H}) \mathbf{H}$$

(normalmente se considera esta relación y no la relación entre  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{B}$ ). En efecto: si  $\mathbf{H} = 0 \Rightarrow \mathbf{M} = 0$  y  $\chi_M$  es en general una función del propio campo, pero para la mayor parte de los materiales  $\chi_M$  es una constante característica del material que se denomina SUSCEPTIBILIDAD MAGNÉTICA. En las sustancias diamagnéticas  $\chi_M$  es negativa y su valor absoluto es próximo a cero, en las paramagnéticas es positivo y también muy próximo a cero en valor. Para el vacío, naturalmente  $\chi_0 = 0$  ya que sólo un material puede sufrir imanación. En la tabla adjunta se indican las susceptibilidades de algunos materiales para poder tener una idea del orden de magnitud.

En algunas sustancias paramagnéticas la susceptibilidad depende «fuertemente» de la temperatura, especialmente en aquellas en que sus moléculas son polares; esta dependencia viene expresada por la LEY DE CURIE:

$$\chi_M = \frac{C}{T}$$

donde  $T$  es la temperatura absoluta y  $C$  una constante característica de la sustancia [CONSTANTE DE CURIE]. Si las moléculas del material paramagnético no son polares entonces  $\chi_M$  es prácticamente independiente de la temperatura. Si sustituimos:  $\mathbf{M} = \chi_M \mathbf{H}$  en el valor de  $\mathbf{B}$  despejado de (24) nos queda:  $\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi_M) \mathbf{H}$ .

La magnitud  $\mu_0 (1 + \chi_M)$  es también característica del material y se denomina PERMEABILIDAD del medio:

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_M)$$

y a:

$$\mu' = 1 + \chi_M = \frac{\mu}{\mu_0}$$

es a lo que llamamos PERMEABILIDAD RELATIVA del medio (relativa al vacío) o coeficiente magnético del medio. Como es natural, para el vacío  $\mu = \mu_0$  con lo que  $\chi_0 = 0$  como habíamos dicho anteriormente.

De todo lo antes dicho podemos escribir la relación entre  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  de la forma:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu' \mathbf{H}$$

## XXI – 40. Sustancias ferromagnéticas. Histéresis magnética

Hemos dejado aparte deliberadamente el estudio del ferromagnetismo ya que el comportamiento de los materiales ferromagnéticos (hierro, cobalto, níquel, aleaciones determinadas de componentes no ferromagnéticos y ciertos materiales que a bajas temperaturas se comportan como tales) es muy singular. Hacemos del ferromagnetismo un estudio particular debido a la gran aplicación práctica que poseen las sustancias ferromagnéticas.

A diferencia de las sustancias para y diamagnéticas cuya imanación satisface una sencilla relación con el campo magnético ( $\mathbf{M} = \chi_M \mathbf{H}$ ) en las sustancias ferromagnéticas no ocurre lo mismo. La relación funcional entre  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{H}$  tiene que ser extraordinariamente más compleja, puesto que su susceptibilidad no solamente depende de la sustancia, de su temperatura y del propio campo, sino que además depende de la «historia» de la muestra del material que estamos tratando, esto es, del hecho de haber estado la muestra anteriormente sometida a un campo y de la manera que estuvo. En resumidas cuentas: la susceptibilidad de estas sustancias es una función del campo magnético tan compleja que no merece la pena averiguar una relación matemática que ligue tales cantidades. Se recurre al uso de tablas y gráficas en las que se relaciona  $\mathbf{B}$  con  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  con  $\mathbf{M}$  o con  $\mu$  en función de  $\mathbf{H}$ , obtenidas experimentalmente y en ellas encontramos toda la información que nos interesa para el estudio de la sustancia ferromagnética en cuestión.

SUSCEPTIBILIDADES

PARAMAGNÉTICAS	
Cr Cl <sub>2</sub>	$1,36 \times 10^{-3}$
Titanio	$7,0 \times 10^{-5}$
Aluminio	$2,1 \times 10^{-5}$
Magnesio	$1,2 \times 10^{-5}$
Sodio	$7,1 \times 10^{-6}$
Platino	$6 \times 10^{-7}$
Oxígeno (CN)	$2,1 \times 10^{-6}$
Aire (CN)	$4 \times 10^{-7}$
DIAMAGNÉTICAS	
Bismuto	$-1,66 \times 10^{-5}$
Cobre	$-9,8 \times 10^{-6}$
Diamante	$-2,2 \times 10^{-5}$
Oro	$-3,6 \times 10^{-5}$
Mercurio	$-3,2 \times 10^{-5}$
Na Cl	$-1,4 \times 10^{-5}$
Nitrógeno (CN)	$-5,0 \times 10^{-9}$
Hidrógeno (CN)	$-2,1 \times 10^{-9}$

Concretamente: *al hecho de que la imanación del material dependo de la «historia» anterior del mismo se conoce con el nombre de «HISTÉRESIS MAGNÉTICA» y a las curvas experimentales que relacionan  $B$  con  $H$  «CURVAS DE HISTÉRESIS».*

La Fig. XXI-67 nos representa una curva experimental típica de una material ferromagnético que da la relación entre  $H$  y  $\mu$ . Se observa que  $\mu$  depende fuertemente del campo por lo que lo mismo le ocurrirá  $\chi$ . Se encuentran, además, unos valores muy altos para las susceptibilidades, lo que nos dará unos valores también muy altos para la magnetización, característica de las sustancias ferromagnéticas que las hacen fácilmente diferenciables de las día y paramagnéticas.

Estos altos valores de la imanación tienen que tener su origen en la orientación prácticamente total de los momentos magnéticos de sus átomos, lo cual, teniendo en cuenta que a temperatura ordinaria la agitación térmica es muy elevada, hace pensar que tiene que existir «algo» que obligue a mantenerse en ese estado de gran orientación a dichos momentos magnéticos.

Pasemos ahora a describir un «ciclo de histéresis» en el cual, como hemos dicho, está contenida toda la información macroscópica que podemos obtener de una sustancia ferromagnética.

Consideremos un material ferromagnético que nunca haya estado sometido a un campo magnético (puede ser una muestra construida en forma de anillo de Rowland). Sobre la muestra podemos hacer un arrollamiento por el que circule una corriente variable de conducción  $I_C$ . El campo magnético  $H$  sólo depende de esta corriente siendo proporcional a ella, luego si conocemos  $I_C$  en cada momento conoceremos la excitación magnética  $H$  a la cual está sometida la muestra. En el caso del anillo de Rowland, si sobre él hay un arrollamiento de  $n$  espiras la excitación magnética viene dada por:  $H = nI_C/l$ , donde se pone de manifiesto la proporcionalidad entre  $H$  e  $I_C$ .

Además sobre la muestra se pone otro arrollamiento de tal manera que cuando en el anterior se modifique la intensidad de corriente, se produzca una variación de flujo en las espiras de este segundo circuito produciéndose corriente inducida, cuya medida será proporcional al campo magnético  $B$  que existe en el interior de la muestra. (En la figura XXI-68 se esquematiza el dispositivo de medida).

Según lo anterior en todo momento podemos conocer el valor de  $H$  y  $B$  en el interior de la muestra e irlo representando en una gráfica  $H$ - $B$ . Partamos pues de un valor nulo de  $H$  y por tanto nulo de  $B$ , e incrementemos poco a poco el valor de  $H$ , observamos que  $B$  aumenta también de tal manera que la curva obtenida es la  $OA$  (Fig. XXI-69). A partir del punto  $A$  la relación entre  $H$  y  $B$  es lineal lo cual indica que *el material se ha saturado* (ha llegado al máximo de su imanación) y no influye más sobre la inducción.

Si reducimos paulatinamente el valor de la corriente que circula por el primer arrollamiento hasta anularla, lo que equivale a ir reduciendo  $H$ , nos encontramos con que los valores de  $B$  que obtenemos no son los mismos, sino que siguen la curva  $AB$ , observamos además que aunque *hemos anulado  $H$ , la inducción magnética  $B$  en el interior del material no se ha anulado*. Su valor, dado por el segmento  $OB$ , se conoce con el nombre de IMANACIÓN REMANENTE ( $B_r$ ). (Nótese que si en ese instante sacamos el material de los arrollamientos se nos ha quedado convertido en un imán permanente, tanto mas activo cuanto mayor sea el valor del segmento  $OB$ ).

A partir del punto  $B$ , invertimos el sentido de la corriente  $I$  y la aumentamos de nuevo poco a poco. Equivale a invertir el sentido de  $H$ . La gráfica entonces recorre la curva  $BC$ . En el punto  $C$  se anula la inducción magnética  $B$  en la muestra, y el valor de la excitación magnética  $H_C$  (segmento  $OC$ ) que ha sido necesario establecer para anular la imanación remanente del material se llama CAMPO COERCITIVO o EXCITACIÓN COERCITIVA.

Continuemos aumentando  $H$  (negativamente), observamos que la inducción  $B$  en la muestra aumenta de nuevo pero se hace negativa (se invierte) llegando al punto  $D$  de la gráfica en el que de nuevo se satura.

De nuevo disminuimos  $H$  hasta volver al valor inicial nulo y la gráfica describe la curva  $DE$ , en el que la muestra se ha convertido de nuevo en un imán permanente pero con sus «polos» invertidos (con respecto al imán permanente obtenido anteriormente) y con la misma magnetización que antes ( $OB = OE$ ).

Proseguimos aumentando  $H$ , ahora positivamente, consiguiéndose la anulación de la inducción (curva  $EF$ ). La excitación coercitiva que ha sido necesaria para anular la inducción (segmento  $OF$ ) resulta ser igual a la anterior pero opuesta. A partir de este valor aumentamos el valor de  $H$ , aumentando también la magnetización del material siguiendo la curva  $FA$ , llegando de nuevo a saturar el material, cerrando por consiguiente el «ciclo». (Se puede repetir cuantas veces queramos).

Si realizamos la experiencia con un material ferromagnético del que no conocemos su «historia», al someterlo a un campo por ejemplo de valor  $H_0$  (véase Fig. XXI-69) el valor correspondiente a la imanación que adquiere puede ser  $B_1$  si previamente no había estado sometido a ningún campo o  $B_2$  y  $B_3$  si había estado sometido y según fuera su imanación remanente. A esto es a lo que nos referíamos cuando decíamos que la magnetización del material depende del campo y de su historia.

Un ciclo de histéresis «tipo» es el que acabamos de describir, pero existen sustancias cuyos ciclos tienen unas gráficas características, como las que representamos en la Fig. XXI-70. Las del tipo (a) corresponden al hierro dulce en el que la imanación remanente es grande, pero basta una pequeña excitación coercitiva para anular su magnetización, lo cual hace que no sea posible utili-

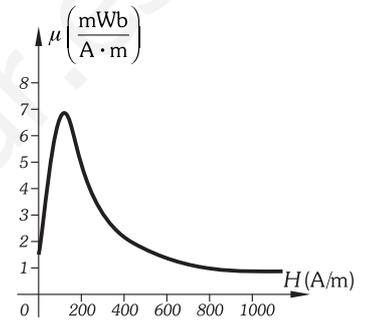


Fig. XXI-67.- Curva  $H$  -  $\mu$  para una muestra de hierro templado.

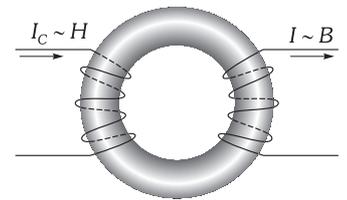


Fig. XXI-68.- Dispositivo para la medida de  $H$  y de  $B$  dentro de la muestra del material del cual está constituido el anillo de Rowland.

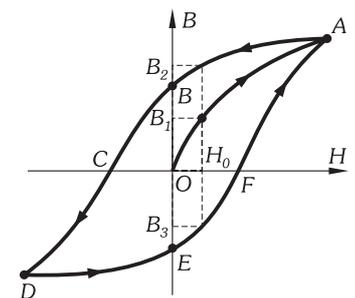


Fig. XXI-69.- Curva de histéresis.

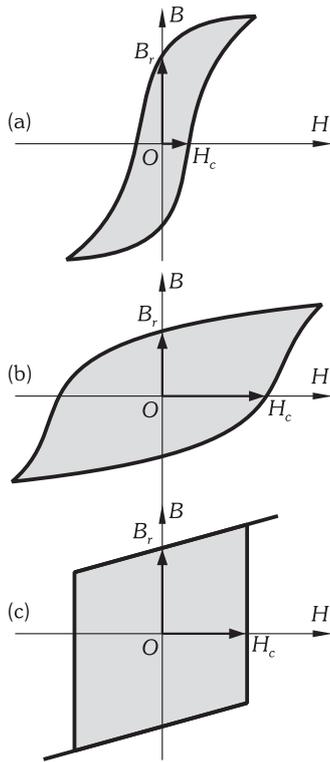


Fig. XXI-70.- Diversos tipos de curvas de histéresis para distintos materiales.

zarlos para la construcción de imanes permanentes y si sean utilizados en la construcción de aparatos eléctricos como motores, transformadores, etc. La razón de ello es que la energía consumida para magnetizar y desmagnetizar un material es proporcional al área de su ciclo de histéresis, con lo que, por estar sometidos esos materiales a campos alternos, la energía perdida y el calentamiento en cada ciclo es menor cuanto menor sea el área del ciclo.

Los materiales cuyo ciclo de histéresis son del tipo (b) presentan poca magnetización remanente ( $B_r$ ), sin embargo es necesaria una gran excitación coercitiva para anularla, lo cual los hace ideales para la construcción de imanes y se desechan en la construcción de aparatos eléctricos debido a la gran área de su ciclo.

Por último, y a título informativo, citamos el tipo (c), cuyo ciclo es prácticamente cuadrado, lo que indica que el material puede estar fundamentalmente en dos estados de magnetización con  $B_r$  o con  $-B_r$ ; esto hace que sean uno de los elementos básicos de las «memorias» de algunos tipos de ordenadores. Materiales que pertenecen a este grupo son las ferritas. Las ferritas, que son óxidos complejos de hierro y otros metales divalentes (Mg, Co, Fe), no son exactamente sustancias ferromagnéticas y tienen unas características particulares que hacen que formen grupo especial de cuerpos ferrimagnéticos y antiferromagnéticos.

En la tabla se expresan algunas constantes características de distintos materiales donde  $M_s$  es la magnetización de saturación,  $H_s$  la intensidad del campo magnético necesaria para saturar el material,  $H_c$  el campo coercitivo y  $B_r$  la imanación remanente.

	Composición %	$\mu_0 M_s$ T	$H_s$ A/m	$H_c$ A/m	$B_r$ T	$\mu'$ máxima
Fe		2,16	$1,6 \times 10^5$	80	1,3	7 000
Ni		0,61	$5,5 \times 10^5$	120	0,3	2 000
Co		1,79	$7,0 \times 10^5$	950	-	-
Fe-Si	98 Fe, 2 Si	2,10	24	60	-	6 000
4-79 Permalloy	17 Fe, 79 Ni, 4 Mo	0,87	-	0,16	0,5	$10^5$
Supermalloy	16 Fe, 79 Ni, 5 Mo	0,80	-	0,16	0,5	$10^6$

**XXI - 41. Teoría sobre la imanación del Fe. Dominios magnéticos**

Los altísimos valores de magnetización que adquieren algunas sustancias ferromagnéticas tienen que ser consecuencia de una alineación prácticamente total de los momentos magnéticos de sus átomos, esto junto con el hecho de poder conservar la imanación en ausencia de campo, hace pensar que la causa que orienta los momentos magnéticos o en definitiva los spines de los átomos, es una interacción de origen no magnético entre dichos spines. Estos spines se «automantienen» en ese estado venciendo la agitación térmica, y sólo si ésta es muy intensa logra romper las ligaduras debidas a estas interacciones. (En efecto: si un imán lo calentamos hasta alcanzar la temperatura de Curie, característica de cada material, logramos que pierda sus propiedades magnéticas).

La explicación de la interacción entre spines por la que se obligan a mantenerse paralelos no es sencilla, sólo es posible haciendo uso de la Mecánica Cuántica y se sale de la exposición de este texto.

Encontramos, no obstante, una dificultad que consiste en cómo explicar el hecho de que las sustancias ferromagnéticas también pueden estar desmagnetizadas e incluso se las desmagnetiza según hemos visto anteriormente; es decir: si la configuración de las sustancias ferromagnéticas es tal que los spines están orientados entre sí y por tanto sus momentos magnéticos, ¿Cómo es que normalmente no presentan ningún momento magnético? La solución a este problema se ha encontrado al descubrir que en estas sustancias *aparecen pequeñas regiones magnetizadas a saturación* (los spines están totalmente orientados en esa región).

«A estas pequeñas regiones de los materiales ferromagnéticos en la que solamente exista una dirección de magnetización se les denomina DOMINIO»; estos dominios están orientados de tal forma que resulte una magnetización neta nula para el material. El tamaño aproximado de estos dominios es de unas 20 micras y están separados unos de otros por «paredes» de unos 50 Å. Los dominios se forman incluso en los monocristales que forman el metal.

La razón de que en ausencia de campo externo el material permanece desmagnetizado por la anulación de los efectos de cada dominio es que si no fuera así existiría un campo magnético externo que tendría una gran energía acumulada, como ocurre en el monocristal representado en la Fig. XXI-71 (a). Al tender todos los cuerpos del universo a adoptar la forma de menor energía potencial, no es ésta la forma en que esto ocurre, con lo que si «fraccionamos» el dominio con un momento magnético cambiado (Fig. XXI-71 (b)) ocurre que obtenemos un momento magnético externo menor. Según este razonamiento, el material debería dividirse en dominios cada vez más pequeños indefinidamente y esto no ocurre. Sabemos que la energía del campo magnético es proporcional al volumen del espacio en que la medimos. Sin embargo la mecánica cuántica explica que en la superficie de separación entre dominios con direcciones distintas de magnetización existe una acumulación de energía por unidad de área, con lo que si dividimos por dos el dominio, la energía del campo disminuye en 8 veces, pero la energía potencial de la pared aumenta en 4 ve-

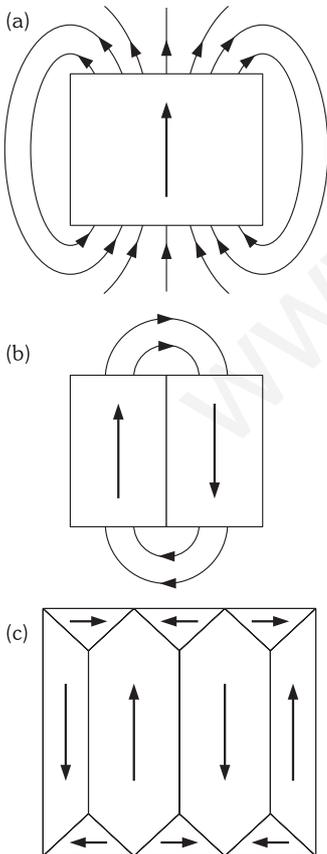


Fig. XXI-71.- Dominios magnéticos.

ces. ¿Hasta cuando le conviene a la materia ferromagnética dividirse para encontrarse en estado de mínima energía? La respuesta está en el tamaño de los dominios y éstos se dividen hasta que la energía necesaria para poner una «pared» adicional sea tan grande como la disminución de energía del campo magnético fuera del cristal.

La naturaleza «responde» de otra manera y no son tantos los dominios que aparecen puesto que con una distribución triangular como la de la Fig. XXI-71 (c) anula el campo externo.

En la Fig. XXI-72 representamos un trozo de material ferromagnético no sometido a un campo, en el que existen muchísimos cristales (no es lo mismo que dominios puesto que no tienen una sola dirección de magnetización, aunque un monocristal puede constituir un dominio). En general dentro de estos cristales es donde existen dominios.

Para dar una explicación sencilla de la orientación de los dominios al ser sometidos gradualmente a un campo externo, supongamos que un monocristal tiene la forma «ideal» de la Fig. XXI-73 (a). Aumentemos gradualmente el campo externo a que sometemos al monocristal, entonces la pared del dominio que se encuentra en el sentido del campo se corre hacia un lado reduciendo de esta forma su energía, a medida que vamos aumentando el campo se va metiendo dentro de los otros dominios que a su vez giran para colocarse en la dirección del campo sumándose al momento magnético del dominio que aumenta su volumen, hasta que se consigue la saturación.

Tomemos ahora una muestra de material ferromagnético policristalino como el de la Fig. XXI-72, al aplicarle un campo magnético pequeño las paredes de los dominios comienzan a moverse y crecen más los dominios en los que existe «facilidad de magnetización» (esta facilidad depende de la dirección de magnetización como ya hemos dicho y de los ejes cristalográficos). Este crecimiento inicial, cuando  $H$  es relativamente pequeño, es reversible y si lo suprimimos, el material vuelve a desmagnetizarse (tramo a de la Fig. XXI-74).

Al seguir aumentando el campo y seguir desplazándose las paredes de los dominios (aumentando su volumen y girando) tropiezan con impurezas e imperfecciones que frenan la ordenación, pero al aumentar más el campo se «vence» de repente el obstáculo y sigue el desplazamiento. Estos «vencimientos» de obstáculos producen una pérdida irreversible de energía ya que ésta se transforma en calor, calentando el metal, y emite energía sonora [EFECTO Heinrich Georg BARKHAUSEN (1881-1956)] también irrecuperable. Por tanto el proceso b es irreversible, es decir, que si dejásemos de aumentar el campo cuando éste toma el valor  $H_1$  expresado en la Fig. XXI-74 y lo redujésemos hasta cero, no recorrería la curva que ha seguido hasta ese momento, sino que seguiría la línea de puntos expresada en la figura y el material quedaría con una magnetización remanente  $B_r$ .

Por último, aún quedan algunos cristales cuya dirección de magnetización no está en la dirección del campo magnetizante, aumentando éste (tramo c de la figura) la curva llega al estado de saturación y se hace lineal.

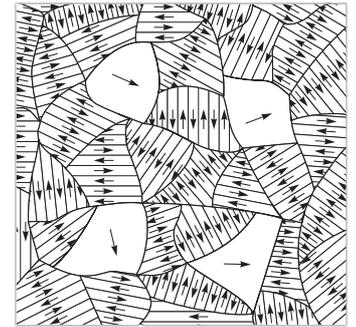


Fig. XXI-72.- Estructura microscópica de un material ferromagnético.

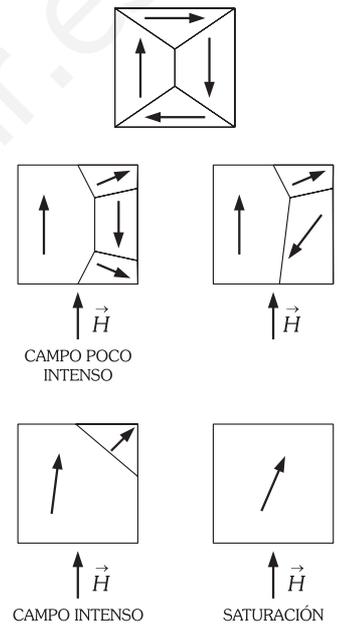


Fig. XXI-73.- Las paredes se «corren» aumentando el tamaño de los dominios.

**XXI - 42. Circuito magnético**

Alrededor de un anillo de hierro, rodeamos las espiras de un solenoide por el que circula una intensidad de corriente  $I$ . Las líneas del campo magnético del interior del solenoide, están localizadas en el seno del hierro, formando un CIRCUITO MAGNÉTICO (Fig. XXI-75). El campo magnético en el interior del solenoide es:  $B = \mu n I / l$ , y el flujo a través de la sección  $A$  del núcleo, es:

$$\phi = B A = \mu \frac{n I A}{l} \Rightarrow \phi = \frac{n I}{\frac{l}{\mu} \frac{1}{A}}$$

Al numerador de la fracción se le llama, FUERZA MAGNETOMOTRIZ ( $M$ ), y al denominador (por analogía con la resistencia) RELUCTANCIA. Obtendremos así, una fórmula análoga a la ley de Ohm aplicable a circuitos magnéticos:

$$\phi = \frac{M}{R}$$

La fuerza magnetomotriz se expresa en amperios y la reluctancia  $R = M/\phi$  en amperios/weber. Análogamente a las resistencias eléctricas, se verifica que la reluctancia equivalente a otras en serie, es la suma de las reluctancias asociadas.

**PROBLEMAS: 64 al 66.**

**XXI - 43. Electroimanes. Aplicaciones**

Si en el interior de un solenoide se introduce un núcleo de hierro dulce, el campo magnético creado por aquél aumenta extraordinariamente; al cesar la corriente eléctrica, el campo magnético de anula.

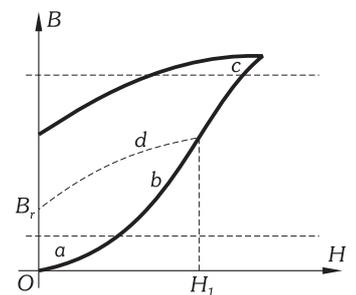


Fig. XXI-74.- El proceso a es reversible; el proceso b es irreversible.

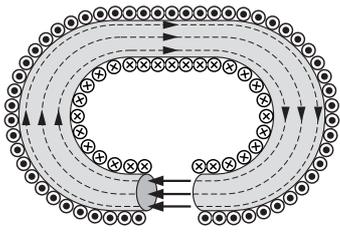


Fig. XXI-75.- Circuito magnético.

Al aparato formado por un núcleo de hierro dulce, que lleva arrollado, en forma de bobina o carrete, un alambre recubierto de un aislante, se le llama electroimán, el cual se comporta como un imán durante el paso de corriente por la bobina.

Se suelen construir en forma de herradura para disminuir la capa de aire que hay entre los polos, aumentándose de esta forma la intensidad del campo magnético que producen.

Si  $L$  es la longitud del hierro de un electroimán y  $l$  la del «entrehierro», la reluctancia (suma de las reluctancias) será:

$$R = \frac{1}{\mu' \mu_0} \frac{L}{A} + \frac{1}{\mu_0} \frac{l}{A} = \frac{1}{\mu_0} \frac{L + \mu' l}{\mu' A}$$

El flujo a través de la sección del núcleo, será:

$$\phi = \frac{M}{R} = \frac{\mu_0 \mu' A I n}{L + \mu' l}$$

Y la inducción, considerando que  $\phi = BA$ :

$$B = \frac{\mu_0 \mu' I n}{L + \mu' l}$$

Como el coeficiente de permeabilidad del hierro es grande, el sumando  $\mu' l$  del denominador tiene gran influencia en el valor de la fracción. El campo entre los polos de un electroimán se hace mayor conforme se disminuye la longitud del «entrehierro».

Existen multitud de aplicaciones a los electroimanes, de entre ellas, estudiemos el timbre y el telégrafo como ejemplos más sencillos.

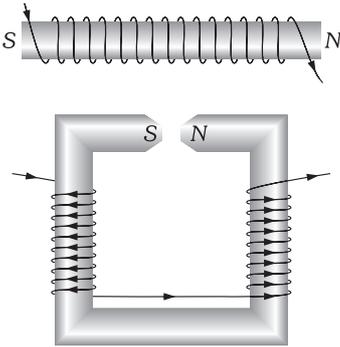


Fig. XXI-76.- Electroimanes.

EL TIMBRE: Al comprimir el pulsador  $P$  (Fig. XXI-77) se establece contacto entre los hilos  $ab$  y pasa la corriente eléctrica a través del electroimán. Sus polos atraen la pieza metálica  $C$ , golpeando su martillo  $d$  a una campana. Al verificarse la atracción, la corriente se interrumpe por romperse el contacto entre  $C$  y  $F$ . La pieza  $C$  vuelve a su posición, pasando de nuevo la corriente y repitiéndose el fenómeno.

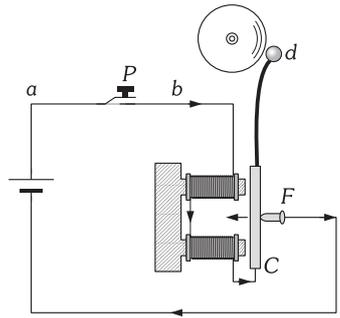


Fig. XXI-77.- Timbre.

EL TELÉGRAFO: Es un aparato destinado a transmitir señales a distancia (Fig. XXI-78). La estación transmisora consta simplemente de un pulsador que abre o cierra el circuito de una pila, uno de cuyos polos está en contacto con tierra. El hilo procedente del otro polo, después de formar un electroimán, en la estación receptora, comunica también con tierra. La corriente originada al cerrar el circuito, hace activo el electroimán, que atrayendo a una pieza metálica, hace que su extremo marque en un papel que pasa continuamente por un cilindro, puntos o líneas más o menos largas, según sea la duración de la corriente. La combinación de tales signos (alfabeto Morse) permite la transmisión del lenguaje a distancia.

Entre las aplicaciones industriales más conocidas de los electroimanes se encuentran las grúas, los separadores de materiales férricos, el control automático de sistemas de freno y alarma en trenes, la activación de carriles magnéticos para sustentación de trenes, el embrague electromagnético en buques, los interruptores en circuitos de alto voltaje, los contadores domésticos de consumo eléctrico, los tubos de televisión y un largo etcétera.

En investigación se usan en el enfoque de electrones en el microscopio electrónico, en la producción de campos magnéticos en aceleradores de partículas, y, en general, en todos los dispositivos de investigación científica que requieran campos intensos.

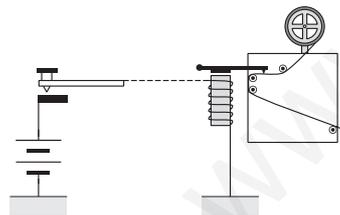


Fig. XXI-78.- Esquema del telégrafo.

### G) APARATOS DE MEDIDA DE LA CORRIENTE CONTINUA

#### XXI - 44. Galvanómetros de imán móvil

Los GALVANÓMETROS son aparatos que se emplean para indicar el paso de la corriente eléctrica por un circuito y para la medida de intensidades de corriente. Tienen como fundamento las interacciones entre corrientes e imanes.

Los GALVANÓMETROS DE IMÁN MÓVIL están constituidos por una pequeña aguja imantada, que se encuentra desprovista de par orientador, y situada en el centro de una bobina plana (de poca longitud) por la que circula la corriente cuya intensidad se desea medir. Si no circula corriente por la bobina, la aguja adquiere su posición de equilibrio cuando se encuentre en el meridiano magnético terrestre, en cuyo plano se coloca también el de la bobina; al pasar la corriente, produce un campo magnético  $B$  que actuando sobre la aguja, la hace desviarse un ángulo  $\varphi$ , debido a la superposición de  $B$  y la componente horizontal  $B_T$  del campo magnético terrestre, y como  $B$  es proporcional a la intensidad de corriente que circula por la bobina, entonces:  $\text{tg } \varphi = B/B_T = K I$ , lo que nos permite determinar  $I$ .

El inconveniente del galvanómetro descrito es que en él intervienen las modificaciones experimentadas por el campo magnético terrestre. Para anular los efectos sobre el aparato del campo

magnético terrestre, se usan los llamados PARES ASTATICOS, constituidos por dos agujas imanadas rigidamente unidas entre sí y con sus polos opuestos colocados al mismo lado, anulándose los dos pares de fuerzas (iguales y de sentido contrario) que se originan por el campo magnético terrestre, anulándose sus efectos y quedando en equilibrio en cualquier posición. Este par astatico se suspende de un hilo de torsión y cada una de las agujas del par queda situada en el centro de sendas bobinas por las que pasará la corriente que se desea medir (Fig. XXI-79). Al pasar la corriente por las bobinas, los efectos magnéticos sobre las agujas se superponen, tendiendo a colocarse en posición perpendicular al plano de las bobinas, oponiéndose a ello el par de torsión del hilo de suspensión, quedando en equilibrio cuando se compensen los efectos de ambos pares, el ángulo girado dependerá del par de fuerzas que actúa sobre el par de agujas, y este es proporcional a su vez a la intensidad de corriente, una vez calibrado el galvanómetro, es decir, determinada la contante de proporcionalidad entre el ángulo de giro y la intensidad de corriente, se medirá esta última.

**XXI - 45. Galvanómetro de cuadro móvil y balístico**

Si entre las piezas polares de un potente imán de herradura se coloca un cuadro por el que circula una corriente, de forma que las líneas de campo magnético estén en el mismo plano del cuadro (Fig. XXI-80), quedará éste sometido a un par de fuerzas tal que las fuerzas  $F$  y  $F'$  que lo componen son perpendiculares al plano del cuadro, desviándose éste de su posición de equilibrio.

Si el cuadro se encuentra unido a un resorte  $A$ , y el momento del par permanece constante en las sucesivas posiciones del sistema, el ángulo  $\theta$  que éste se desvía, es proporcional a la intensidad de la corriente que circula por las espiras:  $I = C \theta$ . La medida de  $C$  y  $\theta$ , nos determina la intensidad  $I$ .  $C$  se determina por un previo calibrado, pasando por el cuadro una corriente de intensidad  $I$  conocida; la medida del ángulo  $\theta$  de desviación nos da el valor de la constante de proporcionalidad ( $C = I/\theta$ ).

Para conseguir la constancia del par, las piezas polares dejan entre sí una cavidad cilíndrica en la que hay alojado un cilindro de hierro dulce dejando entre él y las paredes de la cavidad una pequeña capa de aire; las espiras que componen el cuadro están arrolladas en un plano diametral del cilindro, como indica la Fig. XXI-80. El campo magnético es radial y de valor constante en la capa de aire y así en cualquier posición del cuadro el momento del par es el mismo.

El momento del par que actúa sobre el arrollamiento es:  $N = BIA$ , ya que la dirección del campo radial coincide con la normal a la superficie del circuito en todas las posiciones de él.  $A$  es la superficie total del circuito. Siendo el momento del par que produce la torsión de resorte  $N = K \theta$  obtenemos por igualación:

$$BIA = K \theta \Rightarrow I = \frac{K}{BA} \theta = C \theta$$

como ya habíamos indicado.

**GALVANÓMETRO BALÍSTICO:** Una aplicación del galvanómetro se tiene cuando se utiliza para medir la carga eléctrica, que pasa por el cuadro en un tiempo pequeño, comparado con su período de oscilación; así por ejemplo: al cesar la corriente continua que pasa por el cuadro de una galvanómetro, el par recuperador es:  $N_R = -K \theta = \Lambda \alpha$  ( $\Lambda$  = momento de inercia;  $\alpha$  = aceleración angular); y el cuadrado oscilará con un período:  $T = 2\pi \sqrt{\Lambda/K}$ . Si el momento de inercia es grande y la constante recuperadora  $K$ , pequeña, las oscilaciones del cuadro son lentas.

En estas condiciones se puede utilizar el galvanómetro para medidas de cantidades de electricidad correspondientes a descargas que se realizan a través del cuadro, en un tiempo pequeño. El cuadro recibe un impulso de corta duración y oscila, siendo su desviación máxima proporcional a la cantidad de electricidad que circula por el circuito, siempre que el amortiguamiento del sistema sea constante.

**XXI - 46. Amperímetros**

Los galvanómetros se construyen en general para medir intensidades de corriente relativamente pequeñas; sin embargo se pueden utilizar para la medida de intensidades mucho mayores, sin más que *shuntarlo* (Fig. XXI-81) y hacer pasar por el galvanómetro una fracción tan pequeña como se quiera de la intensidad total, tal montaje de medición lo llamaremos **AMPERÍMETRO**. Para convertir un galvanómetro en un amperímetro de alcance múltiple, habrá que tener en cuenta la máxima corriente que puede pasar por el galvanómetro y *shuntarlo* con más o menos resistencia (según la intensidad a medir), como se indica en la Fig. XXI-82, en la que  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son clavijas o enchufes para la conexión con el circuito en el que se desea medir la intensidad. (Ver problema 83 del capítulo XX).

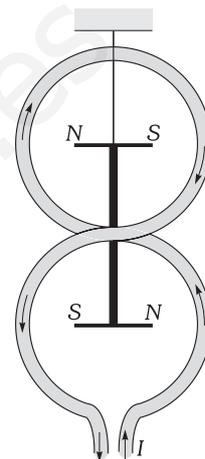


Fig. XXI-79.- Galvanómetro de imán móvil. Par astatico.

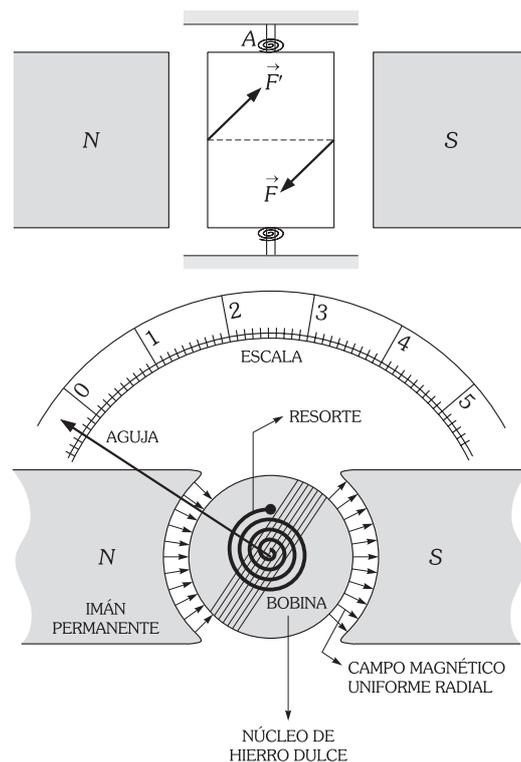


Fig. XXI-80.- Galvanómetro de cuadro móvil.

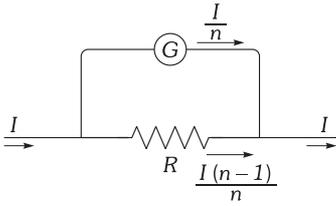


Fig. XXI-81.- Galvanómetro shuntado. Amperímetro.

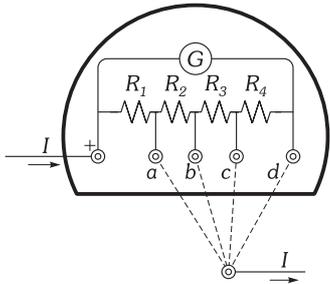


Fig. XXI-82.- Amperímetro de alcance múltiple

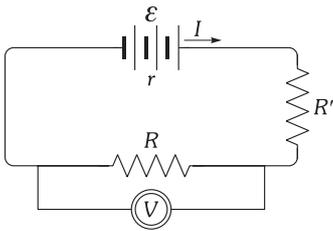


Fig. XXI-83.- Circuito que contiene el voltímetro V y nos mide la diferencia de potencial en los extremos de la resistencia R.

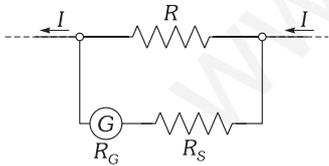


Fig. XXI-84.- Voltímetro.

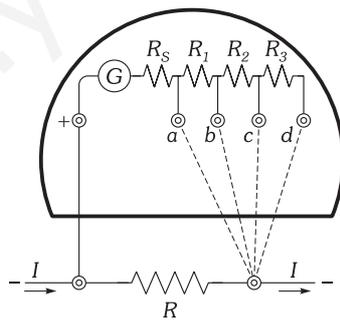


Fig. XXI-85.- Voltímetro de alcance múltiple.

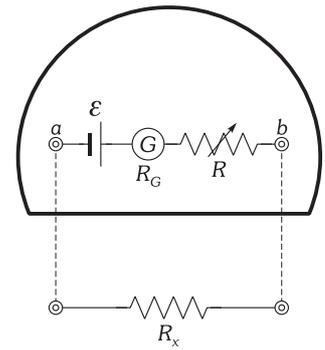


Fig. XXI-86.- Ohmímetro.

Para medir la intensidad de corriente en un circuito, debe colocarse el *amperímetro en serie* con él, de modo que la corriente que se desea medir, pase a través del aparato. Evidentemente, la resistencia del amperímetro no debe modificar la intensidad de corriente que queremos medir, con lo que tiene que tomar valores mucho menores que la del resto del circuito; el amperímetro ideal debería tener resistencia nula.

**XXI - 47. Voltímetros**

Los VOLTÍMETROS son aparatos que sirven para medir la diferencia de potencial entre dos puntos.

Según la ley de Ohm la diferencia de potencial entre dos puntos, es directamente proporcional a la corriente que la recorre; por consiguiente, un galvanómetro puede utilizarse, modificándose convenientemente su escala, para medir diferencias de potencial si se conecta en *paralelo* con una cierta resistencia R en la que ha de medirse la diferencia de potencial que se produce (Fig. XXI-84). La presencia del voltímetro no ha de modificar significativamente la resistencia «total» (RT), para lo cual, la rama en que se incluye el voltímetro debe tener una resistencia mucho mayor que R, por lo que se amplía la resistencia del galvanómetro colocándole una gran resistencia RS en serie con él (Fig. XXI-84), de esta forma:

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_S + R_G} + \frac{1}{R} \approx \frac{1}{R}$$

y la conexión del voltímetro en el circuito, tendrá una influencia despreciable sobre la caída de potencial de R. Así, un voltímetro ideal debería tener una resistencia infinita.

Para construir un voltímetro de alcance múltiple, se tendrá en cuenta la intensidad de corriente máxima que al circular por el galvanómetro, desvía la aguja hasta el fondo de la escala, y determinar las resistencias en serie a incluir al galvanómetro, según el valor de la intensidad I que circula por el circuito en medición (Ver Fig. XXI-85, y problema 84 del capítulo XX), y conectarlo en derivación al polo positivo y a los enchufes a, b, c, ...

**XXI - 48. Ohmímetros**

Son aparatos que sirven para medir resistencias. Está constituido por un galvanómetro en serie con una pila de FEM ε conocida. Para la medición de Rx, se conecta del modo indicado en la Fig. XXI-86. En la práctica se instala una resistencia variable R como medio de ajuste de la sensibilidad del aparato, de forma que cuando a y b se encuentren en cortocircuito (es decir, Rx = 0) se obtiene la desviación de la aguja a escala completa (a fondo) IG = Imax, y cuando está abierto (Rx = ∞) la aguja del galvanómetro, lógicamente, no experimenta desviación alguna. Para una valor Rx entre cero e infinito, la aguja se desviará hasta una posición intermedia dependiendo de Rx, por tanto la escala del galvanómetro se puede calibrar para medir Rx.

**PROBLEMAS**

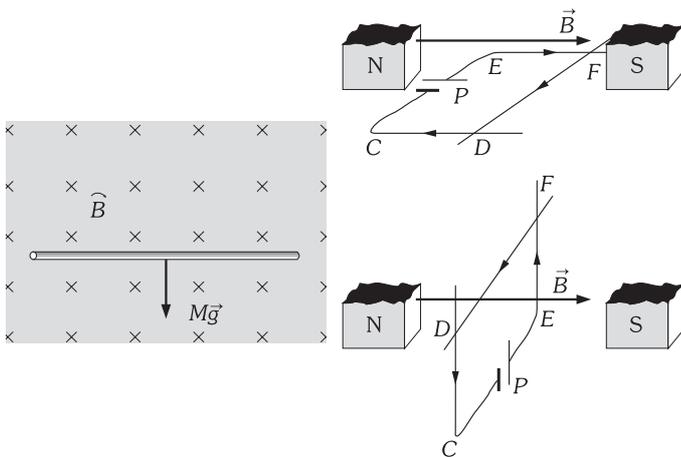
**A) FUERZA DE LORENTZ: APLICACIONES**

1. Un alambre homogéneo de 50 cm de longitud y 10 g de masa, por el que circula una intensidad de corriente I, se encuentra «sumergido» en un campo magnético de inducción B = 0,2 T (perpendicular al plano de la figura y que entra en la página). Determinar la magnitud y dirección de I para que se mantenga en equilibrio y no caiga por su peso.

2. Un hilo conductor DF por el que circula una corriente producida por la pila P se puede deslizar a lo largo de los hilos CD y EF sobre los que descansa. Variamos la posición del cuadro, poniéndolo vertical. Si la intensidad de la corriente es adecuada, el hilo DF no caería. ¿Por qué?

3. En la experiencia del problema anterior realizada en el vacío la inducción magnética B es de 1,96 × 10<sup>-2</sup> T y la intensidad de la corriente

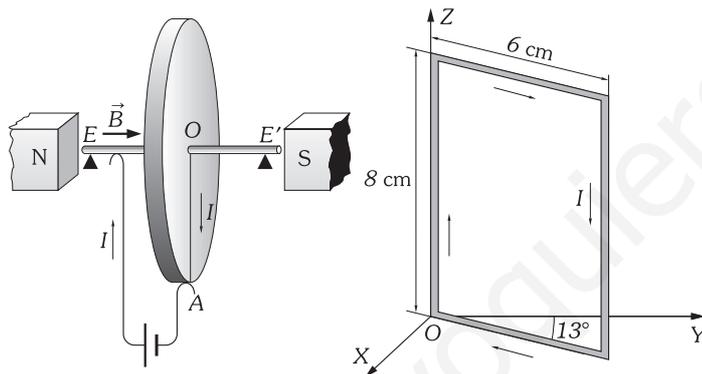
te es 5 A. Calcular la masa de cada cm del hilo  $DF$  para que no caiga por su peso.



Problema XXI-1.

Problema XXI-2 y 3.

4. Un disco metálico puede girar alrededor de un eje  $EE'$ . Se instala una pila en la forma de la figura, estableciendo los contactos con la periferia de la rueda y con el eje por medio de escobillas que permiten el giro de la rueda sin perder el contacto. La corriente circula en el sentido de la flecha, el radio  $OA$  hace de conductor. Puesta la rueda en un campo magnético cuya dirección es la del eje, se pone a girar sola. ¿Por qué?



Problema XXI-4.

Problema XXI-7.

5. La masa de la rueda de Barlow del problema anterior es de 20 g. La experiencia se hace en el vacío; el campo magnético es de  $2 \times 10^{-3}$  T y la intensidad de la corriente es de 1 A (ambos los supondremos constantes con el tiempo). Calcular la velocidad angular de la rueda a los 10 s de iniciado su movimiento.

6. En el platillo de una balanza de Cotton (Fig. XXI-17) colocamos una pila de FEM 1 V que alimenta un circuito de resistencia total 1  $\Omega$ . El circuito está en el seno de un campo magnético producido por un electroimán NS de forma que la inducción magnética entre sus polos es perpendicular a los hilos que hay entre las piezas polares. Antes de establecer contacto entre pila y circuito se coloca en el otro platillo de la balanza una tara, de mayor masa que la existente en A, y se equilibra la balanza mediante pesas de masa  $M_1 = 15,830$  g. Se hace circular la corriente y para mantener el equilibrio de la balanza hay que modificar las pesas de A; la masa de ellas, conseguido el equilibrio, es  $M_2 = 15,730$  g. La longitud del hilo  $EF$  es 9,8 cm. La experiencia se realiza en vacío. Calcular la introducción magnética entre los polos del electroimán.

7. El cuadro rectangular de la figura adjunta puede girar alrededor del eje  $Z$  y transporta una corriente de 10 A en el sentido indicado. 1) Si el cuadro se encuentra en un campo magnético uniforme de inducción 0,2 T paralelo al eje  $Y$ , calcular la fuerza ejercida sobre cada lado del cuadro y el momento necesario para mantener el cuadro en la posición indicada. 2) La misma cuestión cuando el campo es paralelo al eje  $X$ . 3) ¿Qué momento sería necesario aplicar al cuadro para que permaneciera en equilibrio en el caso en que éste pudiese girar alrededor de un eje que pasase por su centro, paralelamente al eje  $Z$ ?

8. Por una bobina circular de 3 cm de radio que posee 15 espiras, circula una corriente de 1 A. ¿Cuánto trabajo se necesita para hacerla girar en el interior de un campo magnético externo de inducción 2 T, desde una posición en que  $\varphi = 0$ , hasta otra en la que  $\varphi = \pi$  rad? ( $\varphi$  es el ángulo que forma la normal al plano de la espira con el vector inducción magnética).

9. El momento dipolar de una espira plana viene dado por la expresión:  $\mathbf{m} = 2 \mathbf{i} - 3 \mathbf{j} + \mathbf{k}$  A  $\cdot$  m<sup>2</sup> y se encuentra sumergida en un campo magnético de inducción:  $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 3 \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}$  T. Calcular: 1) El momento del par de fuerzas a que se encuentra sometida la espira. 2) La energía potencial que posee.

10. Comprobar que una partícula de carga  $q$  y masa  $M$  moviéndose en trayectoria circular de radio  $R$  y con velocidad angular  $\omega$  equivale a una espira circular del mismo radio por la que circula una intensidad de corriente cuyo valor es  $I = \omega q / 2\pi$ . Expresar esta  $I$  en función del momento angular de la partícula ( $J$ ) y calcular el momento magnético del sistema.

11. Un electrón penetra normalmente en un campo magnético uniforme de inducción  $15 \times 10^{-4}$  T ( $e = -1,6 \times 10^{-19}$  C;  $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$  kg). La velocidad es de  $2 \times 10^6$  m/s. Calcular: 1) La fuerza que actúa sobre el electrón. 2) El radio de la órbita que describe. 3) El tiempo que tarda en recorrer dicha órbita.

12. Se lanza un electrón con una velocidad de  $v = 10^5$  km/s en el interior de un campo magnético, normalmente a la dirección de la inducción  $B$ , cuyo valor es de  $10^{-2}$  T. (Masa del electrón:  $9,1 \times 10^{-31}$  kg. Carga:  $-1,6 \times 10^{-19}$  C.) Se pide: 1) Demostrar que el electrón seguirá una trayectoria circular con un movimiento uniforme, y calcular el radio de la trayectoria y el número de Hz. 2) Calcular la energía del electrón a su entrada en el campo. 3) Calcular la variación de potencial  $V$  que debe experimentar ese electrón para pasar del reposo a la velocidad  $v$ .

13. Sobre un protón que posee una energía cinética de 4,5 MeV actúa en dirección normal a su trayectoria un campo magnético uniforme de inducción 8 T. (Masa del protón:  $1,67 \times 10^{-27}$  kg. Carga:  $1,6 \times 10^{-19}$  C.) Determinar: 1) Valor de la fuerza que actúa sobre él. 2) El radio de la órbita descrita. 3) Número de vueltas que da en 1 s.

14. Calcular el radio de la trayectoria y el semiperíodo al penetrar un electrón, un protón o un deuterón con velocidad de  $10^7$  m/s en un campo magnético uniforme de inducción  $2 \times 10^{-2}$  T; la velocidad y el campo son perpendiculares entre sí y supondremos invariables las masas de las partículas citadas, con la velocidad. (Masa del electrón:  $9,1 \times 10^{-31}$  kg. Carga del protón y del electrón en valor absoluto:  $1,6 \times 10^{-19}$  C. Masa del protón aproximadamente igual a la masa del neutrón:  $1,67 \times 10^{-27}$  kg.)

15. Los deuterones que son acelerados por un generador de Van de Graaff a una diferencia de potencial de  $4 \times 10^5$  V, penetran normalmente a un campo magnético uniforme, y describen circunferencias de 13 cm de radio. Calcular el valor de la inducción magnética y el período del movimiento circular descrito (tomar los datos necesarios del problema anterior).

16. ¿Qué trayectoria sigue un electrón al penetrar en un campo magnético de forma que las direcciones de la velocidad y el campo no sean perpendiculares ni coincidan? ¿Y si coinciden?

17. En un determinado instante una carga de 2  $\mu$ C posee una velocidad  $\mathbf{v} = 2 \mathbf{i} - 3 \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}$  m/s en una región en la que existen un campo eléctrico  $\mathbf{E} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}$  V/m y un campo magnético de inducción  $\mathbf{B} = 3 \mathbf{i} + 2 \mathbf{j} + \mathbf{k}$  T. Calcular la fuerza total ejercida sobre la carga en ese momento.

18. Un ciclotrón tiene una frecuencia de oscilación (frecuencia de la tensión alterna aplicada a las «des») de  $10^7$  Hz y el radio de las «des» es de 50 cm ( $m_p = 1,67 \times 10^{-27}$  kg;  $e = 1,6 \times 10^{-19}$  C). 1) ¿Qué campo magnético se necesita para acelerar los protones generados en el centro sin velocidad inicial? 2) ¿Cuál es la energía de los protones resultantes?

19. Un ciclotrón tiene un radio de 40 cm, sus «des» se encuentran sometidas a una tensión alterna de  $5 \times 10^4$  V, y el valor de su inducción magnética es 1,5 T. Calcular: 1) La velocidad adquirida por un deuterón, puesto en reposo en el centro del ciclotrón, a su salida. 2) El número de vueltas descritas por el deuterón.

20. ¿Qué condición es la necesaria para que una partícula electrizada que se mueve rectilíneamente siga en su trayectoria rectilínea, estando sometida a un campo eléctrico y a otro magnético perpendiculares entre sí y perpendiculares a su velocidad?

21. Se aplica una diferencia de potencial de 100 V a las armaduras de un condensador, planas, paralelas, horizontales, separadas por 1 cm de distancia, y en el vacío. Calcular: 1) La intensidad del campo eléctrico

co entre dichas láminas. 2) La capacidad del condensador, si la superficie de cada lámina es de  $0,5 \text{ m}^2$ . 3) Se lanza horizontalmente un electrón entre las láminas con una velocidad de  $10^7 \text{ m/s}$  y se aplica un campo magnético perpendicular a dicha velocidad. Calcular la inducción de este campo magnético para que el electrón no se desvíe, y determinar su dirección. 4) Calcular el radio de la órbita circular descrita por el electrón cuando se suprime el campo eléctrico.

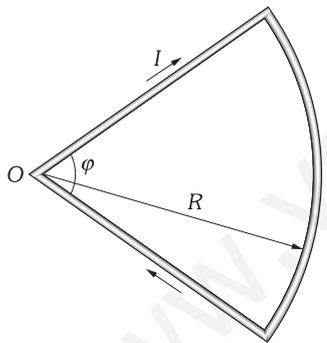
**22.** Una partícula  $\alpha$  penetra en un campo magnético de inducción  $B = 1,6 \text{ i T}$ , con una velocidad  $v = 3 \times 10^5 \text{ k m/s}$ . Calcular el vector campo eléctrico que hace que la partícula  $\alpha$  siga moviéndose a lo largo del eje OZ.

**23.** En el esquema representado en la figura XXI-28 de un espectrógrafo de masas ideado por Bainbridge,  $F$  es una fuente de iones acelerados a través de un potencial de algunos miles de voltios, que penetran en un «selector de velocidades» constituido por un condensador plano en el que se mantiene un campo eléctrico y perpendicularmente a él un campo magnético, que sólo deja pasar a aquellos iones que poseen una determinada velocidad  $v$ . Por encima de  $AA'$  existe un campo magnético perpendicular al plano de la figura que hace que los iones de diferentes masas e igual carga describan distintas trayectorias circulares, incidiendo sobre una placa fotográfica que una vez revelada nos dará el espectro de masas. En el supuesto de que el campo eléctrico entre las placas del condensador sea de  $200 \text{ V/m}$ , el campo magnético en ambas regiones descritas sea de inducción  $0,1 \text{ T}$ , y el manantial emita iones de los tres isótopos de magnesio,  $^{24}_{12}\text{Mg}$ ,  $^{25}_{12}\text{Mg}$  y  $^{26}_{12}\text{Mg}$ , con dos cargas positivas; calcular la distancia entre las líneas formadas por los tres isótopos sobre la placa fotográfica ( $x_1$  y  $x_2$  en la figura).

**24.** Determinar la FEM Hall que se produce en una cinta de cobre (suponiendo para este metal un electrón libre por átomo) de  $0,2 \text{ cm}$  de espesor, y por la que circula una intensidad de corriente de  $5 \text{ A}$ , cuando se aplica un campo magnético uniforme de inducción  $1,5 \text{ T}$ , perpendicular a la cinta. Densidad del cobre:  $8,95 \text{ g/cm}^3$ ; masa atómica:  $63,5 \text{ g/mol}$ .

**B) LEY DE BIOT Y SAVART**

**25.** Determinar la inducción magnética en el punto O del circuito cerrado de la figura.



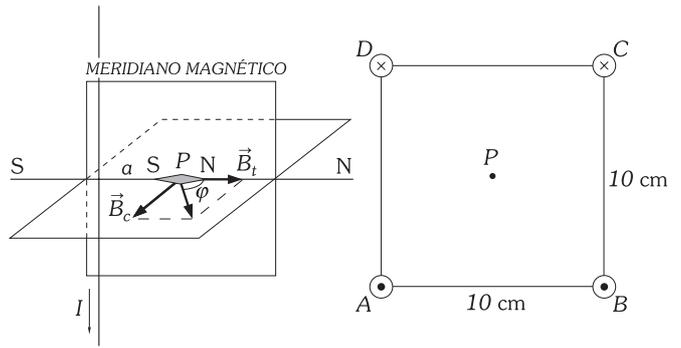
Problema XXI-25.

**26.** Determinar, aplicando la ley de Biot y Savart, la inducción magnética creada por una corriente rectilínea indefinida en un punto a una distancia  $a$  del hilo.

**27.** Tenemos un hilo conductor recto y muy largo. A la distancia de  $10 \text{ cm}$  de él y en un punto  $P$  colocamos un magnetómetro de forma que su posición de equilibrio (NS) esté en el mismo plano del hilo como se indica en la figura. Hacemos circular una corriente y el imán, girando en un plano horizontal (su eje es vertical) se desvía  $45^\circ$  con respecto a su primer equilibrio. Calcular la intensidad de la corriente que circula por el hilo. La componente horizontal del vector inducción del campo magnético terrestre tiene por valor:  $B_i = 10^{-5} \text{ T}$  y  $\mu_0 = 4\pi/10^7 \text{ N/A}^2$ .

**28.** La figura nos representa cuatro hilos conductores muy largos y paralelos que transportan una intensidad de corriente de  $5 \text{ A}$  (en  $A$  y  $B$  la corriente es saliente del papel y en  $C$  y  $D$  entrante). Determinar el vector inducción magnética en el punto  $P$  situado en el centro del cuadrado ( $\mu_0 = 4\pi/10^7 \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$ ).

**29.** La figura nos representa dos hilos muy largos y paralelos que llevan corrientes de intensidades  $I_1$  e  $I_2$  perpendiculares al plano del papel y hacia afuera. Determinar el vector inducción magnética en el punto  $P$  en función de  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $a$  b y  $c$ .



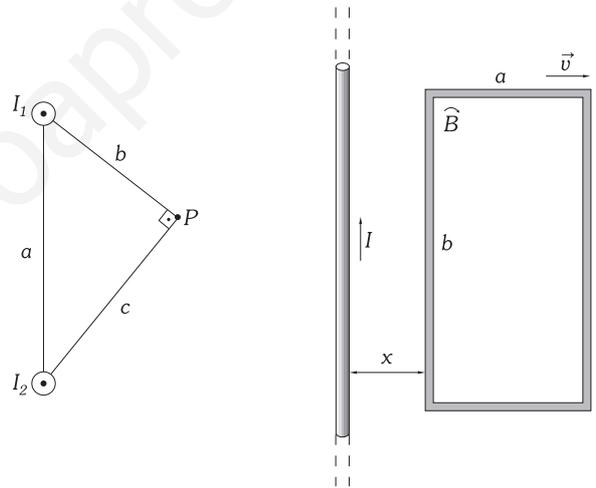
Problema XXI-27.

Problema XXI-28.

**30.** Por integración de la ley de Biot y Savart, calcular el valor de la inducción magnética creada en el centro de un circuito cuadrado de lado  $l$  por el que circula una intensidad  $I$ . Realizar el cálculo para  $l = 20 \text{ cm}$ ,  $I = 10 \text{ A}$  y  $\mu_0 = 4\pi/10^7 \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$ .

**31.** Calcular la inducción magnética creada en el centro de un circuito en forma de hexágono regular de perímetro  $36\sqrt{3} \text{ cm}$ , cuando circula por él una corriente capaz de depositar por electrólisis de nitrato de plata  $10,062 \text{ g}$  de este metal en  $16 \text{ min}$  y  $40 \text{ s}$ . ( $E = 0,001118 \text{ g}$ ;  $\mu_0 = 4\pi/10^7 \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$ ).

**32.** Calcular el flujo magnético que atraviesa el cuadro rectangular de la figura. DATOS:  $I = 2 \text{ A}$ ,  $a = 5 \text{ cm}$ ,  $b = 10 \text{ cm}$ ,  $d = 5 \text{ cm}$ .



Problema XXI-29.

Problema XXI-32 y 33.

**33.** Determinar la velocidad de variación de flujo cuando el cuadro de la figura del problema anterior se desplaza hacia la derecha con velocidad de  $3 \text{ m/s}$  en su plano, en el instante en que se encuentra el lado  $b$  a  $10 \text{ cm}$  del hilo.

**34.** Calcular, aplicando la ley de Biot y Savart, la inducción magnética creada en el centro de un circuito circular de radio  $R$  por el que circula una intensidad de corriente  $I$ .

**35.** En el plano del meridiano magnético (plano vertical que pasa por el eje de un magnetómetro en equilibrio en el campo magnético terrestre; ver figura) está colocado un circuito circular de  $12,56 \text{ cm}$  de radio. Cuando por él circula una corriente de  $2 \text{ A}$  la aguja magnética apoyada en un eje vertical gira un ángulo de  $45^\circ$ . Calcular la componente horizontal de la inducción magnética terrestre ( $\mu_0 = 4\pi/10^7 \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$ ).

**36.** Por una bobina circular de espiras estrechamente arrolladas de  $20 \text{ cm}$  de radio, circula una corriente de  $10 \text{ A}$  que produce un campo magnético en su centro de inducción  $1,6 \times 10^{-4} \text{ T}$ . Determinar el número de espiras que posee la bobina.

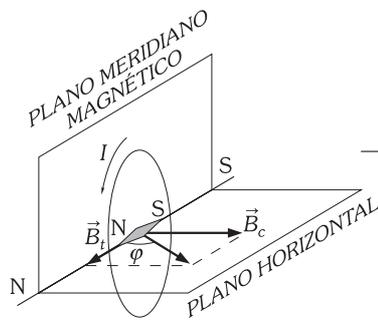
**37.** En el modelo de Bohr para el átomo de hidrógeno, el electrón describe órbitas circulares alrededor del núcleo de  $5,28 \times 10^{-11} \text{ m}$ . Calcular el valor de la inducción magnética producida por el electrón en el centro del átomo de hidrógeno ( $e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ .  $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ .  $\mu_0 = 4\pi/10^7 \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$ ).

**38.** Un anillo de radio  $R$ , está cargado homogéneamente con una densidad lineal de carga  $\lambda$  y se encuentra girando alrededor de su eje con una velocidad angular constante  $\omega$ . Determinar el valor de la inducción

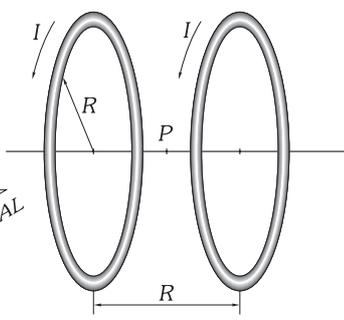
ción magnética en un punto de su eje situado a una distancia  $a$  de su centro.

39. Determinar la inducción magnética creada por un circuito circular de radio  $R$  en un punto del eje y a una distancia  $a$  de su centro, cuando circula por él una intensidad de corriente  $I$ .

40. Las bobinas de Helmholtz son un montaje, que consiste en dos bobinas paralelas y coaxiales del mismo radio, igual número de espiras y separadas entre sí una distancia igual a su radio (ver Fig.), por las que circula la misma intensidad de corriente en el mismo sentido. Calcular  $B$  en el punto medio  $P$  y en el centro de una cualquiera de ellas.



Problema XXI-35.



Problema XXI-40.

41. Dos circuitos circulares, paralelos y coaxiales, de radios 6 y 10 cm, transportan corrientes de sentido contrario e intensidades 4 y 2 A respectivamente, y distan entre sí 8 cm. Calcular: 1) El punto de su eje en donde la inducción del campo magnético es nula. 2) El valor de la inducción magnética resultante en el punto medio del segmento que une sus centros.

42. Dos conductores paralelos, rectos y que se pueden considerar como indefinidos están recorridos por sendas corrientes eléctricas; la separación entre ambos es de 15 cm. Por uno de ellos pasan 54 000 C cada hora y por el otro una corriente de 10 A; las dos corrientes son del mismo sentido. Determinar: 1) El valor y sentido de la fuerza que actúa por cada cm de longitud de conductor. 2) La inducción magnética creada por el primer conductor, en un punto a 20 cm de él. 3) Si la corriente del primer conductor pasa a través de un voltámetro con agua acidulada, ¿cuántos gramos de hidrógeno se desprenden en cada hora?

DATOS:  $\mu_0 = 4\pi/10^7 \text{ NA}^{-2}$ .  $1 \text{ F} = 96 \text{ 500 C}$ .  $H = 1$ .

43. Dos largos y fijos conductores paralelos están separados 10 cm; por uno  $M$  pasa una corriente de 30 A, y por el otro  $N$  una de 40 A. Si las corrientes son de sentidos opuestos, determinar: 1) El valor de la inducción magnética resultante en una línea del plano de los dos conductores, paralela a ellos y a igual distancia de ambos. 2) El valor de la inducción magnética en una línea paralela a los conductores y situada a 5 cm de  $M$  y 15 cm de  $N$  y en su plano. 3) ¿Cuál es la fuerza por unidad de longitud sobre un conductor paralelo a ambos, en su plano y a igual distancia de ellos y por el que pasa una corriente de 5 A, en el mismo sentido de la que pasa por el conductor  $M$ ?

44. Por un solenoide recto de longitud  $l$  y radio  $R$  y que tiene arrolladas  $n$  espiras circula una intensidad de corriente  $I$ . Determinar: 1) La inducción magnética en su interior, en un punto de su eje, aplicando la ley de Biot y Savart. 2) La inducción magnética en uno cualquiera de los extremos del solenoide y en un punto del eje cuando  $l \gg R$ . 3) La inducción magnética en su interior cuando se verifica que  $l \gg R$  (solenoides recto e indefinido).

45. La sección transversal de un toroide de 30 cm de radio interno, es cuadrada de  $10 \times 10 \text{ cm}$  y tiene enrolladas 1 000 vueltas de un hilo conductor que transporta una corriente de 1 A. Calcular: 1) La inducción magnética en su interior. 2) El flujo magnético a través de su sección transversal.

C) PROPIEDADES GENERALES DEL CAMPO MAGNÉTICO. LEY DE AMPERE

46. Demostrar que el flujo magnético que atraviesa una superficie cilíndrica, cerrada y coaxial con una línea de corriente rectilínea e indefinida recorrida por una intensidad de corriente  $I$ , es cero.

47. Sea una esfera conductora hueca con un orificio por el que pasamos un hilo conductor que unimos a la pared opuesta de la esfera. Suponiendo que por el hilo conductor pasa una corriente  $I$  y vuelve por

la esfera uniformemente repartida, calcular la inducción magnética en el interior y exterior de la esfera.

48. Aplicando la ley de Ampère, determínese la inducción magnética en el interior de un solenoide recto y largo con  $N$  espiras por unidad de longitud cuando por él circula una corriente de intensidad  $I$ .

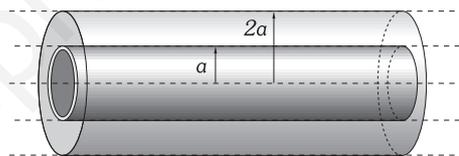
49. Calcular el porcentaje de error que se comete al utilizar la fórmula  $B = \mu_0 IN$  en el cálculo de la inducción magnética en el centro de un solenoide recto de 35 cm de longitud y 2 cm de radio.

50. Hallar la inducción magnética en el interior de una bobina toroidal de  $n$  espiras recorridas por una intensidad  $I$ . Demostrar que para la misma bobina la inducción magnética en el exterior es nula. (Supondremos que la diferencia entre el radio externo  $e$  interno del toroide es despreciable frente al radio interno.)

51. Aplicando la ley de Ampère, determínese la inducción magnética creada por un hilo conductor rectilíneo indefinido de diámetro  $d$  y que transporta una intensidad  $I$ : 1) En un punto que diste  $r$  del conductor para  $r > d/2$ . 2) En un punto que diste  $r$  del conductor para  $r < d/2$ .

52. Por un tubo conductor recto de radios interior y exterior  $a$  y  $b$ , circula una corriente de intensidad  $I$  en dirección axial, y distribuida uniformemente por toda su sección recta. Calcular la inducción magnética en un punto que dista  $r$  del eje cuando: 1)  $0 < r < a$ . 2)  $a < r < b$ . 3)  $b < r$ .

53. La figura nos representa dos hilos rectos, largos, coaxiales, aislados y metálicos. Por el hilo interior de radio  $a$ , circula una corriente  $I$ , por el que le rodea, de radio interno  $a$  y externo  $2a$ , circula una corriente igual y opuesta, distribuida uniformemente por toda su sección recta. Calcular la inducción magnética en un punto que dista del eje  $r$ , cuando: 1)  $0 < r < a$ . 2)  $a < r < 2a$ . 3)  $r < 2a$ .



Problema XXI-53.

54. Un cable coaxial muy largo está constituido por dos conductores, el interior es un cilindro de radio 0,2 cm y transporta una corriente de 50 A; el exterior es un tubo de radio interno 0,4 cm y externo 0,6 cm y transporta una corriente de 50 A en sentido contrario a la que circula por el hilo interno. Las intensidades de corriente están distribuidas uniformemente en sus secciones transversales. Determinar el valor de la inducción magnética en puntos que distan del eje: 0,1 cm, 0,3 cm, 0,5 cm y 0,7 cm.

D) CAMPOS MAGNÉTICOS PRODUCIDOS POR CORRIENTES NO ESTACIONARIAS

55. La diferencia de potencial aplicada a las placas de un condensador de  $1 \mu\text{F}$  de capacidad, es una función del tiempo y su expresión en el SI es:  $V = 50 \text{ sen}(100\pi t + 1,6)$  (Este potencial corresponde a una corriente alterna.) Calcular: 1) La corriente de desplazamiento entre las placas del condensador. 2) Tiempo que tarda esta corriente de desplazamiento en ser 0,3 veces su valor máximo.

56. Un condensador plano de placas circulares de 3 cm de radio, separadas entre sí una distancia de 1 mm y con vacío en su interior, se somete a un potencial variable con el tiempo, según la expresión, escrita en el SI:  $V = 5(1 - 3^{-t/6})$ . Calcular para el instante  $t = 3 \text{ s}$ : 1) La corriente de desplazamiento. 2) La velocidad de variación del campo eléctrico entre las placas del condensador. 3) El valor de la inducción magnética producida en un punto situado dentro del condensador y a 2 cm de su eje de simetría.

E) PROPIEDADES MAGNÉTICAS DE LA MATERIA

57. Un imán está constituido por una barra cilíndrica de 15 cm de longitud. Podemos obtener un solenoide equivalente arrollando sobre un cilindro de cartón, de las mismas dimensiones, 150 espiras y haciendo pasar por ellas una intensidad de corriente de 3 A. Determínese la imanación  $M$  del imán.

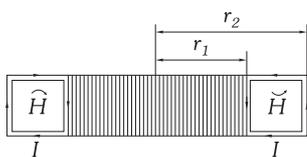
58. Por un hilo conductor recto y muy largo circula una corriente de 10 A. Calcular la inducción magnética  $B$ , la intensidad del campo magnético  $H$  y la imanación  $M$  en un punto que se encuentra a 20 cm

de él, según se encuentre «sumergido»: 1) En el vacío. 2) En el mu-metal ( $\mu' = 10^5$ ). 3) En el alambre férreo ( $\mu' = 1,007\ 54$ ).

**59.** Una barra cilíndrica larga posee una imanación  $M = 10^3$  A/m y está rodeada de 3 espiras por centímetro de un hilo conductor por el que circula una corriente de 3 A. Determinar  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  en su interior por aplicación de la ley de Ampère.

**60.** Un anillo de Rowland de 8 cm de radio medio está constituido por un arrollamiento de 800 vueltas de un hilo conductor sobre un núcleo de permeabilidad relativa 1 000. Si se hace pasar una corriente de 5 A, calcular: 1) El valor de la inducción magnética  $B$  en su interior. 2) El valor de la intensidad de campo magnético  $H$  en su interior. 3) La imanación del anillo.

**61.** Considérese un anillo de Rowland de 10 cm de radio medio en el que arrollamos 1 000 espiras a un núcleo de hierro, por el arrollamiento circula una intensidad de corriente (corriente de conducción) de 5 A. El valor de la inducción magnética  $B$  en su interior es de 2 T. Calcular: 1) La intensidad del campo magnético  $H$  (excitación). 2) La imanación  $M$ . 3) El valor de la intensidad de la corriente de magnetización.



Problema XXI-62.

**62.** Determinar el flujo de inducción magnética que atraviesa a la sección transversal cuadrada del toroide de hierro de la figura, siendo  $r_1 = 10$  cm y  $r_2 = 15$  cm, cuando lleva un arrollamiento de 1 000 vueltas; sabiendo que la intensidad de corriente que lo recorre es de 1 A y que la permeabilidad magnética relativa del hierro es  $\mu' = 1\ 200$ .

**63.** Un anillo de hierro de sección cuadrada y diámetros interior y exterior de 25 cm y 35 cm, respectivamente, lleva un arrollamiento de 500 vueltas. Sabiendo que el flujo de inducción magnética vale 0,01 Wb, calcular la intensidad de la corriente que recorre el arrollamiento. (Permeabilidad magnética relativa del hierro:  $\mu' = 1\ 200$ .)

**64.** Se arrolla a un anillo de Rowland de hierro un hilo conductor recubierto de una materia aislante. La longitud media del anillo es 60 cm, y la sección es de 4 cm<sup>2</sup>. Si es 3 el número de espiras por centímetro, el hilo está recorrido por una corriente de 5 A y la permeabilidad relativa del hierro en estas condiciones es 400; determinar: 1) La intensidad del campo magnético  $H$  dentro del anillo. 2) El valor de la inducción magnética  $B$ . 3) El flujo  $\phi$ . 4) La reluctancia  $R$ . 5) La fuerza magnetomotriz  $M$ .

**65.** Alrededor de un anillo de hierro en el que la permeabilidad relativa es 1 000, que tiene una longitud total del circuito magnético de 40 cm y una sección de 80 cm<sup>2</sup>, se enrolla un hilo conductor por el que circula una intensidad de corriente de 0,5 A. ¿Cuántas espiras se han de arrollar si se quiere conseguir un flujo magnético de 0,02 Wb a través de su armadura (sin entrehierro)?

**66.** En el interior de un solenoide de radio medio 20 cm y sección 15 cm<sup>2</sup> se introduce un núcleo de hierro dulce de permeabilidad relativa  $\mu' = 2\ 000$ . Calcular la fuerza magnetomotriz capaz de producir en el entrehierro de  $e = 2$  mm un flujo magnético de  $15 \times 10^{-4}$  Wb.

# CAPÍTULO XXII

## CORRIENTES INDUCIDAS

### A) LEYES DE FARADAY Y DE LENZ

#### XXII – 1. Introducción

Cuando comenzamos el estudio del Magnetismo hacíamos una revisión de algunos fenómenos en los que se ponían de manifiesto las interacciones magnéticas, y poníamos especial interés en resaltar la conexión de los fenómenos magnéticos con los eléctricos, llegando a concluir que el Magnetismo no es más que una parte de la Electricidad.

En capítulos anteriores hemos considerado generalmente al campo eléctrico y al magnético como independientes del tiempo, es decir, en condiciones estáticas; tratamos de manejar las situaciones en las que éstos son variables con el tiempo.

Como consecuencia de este estudio, que fue iniciado por Michael Faraday en Inglaterra y por Joseph Henry (por separado) en EE.UU, en los alrededores de 1831, se abre el camino para la conversión práctica de la energía mecánica en eléctrica y viceversa, dando comienzo a la segunda revolución industrial. Además, estos estudios son esenciales para la comprensión de los fenómenos electromagnéticos, cuya importancia está a la vista y es fundamental para nuestra forma de vida actual (corrientes alternas, dinamos, motores, comunicaciones, ondas electromagnéticas, ... etc).

#### XXII – 2. Diversos experimentos por los que se ponen de manifiesto las corrientes inducidas

**EJEMPLO 1.** Si a un circuito cerrado que tiene un galvanómetro intercalado G (Fig. XXII-1) se le acerca o se le aleja un imán o un electroimán se observa que el galvanómetro acusa un paso de corriente. En el circuito ha aparecido una FEM inducida capaz de hacer circular tal intensidad.

Además, observando el galvanómetro vemos que si se acerca o se aleja el imán o el electroimán y según se acerque un polo u otro, la corriente circula en los sentidos indicados en la Figura XXII-1, es decir:

Al acercar un polo N se origina en el circuito una cara N que lo repele.

Al acercar un polo S se origina en el circuito una cara S que lo repele.

Al alejar un polo N se origina en el circuito una cara S que lo atrae.

Al alejar un polo S se origina en el circuito una cara N que lo atrae.

**EJEMPLO 2.** Consideremos un campo magnético uniforme perpendicular al plano de la Fig. XXII-2 y confinado en un cierta región (línea de puntos). Una espira conductora se introduce dentro del campo magnético observándose paso de corriente en el galvanómetro siempre que la espira se mueva. Si se para cesa la corriente y según se «meta» o se «saque» del campo, la corriente circula en un sentido u en otro. Nuevamente ha aparecido una FEM inducida que es la que hace que circule corriente por la espira.

Observamos en el galvanómetro que:

Si el campo va hacia dentro y se «mete» la espira, la corriente circula en sentido contrario a las agujas de un reloj.

Si el campo va hacia dentro y se «saca» la espira, la corriente circula en el sentido de las agujas del reloj.

Si el campo va hacia fuera y se «mete» la espira, la corriente circula en el sentido de las agujas del reloj.

Si el campo va hacia fuera y se «saca» la espira, la corriente circula en sentido contrario a las agujas de un reloj.

**EJEMPLO 3.** Si hacemos girar un circuito dentro de un campo magnético (Fig. XXII-3) se origina en él una corriente inducida que durante media vuelta va en un sentido y en la siguiente media vuelta va en sentido contrario (ver «corrientes alternas»).

**EJEMPLO 4.** Supongamos que tenemos una espira con un galvanómetro y paralela a ella hay otra espira conectada a una pila y a una resistencia variable (Fig. XXII-4), de tal manera que si modificamos el valor de la resistencia, la intensidad que circula en ese segundo circuito varía, y por tanto, también el campo magnético que produce, apareciendo un paso de corriente por el primer circuito que es acusada por el galvanómetro. El galvanómetro no es afectado (no existe paso de

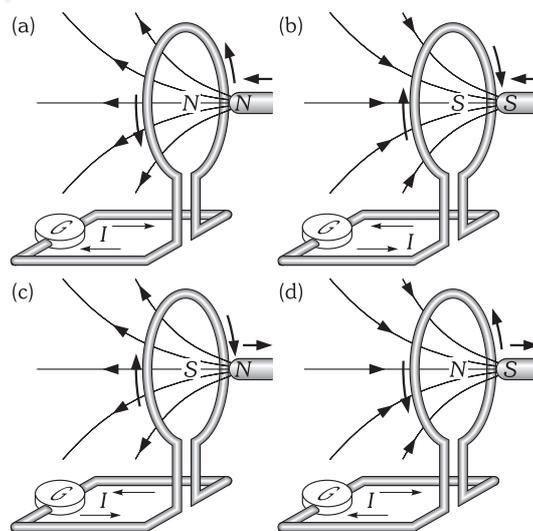


Fig. XXII-1.- Cuando un imán se mueve hacia, o alejándose de una espira, en ésta se produce una corriente eléctrica en los sentidos indicados para cada caso.

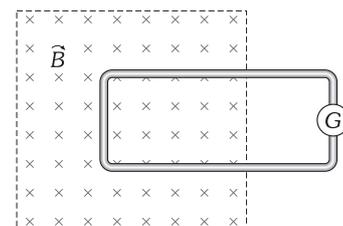


Fig. XXII-2.- El campo magnético uniforme se encuentra confinado dentro de la región limitada por la línea de puntos. Según se «meta» o se «saque» la espira de dicha zona, la corriente eléctrica inducida circula en uno u otro sentido.

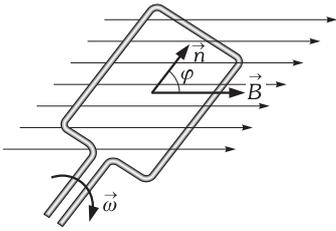


Fig. XXII-3.- Al girar una bobina plana en el interior de un campo magnético se producen en ella corrientes eléctricas, que durante media vuelta circulan en un sentido y en la siguiente media vuelta van en sentido contrario.

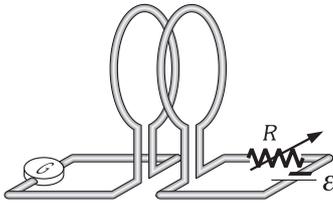


Fig. XXII-4.- El galvanómetro acusa un paso de corriente eléctrica cuando se abre o se cierra el circuito de la derecha, y también cuando se modifica la resistencia R.

corriente) si no variamos la intensidad. El sentido de la corriente inducida depende de que aumentemos o disminuyamos la intensidad que circula en el segundo circuito.

En todos estos ejemplos observamos que *siempre que tenemos una variación en el flujo magnético que atraviesa el circuito aparece una corriente inducida y su sentido depende de que el flujo aumente o disminuya.*

**XXII – 3. Leyes de Faraday y de Lenz. Tercera ecuación de Maxwell**

El flujo elemental que atraviesa un elemento de área dA, en un campo magnético de inducción **B** viene dado por:

$$d\phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = B dA \cos \varphi \Rightarrow \phi = \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int_A B dA \cos \varphi$$

en la que A es una superficie finita. La variación del flujo magnético puede ser debida a la *variación del campo* (ejemplos 1 y 4), a la *variación del área* (ejemplo 2) y a la *variación del ángulo* que forma el campo magnético con el vector área del circuito (ejemplo 3).

Analizando cualquiera de los ejemplos vistos podemos sacar una consecuencia «común» a todos ellos, pudiendo decirse que *la corriente inducida es tal que crea un campo magnético (inducido) que se opone a la variación de flujo.*

En efecto: en el ejemplo 2, si la espira se introduce dentro del campo magnético (suponemos éste perpendicular y hacia dentro del papel), el flujo magnético que atraviesa la espira *aumenta*, pues aumenta el área «cortada» por el campo (Fig. XXII-5). Se observa que el sentido de la corriente inducida es el contrario a las agujas de un reloj; esta corriente inducida crea a su vez un campo magnético inducido de inducción **B<sub>in</sub>** de sentido opuesto al que ya existía, de tal forma que tiende a contrarrestar el aumento de flujo. Exactamente al revés ocurre cuando se «saca» la espira. Lo mismo ocurre en todos los ejemplos descritos y más que podrían realizarse.

Estos estudios experimentales llevaron a Frederic Emile LENZ (1804-1864) a enunciar la ley que tiene su nombre:

«La corriente inducida se opone a la variación del flujo magnético que la produce».

La explicación cuantitativa de estos fenómenos puede hacerse por la LEY DE FARADAY, quien la enunció casi simultáneamente con la de Lenz. La ley de Faraday dice:

«Siempre que varía el flujo magnético que atraviesa un circuito, se origina en él una corriente inducida; la fuerza electromotriz de inducción tiene el valor de la velocidad de variación del flujo». La corriente existe mientras existe variación de flujo.

Matemáticamente la FEM INDUCIDA viene expresada por: 
$$\mathcal{E} = - \frac{d\phi}{dt}$$

Obedeciendo a la ley de Ohm:

«La intensidad de la corriente inducida que circula por un circuito de resistencia R, es proporcional a la velocidad de variación del flujo»:

$$I = - \frac{1}{R} \frac{d\phi}{dt}$$

Si las corrientes inducidas se producen en un circuito de varias espiras idénticas, las FEM originadas en cada una de ellas se superponen y en consecuencia:

«La FEM inducida es directamente proporcional al número de espiras del circuito».

$$\mathcal{E} = - n \frac{d\phi}{dt}$$

dφ es la variación de flujo correspondiente a cada espira.

La ley de Lenz, que interpreta el signo - de las anteriores fórmulas, sirve para determinar el sentido de las corrientes inducidas.

La ley de Faraday es una ley empírica, no puede justificarse matemáticamente, y explica perfectamente todos los resultados experimentales.

Sabemos que la definición de FEM es: 
$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \tag{1}$$

si suponemos que la variación del flujo es sólo debida a la variación de la inducción magnética con el tiempo, es decir, **B** no sólo depende de las coordenadas de cada punto sino también del tiempo, entonces podemos escribir:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = - \int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A}$$

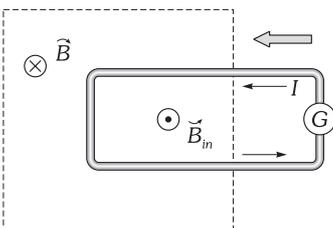


Fig. XXII-5.- La corriente inducida es tal que produce un campo magnético de inducción **B<sub>in</sub>** que se opone a la variación de flujo en el circuito.

la derivada total, se convierte en una derivada parcial por ser  $\mathbf{B}$  función de  $x, y, z$ , y del tiempo, pudiendo derivar dentro de la integral por no depender el contorno de integración del tiempo. (Hemos dicho que la variación del flujo se debe sólo a cambios del campo con el tiempo). La superficie  $A$  es una cualquiera limitada por la curva  $C$  a lo largo de la cual se integra para obtener  $\mathcal{E}$ . Tendremos pues:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A}$$

pero la integral curvilínea del primer miembro la podemos convertir en una integral de superficie extendida a una superficie que pase por  $C$  (Fig. XXII-6. Teorema de Stokes); luego:

$$\int_A \text{rot } \mathbf{E} = - \int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A}$$

y como se ha de verificar para todo  $d\mathbf{A}$  nos queda:  $\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  (3.ª ECUACIÓN DE MAXWELL)

que constituye la expresión diferencial de la ley de Faraday. De esta ecuación sacamos las siguientes conclusiones:

- 1) Los campos eléctricos y magnéticos están relacionados entre sí y todo campo magnético variable con el tiempo genera un campo eléctrico.
- 2) El campo eléctrico generado no es conservativo, puesto que la FEM que estudiamos viene dada por:

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

y por tanto la circulación a lo largo de una línea cerrada no es nula. Esta conclusión es lógica puesto que el campo no tiene su origen en una distribución de carga, sino que la causa es la variación del flujo magnético.

- 3) El que  $\text{rot } \mathbf{E} \neq \mathbf{0}$  nos indica la existencia de otras fuentes del campo eléctrico distintas a las de naturaleza escalar y debidas a las cargas eléctricas, estas fuentes son de naturaleza vectorial.

#### XXII - 4. Fuerza electromotriz de movimiento

Se ha dicho que la ley de Faraday-Lenz es una ley empírica y no puede justificarse matemáticamente; sin embargo, en algún caso particular, si tiene justificación teórica exacta, como ocurre en el que vamos a estudiar. Supongamos un hilo conductor  $PQ$  al que desplazamos en un campo magnético perpendicularmente a las líneas de campo, con una velocidad  $\mathbf{v}$  (Fig. XXII-7). Cada uno de los electrones «libres» del conductor estará sometido a una fuerza:  $F = Bqv$  siendo  $q$  la carga del electrón. La fuerza será de sentido hacia abajo, por ser negativa la carga de la partícula. Habrá un verdadero transporte de electrones que cargará negativamente al extremo  $Q$  y positivamente al  $P$ , como se puede demostrar partiendo el hilo durante el movimiento y observando cómo su mitad inferior y superior quedan con las cargas citadas. Se ha originado así en circuito abierto una diferencia de potencial que en este caso se identifica con una FEM, funcionando en realidad el extremo  $P$  como positivo de un generador y el  $Q$  como negativo.

Si la experiencia se hubiese realizado estableciendo contacto entre los extremos del hilo, con otro formando con él circuito cerrado, hubiese circulado, en realidad, una corriente en el sentido que determina la polaridad positiva de  $P$  y la negativa de  $Q$ . La fuerza de Lorentz nos indica que sobre la longitud  $l$  del conductor  $PQ$  actúa una fuerza:  $F = BIl$ , ya que en el caso que estamos estudiando la dirección de la corriente y el campo magnético son perpendiculares entre sí; esta fuerza  $F$  actúa sobre  $PQ$ , en el plano de la Fig. XXII-8 y hacia la izquierda. Al desplazar el conductor  $PQ$  contra esta fuerza, realizamos un trabajo que introduce energía en el sistema; esta energía, suministrada solamente mientras movemos el conductor, se disipa por efecto Joule en la resistencia  $R$ , entre cuyos extremos se produce una diferencia de potencial igual a la potencia desarrollada dividida por la intensidad de la corriente ( $V = P/I$ ) y que, según la primera ley de Kirchhoff, debe ser igual a la FEM,  $\mathcal{E}$ , originada en el circuito.

A tal tipo de FEM inducida, producida al mover un conductor a través de un campo magnético, se le llama «FEM DE MOVIMIENTO». Su valor en nuestro caso particular es:

$$\mathcal{E} = \frac{P}{I} = \frac{1}{I} \frac{dW}{dt}$$

el trabajo realizado en un desplazamiento  $dl'$  de la varilla  $PQ$  (Fig. XXII-8) es:

$$dW = F dl' = BIl dl' \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{BIl dl'}{I dt} = Blv$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

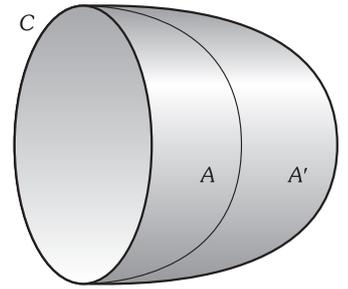


Fig. XXII-6.- Por el teorema de Stokes, se puede transformar la integral curvilínea extendida a una línea cerrada  $C$ , en una integral de superficie extendida a una superficie cualquiera ( $A, A', \dots$ ) limitada por  $C$ .

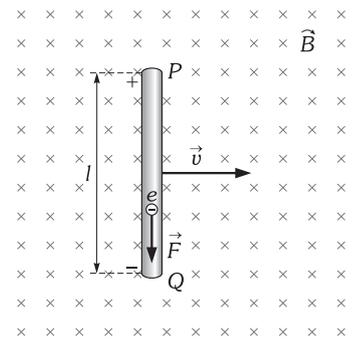


Fig. XXII-7.- En las condiciones de este esquema, en la barra se «induce» una FEM de movimiento de valor:  $Blv$ .

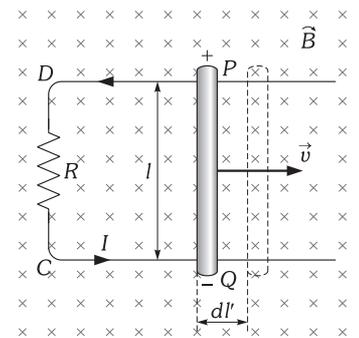


Fig. XXII-8.- En la barra conductora  $PQ$ , al deslizarse haciendo contacto cerrado el circuito, se genera una FEM inducida que produce una intensidad de corriente  $I$ .

Por otra parte, la variación de flujo producida en el desplazamiento  $dl'$  es:  $d\phi = B dA = B l dl'$ , y su derivada respecto del tiempo:

$$\frac{d\phi}{dt} = B l \frac{dl'}{dt} = B l v$$

que coincide con  $\mathcal{E}$  en valor absoluto.

Además, en la figura se observa que el aumento de flujo entrante hacia el papel va asociado con una FEM inducida que produce una intensidad en sentido contrario al de las agujas del reloj, la cual, a su vez, produce un campo de inducción contraria a la establecida y que se opone a la variación del flujo. En resumen, la FEM inducida y la variación del flujo son de igual valor absoluto y de signo contrario:  $\mathcal{E} = -d\phi/dt$

En el caso general en que un conductor de longitud  $l$ , se mueva con velocidad  $\mathbf{v}$  en el interior de un campo magnético de inducción  $\mathbf{B}$  (sin condiciones de perpendicularidad) la fuerza que se ejerce sobre el conductor por estar «sumergido» en el campo es:  $\mathbf{F} = I (\mathbf{l} \times \mathbf{B})$  y el trabajo realizado al desplazarse el conductor móvil un espacio  $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$  será:

$$dW = (\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} l dt$$

De la definición de intensidad tenemos:  $I = dq/dt \Rightarrow dq = I dt$ , siendo  $dq$  la carga de los portadores existentes en el interior del conductor y sobre los cuales actúa la fuerza de Lorentz. Nos quedará, por tanto:  $dW = dq \mathbf{v} \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{B})$ , obteniéndose por aplicación del concepto físico de FEM:

$$\mathcal{E} = \frac{dU}{dq} = - \frac{dW}{dq} = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{l})$$

pudiéndose escribir, en virtud de las propiedades del producto mixto, de la forma:

$$\mathcal{E} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l}$$

Como en la definición de FEM la hemos asociado a un campo eléctrico, para este caso podremos escribir:

$$\mathcal{E} = \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \Rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

expresiones que nos indican que:

«Siempre que un conductor se mueve en el interior de un campo magnético se induce en sus extremos una FEM».

«Siempre que un conductor se mueve en el interior de un campo magnético, se produce un campo eléctrico equivalente de valor  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ».

**PROBLEMAS: 1 al 17.**

**XXII – 5. Algunos efectos y aplicaciones de las corrientes inducidas**

CORRIENTES DE León FOUCAULT (1819-1868): Son corrientes producidas en cualquier cuerpo metálico cuando varía el flujo magnético que penetra en él.

Se producen en las piezas metálicas móviles de aparatos eléctricos que penetran y salen de campos magnéticos, o bien, en aquellas en las que se encuentran situadas en campos magnéticos variables con el tiempo; dando como resultado corrientes inducidas que circulan en el interior del metal; a causa de su naturaleza circulatoria, también son llamadas CORRIENTES EN TORBELLINO.

Así por ejemplo: cuando se hace girar un disco metálico entre los polos de un electroimán (Fig. XXII-9), se nota una resistencia al movimiento debido a las corrientes inducidas que se originan en el cuerpo, que produce un campo magnético de variaciones contrarias a las del inductor. La energía empleada en vencer tal resistencia se transforma en calor que eleva la temperatura del disco, con la correspondiente disipación de energía.

Otro ejemplo en que se producen corrientes de Foucault, es en los núcleos de los transformadores de corriente alterna que veremos más adelante; al estar sometidos a un campo magnético variable con el tiempo, el flujo en su interior cambia continuamente, de modo que existe una circulación de corriente en todo su volumen con la correspondiente pérdida de energía eléctrica. Para reducir al mínimo estas pérdidas, se hace un fraccionamiento adecuado de las piezas; para el caso de los transformadores, se hacen los núcleos con láminas muy delgadas separadas entre sí por una capa de barniz aislante.

TELÉFONO. El fundamento del teléfono, ideado por Alexander Graham Bell (1847-1922) en 1872, es el siguiente: un imán permanente lleva arrollada una bobina; las espiras de ésta son atravesadas por el flujo magnético del imán. Si en las proximidades de uno de sus polos se coloca una laminilla de hierro dulce, las líneas de campo se concentran en ella por su gran permeabilidad magnética; si la laminilla se deforma (por las vibraciones de un sonido emitido en sus proximidades), las líneas de campo se deforman, lo que equivale a una modificación de la permeabilidad



Fig. XXII-9.- Corrientes de Foucault producidas en un disco en rotación al penetrar una parte de él en un campo magnético homogéneo.

magnética, con la consiguiente variación del flujo que atraviesa las espiras. Se producen en el circuito, como consecuencia de ello, corrientes inducidas. Estas modifican el campo magnético de otro imán, análogamente instalado que el anterior, que por atracción sobre otra laminilla, produce en ella vibraciones idénticas a las de la primera, reproduciendo el sonido excitador.

**MICRÓFONO.** El micrófono se funda en las variaciones de resistencia que experimentan determinados conductores cuando sufren modificaciones de presión.

En el circuito de la Fig. XXII-11 al comprimir el trozo de carbón A contra B, la resistencia del circuito disminuye y la intensidad de la corriente aumenta. Esta propiedad se aprovecha en el transmisor telefónico. Un diafragma o lámina de hierro muy delgada, sujeta por sus bordes y protegida por una boquilla (Fig. XXII-12), se apoya por su parte central en el disco flexible; entre éste y otro disco rígido, existen granos de carbón. Al hablar enfrente del diafragma se producen en él vibraciones que modifican la presión a que están sometidos los granos de carbón y, en consecuencia, variaciones en la intensidad de la corriente producida por una batería. Estas corrientes llegan al receptor, formado por un imán permanente en cuyos extremos están arrolladas sendas bobinas por las que circula la corriente del transmisor, el campo magnético variable produce en un diafragma, análogo al del transmisor, idénticas vibraciones que las de éste, reproduciéndose el sonido excitador.

**ALTAVOZ.** El altavoz consta de una bobina A por la que circula una corriente de intensidad constante (Fig. XXII-13). Esta bobina puede moverse libremente en la dirección de su eje (horizontal en la figura) y hacer participar de su movimiento a una membrana situada en la base de un amplificador de sonido o bocina. Enfrente de A, o envolviéndola, hay otra bobina fija B, por la que pasan las corrientes de intensidad variable producidas en un micrófono M o en un receptor de radio. Las variaciones de intensidad de tales corrientes modifican la fuerza de atracción o repulsión que B ejerce sobre A; atracción si las corrientes son del mismo sentido y a la inversa. Estas fuerzas hacen mover con pequeñas oscilaciones a la bobina A que transmite su vibración a la membrana C. La membrana, a su vez, la transmite al aire y en éste se propaga un movimiento ondulatorio que, haciendo entrar en vibración a la membrana del tímpano, produce en nosotros la sensación de sonido.

**B) AUTOINDUCCIÓN E INDUCCIÓN ENTRE CORRIENTES**

**XXII - 6. Autoinducción. Coeficiente de autoinducción**

Se llama AUTOINDUCCIÓN de un circuito a la formación de corrientes inducidas en el circuito cuando se producen en él variaciones del propio flujo.

Para fijar ideas, planteamos un ejemplo muy sencillo: supongamos que tenemos un circuito de corriente continua, estará atravesado por sus propias líneas de campo y por tanto por su propio flujo. Al variar la intensidad de corriente, varía el flujo y se forma en él una corriente (de autoinducción) que se superpone a la principal. Cuando la intensidad de la corriente disminuye (o aumenta), la corriente de autoinducción es del mismo sentido (o del contrario) que la principal. Cuando se cierra el circuito se origina una corriente de sentido contrario a la principal (EXTRACORRIENTE DE CIERRE). Cuando se abre, se origina una corriente en el mismo sentido (EXTRACORRIENTE DE APERTURA). Al cerrar un circuito en un instante determinado (Fig. XXII-14), la intensidad de la corriente no crece bruscamente, sino gradualmente, debido a la extracorrente de cierre que se resta a la principal tardando un tiempo  $t$  en adquirir la intensidad estacionaria  $I_0$ . Al abrir el circuito, la intensidad de la corriente no se anula instantáneamente, sino también gradualmente, debido a la extracorrente de apertura, que dura un tiempo  $t'$  después de abierto el circuito.

En los circuitos en que la intensidad varía con el tiempo, a un aumento de intensidad le corresponderá una corriente de autoinducción que tenderá a disminuirla, y viceversa.

Tratamos de controlar esta situación y encontrar una relación entre la variación de flujo en un circuito aislado y la variación de intensidad que lo produce.

Según sabemos, el flujo magnético que atraviesa a un circuito aislado depende de sus parámetros geométricos y de la intensidad de corriente que lo recorre (Ley de Biot y Savart); por tanto para un circuito rígido (no varían los parámetros geométricos), los cambios de flujo resultan de los cambios de corriente:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dI} \frac{dI}{dt} \tag{2}$$

para que esta ecuación sea válida, la única condición que ponemos es que el flujo dependa solamente de la corriente. Llamaremos COEFICIENTE DE AUTOINDUCCIÓN ( $L$ ) a:

$$L = \frac{d\phi}{dI} \tag{3}$$

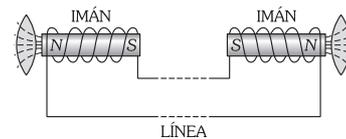


Fig. XXII-10.- Teléfono de Graham Bell.

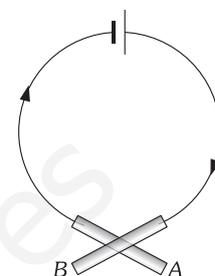


Fig. XXII-11.- Fundamento del micrófono.

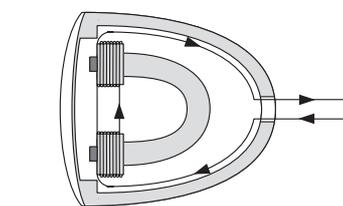
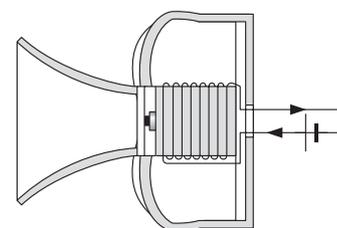


Fig. XXII-12.- Micrófono y auricular.

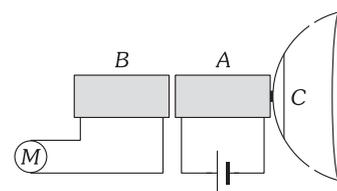


Fig. XXII-13.- Esquema de un altavoz.

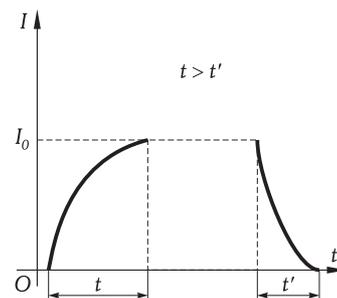


Fig. XXII-14.- Corriente de cierre y apertura en un circuito de corriente continua.

«COEFICIENTE DE AUTOINDUCCIÓN de un circuito es la variación que experimenta el flujo a través del circuito debida a las variaciones de la corriente que lo recorre y depende únicamente de los parámetros geométricos del circuito».

El coeficiente de autoinducción se mide en el si en HENRIOS\* (H) y su valor es:  $1 \text{ H} = 1 \text{ Wb/A}$ .

Si el medio es lineal, homogéneo e isótropo, o estamos en el vacío, entonces  $L$  lo podemos definir como el coeficiente de proporcionalidad entre el flujo que atraviesa un circuito aislado y la corriente que da lugar al mismo:  $\phi = L I$ , en este caso  $L$  es constante. Teniendo en cuenta la ley de Faraday, (2) y (3), la FEM DE AUTOINDUCCIÓN de un circuito indeformable tiene por valor:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\phi}{dt} = - L \frac{dI}{dt} \tag{4}$$

Si hacemos  $\mathcal{E} = 1 \text{ V}$  y  $dI/dt = 1 \text{ A/s}$  obtenemos para  $L$  el valor de 1 Henrio: «El HENRIO es la autoinducción de un circuito en el que se origina la FEM de un voltio, cuando la intensidad de la corriente varía un amperio por segundo».

Comprobemos mediante un ejercicio muy sencillo que  $L$  depende de los parámetros geométricos del circuito. En efecto: supongamos un solenoide largo cuyo campo magnético en su interior es:  $B = \mu I n/l$ . El flujo que atraviesa a cada espira de superficie  $A$  es:  $\phi_1 = \mu I n A/l$ , y el que atraviesa a las  $n$  espiras del solenoide:

$$\phi = \frac{\mu I n^2 A}{l} = L I \Rightarrow L = \frac{\mu n^2 A}{l}$$

El símbolo de la existencia de una autoinducción (o bobina) en un circuito es  $\text{---}\text{---}\text{---}$ . Si no existe una bobina en un circuito, la autoinducción normalmente se desprecia.

**PROBLEMAS: 18 al 25.**

**XXII - 7. Circuitos RL. Constante de tiempo de un circuito**

Vamos a tratar de resolver cuantitativamente el problema que nos hemos planteado al principio del párrafo anterior aplicando los conceptos que en él hemos desarrollado.

Supongamos un circuito alimentado por una batería y que tiene una autoinducción (Fig. XXII-15); al cerrar el interruptor  $S$ , la FEM será la de la batería ( $\mathcal{E} = I_0 R$ ;  $I_0$  = intensidad que se produciría sin el fenómeno de autoinducción), más la de autoinducción ( $-L dI/dt$ ). La aplicación de la ley de Ohm al circuito, conduce a:

$$\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} = I R \Rightarrow I_0 R - L \frac{dI}{dt} = I R \Rightarrow \int \frac{dI}{I_0 - I} = \int \frac{R}{L} dt \Rightarrow -\ln(I_0 - I) = \frac{R}{L} t + K$$

Para  $t = 0$  (instante de cerrar),  $I = 0$ ; y sustituyendo valores en la anterior:  $-\ln I_0 = K$ , y por tanto:

$$\ln \left( 1 - \frac{I}{I_0} \right) = - \frac{R}{L} t \Rightarrow 1 - \frac{I}{I_0} = e^{-\frac{R}{L} t} \Rightarrow I = I_0 \left( 1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right)$$

Para  $t = 0 \Rightarrow I = 0$ ; para  $t = \infty \Rightarrow I = I_0$ . La representación gráfica de esta función es la de la Fig. XXII-16. En la práctica, para un determinado tiempo, la intensidad se acerca tanto a la de régimen estacionario  $I_0$  que podemos identificarlas.

A  $L/R$  se le llama CONSTANTE DE TIEMPO del circuito; cuando  $t = L/R$  la expresión anterior queda de la forma:

$$I = I_0 (1 - e^{-1}) = I_0 \left( 1 - \frac{1}{e} \right) = I_0 \frac{e-1}{e} = 0,632 I_0$$

La CONSTANTE DE TIEMPO es, por tanto, el tiempo necesario para que la intensidad al cerrar un circuito, aumente hasta 0,632 de su valor estacionario. Cuanto mayor es la constante de tiempo,  $I$  tarda más en adquirir su valor límite.

Si una vez adquirido el valor límite, cortocircuitamos la batería, la intensidad en la línea decrece según una curva cuya ecuación es:

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}$$

En efecto: al abrir el circuito la única FEM que actúa es la de autoinducción:

$$-L \frac{dI}{dt} = I R \Rightarrow \frac{dI}{I} = - \frac{R}{L} dt \Rightarrow \ln I = - \frac{R}{L} t + K$$

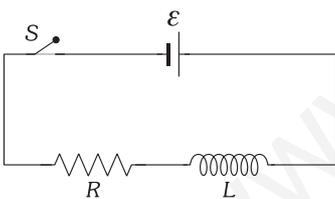


Fig. XXII-15.- Circuito básico RL.

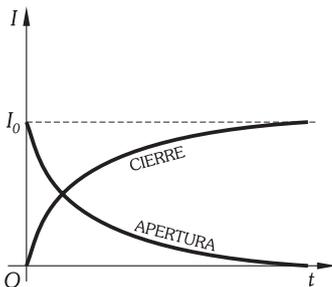


Fig. XXII-16.- Diagrama de las corrientes de cierre y apertura.

\* En homenaje a Joseph Henry (1797-1878).

$$\text{Para } t=0 \Rightarrow I=I_0 \Rightarrow \ln I_0=K; \text{ luego: } \ln \frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L}t \Rightarrow I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad \text{c.q.d.}$$

Si en vez de cortocircuitar la batería abrimos el circuito con un interruptor salta una chispa eléctrica en el lugar donde se realizó el corte.

**PROBLEMAS: 26 al 30.**

## XXII – 8. Inducción entre corrientes. Coeficiente de inducción mutua

En los párrafos anteriores hemos considerado circuitos aislados, vamos a suponer el caso en que hay dos circuitos que van a interactuar entre sí al variar el flujo que atraviesa a uno de ellos por modificar las características del otro.

Para fijar ideas, planteamos un ejemplo sencillo: Si enfrente de un circuito cerrado (secundario) se coloca otro (primario) provisto de un generador y de un interruptor, se verifica que al cerrar éste, la inducción magnética producida por la corriente, pasa de cero a  $B$  y el flujo que atraviesa al secundario pasa de cero a  $\phi$ . En el instante que dura el cierre se origina una corriente inducida. Lo mismo ocurre en el instante de abrir el circuito, pues el flujo que atraviesa al inducido pasa del valor  $\phi$  a cero. *La corriente de cierre producida por un aumento de flujo, es de sentido contrario a la inductora, oponiéndose así, a tal aumento; la corriente de apertura es del mismo sentido que la inductora.*

El mismo efecto se consigue aumentando o disminuyendo la resistencia del circuito inductor por medio de un reóstato (Ejemplo 4 del párrafo 1), ya que entonces se disminuye o aumenta la intensidad del campo magnético y el valor del flujo que atraviesa al circuito inducido. *«La corriente inducida es de sentido contrario a la inductora cuando la intensidad de ésta aumenta; y del mismo sentido cuando disminuye».*

En general, supongamos que tenemos dos bobinas (Fig. XXII-18), si ambas están recorridas por corrientes  $I_1$  e  $I_2$  variables con el tiempo, son rígidas (indeformables) y estacionarias (no varían su posición relativa), entonces el flujo que atraviesa la bobina 1 debido a la corriente que circula por 2,  $\phi_{12}$ \*, varía en función del tiempo, el único cambio que consideramos en  $\phi_{12}$  es el que resulta del cambio de la intensidad de corriente  $I_2$ , por tanto:

$$\frac{d\phi_{12}}{dt} = \frac{d\phi_{12}}{dI_2} \frac{dI_2}{dt} \quad (5)$$

al coeficiente:

$$M_{12} = \frac{d\phi_{12}}{dI_2} \quad (6)$$

se define como el COEFICIENTE DE INDUCCIÓN MUTUA entre el circuito 1 y el circuito 2. Se mide en las mismas unidades que la autoinducción, es decir en Henrios.

Teniendo en cuenta la Ley de Faraday, (5) y (6) la FEM DE INDUCCIÓN MUTUA para circuitos rígidos y estacionarios, tiene por valor:

$$\mathcal{E}_{12} = -\frac{d\phi_{12}}{dt} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt} \quad (7)$$

Los coeficientes  $M_{12}$  (inducción de 2 sobre 1) y  $M_{21}$  (de 1 sobre 2) son iguales. En efecto: calculemos como caso sencillo el coeficiente de inducción mutua de dos arrollamientos toroidales superpuestos con  $n_1$  y  $n_2$  vueltas respectivamente. La inducción magnética producida por la intensidad  $I_1$ , que circula por el primer arrollamiento toma el valor:  $B = \mu_0 n_1 I_1 / l$ , el flujo que atraviesa a este mismo arrollamiento es:

$$\phi = \mu_0 \frac{I_1 n_1^2 A}{l} L I_1 \Rightarrow \mathcal{E} = \mu_0 \frac{n_1^2 A}{l}$$

como ya habíamos visto en el ejemplo del párrafo XXII-6. El flujo que atraviesa a las  $n_2$  espiras debido al campo anterior será:

$$\phi_{21} = \mu_0 \frac{n_1 n_2 A}{l} I_1 = M_{12} I_1 \Rightarrow M_{21} = \mu_0 \frac{n_1 n_2 A}{l}$$

si invirtiéramos este procedimiento se comprueba que  $M_{21} = M_{12}$ .

## XXII – 9. Autoinducciones en serie. Influencia de la inducción mutua

Supongamos  $n$  bobinas acopladas en serie como indicamos en la Fig. XXII-19, por todas circula la misma intensidad de corriente  $I$ , si su separación es lo suficientemente grande para poder des-

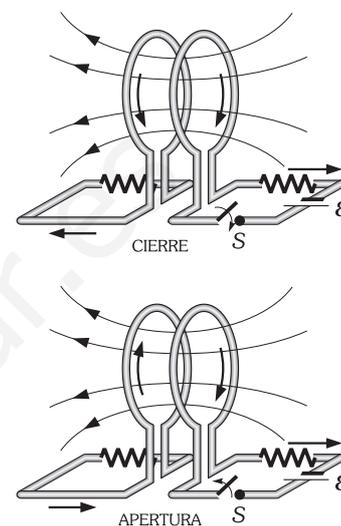


Fig. XXII-17.- Inducción entre corrientes.

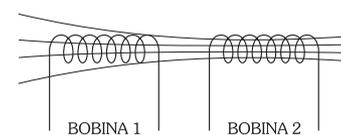


Fig. XXII-18.- Inducción mutua entre bobinas.

\* Hay que darse cuenta que  $\phi_{12}$  no es el único flujo que atraviesa a la bobina 1 puesto que es atravesada por el flujo que ella misma produce, además pueden existir otros circuitos a su alrededor.

preciar las influencias de los flujos mutuos (el efecto de inducción mutua) por aplicación de (4) a una cualquiera (i) de ellas, obtenemos:

$$\varepsilon_i = - \frac{d\phi_i}{dt} = - L_i \frac{dI}{dt}$$

por lo que la FEM total inducida entre los extremos de los inductores será:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = - \frac{dI}{dt} \sum L_i$$

por tanto, los inductores equivalen a una única bobina que tuviera una autoinducción:

$$L = \sum L_i$$

Consideremos ahora los efectos mutuos entre dos bobinas, para lo cual fijémonos en la Fig. XXII-20. En el caso a) los autoflujos y los flujos mutuos deberán ser del mismo sentido y por tanto teniendo en cuenta las (4) y (7) y que  $M_{12} = M_{21} = M$  la FEM total entre los extremos 1 y 3 será:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} = - (L_1 + L_2 + 2M) \frac{dI}{dt}$$

luego el sistema se puede sustituir por un inductor de autoinducción:

$$L = L_1 + L_2 + 2M$$

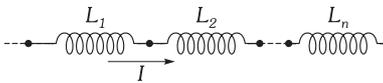


Fig. XXII-19.- Bobinas acopladas en serie.

En el caso b) de la figura los autoflujos (flujo debido a la intensidad en una de ellas) llevan sentido contrario al de los flujos mutuos (flujo que atraviesa una de ellas por efecto de la intensidad de la otra), lo mismo ocurre con las FEM, por tanto:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_{12} - \varepsilon_{21} = - (L_1 + L_2 - 2M) \frac{dI}{dt}$$

en este caso equivale a una autoinducción de valor:

$$L = L_1 + L_2 - 2M$$

Se obtienen los mismos efectos manteniendo las conexiones pero girando las bobinas 180° (Fig. XXII-21).

### XXII - 10. Autoinducciones en paralelo. Influencia de la inducción mutua

Supongamos n bobinas acopladas en paralelo como indicamos en la Fig. XXII-22, sin que exista influencia mutua entre ellas; por cada una de ellas circularán las corrientes  $I_1, I_2, \dots, I_n$ , que en cumplimiento de la primera ley de Kirchhoff, verificarán que  $I = \sum I_i$ , en la que I es la corriente variable que fluye entre los puntos 1 y 2. Como la diferencia de potencial entre los puntos 1 y 2 tiene que ser la misma a través de cualquiera de las trayectorias, las FEM inducidas deberán ser iguales en todas las ramas del circuito, luego:

$$\varepsilon = - L_1 \frac{dI_1}{dt} = - L_2 \frac{dI_2}{dt} = \dots = - L_n \frac{dI_n}{dt} \Rightarrow - \frac{\varepsilon}{L_1} = \frac{dI_1}{dt}, - \frac{\varepsilon}{L_2} = \frac{dI_2}{dt}, \dots, - \frac{\varepsilon}{L_n} = \frac{dI_n}{dt}$$

Derivando respecto del tiempo la expresión encontrada para I, se obtiene:  $dI/dt = \sum dI_i/dt$ . Sumando las expresiones anteriores teniendo en cuenta esta última nos queda:

$$- \varepsilon \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} \right) = \sum \frac{dI_i}{dt} \frac{dI}{dt}$$

luego, la autoinducción equivalente del circuito será:

$$\frac{1}{L} = \sum \frac{1}{L_i}$$

obedeciendo al mismo tipo de ley que las resistencias en paralelo; insistimos en que ésta última ecuación es válida únicamente si la inducción mutua entre las así acopladas es nula.

Cuando sea considerable la inducción mutua en circuitos con acoplamientos en paralelo, siempre es posible deducir la inducción equivalente haciendo las operaciones más o menos complicadas que sean necesarias. Consideremos, por ejemplo, el circuito de la Fig. XXII-23; en los inductores se produce una FEM de autoinducción y de inducción mutua de valores iguales:

$$\varepsilon = - L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} \qquad \varepsilon = - L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt}$$

si de estas dos, despejamos  $dI_1/dt$  y  $dI_2/dt$  y sumamos nos queda:

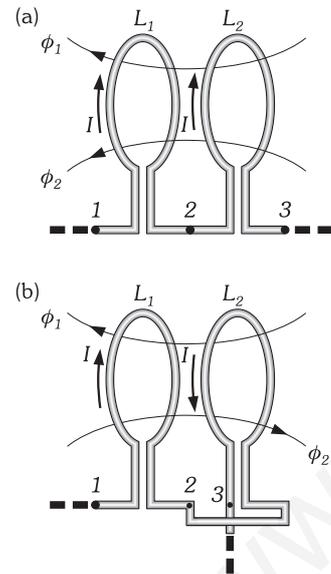


Fig. XXII-20.- Influencia de la inducción mutua.

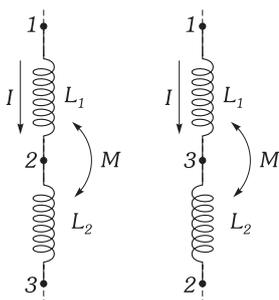


Fig. XXII-21.- Influencia de la inducción mutua.

$$\frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} = - \frac{L_1 + L_2 - 2M}{L_1 L_2 - M^2} \varepsilon$$

y como  $I = I_1 + I_2 \Rightarrow dI/dt = dI_1/dt + dI_2/dt$ , entonces:

$$\frac{dI}{dt} = - \frac{L_1 + L_2 - 2M}{L_1 L_2 - M^2} \varepsilon = - \frac{1}{L} \varepsilon \Rightarrow \boxed{L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}}$$

siendo  $L$  el valor de la inducción equivalente. Obsérvese que los cálculos serán diferentes si se invierte el sentido de arrollamiento de una de las bobinas, tal y como se hacía en el acoplamiento en serie con influencia de la inducción mutua; dejamos como ejercicio para el lector, el cálculo de la inducción equivalente para este caso.

**PROBLEMAS: 31 al 39.**

### C) ENERGÍA MAGNÉTICA. DESCARGA OSCILANTE DE UN CONDENSADOR

#### XXII - 11. Energía almacenada en el campo magnético

Una deducción formal de la expresión de la energía del campo magnético se sale de las prentensiones de este texto, con lo que procederemos de la misma forma que hacíamos en el párrafo XIX-17, en el que se obtenía el valor de la energía de la unidad de volumen del campo electrostático a partir del existente entre las armaduras de un condensador plano y luego advertíamos que la expresión obtenida era general para cualquier campo.

El modelo que tomamos es el de un solenoide en un circuito  $RL$  como el de la Fig. XXII-15, al que suponemos lo suficientemente largo para considerar nulo el campo en el exterior de él; al cerrar el interruptor que lo conecta con una batería, habremos de considerar la FEM de ésta y la de autoinducción de aquél; la energía suministrada por la batería se transforma en parte en calor en la resistencia (efecto Joule) y el resto de la energía del generador se almacena en la bobina. La aplicación de la ley de Ohm al circuito, conduce a:

$$\varepsilon - L \frac{dI}{dt} = IR \Rightarrow \varepsilon I = I^2 R + LI \frac{dI}{dt} \Rightarrow \varepsilon I dt = I^2 R dt + LI dI$$

El primer miembro de esta ecuación representa la energía suministrada por el generador en el tiempo  $dt$ , la cual se distribuye en una producción de calor en el circuito ( $I^2 R dt$ ) y en energía localizada en el interior del solenoide correspondiente al campo magnético que en él se crea ( $LI dI$ ), expresión que integrada entre los límites  $0$  e  $I$  ( $I$  = intensidad final que adquiere el circuito), nos dará la energía del campo magnético almacenada en el interior del solenoide:

$$U = \int_0^I LI dI = \frac{1}{2} LI^2$$

esta energía es la que hace que al eliminarse la FEM del circuito (al abrir el interruptor  $S$  del circuito  $RL$  de la Fig. XXII-15), no se anule inmediatamente la corriente, transformándose en calor al ser cedida a la resistencia.

El flujo que atraviesa a un solenoide de  $n$  espiras es:  $\phi = LI = BA n$  ya que  $BA$  es el flujo a través de cada una de sus espiras; sustituyendo el valor de  $LI$  en la anterior obtenemos:

$$U = U = \frac{1}{2} BA n I$$

El campo en el interior es:

$$B = \mu_0 \frac{In}{l} \Rightarrow I = \frac{Bl}{\mu_0 n}$$

que sustituida en el último valor de  $U$ , nos da:  $U = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} Al = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} v$

ya que  $Al$  es el volumen del solenoide.

La ENERGÍA LOCALIZADA EN LA UNIDAD DE VOLUMEN será:  $u = \frac{U}{v} \Rightarrow \boxed{u = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}}$

fórmula completamente independiente de las características del solenoide y que, por tanto, podemos generalizar para todo campo magnético. Si es el caso de materiales magnéticos homogéneos e isotropos, en los que la permeabilidad magnética es  $\mu$  entonces:

$$u = \frac{dU}{dv} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$$

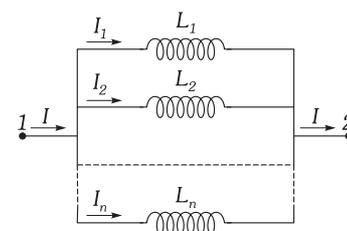


Fig. XXII-22.- Autoinducciones en paralelo.

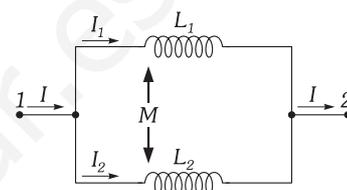


Fig. XXII-23.- Influencia de la inducción mutua.

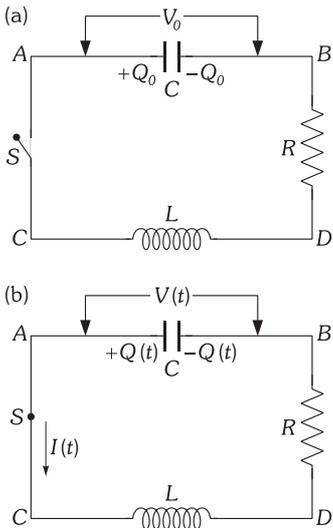


Fig. XXII-24.- Circuito básico RCL. a) Condiciones iniciales. b) Proceso de descarga del condensador a través de R y L en un determinado instante.

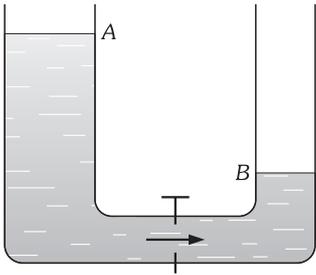


Fig. XXII-25.- Símil hidrodinámico de la descarga oscilante de un condensador.

y teniendo en cuenta que:  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ , la escribiremos en su forma general:

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \Leftrightarrow U = \frac{1}{2} \int_v \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dv$$

En el espacio en que exista campo eléctrico y magnético, la energía asociada a ambos, vendrá dada por:

$$u = \frac{dU}{dv} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \Leftrightarrow U = \frac{1}{2} \int_v (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dv$$

**PROBLEMAS: 40 al 43.**

**XXII - 12. Circuitos CL y RCL. Descarga oscilante de un condensador**

Si tenemos un condensador cargado C (Fig. XXII-24) y unimos sus armaduras por un hilo conductor (ACDB), al cerrar el interruptor (S) circula una corriente del polo positivo (mayor potencial) al negativo, corriente cuya intensidad va decreciendo conforme la diferencia de potencial ( $V_A - V_B$ ) disminuye. Al igualarse los potenciales la corriente eléctrica cesa. Pero si entre la capacidad del condensador, la resistencia y la autoinducción del circuito, existe una cierta relación, la corriente que se obtiene es oscilante; es decir, cambia de sentido en intervalos de tiempo iguales.

La descarga del condensador es semejante al paso de agua a través de un tubo que comunica dos vasos conteniendo líquido a distinto nivel (Fig. XXII-25). Si el tubo es muy estrecho, encontrando el líquido gran «resistencia» al pasar por él, la corriente de agua (de A a B) cesa cuando se iguala el nivel del líquido en los vasos. Pero si el tubo es ancho, se realiza un fenómeno de inercia de caída: el nivel en A desciende y en B asciende más de lo que corresponde a la igualación; descendiendo luego el B y ascendiendo el A, produciéndose oscilaciones que se amortiguan hasta anularse después de haber pasado por el tubo de comunicación una «corriente oscilante» de líquido. Si no existiesen rozamientos, las oscilaciones serían permanentes y, siempre de la misma amplitud.

Si consideramos la corriente de descarga del condensador como un verdadero «chorro» de electrones que circulan por el hilo y suponemos a éste sin resistencia, un fenómeno de inercia, análogo al descrito, produciría una corriente oscilante, cuya amplitud sería constante, es decir, se reproduciría constantemente el fenómeno, sin anularse jamás la intensidad de la corriente. Debido a la resistencia del circuito, hay una pérdida de energía en forma de calor (efecto Joule) y la corriente se amortigua hasta cesar.

Reponiendo al circuito la energía perdida se consigue «entretener» la oscilación de la corriente, es decir, que las intensidades máximas en uno y otro sentido, sean constantes.

La representación gráfica de la variación de la intensidad de la corriente con el tiempo es la de la Fig. XXII-26 cuando la intensidad se amortigua.

La frecuencia de la descarga oscilante puede llegar a ser hasta del orden de billones de oscilaciones por segundo.

Considerando el circuito de la Fig. XXII-24, al aplicarle la ley general de Ohm de A a B en un instante t, por el exterior del condensador (ACDB), teniendo en cuenta que la única FEM existente es la de autoinducción:

$$V_A - V_B = V(t) = -L \frac{dI}{dt} - IR = \frac{Q(t)}{C}$$

ya que la diferencia de potencial entre la armadura positiva y la negativa del condensador es  $Q/C$ .

Si tenemos en cuenta que  $I(t)$  es la «pérdida» de carga positiva en la unidad de tiempo, es decir:

$$I = -\frac{dQ}{dt} \Rightarrow Q = -\int I dt$$

la ecuación anterior nos queda:

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = 0$$

ecuación análoga a la del movimiento vibratorio armónico amortiguado (párrafo XX-29); la causa de amortiguamiento de la corriente, como ya hemos indicado, es debido a la pérdida de energía en el circuito en forma de calor; siendo la frecuencia de la corriente oscilante (fórmula 8 del párrafo VI-9):

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

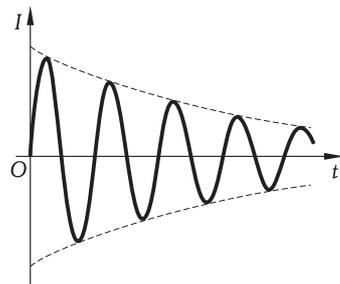


Fig. XXII-26.- Representación gráfica de la intensidad de la corriente en la descarga oscilante «amortiguada» de un condensador.

Para obtener corrientes oscilantes en un circuito será necesario que la raíz de la ecuación anterior sea real, es decir:

$$\frac{1}{CL} \geq \frac{R^2}{4L^2} \Rightarrow R \leq 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Si suponemos que el circuito no tiene resistencia ( $R=0$ ):

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC}Q = 0$$

ecuación análoga a la del oscilador armónico (párrafo VI-8), cuya solución, escogiendo convenientemente el origen del tiempo, se podrá escribir:

$$Q = Q_0 \cos 2\pi \nu t$$

y por tanto:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{LC}$$

a este valor se le llama «FRECUENCIA PROPIA DEL CIRCUITO» (idéntica a la fórmula de la frecuencia de las corrientes alternas en el fenómeno de «resonancia», como se verá en este mismo capítulo).

La carga de una de las armaduras pasa del valor máximo  $Q_0$  (cuando  $\cos 2\pi \nu t = 1$ ) o *amplitud de la carga*, a  $-Q_0$ , de forma periódica, siendo *el período* el tiempo transcurrido desde que la armadura tiene una cierta carga hasta volver a obtenerla idéntica y con las mismas características de variación.

La intensidad de la corriente varía, asimismo, según una función armónica:

$$I = -\frac{dQ}{dt} = Q_0 2\pi \nu \sin 2\pi \nu t = I_0 \sin 2\pi \nu t$$

variando la intensidad de su valor máximo  $I_0 = Q_0 2\pi \nu$  (*amplitud de la intensidad*) a  $-I_0$ , provocándose en el circuito corrientes oscilantes. La representación gráfica de las variaciones de carga del condensador e intensidad de la corriente oscilante viene expresada en la Fig. XXII-27.

**PROBLEMAS: 44 al 51.**

### XXII - 13. Transformaciones de la energía en la descarga oscilante de un condensador

Supongamos un condensador cargado asociado a una autoinducción sin resistencia; cuando el circuito está abierto no circula corriente por él y existe tan sólo el campo eléctrico, que lo consideramos localizado entre las armaduras del condensador, y cuya energía es en todo su volumen ( $v_c$ ):

$$U = \frac{v_c}{2} \epsilon E^2$$

(Fig. XXII-28 a, y punto 1 del gráfico XXII-27).

Al descargarse el condensador a través de la autoinducción el solenoide crea un campo magnético creciente, cuya energía ha sido lograda a costa de la del campo eléctrico; si llamamos  $E'$ ,  $B'$  y  $v_s$  al nuevo campo eléctrico, a la inducción magnética en el interior del solenoide y al volumen de éste y si suponemos que el campo magnético, se limita al interior del solenoide, el principio de conservación de la energía exige:

$$U = \frac{v_c}{2} \epsilon E'^2 + \frac{v_s}{2\mu} B'^2$$

(Fig. XXII-28-b, y punto 2 del gráfico XXII-27).

Al quedar descargado el condensador la energía del campo eléctrico se anula, y es máximo el campo magnético en el solenoide:

$$U = \frac{v_s}{2\mu} B^2$$

(Fig. XXII-28-c, y punto 3 del gráfico XXII-27).

La armadura *derecha*, antes negativa, se va cargando positivamente (Fig. XXII-28-d, y punto 4 del gráfico XXII-27), surgiendo en el condensador un campo eléctrico creciente en sentido contrario al anterior y disminuyendo el campo magnético en el interior del solenoide, cumpliéndose que la suma de sus energías es constante; el fenómeno continúa hasta anularse el campo magnético y quedar el condensador cargado como lo estaba inicialmente pero con cargas contrarias a las primitivas (Fig. XXII-28-e, y punto 5 del gráfico XXII-27). Las sucesivas etapas de la nueva descarga, ahora en sentido contrario a las anteriores, son iguales a las descritas.

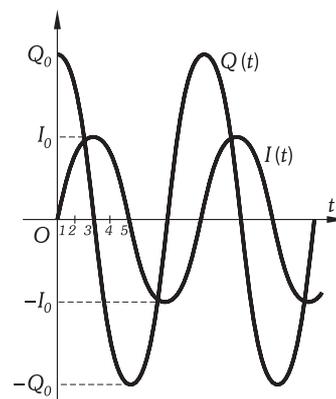


Fig. XXII-27.- Variaciones de la carga del condensador y de la intensidad de corriente con el tiempo en el circuito CL.

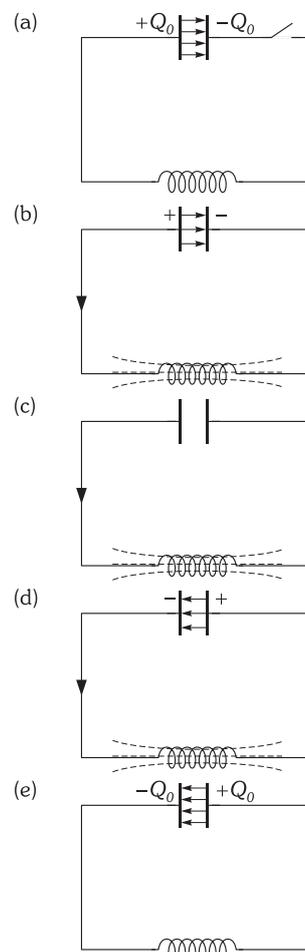


Fig. XXII-28.- Campos eléctrico y magnético en la descarga de un condensador.

La resistencia provoca pérdidas de energía que amortiguan las amplitudes de carga e intensidad.

Las aplicaciones más importantes de las oscilaciones producidas por circuitos electrónicos como los descritos, se encuentran en las redes de distribución de energía eléctrica (ver transformador de Tesla en el párrafo XXII-54) y en la producción de ondas electromagnéticas de menor frecuencia, extendiéndose desde unos pocos Hz hasta  $10^{12}$  Hz (como se verá en el capítulo XXIII), correspondientes a las ondas de radiofrecuencia, radio, televisión, radar y microondas.

**D) CORRIENTES ALTERNAS: PRODUCCIÓN. ELEMENTOS BÁSICOS DE UNA RED ELÉCTRICA**

**XXII – 14. Introducción**

La energía eléctrica, de la cual depende nuestra civilización actual, es suministrada en forma de corriente alterna; las razones por las que normalmente utilizamos ésta y no la corriente continua, son múltiples y algunas de ellas se enumeran a continuación.

Ocurre que para la utilización de la corriente tiene que transportarse a largas distancias; conviene que la tensión sea muy alta, puesto que en estas condiciones las pérdidas de energía por el efecto Joule es muy baja, sin embargo, por razones de seguridad, en los lugares de utilización convienen tensiones bajas; la corriente alterna es la idónea para esta elevación-reducción mediante los aparatos llamados transformadores. Se utiliza la corriente alterna en los motores de inducción que son los más baratos, los más prácticos y presentan menos fallos que los de corriente continua. La corriente alterna de alta frecuencia es la productora de las ondas electromagnéticas, base del funcionamiento de los aparatos eléctricos de comunicación, etc.

Como veremos, el comportamiento del circuito depende de la frecuencia de la corriente empleada, y lo que exponamos en el estudio de las corrientes alternas es solamente válido para frecuencias relativamente pequeñas, es decir para corrientes que varían lentamente. Es complicado precisar qué ha de entenderse por corriente de variación lenta, no obstante, bástenos señalar que la frecuencia  $\nu$ , ha de cumplir  $\nu \ll c/l$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz y  $l$  la longitud máxima del circuito; en caso contrario, el circuito radia potencia en cantidad apreciable, perdiendo validez la técnica que exponemos en el estudio de corrientes alternas. Así, para frecuencias de un MHz la longitud máxima puede ser de hasta 30 m, mientras que si la frecuencia es de 30 MHz dicha longitud tendría que reducirse a un metro.

**XXII – 15. Fundamento de los generadores electromagnéticos de corriente**

Debido al fundamento de los generadores de corriente alterna de las compañías eléctricas que nos la proporcionan, las corrientes que vamos a estudiar son del tipo:

$$I = I_0 \text{sen}(\omega t - \varphi)$$

pero hay que tener presente que en general se llaman CORRIENTES ALTERNAS a todas aquellas en que la intensidad cambia de sentido periódicamente con el tiempo. De hecho en algunos aparatos eléctricos aparecen tanto «ondas cuadradas» como «ondas en diente de sierra» ... Sin embargo, de acuerdo con el teorema de Fourier (párrafo III-18), toda función periódica puede expresarse como suma de funciones sinusoidales por lo que podremos analizar cada componente sinusoidal, según el estudio que realizamos a continuación, y luego sumarlas, obteniéndose de este modo la solución completa.

El fundamento de los generadores de corriente alterna sinusoidal es el siguiente: si en un campo magnético se hace girar a un circuito cerrado, se produce una variación del flujo que lo atraviesa, por modificarse el ángulo formado por la dirección de la inducción magnética  $\vec{B}$  y la normal al circuito  $\vec{n}$ ; en éste se originan CORRIENTES INDUCIDAS ALTERNAS, llamadas así porque el sentido de la corriente experimenta cambios sucesivos en su sentido.

En la posición 1 de la Fig. XXII-29, el flujo de la inducción magnética  $\vec{B}$ , a través de la cara visible, es máximo por ser nulo el ángulo formado por la normal a la cara  $\vec{n}$  y el campo ( $\varphi = 0$ ;  $\cos \varphi = 1$ ); en la 2, el flujo es cero ( $\varphi = 90^\circ$ ;  $\cos \varphi = 0$ ); en la 3 es mínimo ( $\varphi = 180^\circ$ ;  $\cos \varphi = -1$ ); en la posición 4 el flujo vuelve a ser cero, para pasar de nuevo a su valor máximo en la 5.

El flujo disminuye en la primera media vuelta (de 1 a 3), originándose en el circuito corrientes que se oponen a tal disminución (N en la cara por la que salen las líneas de campo); el sentido de la corriente queda determinado por la naturaleza de las caras.

En la segunda media vuelta el flujo aumenta, creándose caras que se oponen a ello, circulando la corriente en sentido contrario a la producida en la media vuelta anterior:

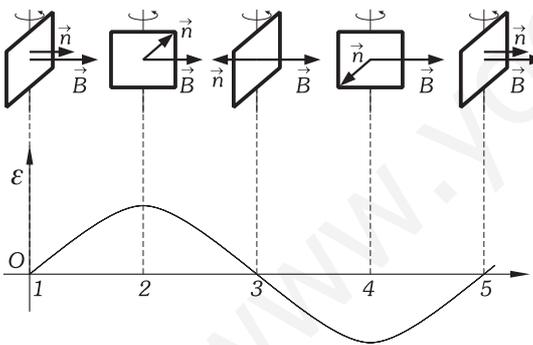


Fig. XXII-29.- Fundamento de los generadores electromagnéticos de corriente.

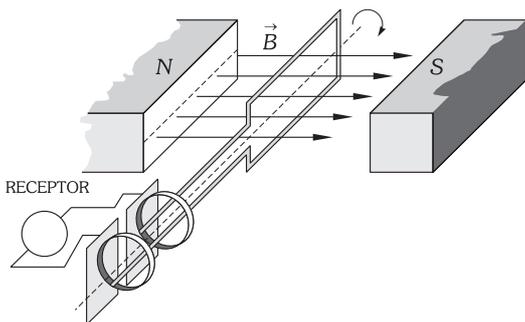


Fig. XXII-30.- Esquema del alternador simple en el que el inducido es el rotor y el imán en el estator.

«La corriente cambia de sentido cada media vuelta, precisamente en el instante en que el plano del circuito es perpendicular a las líneas de campo; en tal momento, la intensidad de la corriente inducida es cero».

La representación gráfica de la fuerza electromotriz inducida en cada instante, está expresada en la Fig. XXII-29.

PERÍODO ( $T$ ) es el tiempo transcurrido entre dos instantes consecutivos en los que tiene la corrientes las mismas características. FRECUENCIA ( $\nu$ ) es el número de periodos por segundo; se mide en ciclos/s o HERTZ (Hz).

**XXII – 16. Alternador simple**

Hagamos terminar en dos anillos metálicos a los extremos de la espira que gira en el extremo de un campo magnético (producido en la Fig. XXII-30 por el electroimán NS) y tales anillos, los conectamos con un circuito exterior por intermedio de unas escobillas o piezas metálicas que rozan, haciendo contacto, con los anillos terminales. En tales condiciones el circuito externo es recorrido por una corriente eléctrica alterna y habremos obtenido el ALTERNADOR más simplificado posible.

La representación gráfica de las variaciones de intensidad con el tiempo es análoga a la de la FEM obedeciendo, por tanto, a una ley «periódica senoidal».

La misma corriente se hubiese obtenido en el caso de girar el imán o electroimán, permaneciendo en reposo la espira (Fig. XXII-31).

Un generador electromagnético consta de los siguientes órganos: INDUCTOR: imán o electroimán productor del campo magnético; si el inductor es un imán, los generadores se llaman magneto-eléctricos; si es un electroimán, dínamo-eléctricos. INDUCIDO: circuito, conectado a otro exterior, en el que por variación del flujo de inducción, se produce una FEM. Inducido o inductor han de tener un movimiento de rotación; al órgano móvil se le llama ROTOR y al inmóvil ESTATOR.

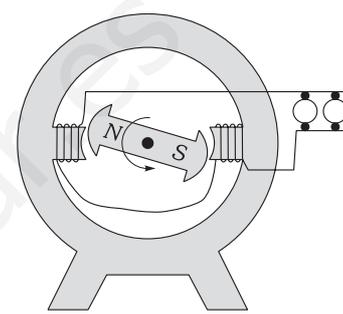


Fig. XXII-31.- Esquema de un alternador en el que el inducido es el estator y el inductor el rotor.

**XXII – 17. Fuerza electromotriz e intensidad de la corriente alterna considerando únicamente la influencia de la resistencia**

Consideremos un circuito que gira en el seno de un campo magnético con una velocidad angular  $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$  (Fig. XXII-32); comenzamos a contar el tiempo cuando coinciden la inducción  $B$  y la normal; al cabo de un tiempo  $t$ , el ángulo girado es  $\omega t$  y el flujo que atraviesa el circuito:

$$\phi = B A \cos \omega t$$

en la que  $A$  es la superficie total limitada por el circuito que se obtiene multiplicando la superficie correspondiente a una espira ( $A_1$ ) por el número de ellas ( $n$ ) si las espiras determinan superficies iguales.

El valor de la FEM inducida es:  $\mathcal{E} = - \frac{d\phi}{dt} = B A \omega \sin \omega t$  (8)

El valor máximo del seno es 1, por lo tanto la FEM máxima es:  $\mathcal{E}_0 = B A \omega$

«El valor máximo de la FEM inducida es directamente proporcional a la velocidad angular de rotación y a la superficie del circuito, y por tanto, al número de espiras de las bobinas del inducido si éstas determinan superficies iguales».

Prescindiendo de influencias de la autoinducción y la capacidad del circuito y siendo  $R$  su resistencia, la intensidad de la corriente tiene por valor (ley de Ohm):

$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \sin \omega t = I_0 \sin \omega t$  (9)

siendo  $I_0 = \mathcal{E}_0/R$  la intensidad máxima. Podemos introducir en la fórmulas (8) y (9) una corrección de fase de  $\pi/2$ , es decir empezar a contar el tiempo 1/4 de período después, o sea, cuando el plano del circuito es paralelo a las líneas de campo; considerando que  $\sin(\omega t + \pi/2) = \cos \omega t$ , las fórmulas (8) y (9) se escribirán:

$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t = \mathcal{E}_0 \cos \frac{2\pi}{T} t = \mathcal{E}_0 \cos 2\pi \nu t$   $I = I_0 \cos \omega t$

Representando FEM e intensidad en ordenadas y  $\omega t$  en abscisas, obtendremos para  $\mathcal{E}$  e  $I$  la representación gráfica del coseno (Fig. XXII-33). Observemos que  $\mathcal{E}$  e  $I$  están en fase; es decir adquieren valores máximos en uno o en otro sentido o valor nulo, en el mismo instante.

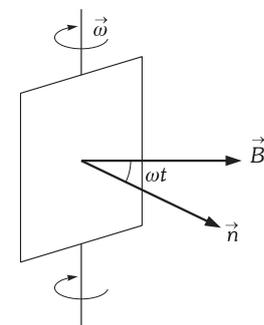


Fig. XXII-32.- Circuito girando en el seno de un campo magnético con una velocidad  $\omega$ .

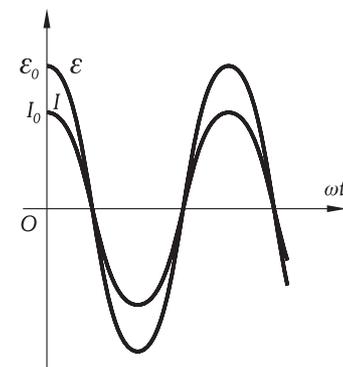


Fig. XXII-33.- Representación gráfica de la FEM y de la intensidad de una corriente alterna en función  $\omega t$  y con influencia única de la resistencia.

**XXII – 18. Elementos básicos de una red eléctrica. Leyes de Kirchhoff. Ecuación fundamental de la teoría de circuitos**

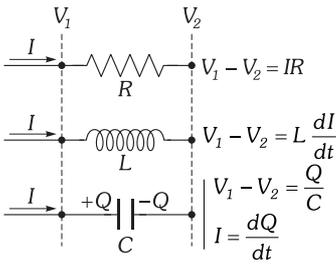


Fig. XXII-34.- Convenio de signos que adoptamos para cada elemento básico en los circuitos de corriente alterna.

En general una red eléctrica contiene los siguientes elementos básicos: uno o varios GENERADORES (elementos activos) que dan lugar a una corriente variable con el tiempo; CONDUCTORES, CONDENSADORES e INDUCTORES (elementos pasivos) caracterizados por su *resistencia*, *capacidad* y *autoinducción* respectivamente; cada uno de estos últimos influye de manera diferente en el comportamiento eléctrico del circuito, disipándose energía en forma de calor en las resistencias, almacenándose energía eléctrica en los condensadores y magnética en los inductores.

Las leyes de Kirchhoff que aplicábamos en circuitos de corriente continua son aplicables a cualquier red eléctrica, puesto que son consecuencia de la aplicación de dos principios fundamentales de la Física, (principios de conservación de la carga y la energía); pero para su aplicación no sólo habrá que tener en cuenta la resistencia de la red, sino también a los condensadores e inductores que en ella existan, puesto que cada uno de ellos tiene una diferencia de potencial que tendrá que incluirse en la ley de mallas ( $\Sigma V = 0$ ).

Tenemos que establecer para estas diferencias de potencial un convenio de signos, adoptamos para cada elemento básico del circuito el indicado en la Fig. XXII-34, en la que hemos supuesto una dirección para la corriente en cada elemento y hemos expresado las relaciones entre la tensión aplicada a cada elemento y la corriente que lo atraviesa. Si en el condensador la corriente sale por la placa positiva entonces consideraremos:  $I = -dQ/dt$ .

También debemos tener en cuenta al aplicar las dos leyes de Kirchhoff a circuitos en que la corriente varía con el tiempo, que se obtendrán ecuaciones que dependerán del tiempo, es decir que deben aplicarse a los valores instantáneos de las corrientes, las FEM y los voltajes de la capacidad, autoinducción y resistencia. Las leyes pueden enunciarse:

1.ª La suma de las intensidades de corriente que llegan a un nudo, es igual a la suma de las intensidades que salen de él.

2.ª Se ha de verificar:  $\Sigma V = 0$  a lo largo de una trayectoria cerrada, es decir: partiendo de un punto del circuito y volviendo al mismo después de recorrer diferentes ramas del circuito (definición de MALLA).

Considerando una malla simple como la que tenemos en la Fig. XXII-35, al aplicarle la segunda ley de Kirchhoff, en el supuesto que los elementos que caracterizan al circuito se encuentran en las circunstancias expresadas en ella, tendremos:

$$(V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + (V_3 - V_4) + (V_4 - V_1) = 0$$

siendo  $V_1 > V_2 > V_3 > V_4$  y teniendo en cuenta que en el condensador el sentido supuesto para la corriente hace que:

$$I = -\frac{dQ}{dt} \Rightarrow Q = -\int I dt$$

$$\text{tendremos: } -\frac{1}{C} \int I dt - IR - L \frac{dI}{dt} + \varepsilon = 0 \Rightarrow \boxed{\varepsilon(t) = IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I dt} \quad (10)$$

que es la ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA TEORÍA DE CIRCUITOS; aplicable no solamente a las corrientes alternas, sino a todo tipo de circuitos en los que exista o no variación de la intensidad con el tiempo; por ejemplo, en los estudios realizados al analizar los circuitos RL, LC, RCL, ... en el capítulo anterior, las ecuaciones aplicadas, son un caso particular de ésta.

**XXII – 19. Ideas sobre el álgebra de números complejos**

El estudio de las corrientes alternas empleando la notación de números complejos, nos facilita extraordinariamente la resolución de los problemas que nos hemos planteado en los párrafos anteriores; para utilizarlo, comencemos por recordar algunas ideas fundamentales del álgebra de los números complejos.

Un número complejo [Z] se puede representar de tres formas diferentes:

FORMA BINÓMICA:  $[Z] = a + bi$ , a: parte real; b: parte imaginaria; i: unidad imaginaria ( $\sqrt{-1}$ )

FORMA TRIGONOMÉTRICA:  $[Z] = m (\cos \theta + i \text{sen } \theta) = a + bi$ , m: módulo;  $\theta$  = argumento. Teniendo en cuenta la Fig. XXII-36 obtenemos las siguientes relaciones:

$$m = \sqrt{a^2 + b^2} \quad a = m \cos \theta$$

$$\text{tg } \theta = \frac{b}{a} \quad b = m \text{sen } \theta$$

FORMA EXPONENCIAL:  $[Z] = m e^{i\theta} = m (\cos \theta + i \text{sen } \theta) = a + bi$ , expresión que se demuestra desarrollando en serie  $e^{i\theta}$ , sen  $\theta$  y cos  $\theta$ . Consecuencias inmediatas de esta forma y de la trigonométrica son:

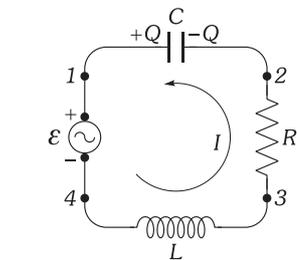


Fig. XXII-35.- Elementos de un circuito que se encuentran caracterizados en un instante determinado en una malla simple.

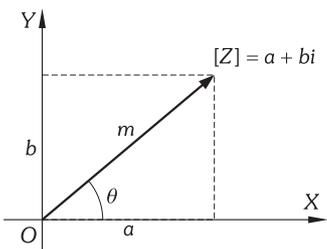


Fig. XXII-36.- Representación gráfica de un número complejo.

$$-i = e^{-i\pi/2} \quad i = e^{i\pi/2} \quad (11)$$

La ventaja que vamos a tener en la utilización de la forma exponencial, es que las operaciones se simplifican extraordinariamente, ya que en vez de operar con expresiones trigonométricas, lo haremos con exponenciales que es siempre mucho más fácil.

**E) ESTUDIO DEL CIRCUITO BÁSICO DE CORRIENTE**

**XXII – 20. Circuito de corriente alterna sinusoidal LCR. Diagramas vectoriales**

En el circuito de la Fig. XXII-37 el generador es un alternador con una FEM dada por:  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ , y escrita en forma exponencial:  $[\mathcal{E}] = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$ , teniendo en cuenta que en las expresiones como ésta sólo tendrá sentido físico la parte real de la ecuación; sustituyéndola en (10) nos queda:

$$\mathcal{E}_0 e^{i\omega t} = IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I dt \quad (12)$$

Si el primer miembro es del tipo expresado, el segundo tiene que ser de forma análoga y por tanto la solución a esta ecuación tiene que ser necesariamente:  $[I] = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$ . Las expresiones siguientes son equivalentes:

$$\begin{cases} [\mathcal{E}] = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} \\ [I] = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \\ I = I_0 \cos(\omega t - \varphi) \end{cases}$$

variando la intensidad  $I$  entre los valores  $I_0$  y  $-I_0$ ; siendo  $I_0$  el valor absoluto de la INTENSIDAD MÁXIMA y  $\varphi$  el ÁNGULO DE DESFASE de la intensidad respecto de la FEM. Un ángulo  $\varphi > 0$ , indica un retraso de la intensidad con respecto a la FEM (Fig. XXII-38a), un ángulo  $\varphi < 0$  indica un adelanto de  $I$  respecto a  $\mathcal{E}$  (Fig. XXII-38b). La autoinducción del circuito provoca retrasos de  $I$  con respecto a  $\mathcal{E}$ ; los condensadores adelantos de  $I$  con respecto a  $\mathcal{E}$ .

Para determinar los valores de  $I_0$  y  $\varphi$  en función de las características del circuito ( $L, C, \omega, \mathcal{E}_0, y R$ ), procedemos de la siguiente manera: derivando la expresión  $I = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$  con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\frac{d[I]}{dt} = i\omega I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$$

por integración de la misma obtenemos:  $\int [I] dt = -\frac{i}{\omega} I_0 e^{i(\omega t - \varphi)} + \text{constante}$

por sustitución en la fórmula (12) de las anteriores nos da\*:

$$\mathcal{E}_0 e^{i\omega t} = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)} \left[ R + i \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] \quad (13)$$

$$\text{dividiendo ambos miembros por } e^{i\omega t} \text{ se obtiene: } \mathcal{E}_0 = I_0 e^{-i\varphi} \left[ R + i \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] \quad (14)$$

teniendo en cuenta que:  $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \text{ sen } \varphi$ , estableciendo la igualdad entre las partes reales y las imaginarias de ambos miembros de la (14) nos queda:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 = I_0 \left[ R \cos \varphi + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \text{sen } \varphi \right] & \Rightarrow \boxed{I_0 \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}} \\ R \text{sen } \varphi - \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \cos \varphi = 0 & \Rightarrow \boxed{\text{tg } \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = \frac{X}{R}} \end{aligned} \quad (15)$$

Tanto el denominador de la primera como los sumandos del numerador de la segunda tienen dimensiones de resistencia eléctrica, se miden en ohmios, y se denominan, respectivamente, IMPEDANCIA ( $Z$ ), REACTANCIA INDUCTIVA ( $X_L$ ), y REACTANCIA CAPACITIVA ( $X_C$ ):

\* Se ha eliminado en la sustitución a la constante de la integración anterior, para que se cumpla que todos los sumandos de la expresión de la FEM alterna sean funciones armónicas del tiempo. Tal constante dividida por la capacidad, representaría una FEM continua, que produciría una corriente incompatible con la existencia del condensador. Si éste no existiese en el circuito, el término correspondiente a la integración no intervendría tampoco en la expresión de la FEM.

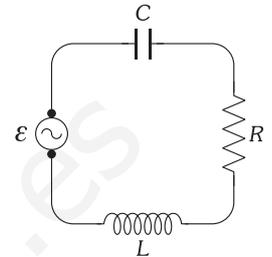


Fig. XXII-37.- Circuito básico de corriente alterna.

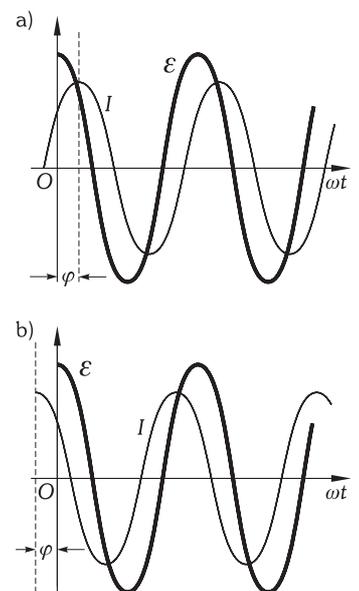


Fig. XXII-38.- a) Intensidad retrasada en fase  $\varphi$  respecto a la FEM. b) Intensidad adelantada en fase  $\varphi$  respecto a la FEM.

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad X_L = L\omega \quad X_C = \frac{1}{C\omega}$$

a la diferencia  $X = X_L - X_C$ , se le llama REACTANCIA. Las reactancias, resistencia e impedancia verifican las siguientes relaciones:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}$$

en función de ellas, las expresiones (15) se escriben:  $I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}$   $\text{tg } \varphi = \frac{X}{R}$

En definitiva, la intensidad que circula por el circuito en un instante dado (INTENSIDAD INSTANTÁNEA) es:

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \cos(\omega t - \varphi)$$

Para obtener el DIAGRAMA VECTORIAL, denominado también diagrama de fasores de esta malla simple, tendremos en cuenta la representación gráfica de los números complejos; si en la ecuación (13) aplicamos las propiedades (11) la podemos escribir de la forma:

$$\mathcal{E}_0 e^{i\omega t} = I_0 R e^{i(\omega t - \varphi)} + I_0 L \omega e^{i(\omega t - \varphi + \pi/2)} + \frac{I_0}{C\omega} e^{i(\omega t - \varphi - \pi/2)} \quad (16)$$

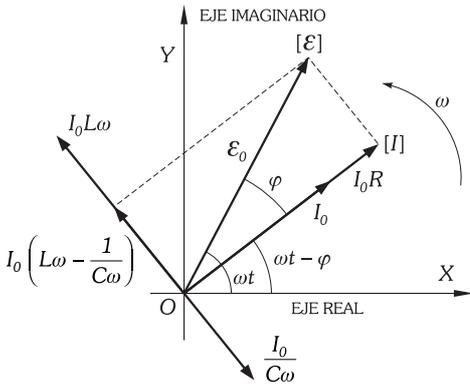


Fig. XXII-39.- Representación vectorial (diagrama fasorial) para un circuito de corriente alterna RCL.

para sumar funciones imaginarias nos basta con trazar vectores que tengan como módulo los coeficientes de las funciones exponenciales y que formen un ángulo con el eje igual al indicado en el exponente; así para componer las funciones del segundo miembro de (16) trazaremos un vector arbitrario  $I_0 R$  que forma con el eje real un ángulo  $(\omega t - \varphi)$  arbitrario, perpendicularmente a él se trazan otros dos:  $I_0 L \omega$  e  $I_0/C\omega$ , el primero adelantado con respecto a  $I_0 R$  (formando con el eje real un ángulo  $\omega t - \varphi + \pi/2$ ) y el segundo retrasado (formando con el eje real un ángulo  $\omega t - \varphi - \pi/2$ ); el vector resultante de los últimos trazados tendrá por valor  $I_0 (L\omega - 1/C\omega)$  que compuesto con  $I_0 R$  nos dará el vector  $\mathcal{E}_0$  cuyo módulo nos determinará la fem máxima; el ángulo que forma con  $I_0 R$  es el desfase  $(\varphi)$  y el que forma con el eje real tiene por valor  $\omega t$ .

En la Fig. XXII-39 es sencillo comprobar las expresiones (15). Haciendo girar al triángulo rectángulo obtenido en el diagrama en torno al origen de coordenadas, con velocidad angular  $\omega$ , las proyecciones de  $\mathcal{E}_0$  y de  $I_0 R$  (dividido por  $R$ ) sobre el eje real determinan los valores instantáneos de  $\mathcal{E}$  y de  $I$ :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$$

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

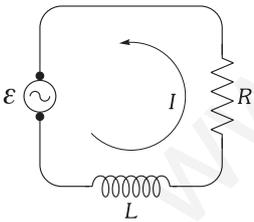


Fig. XXII-40.- Circuito LR de corriente alterna.

### XXII - 21. Circuito LR de corriente alterna

Consideremos un circuito de resistencia  $R$  con un alternador y una autoinducción  $L$  (Fig. XXII-40). Al ser nula la reactancia capacitiva o capacitancia (eliminar el condensador del circuito equivale a acercar sus armaduras hasta ponerlas en contacto y entonces  $C = \infty$  y  $1/C\omega = 0$ ) los valores de  $\text{tg } \varphi$  y de  $I_0$  son:

$$\text{tg } \varphi = \frac{L\omega}{R}$$

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

Al ser  $L\omega$  y  $R$ , positivos por naturaleza:  $\text{tg } \varphi > 0$ , luego  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ .

Llevando el valor de  $\varphi$  a la expresión:  $I = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$ , observamos que «la autoinducción provoca un retraso de fase de la intensidad con respecto a la FEM». (Representación gráfica de la Fig. XXII-38 a).

El diagrama vectorial en este caso, es el de la Fig. XXII-41, en la que se ha suprimido el vector  $I_0/C\omega$ , del diagrama general.

Si  $R$  fuese despreciable frente a  $L\omega$  (inductancia o reactancia inductiva)  $\text{tg } \varphi = \infty$  y  $\varphi = \pi/2$ : «en un circuito con influencia exclusiva de la autoinducción la intensidad está retrasada en fase  $\pi/2$  con respecto a la FEM» (Fig. XXII-42). Se dice entonces que ambas magnitudes están en «CUADRATURA». El valor de la impedancia es entonces:

$$Z = L\omega \Rightarrow I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z} = \frac{\mathcal{E}_0}{L\omega}$$

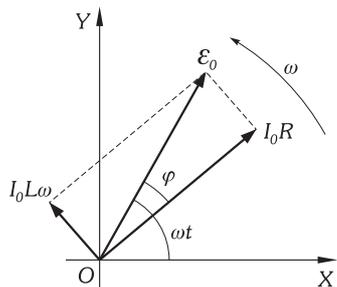


Fig. XXII-41.- Diagrama vectorial para un circuito de corriente alterna LR.

**XXII – 22. Circuito CR de corriente alterna**

Al ser  $L\omega = 0$  (Fig. XXII-43), obtenemos de las fórmulas generales:

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi = \frac{-1/C \omega}{R}} \quad \boxed{I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (1/C \omega)^2}}}$$

El valor negativo de la tangente, determina que  $\varphi$  está comprendido entre cero y  $-\pi/2$ . Llevando el valor de  $\varphi$  a la fórmula:  $I = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$ , observamos que: «la capacidad provoca un adelanto de fase de la intensidad con respecto a la FEM». (Fig. XXII-38 b).

El diagrama vectorial en este caso es el de la Fig. XXII-44, en el que se ha suprimido el vector  $I_0 L\omega$ , del diagrama general.

Si  $R$  fuese despreciable frente a  $1/C\omega$  entonces:  $\operatorname{tg} \varphi = -\infty \Rightarrow \varphi = -\pi/2$ . «En un circuito con influencia exclusiva de la capacidad la intensidad está adelantada en fase  $\pi/2$  con respecto a la FEM; se dice que ambas están en “CUADRATURA”». (Fig. XXII-45).

**PROBLEMAS: 52 al 60.**

**XXII – 23. Representación compleja de la impedancia. Ley de Ohm a las expresiones complejas**

Hemos llamado REACTANCIA ( $X$ ) al valor:  $X = L\omega - 1/C\omega$ , e IMPEDANCIA ( $Z$ ) a:  $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ , si además tenemos en cuenta que el valor de la tangente del «ángulo de desfase» es:  $\operatorname{tag} \varphi = X/R$  convenimos en representar la «IMPEDANCIA COMPLEJA» de la forma:

$$\boxed{[Z] = R + iX = Z e^{i\varphi}}$$

por otra parte de la ecuación (14) se obtiene:  $\frac{\mathcal{E}_0}{I_0 e^{-i\omega t}} = R + iX = [Z]$

además, como:

$$\left. \begin{aligned} [\mathcal{E}] &= \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} \\ [I] &= I_0 e^{i(\omega t - \varphi)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{[\mathcal{E}]}{[I]} = \frac{\mathcal{E}_0 e^{i\omega t}}{I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}} = \frac{\mathcal{E}_0}{I_0} e^{-i\varphi}$$

igualando con la anterior:

$$\boxed{\frac{[\mathcal{E}]}{[I]} = [Z]}$$

con lo que queda generalizada la ley de Ohm para las corrientes alternas; por consiguiente todos los resultados de la electrocinética son aplicables a las corrientes alternas siempre que utilicemos expresiones complejas.

La ley de Ohm a magnitudes complejas es aplicable a la diferencia de potencial entre dos puntos de un circuito en los que existe una impedancia  $[Z]$  (Fig. XXII-46) y en un instante determinado le atraviesa una intensidad  $[I]$ :

$$\boxed{[V] = [I][Z]} \quad (17)$$

**PROBLEMAS: 44 al 51.**

**F) INTENSIDAD Y FEM EFICACES. POTENCIA DE UNA CORRIENTE ALTERNA**

**XXII – 24. Intensidad y FEM eficaces**

«INTENSIDAD EFICAZ de una corriente alterna es la intensidad de una corriente continua que produciría los mismos efectos térmicos que la alterna».

El valor de la intensidad eficaz es:

$$\boxed{I_e = \frac{I_0}{\sqrt{2}}}$$

Por analogía, llamaremos «FUERZA ELECTROMOTRIZ EFICAZ» y «DIFERENCIA DE POTENCIAL EFICAZ» entre dos puntos cualesquiera del circuito a las expresiones:

$$\boxed{\mathcal{E}_e = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}} \quad \boxed{V_e = \frac{V_0}{\sqrt{2}}}$$

En la última expresión  $V_0$  es la diferencia máxima de potencial entre los puntos considerados.

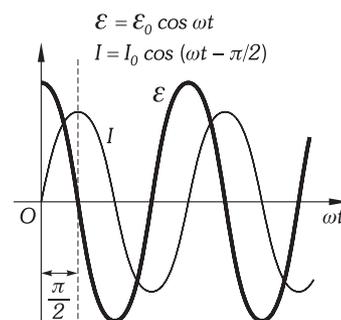


Fig. XXII-42.- Intensidad retrasada en fase  $\pi/2$  con respecto a la FEM.

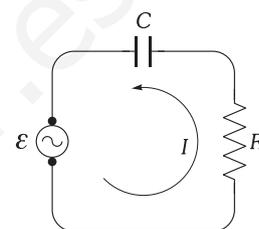


Fig. XXII-43.- Circuito RC de corriente alterna.

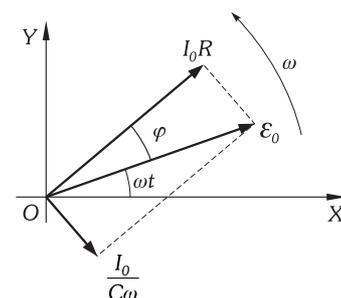


Fig. XXII-44.- Diagrama vectorial para un circuito CR corriente alterna.

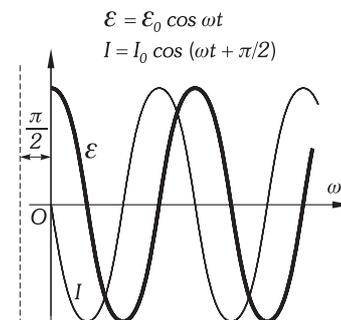


Fig. XXII-45.- Intensidad adelantada en fase  $\pi/2$  con respecto a la FEM.

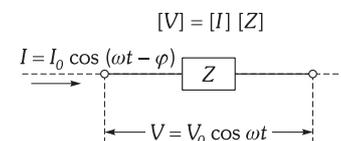


Fig. XXII-46.- Ley de Ohm a las expresiones complejas.

En efecto: la energía capaz de transformarse en calor durante un período, tiene por expresión en la corriente alterna:

$$U = \int_0^T I^2 R dt = \int_0^T I_0^2 R \cos^2 \left( \frac{2\pi}{T} t - \varphi \right) dt = I_0^2 R \int_0^T \cos^2 \left( \frac{2\pi}{T} t - \varphi \right) dt = \frac{I_0^2 R T}{2}$$

y la potencia, durante este período, será:

$$P = \frac{I_0^2 R}{2}$$

La energía capaz de transformarse en calor en el mismo tiempo, tiene por expresión para una corriente continua que circule por la misma resistencia:  $U = I_e^2 R T$ , siendo  $I_e$  la intensidad eficaz, productora de los mismos efectos térmicos que la corriente alterna considerada. Por igualación de las expresiones anteriores de la energía, obtenemos:

$$I_e^2 = \frac{I_0^2}{2} \Rightarrow I_e = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad \text{c.q.d.}$$

Para obtener la fórmula de la FEM eficaz nos bastaría considerar que la energía en un período es:

$$U = \int_0^T \frac{V^2}{R} dt = \int_0^T \frac{V_0^2}{R} \cos^2 \omega t dt = \frac{V_0^2 T}{2R}$$

La energía de la corriente continua equivalente es:

$$U = \frac{V_e^2 T}{R}$$

por igualación:  $V_e = V_0/\sqrt{2}$ , como queríamos demostrar.

## XXII - 25. Ley de Ohm aplicada a las magnitudes eficaces

Considerando la ley de Ohm aplicada a las magnitudes máximas y la definición de las magnitudes eficaces obtenemos:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z} \Rightarrow \frac{I_e}{\sqrt{2}} = \frac{\mathcal{E}_0/\sqrt{2}}{Z} \Rightarrow \boxed{I_e = \frac{\mathcal{E}_e}{Z}}$$

y para potenciales entre dos puntos:

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} \Rightarrow \frac{I_e}{\sqrt{2}} = \frac{V_0/\sqrt{2}}{Z} \Rightarrow \boxed{I_e = \frac{V_e}{Z}}$$

que son las expresiones de la ley de Ohm, a las magnitudes eficaces.

## XXII - 26. Potencia de una corriente alterna.

Puesto que introduciendo los conceptos de intensidad eficaz, hemos reducido los efectos térmicos de las corrientes alternas a los de las continuas, parece que la potencia que suministra un alternador debería ser análoga a la del generador de continua que le corresponde, es decir, producto de intensidad por fuerza electromotriz eficaz; no es así. La potencia que genera el alternador (energía por segundo) queda determinada por la expresión:

$$\boxed{P = I_e \mathcal{E}_e \cos \varphi}$$

siendo  $\varphi$  el ángulo de desfase entre la intensidad y la FEM alterna.

A  $\cos \varphi$  se le llama FACTOR DE POTENCIA. El conocimiento de  $\cos \varphi$  es de extraordinaria importancia en la industria ya que en una instalación con pequeño factor de potencia se dispone de menor energía, para las mismas intensidades y FEM, que en las instalaciones en las que el coseno es muy próximo a la unidad.

Es preciso en la industria un gran *factor de potencia* (sin llegar a la unidad para evitar los fenómenos de resonancia), lo que se consigue, generalmente, modificando la capacidad de las instalaciones, intercalando condensadores de capacidad adecuada. Como la fórmula de la potencia en función de la intensidad eficaz y la resistencia es la misma que la de una corriente continua, obtenemos:

$$\boxed{P = I_e^2 R = I_e \mathcal{E}_e \cos \varphi}$$

Si en vez de considerar al alternador nos referimos a dos puntos del circuito en los que existe una *diferencia de potencial eficaz*  $V_e$ , la fórmula que nos determina la potencia consumida es:

$$P = I_e V_e \cos \varphi$$

Tratemos de justificar todas las afirmaciones que hemos hecho. Por supuesto que la definición de potencia en cualquier elemento del circuito, es la misma que para la corriente continua; si aplicamos este concepto a dos puntos de una impedancia  $Z$  (Fig. XXII-46) se obtendrá:  $P(t) = V(t) I(t)$ , esta magnitud es, a diferencia con las corrientes continuas, variable con el tiempo y la denominamos POTENCIA INSTANTÁNEA que será una función periódica, y toma el valor:  $P = V_0 I_0 \cos \omega t \cos (\omega t - \varphi)$ , la potencia media en un período toma el valor:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T V_0 I_0 \cos \omega t \cos (\omega t - \varphi) dt$$

esta integral, como veremos en el párrafo siguiente, toma el valor:

$$\int_0^T \cos \omega t \cos (\omega t - \varphi) dt = \frac{T}{2} \cos \varphi$$

por tanto nos queda para valor de la potencia media en un período:

$$P = \frac{V_0 I_0}{2} \cos \varphi = V_e I_e \cos \varphi \quad \text{c.q.d.}$$

### XXII – 27. Intensidad activa y reactiva

El voltaje instantáneo de la corriente alterna de la impedancia de la Fig. XXII-46 corresponde a un diagrama vectorial como el de la Fig. XXII-47; por proyección del vector  $V_0$  sobre el eje  $X$  nos resulta:  $V = V_0 \cos \omega t$ . Obtenemos, asimismo, la intensidad instantánea por proyección del vector  $I_0$  sobre el eje  $X$ , resultando:  $I = I_0 \cos (\omega t - \varphi)$ .

En vez de realizar esta última proyección vamos a descomponer el vector  $I_0$ , en dos direcciones: una de ellas la de  $V_0$  y otra perpendicular a ella (dirección de  $I_{OR}$ ); obtendremos de esta forma, dos vectores  $I_{OA}$  e  $I_{OR}$ , de forma que:  $I_0 = I_{OA} + I_{OR}$ . La suma de las proyecciones de tales vectores sobre el eje  $X$ , da la intensidad instantánea, ya que la proyección de la diagonal de un paralelogramo ( $\text{proy}_x I_0$ ) es igual a la suma de las proyecciones de los lados concurrentes ( $\text{proy}_x I_{OA} + \text{proy}_x I_{OR} = I_A + I_R$ ); por tanto, la intensidad instantánea tiene por valor:

$$I = I_A + I_R = \text{proy}_x I_{OA} + \text{proy}_x I_{OR} = \text{proy}_x (I_0 \cos \varphi) + \text{proy}_x (I_0 \sin \varphi) = I_0 \cos \varphi \cos \omega t + I_0 \sin \varphi \sin \omega t$$

El primer término de la suma es la INTENSIDAD ACTIVA o VATAADA (productora de vatios), de aprovechamiento industrial. El segundo término de la suma es una intensidad, que circula en cada instante superpuesta a la anterior, que «no produce vatios», es decir, que su potencia media en un período es nula; se llama, por ello, INTENSIDAD REACTIVA o DEVATADA (sin vatios).

En efecto: la potencia media en un período correspondiente a la intensidad activa es:

$$P_A = \frac{1}{T} \int_0^T I_A V dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_0 \cos \varphi \cos \omega t V_0 \cos \omega t dt = \frac{V_0 I_0}{T} \cos \varphi \int_0^T \cos^2 \left( \frac{2\pi}{T} t \right) dt = \frac{V_0 I_0}{2} \cos \varphi = V_e I_e \cos \varphi$$

«La potencia correspondiente a la intensidad activa, es la potencia total de la corriente alterna».

La potencia media en un período, correspondiente a la intensidad reactiva es:

$$P_R = \frac{1}{T} \int_0^T I_R V dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_0 \sin \varphi \sin \omega t V_0 \cos \omega t dt = \frac{I_0 V_0}{T} \sin \varphi \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t dt = \frac{I_0 V_0}{T} \sin \varphi \left[ \frac{\sin^2 \omega t}{2\omega} \right]_0^T = 0$$

ya que los dos valores de  $\sin^2 2\pi t/T$  para tiempos que difieren en un período son iguales.

«La potencia media en un período correspondiente a la intensidad reactiva o devatada, es nula».

La intensidad de tal corriente reactiva no es cero; pero, en un período, las energías consumidas y producidas en la creación y anulación de los campos eléctricos y magnéticos en los condensadores y en las autoinducciones se anulan.

POTENCIA TEÓRICA es el producto de la intensidad eficaz por el potencial eficaz ( $V_e I_e$ ). Se mide en VOLT-AMPERIOS.

POTENCIA ACTIVA es el producto de la intensidad eficaz por el potencial eficaz y por el factor de potencia o el coseno del ángulo de desfase entre el potencial y la intensidad ( $V_e I_e \cos \varphi$ ). Se mide en VATIOS.

POTENCIA REACTIVA es el producto de la intensidad eficaz por el potencial eficaz y por el seno del ángulo de desfase entre el potencial y la intensidad ( $V_e I_e \sin \varphi$ ). Se mide en VATIOS REACTIVOS.

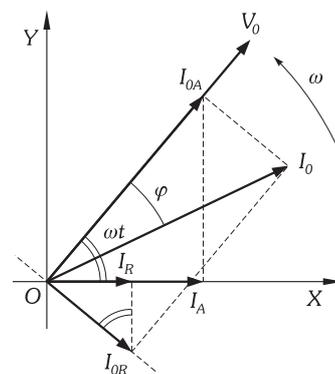


Fig. XXII-47.- Diagrama vectorial y proyecciones sobre el eje OX de  $I_{OA}$  e  $I_{OR}$  para una impedancia  $Z$ .

Un pequeño factor de potencia ( $\text{sen } \varphi$ , grande) aumenta las pérdidas correspondientes al efecto Joule, en relación con la energía útil o activa, y aumenta, asimismo, la caída de tensión en la línea.

**PROBLEMAS: 61 al 65.**

**G) IMPEDANCIAS EN SERIE Y EN PARALELO. MÉTODO FASORIAL**

**XXII – 28. Impedancias en serie**

Si conectamos varias impedancias en serie como indicamos en la Fig. XXII-48, entonces la intensidad de corriente por cada una de ellas es la misma. Si ponemos los potenciales, las impedancias y las intensidades en forma compleja y aplicamos (17) se obtiene:

$$[V_1] = [I] [Z_1] \quad [V_2] = [I] [Z_2] \quad [V_3] = [I] [Z_3]$$

el voltaje de la combinación es:  $[V] = [V_1] + [V_2] + [V_3] = ([Z_1] + [Z_2] + [Z_3]) [I]$ , de donde deducimos que:

«En la conexión de impedancias en serie, se suman las impedancias».

$$[Z] = [Z_1] + [Z_2] + [Z_3]$$

conviene resaltar que esta expresión es válida si las impedancias están expresadas en forma compleja; pudiéndose representar vectorialmente de la misma manera en que hemos visto en párrafos anteriores. Si:

$$\begin{cases} [Z_1] = R_1 + iX_1 \\ [Z_2] = R_2 + iX_2 \\ [Z_3] = R_3 + iX_3 \end{cases} \Rightarrow [Z] = (R_1 + R_2 + R_3) + i(X_1 + X_2 + X_3)$$

que escrita en forma exponencial:

$$[Z] = Z e^{i\varphi} \quad \begin{cases} Z = \sqrt{(R_1 + R_2 + R_3)^2 + (X_1 + X_2 + X_3)^2} \\ \text{tg } \varphi = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{R_1 + R_2 + R_3} \end{cases}$$

por tanto  $Z$  (en módulo) no es la suma de los módulos de  $Z_1$ ,  $Z_2$  y  $Z_3$ .

**XXII – 29. Triángulos de ohmios, voltios y vatios**

Podemos resumir en una sola figura aplicable a los circuitos en serie, las relaciones entre las impedancias, potenciales eficaces y potencias, en las diversas partes del circuito (Fig. XXII-49). Este esquema y el conocimiento de que la potencia activa que tiene por valor:

$$P_A = I_e^2 R$$

nos resuelven muchos problemas relativos a impedancias en serie.

**PROBLEMAS: 66 al 71.**

**XXII – 30. Impedancias en paralelo o derivación. Admitancia**

Si conectamos en paralelo las impedancias, tal y como se indica en la Fig. XXII-50, entonces el voltaje es el mismo para cada una de ellas y las corrientes están relacionadas por:  $[I] = [I_1] + [I_2] + [I_3]$ . Llamando  $[Z]$  a la impedancia equivalente y  $[V]$  a la tensión común a todas ellas, obtenemos:

$$\frac{[V]}{[Z]} = \frac{[V]}{[Z_1]} + \frac{[V]}{[Z_2]} + \frac{[V]}{[Z_3]} \Rightarrow \frac{1}{[Z]} = \frac{1}{[Z_1]} + \frac{1}{[Z_2]} + \frac{1}{[Z_3]}$$

recordamos otra vez que los valores de las impedancias tiene que estar puestos en forma compleja.

Para facilitar el cálculo de impedancias en paralelo se introduce el concepto de ADMITANCIA que es la magnitud inversa a la impedancia:

$$[Y] = \frac{1}{[Z]}$$

y así la anterior se escribirá:  $[Y] = [Y_1] + [Y_2] + [Y_3]$

**XXII – 31. Método fasorial para el cálculo con magnitudes sinusoidales.**

Con el fin de simplificar los cálculos que hemos realizado hasta ahora, se prescinde del término  $e^{i\omega t}$  (que indica la rotación del «fasor» con velocidad angular constante  $\omega$  por ser el mismo para to-

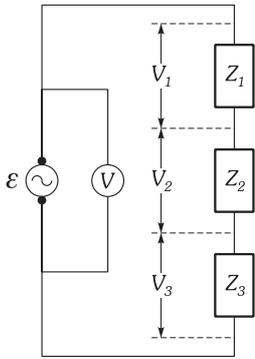


Fig. XXII-48.- Impedancias en serie.

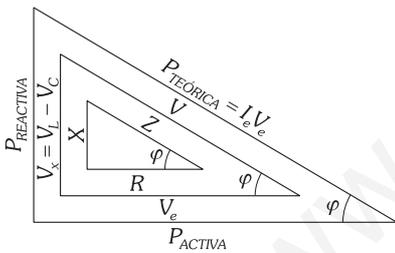


Fig. XXII-49.- Triángulo de ohmios, voltios y vatios.

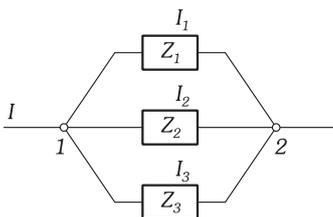


Fig. XXII-50.- Impedancias en paralelo.

das las tensiones e intensidades del circuito; por lo tanto se trabajará con lo que llamaremos el fasor, así por ejemplo, si la intensidad alterna es de la forma  $I = I_0 (\cos \omega t - \varphi)$  la escribíamos en forma compleja:

$$[I] = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$$

el fasor que le corresponde será:  $\bar{I} = I_0 e^{i\varphi}$

tendremos que incluir el término  $e^{i\omega t}$  cuando deseemos obtener la expresión específica de la magnitud física.

**PROBLEMAS: 72 al 79.**

### H) FENÓMENOS DE RESONANCIA

#### XXII - 32. Resonancia del circuito básico RLC en serie

«Si en un circuito RLC la reactancia es nula, la intensidad y la FEM están en concordancia de fase, es decir las dos se anulan o se hacen máximas en el mismo instante (Fig. XXII-33); y se verifica el fenómeno de RESONANCIA».

En consecuencia:

$$X = L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \Rightarrow L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi = 1 \\ \text{tg } \varphi = 0 \\ \omega = 1/\sqrt{LC} \end{cases}$$

y la impedancia  $Z$  se hace mínima e igual a  $R$ ; entonces,  $I_0$  adquiere su mayor valor posible, al ser el denominador de la fórmula (15) mínimo:  $I_0 = \mathcal{E}_0/R$ .

Así, cuando hay concordancia de fase entre la intensidad y la FEM,  $I_0$  crece extraordinariamente haciéndose peligrosa para la seguridad del aislamiento de la línea. Los circuitos industriales no están preparados para tan altas intensidades por lo que debe evitarse, por tanto, tal fenómeno de resonancia.

Como  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ , obtenemos:

$$T = \frac{1}{\nu} = 2\pi\sqrt{LC} \quad (\text{FÓRMULA DE THOMSON})^*$$

En un circuito RLC resonante, por verificarse  $L\omega = 1/C\omega$ , entonces:  $[V_C] = [V_L]$ , y el diagrama vectorial será como el de la Fig. XXII-51.

El valor de la frecuencia ( $\omega$ ) obtenida para el fenómeno de resonancia en un circuito RLC de corriente alterna, coincide con la «frecuencia propia» de oscilación de un circuito LC.

«A tal frecuencia de variación del voltaje, para la cual la corriente del circuito en serie RLC alcanza su valor máximo, la llamaremos FRECUENCIA NATURAL o PROPIA del circuito ( $\omega_0$ ) y depende únicamente de  $L$  y  $C$ ».

La resonancia eléctrica es análoga a la mecánica, tal y como vimos en el párrafo VII-29. La energía comunicada al sistema por la fuente es máxima en la resonancia, ya sea ésta eléctrica, la oscilación de un resorte o se trate de un niño columpiándose, etc.

En la Fig. XXII-52, hemos representado los valores de las intensidades de corriente máximas en un circuito serie LCR, adquiridas para un voltaje aplicado de amplitud constante y diferentes frecuencias. Obsérvese que la amplitud de la corriente alcanza su valor máximo para  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

Si  $R = 0$ , entonces el valor de la intensidad de corriente podría llegar a ser infinito, sin embargo, los circuitos reales siempre presentan alguna resistencia, no llegándose nunca a tal valor.

Podemos expresar el valor de la potencia media de la corriente alterna en función de la frecuencia  $\omega$ , si tenemos en cuenta que:

$$\begin{cases} P = I_e \mathcal{E}_e \cos \varphi \\ \cos \varphi = \frac{R}{Z} \\ I_e = \frac{\mathcal{E}_e}{Z} \end{cases} \Rightarrow P = \mathcal{E}_e^2 \frac{R}{Z^2}$$

y como:  $Z^2 = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = R^2 + \frac{L^2}{\omega^2} \left(\omega^2 - \frac{1}{LC}\right)^2 = R^2 + \frac{L^2}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_0^2)^2$

nos queda: 
$$P = \frac{\mathcal{E}_e^2 R \omega^2}{R^2 \omega^2 + L^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2} \quad (18)$$

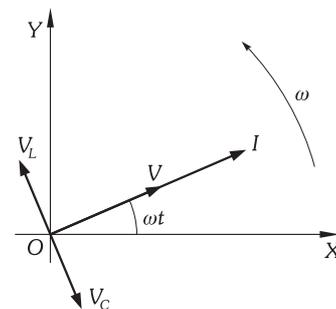


Fig. XXII - 51. Diagrama vectorial de un circuito RLC en serie y en resonancia.

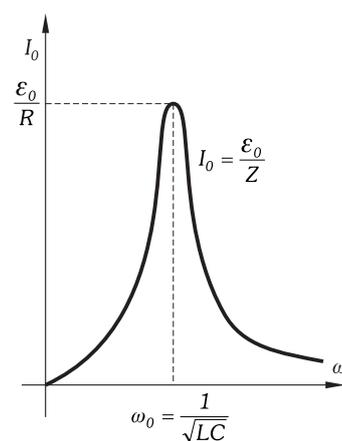


Fig. XXII - 52. Representación gráfica del valor de la amplitud de la corriente en un circuito serie RLC, en función de la frecuencia del voltaje, de amplitud constante, de un generador de corriente alterna.

\* Sir William Thomson (1824-1907) (Lord Kelvin).

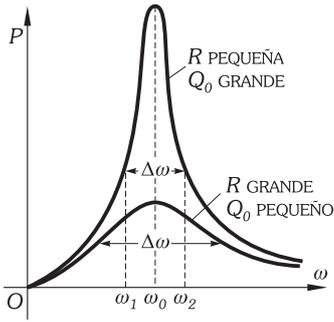


Fig. XXII - 53. Representación gráfica de la potencia media en función de la frecuencia  $\omega$  de un circuito de corriente alterna LCR en serie.

semejante a la obtenida para  $A^2$  en el párrafo VII-29 (téngase en cuenta que la potencia es proporcional al cuadrado de la amplitud).

Esta última expresión nos indica que en la resonancia,  $\omega = \omega_0$ , la potencia media es máxima y toma el valor  $\mathcal{E}_e^2/R$ . La gráfica de la Fig. XXII-53 nos representa la potencia media en función de la frecuencia  $\omega$  del voltaje aplicado a un circuito en serie RLC de corriente alterna, para dos valores de la resistencia  $R$ ; cuando  $R$  es pequeña, la curva es más «aguda» en las proximidades de la resonancia que cuando  $R$  es grande. La «agudeza» de la curva se describe por lo que llamamos FACTOR DE CALIDAD ( $Q_0$ ) definido por:

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

donde  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ , es la anchura de la curva medida entre dos valores de la frecuencia  $\omega$ , para los cuales, la potencia media  $P$  tiene la mitad de su valor máximo. Para el caso de resonancia con un pico agudo, es decir, con un alto factor de calidad (al fin y al cabo son los circuitos resonantes los que nos interesan), el valor aproximado de éste es:

$$\Delta\omega \approx \frac{R}{L} \Rightarrow \boxed{Q_0 \approx \frac{\omega_0 L}{R}}$$

En efecto: en la resonancia, el valor del denominador de (18) es  $\omega^2 R^2$ ; la potencia será la mitad de la máxima cuando el denominador sea el doble de este valor, así los puntos en los que  $P$  es la mitad de su valor máximo, verifican:

$$L^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 = \omega^2 R^2 \Rightarrow L (\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) = \pm \omega R$$

y como para el caso de resonancia con pico agudo  $\omega \approx \omega_0$ , podemos sustituir  $\omega R$  por  $\omega_0 R$  y  $\omega + \omega_0$ , por  $2\omega_0$ , con lo que se obtiene:

$$\omega - \omega_0 = \pm \frac{R}{2L} \Rightarrow \omega = \omega_0 \pm \frac{R}{2L} \Rightarrow \begin{cases} \omega_2 = \omega_0 + \frac{R}{2L} \\ \omega_1 = \omega_0 - \frac{R}{2L} \end{cases}$$

con lo que la anchura vale  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = R/L$ , como queríamos demostrar.

La gráfica de la Fig. XXII-53 nos indica que para  $Q_0$  alto, le corresponde una gama muy estrecha de frecuencias. Para los circuitos electrónicos, en la práctica,  $Q_0$  toma valores comprendidos entre 10 y 100.

La resonancia eléctrica se emplea en muchos circuitos para la construcción de aparatos electrónicos; por ejemplo, en los aparatos de radio y TV son utilizados esos circuitos como sintonizadores en los receptores. Muchas ondas electromagnéticas de diferentes frecuencias procedentes de emisores que transmiten señales producidas por su circuito RC, llegan a la antena del receptor, induciendo en ella corrientes alternas de la misma frecuencia que las emitidas; en el circuito receptor, una capacidad  $C$  variable hace posible sintonizar las diferentes emisoras. Una vez que se ha fijado  $C$ , una corriente significativa fluye solo para aquellas frecuencias muy próximas a la de resonancia, ya que el circuito se construye con un alto factor de calidad  $Q_0$ , y las emisoras que emiten frecuencias no muy próximas a la «sintonizada» serán prácticamente anuladas puesto que las señales obtenidas para ellas, serán despreciables, frente a la correspondiente a la frecuencia resonante.

### XXII - 33. Resonancia en paralelo

Supongamos un circuito como el de la Fig. XXII-54 en el que suponemos nula la resistencia de la línea y derivaciones; siendo el potencial en la línea de la forma:  $V = V_0 \cos \omega t$  y verificándose:

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{LC}$$

entonces:

$$\left. \begin{aligned} [Z_L] &= L\omega i \Rightarrow [Y_L] = -\frac{1}{L\omega} i = \frac{1}{L\omega} e^{-i\pi/2} \\ [Z_C] &= -\frac{1}{C\omega} i \Rightarrow [Y_C] = C\omega i = C\omega e^{i\pi/2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow [Y] = [Y_L] + [Y_C] = \left( C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) i = 0$$

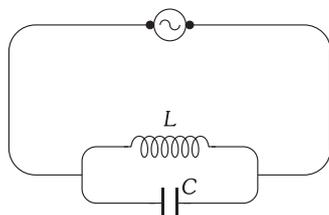


Fig. XXII - 54. Circuito resonante en paralelo.

luego como  $[Z] = 1/[Y]$  la impedancia equivalente es infinita ( $Z = \infty$ ); luego en la línea será nula la intensidad, tomando en cada derivación los valores:

$$[I_L] = [V][Y_L] = \frac{V_0}{L\omega} e^{i(\omega t - \pi/2)}$$

$$[I_C] = [V][Y_C] = V_0 C\omega e^{i(\omega t + \pi/2)}$$

que son iguales en módulo y forman en el diagrama (Fig. XXII-55) un ángulo  $\pi$ , y por tanto:  $[I_L] + [I_C] = 0$ , resultado que ya habíamos previsto.

PROBLEMAS: 80 al 83.

I) AMPERÍMETROS, VOLTÍMETROS Y VATÍMETROS PARA CORRIENTES ALTERNAS\*

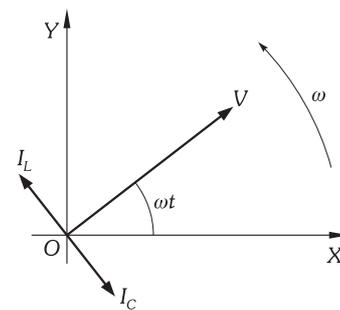


Fig. XXII - 55. La intensidad es nula en la línea general.

XXII - 34. Amperímetro y voltímetro térmico.

Por el fino conductor, con dos puntos fijos A y B (Fig. XXII-56), circula la corriente a medir. De su centro y por medio de un hilo H, que da una vuelta por la garganta de una polea C, pende el peso P. Al pasar la corriente (continua o alterna) AB se dilata, P desciende y C gira, acompañándole en su giro la aguja que señala en un limbo graduado la intensidad de la corriente.

El aparato se calibra previamente con un voltámetro por el que circula corriente continua, que nos indica por depósito de un metal en el cátodo, las intensidades de las diversas corrientes empleadas en el calibrado.

Se puede emplear el sistema como voltímetro, instalándolo en derivación e intercalando una gran resistencia.

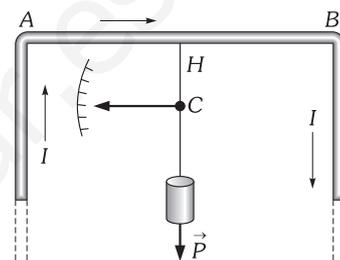


Fig. XXII - 56. Amperímetro térmico.

XXII - 35. Amperímetros y voltímetros de hierro dulce

En la Fig. XXII-57, la barra CD, de hierro dulce, está situada en el interior de una bobina y en su posición de equilibrio queda oblicuamente con respecto al eje de aquella, por tener el extremo C algo más peso que el D, o bien por un «muelle antagonista» que la obliga a tal posición. Al pasar corriente por el devanado se imana CD, tendiendo a colocarse en la dirección del eje. Como al cambiar el sentido de la corriente cambia la naturaleza de los polos del imán, la desviación se realiza siempre en el mismo sentido, indicándonos la intensidad de la corriente una aguja, que recorre un limbo que se ha graduado en un previo calibrado.

El aparato se puede emplear como voltímetro, como se ha indicado en el párrafo anterior.

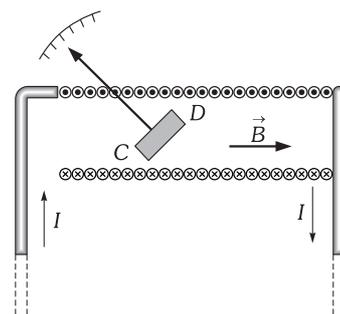


Fig. XXII - 57. Amperímetro de hierro dulce.

XXII - 36. Amperímetros y voltímetros electrodinámicos.

Están constituidos por dos bobinas, fija (F) y móvil (M), cuyos ejes forman entre sí un ángulo de 90°. La bobina móvil, M, está suspendida por su centro, de un hilo resistente a la torsión (la Fig. XXII-58 está «en planta»); es decir: el hilo que sostiene a M es perpendicular al plano del papel y hacia nosotros). La bobina fija F, envuelve a la M. Por ambas pasa la misma corriente por estar instaladas en serie. Al pasar la corriente gira M, tendiendo a coincidir su campo magnético  $B_M$ , con el de  $B_F$ . Aunque cambie el sentido de la corriente no cambia el sentido de giro, ya que se invierten a la vez, los campos magnéticos de las dos bobinas (esquema inferior de la figura).

El ángulo de desviación de M es, en primera aproximación, proporcional al producto de las intensidades que circulan por las bobinas; pero como tales intensidades son iguales, resulta el ángulo de giro proporcional al cuadrado de la intensidad. La fijación de la posición de equilibrio de M puede realizarse por un «muelle antagonista» en vez del hilo resistente a la torsión.

El calibrado y el empleo del aparato como voltímetro se realiza como se ha indicado en los párrafos anteriores.

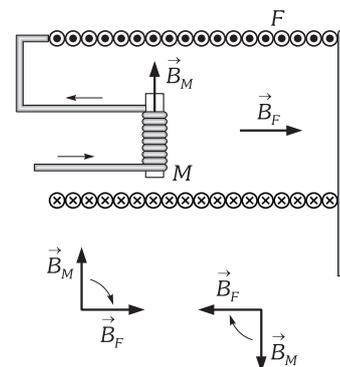


Fig. XXII - 58. Amperímetro electrodinámico.

XXII - 37. Vatímetros

El carrete móvil de un amperímetro electrodinámico, descrito en el párrafo anterior, se instala en derivación (puntos C y D) en la Fig. XXII-59 con respecto al receptor  $\mathcal{E}'$ , del que se trata de medir la potencia consumida; el circuito de tal bobina (bobina voltimétrica) debe tener una gran resistencia, para lo que se añade la resistencia adicional R. La bobina fija (amperimétrica) está en serie con el receptor  $\mathcal{E}'$ . Al pasar la corriente gira M, venciendo la resistencia a la torsión del hilo del que pende o el efecto de un muelle antagonista, que fija su posición de equilibrio.

El ángulo de giro es, como se ha expresado en el párrafo anterior, proporcional al producto de las intensidades que circulan por las bobinas. Pero, como el carrete móvil está montado en derivación, la intensidad que circula por él es proporcional a la diferencia de potencial ( $V_C - V_D$ ); es por lo tanto el ángulo de giro proporcional al producto  $I(V_C - V_D)$  y en definitiva: el ángulo de giro del

\* Los instrumentos de media descritos en esta sección se puede emplear indistintamente para corrientes alternas y continuas.

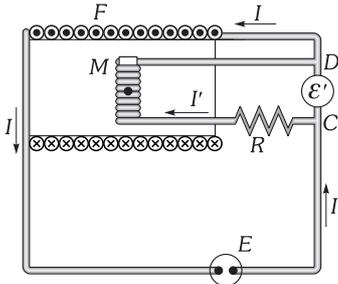


Fig. XXII - 59. Vatímetro.

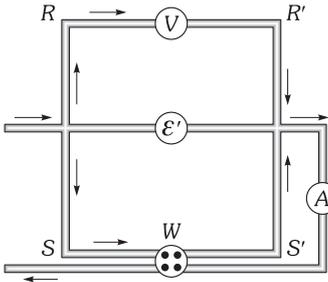


Fig. XXII - 60. Medida del factor de potencia.

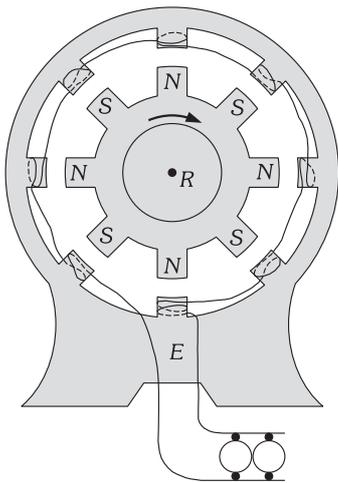


Fig. XXII - 61. Alternador monofásico.

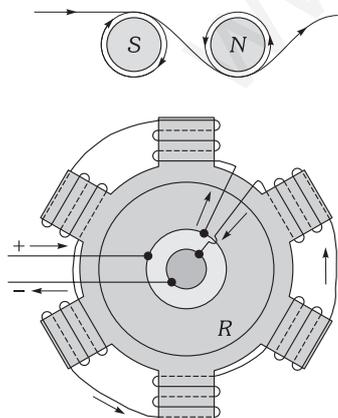


Fig. XXII - 62. Bobinado del inductor (la corriente que circula por el hilo es continua y se produce en una pequeña dínamo llamada excitatriz).

carrete móvil es proporcional a la potencia consumida. Ello nos permite graduar la escala en vatios tras un previo calibrado con potencias conocidas.

**XXII - 38. Medida del factor de potencia.**

Con una instalación como la de la Fig. XXII-60 medimos  $I_e$ ,  $V_e$  y la potencia activa ( $P$ ). En la línea general, está instalado el receptor  $\mathcal{E}'$ , el amperímetro  $A$  y los bornes del carrete fijo del vatímetro  $W$ . Las derivaciones  $S S'$  y  $R R'$  se embornan con el carrete móvil y con el voltímetro. Conociendo  $V_e$ ,  $I_e$  y  $P$  por las lecturas, obtenemos el factor de potencia:  $\cos \varphi = P/I_e V_e$ .

**XXII - 39. Contadores de energía**

Miden los kilovatios-hora consumidos. Constan de un pequeño motor provisto de un volante que gira. La energía consumida es proporcional al número de vueltas del volante. Un cuenta-revoluciones registra directamente la energía consumida medida en kilovatios · hora.

**J) MÁQUINAS ELÉCTRICAS: GENERADORES DE CORRIENTE ALTERNA**

**XXII - 40. Máquinas eléctricas**

Las máquinas eléctricas existentes tienen características muy variadas y las hay de todo tipo en las industrias, ciudades, viviendas ... Llamaremos MAQUINAS ELÉCTRICAS y serán objeto de nuestro estudio en este capítulo, aquellas que cumplen los siguientes objetivos:

1. Transformación de energía mecánica en energía eléctrica (GENERADORES).
2. Transformación de corriente alterna en continua (RECTIFICADORES) o viceversa (ONDU-LADORES).
3. Transformación de energía eléctrica en energía mecánica (ELECTROMOTORES).
4. Transformación de corriente alterna de ciertas características en otra de diferentes características (TRANSFORMADORES, CONVERTIDORES DE FRECUENCIA y CONVERTIDORES DE FASE).

**XXII - 41. Alternadores**

«Son máquinas destinadas a transformar la energía mecánica en eléctrica, produciéndose corriente alterna por fenómenos de inducción».

En un alternador, el inductor  $R$  (Fig. XXII-61) es la parte móvil de la máquina (Rotor) y está constituido por una serie de electroimanes con los polos alternados; para ello basta arrollar en las piezas polares (salientes del disco inductor) un hilo por el que circula una corriente continua producida por una pequeña dínamo (llamada excitatriz, que estudiaremos más adelante); el arrollamiento debe realizarse en distinto sentido de cada dos polos consecutivos, como indicamos en la Fig. XXII-62.

El inducido  $E$  (Estator) es una pieza fija de hierro dulce con tantas bobinas como polos tiene el inductor; el devanado se hace también en distinto sentido en cada dos bobinas consecutivas, para que el sentido de la corriente sea concordante en todas ellas. En los extremos del hilo inducido se conecta el circuito exterior.

Supongamos el alternador en la posición de la Fig. XXII-61 y consideremos una bobina que tenga enfrente un polo  $N$ ; el flujo entrante que la atraviesa es máximo. Cuando gira el inductor, el flujo disminuye, haciéndose cero cuando el polo  $N$  y el  $S$  equidistante de la bobina; cuando el  $S$  está enfrente de ella el flujo es mínimo (máximo saliente); a partir de esta posición el flujo crece hasta que un nuevo polo  $N$  se sitúa enfrente de la bobina. Esta disminución y aumento de flujo origina en la bobina corrientes inducidas alternas.

En las bobinas vecinas ocurre lo mismo; las corrientes originadas deberían ser, en cada instante, de sentido contrario a las de la bobina primeramente considerada, ya que cuando el flujo aumenta en ésta, disminuye en su vecina; el devanado en sentido contrario de una y otra bobina hace que las corrientes sean concordantes, aunque originen en cada bobina caras de polaridad contraria.

La frecuencia de una corriente alterna se obtiene multiplicando el número de vueltas por segundo del inductor por el número de parejas de polos del inducido.

Si se quisiese obtener corriente alterna de 50 Hz con un inductor de dos polos la velocidad de giro tendría que ser de 50 revoluciones por segundo. Para evitar rotaciones tan rápidas en las máquinas se emplean inductores con muchos polos.

El alternador descrito corresponde al tipo de los llamados MONOFÁSICOS, pero en general se emplean alternadores bi o trifásicos, en los que se disponen de dos o tres circuitos independientes.

La rotación del inductor se realiza mediante un motor hidráulico que aproveche la energía de un salto de agua (CENTRAL HIDROELÉCTRICA), o mediante una turbina de vapor (CENTRAL TERMOELÉCTRICA).

**XXII – 42. Corrientes bifásicas**

Se llaman «CORRIENTES BIFÁSICAS» al sistema formado por dos corrientes alternas de la misma frecuencia, cuyas FEM están desfasadas en 1/4 de su período (diferencia de fase  $\pi/2$ ).

Si dos circuitos independientes, perpendiculares entre sí, giran en un campo magnético, en cada uno de ellos se origina una corriente alterna (Fig. XXII-63): pero cuando uno de ellos está en posición perpendicular a las líneas de campo (FEM cero) el otro es paralelo a ellas (FEM máxima). Las corrientes así producidas se llaman bifásicas.

Un alternador bifásico es igual al esquematizado en la Fig. XXII-61, intercalando entre las piezas polares del inducido, otras tantas piezas polares (ocho en la figura), en las que se arrolla otro conductor de forma idéntica al dibujado en tal esquema. De esta manera existirán dos circuitos independientes, en los que circularán corrientes bifásicas. En realidad es como si tuviéramos dos alternadores exactamente iguales, pero desfasados un cuarto de período en sus movimientos.

En la Fig. XXII-64 se han dibujado una pareja de polos por cada fase, en realidad son más, se ha esquematizado así por simplicidad.

Las FEM están «EN CUADRATURA» es decir, su diferencia de fase es  $\pi/2$  o, lo que es lo mismo, una de ellas está «retrasada» con respecto a la otra en 1/4 de período. En la Fig. XXII-65, representamos la FEM suministrada por un alternador bifásico en función del tiempo.

En general, la diferencia de fase entre las intensidades será cualquiera de los ángulos de desfase entre la intensidad y la FEM ( $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ ) dependen de las reactancias ( $X_1$  y  $X_2$ ) y resistencias ( $R_1$  y  $R_2$ ) de los circuitos:  $\text{tg } \varphi_1 = X_1/R_1$ ,  $\text{tg } \varphi_2 = X_2/R_2$ . Para que  $\varphi_1 = \varphi_2$ , es necesario que:  $X_1/R_2 = X_2/R_1$ . En tal caso, las intensidades en los dos circuitos, tienen el mismo ángulo de desfase con respecto a su FEM; y como éstas están desfasadas entre sí en  $\pi/2$ , aquellas también tendrán una diferencia de fase entre sí de  $\pi/2$ . En definitiva: si las reactancias y resistencias son proporcionales en los circuitos de corrientes bifásicas, las intensidades están en cuadratura, lo mismo que las FEM. En caso de que reactancias y resistencias sean iguales, y los arrollamientos idénticos (CIRCUITOS EQUILIBRADOS) las intensidades máximas de los dos circuitos, así como las eficaces, serán iguales. La representación gráfica de tales corrientes es idéntica a la de la Fig. XXII-65.

En la Fig. XXII-66a, *bc* y *gf* representan los inducidos del generador bifásico, *ad* y *eh* son los circuitos de utilización, conectados al generador. En la práctica, en lugar de emplear cuatro conductores (uno de «ida» y otro de «vuelta» para cada circuito) se emplean solamente tres (dos de «ida» —uno para cada inducido— y uno sólo de «vuelta»; Fig. XXII-66b).

La representación vectorial de las intensidades que se superponen en el hilo común, con diferencia de fase de  $\pi/2$ , es la de la Fig. XXII-67, siendo  $I_{01} = I_{02}$  cuando los circuitos están «equilibrados». El valor de la intensidad máxima en el hilo común, en tal caso, es:

$$I_0^2 = I_{01}^2 + I_{02}^2 = 2 I_{01}^2 \Rightarrow I_0 = I_{01} \sqrt{2}$$

El hilo común debe tener una sección  $\sqrt{2}$  veces mayor que los hilos independientes, obteniéndose así, una misma densidad de corriente en unos y otros.

POTENCIA. La potencia del conjunto es la suma de las potencias de los circuitos independientes. Si éstos están equilibrados, la potencia es el doble de la potencia de cada una de las corrientes monofásicas independientes.

**XXII – 43. Corrientes trifásicas**

Son las de mayor aplicación y se originan en el alternador trifásico, constituido por tres circuitos independientes (generalmente idénticos) arrollados en tres sistemas de piezas polares equidistantes entre sí. (En la Fig. XXII-68 hay solamente una pareja de polos por cada fase).

Las tensiones en bornes de cada uno de los circuitos independientes (*abcd*, *efgh*, *ijkl*, en la Fig. XXII-68), que llamaremos  $V_{ad}$ ,  $V_{eh}$ ,  $V_{ij}$ , quedan representados en el diagrama XXII-69, estando desfasadas  $2\pi/3$ ; los valores máximos y eficaces son iguales en cada uno de los circuitos, si estos son idénticos.

Si las reactancias y resistencias son proporcionales ( $X_1/R_1 = X_2/R_2 = X_3/R_3$ ) las intensidades están entre sí, también desfasadas en  $2\pi/3$  y si los arrollamientos en los inducidos son idénticos, también lo serán los potenciales e intensidades (CIRCUITOS EQUILIBRADOS). La representación gráfica de las intensidades es análoga a la de las potenciales.

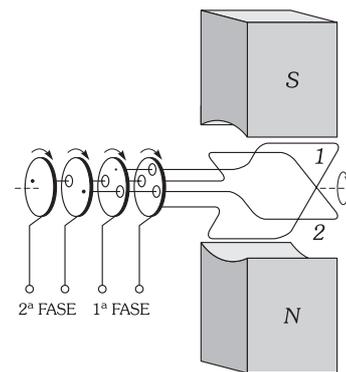


Fig. XXII – 63. Esquema del alternador bifásico.

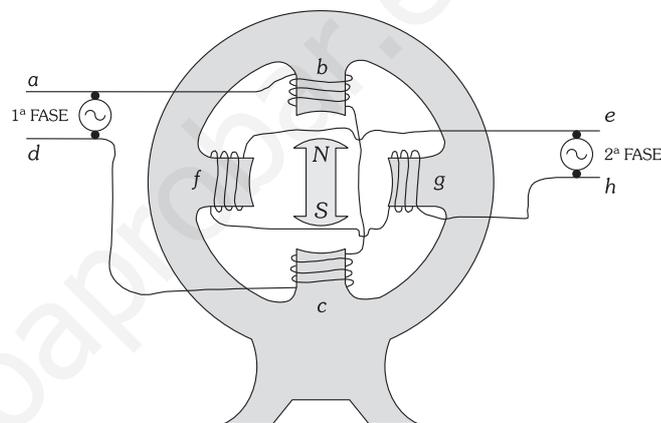


Fig. XXII – 64. Montaje práctico del alternador bifásico más sencillo.

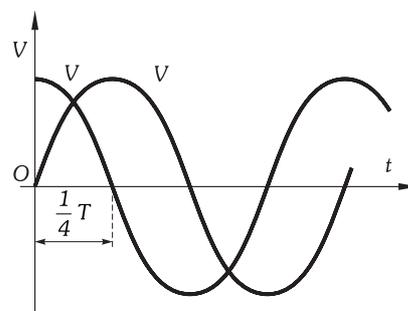


Fig. XXII – 65. En los circuitos bifásicos las FEM se encuentran en cuadratura.

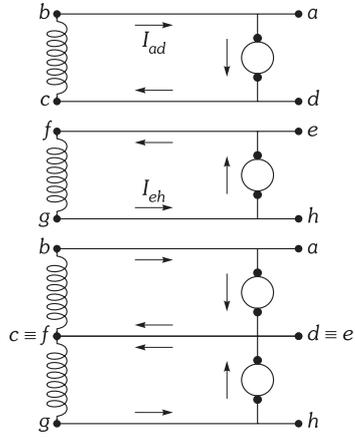
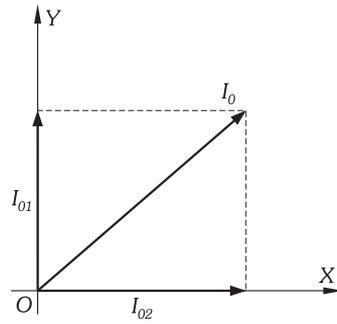
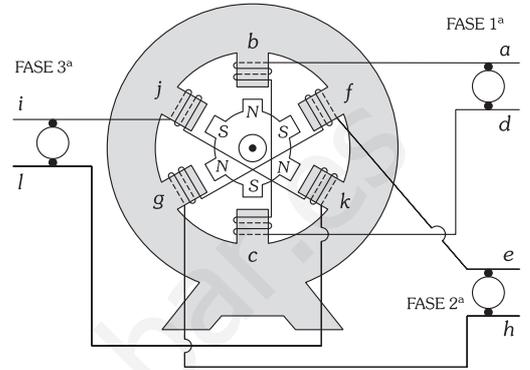


Fig. XXII - 66. Conexiones de corrientes bifásicas. Las flechas indican el sentido las corrientes en un instante determinado.



XXII - 67. Representación vectorial de las intensidades en corrientes bifásicas.



XXII - 68. Alternador trifásico.

La suma de las intensidades instantáneas, en un sistema trifásico equilibrado es igual a cero. En efecto: en un diagrama vectorial las intensidades máximas quedan representadas por vectores iguales, que forman entre sí ángulos de  $2\pi/3$ , cuyo resultado es nulo (Fig. XXII-70).

En general se llaman CORRIENTES POLIFÁSICAS, al sistema formado por  $n$  corrientes alternas independientes, de la misma frecuencia, desfasadas entre cada dos consecutivas en  $2\pi/n$ . La excepción a esta definición son las ya vistas corrientes bifásicas, pues para cada una de ellas, el desfase es  $2\pi/4$ , como en las tetrafásicas pero usando sólo dos corrientes.

Para hacer más económica la instalación para las corrientes trifásicas, vamos a estudiar a continuación dos sistemas de conexiones de los arrollamientos, que denominaremos en estrella y en triángulo.

**XXII - 44. Conexión en estrella y en triángulo**

CONEXIÓN EN ESTRELLA: queda representada en la Fig. XXII-71. Los tres circuitos independientes (abcd, efgh, ijkl) se conectan de forma que sus inducidos tienen un punto común (P). (Los inducidos del alternador están representados por bc, fg y jk).

Las intensidades de corriente de los tres circuitos se anulan, si los circuitos están equilibrados (Fig. XXII-70). Al no circular corriente por el hilo común (de puntos en la Fig. XXII-71) se puede eliminar.

«Estando montados en serie cada devanado (be, por ejemplo) con cada línea (ba), la intensidad de fase (intensidad del devanado) y la intensidad de línea o compuesta, son iguales».

TENSIÓN DE FASE es la diferencia de potencial entre los extremos de un devanado:  $V_b - V_p = V_{bp}$ . TENSIÓN COMPUESTA es la diferencia de potencial entre los extremos terminales de dos devanados:  $V_b - V_f = V_{bf}$ . Por estar montados en serie los devanados bp y pf se obtiene:

$$V_{bf} = (V_b - V_p) + (V_p - V_f) = (V_p - V_f) - (V_p - V_b) = V_{pf} - V_{pb} = V_0 \cos \omega t - V_0 \cos (\omega t + 2\pi/3)$$

siendo  $V_0$  la tensión máxima de cada fase.

Para realizar la composición geométrica de las dos tensiones, dibujaremos  $V_0$  formando un ángulo  $\omega t$  con el eje X; otro vector idéntico formando con X un ángulo  $(\omega t + 2\pi/3)$  (de puntos en la Fig. XXII-72), del que tomaremos el vector igual y opuesto (signo menos de la fórmula anterior); el vector resultante de los dos anteriores nos dará la tensión máxima compuesta cuyo valor será, el doble de la proyección de  $V_0$  sobre la propia resultante:

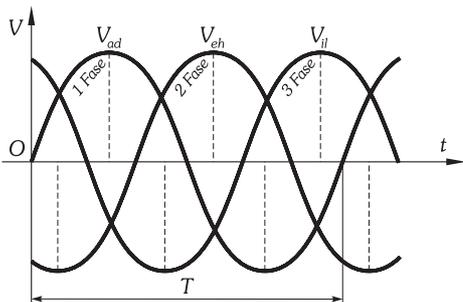


Fig. XXII - 69. Representación gráfica de los potenciales en las corrientes trifásicas.

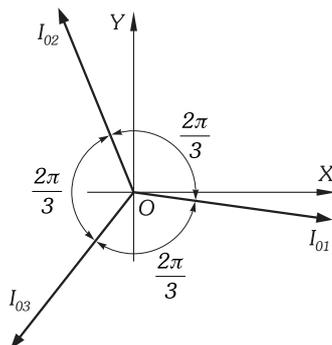


Fig. XXII - 70. Representación vectorial de las intensidades en las corrientes trifásicas.

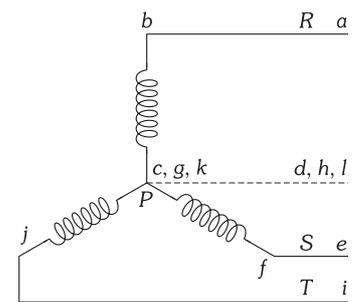


Fig. XXII - 71. Acoplamiento de las bobinas del estator de un generador trifásico de corriente alterna en estrella.

$$V_c = 2 V_0 \cos \pi/6 = 2 V_0 \frac{\sqrt{3}}{2} = V_0 \sqrt{3}$$

Para valor de la tensión eficaz compuesta, obtendremos:

$$V_{ec} = \frac{V_c}{\sqrt{2}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \sqrt{3} = V_e \sqrt{3}$$

«En los sistemas trifásicos instalados en triángulo la tensión eficaz compuesta máxima es  $\sqrt{3}$  veces mayor que la tensión de fase.»

CONEXIÓN EN TRIÁNGULO: queda representada en la Fig. XXII-73. Los tres circuitos independientes (abcd, efgh, ijkl) se conectan de forma que sus inducidos tienen, dos a dos, un punto común. En tal conexión la tensión de fase ( $V_{bc}$ ) y la tensión de la línea o compuesta ( $V_{bf}$ ) se identifican.

La aplicación del primer lema de Kirchoff a un vértice del triángulo, nos da:  $I_{bc} = I_{fd} + I_{fg}$ .

INTENSIDAD EFICAZ DE FASE es la intensidad de cada circuito independiente; INTENSIDAD COMPUESTA es la correspondiente a cada línea ( $I_{ab}$ ,  $I_{cd}$ ,  $I_{gb}$ ) cuando se han realizado las conexiones.

La intensidad compuesta tiene por valor:

$$I_{fd} = I_{bc} - I_{fg} = I_0 \cos \omega t - I_0 \cos (\omega t + 2 \pi/3)$$

La composición es idéntica a la realizada para las tensiones en el párrafo anterior, obteniéndose para valor de la intensidad máxima compuesta:  $I_{0c} = I_0 \sqrt{3}$ , e igualmente para la eficaz:  $I_{ec} = I_e \sqrt{3}$

«En los sistemas trifásicos equilibrados, instalados en estrella, la intensidad compuesta máxima o eficaz es  $\sqrt{3}$  veces mayor que la intensidad de cada fase.»

Como consecuencia de lo dicho, cuando se quiera aprovechar en la línea una tensión superior a la suministrada por cada arrollamiento, utilizaremos la conexión en estrella, resultando que la intensidad de corriente en cada línea es igual a la que circula por los arrollamientos. Si queremos que con la misma tensión de los arrollamientos, la intensidad en los conductores de línea sea superior a la que circula por los arrollamientos, entonces emplearemos la conexión en triángulo.

**XXII - 45. Potencia de las corrientes trifásicas.**

Si  $V_e$ ,  $I_e$ ,  $V_{ec}$  e  $I_{ec}$ , son respectivamente las tensiones e intensidades eficaces de cada fase y las compuestas, la potencia del sistema equilibrado, suma de las potencias de los circuitos independientes, es:  $P = 3 V_e I_e \cos \varphi$ . En la conexión en estrella:

$$I_e = I_{ec} \quad V_{ec} = V_e \sqrt{3}$$

En la conexión en triángulo:

$$I_{ec} = I_e \sqrt{3} \quad V_e = V_{ec}$$

Por sustitución en cada uno de los casos de estos valores en la fórmula de la potencia, obtenemos, para uno y otro caso:

$$P = \frac{3}{\sqrt{3}} V_{ec} I_{ec} \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = \sqrt{3} V_{ec} I_{ec} \cos \varphi}$$

**PROBLEMA: 84.**

**K) GENERADORES DE CORRIENTE CONTINUA**

**XXII - 46. Dínamos de corrientes continua**

Las DÍNAMOS son máquinas destinadas a transformar la energía mecánica en eléctrica, produciendo corriente continua por fenómeno de inducción, originados por un electroimán. En el caso que el inductor sea un imán, se llaman MAGNETOS.

Sustituyamos los anillos del generador simple (párrafo XXII-16), por un solo anillo metálico (COLECTOR) partido diametralmente en dos, como indica la Fig. XXII-74. En la posición dibujada, las escobillas a y b, apoyadas en los sectores 1 y 2, reciben la corriente del inducido y la transmiten al circuito externo en el sentido indicado por las flechas. Transcurrido medio período (la espira ha girado  $180^\circ$  la corriente ha cambiado de sentido, pero la escobilla a está en contacto con el sector 2 y la b con el 1, circulando por el circuito externo una corriente en el mismo sentido que en la anterior posición. La corriente ha cesado de circular alternativamente en dos sentidos, para convertirse en una corriente «RECTIFICADA» cuya representación gráfica es la de la Fig. XXII-75. A tal corriente la llamamos «CONTINUA» indicando, así, que siempre circula en el mismo sentido por el circuito externo.

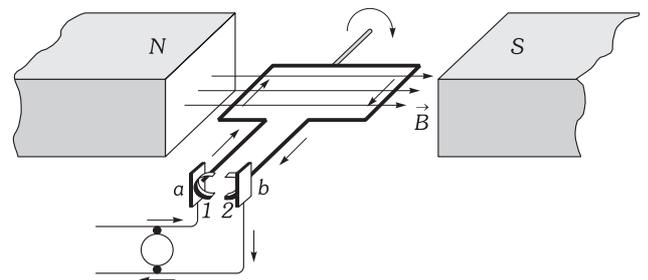


Fig. XXII - 74. Esquema de una dinamo simple.

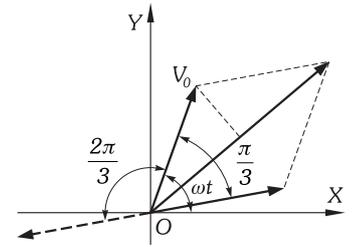


Fig. XXII - 72. Composición de dos tensiones en corrientes trifásicas.

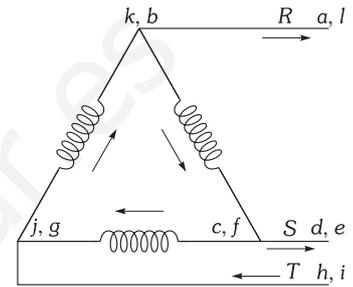


Fig. XXII - 73. Acoplamiento en triángulo.

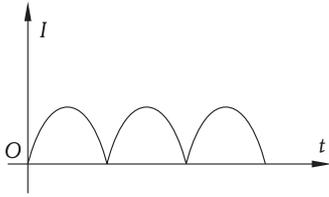


Fig. XXII - 75. Gráfica de la corriente rectificada en una dinamo simple.

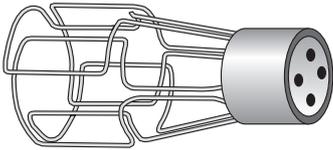


Fig. XXII - 76. Inducido de tambor.

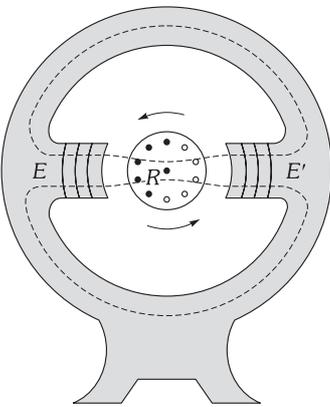


Fig. XXII - 77. Dinamo con inducido de tambor.

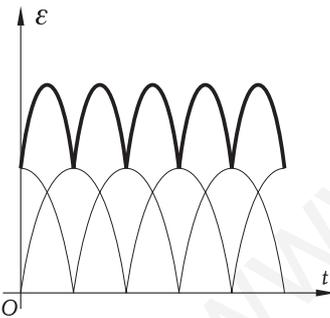


Fig. XXII - 78. FEM con dos cuadros en el inducido de tambor.

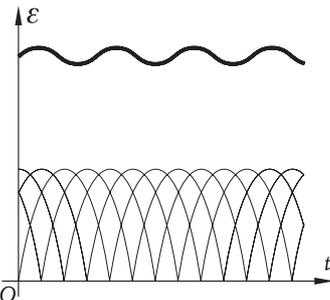


Fig. XXII - 79. FEM en una dinamo con más de dos cuadros en el inducido del tambor.

**XXII - 47. Formas de inducidos**

Para evitar las variaciones de intensidad de la corriente se emplean dos tipos de inducidos:

**INDUCIDOS DE TAMBOR.** Se asocian en serie varios cuadros de hilo conductor como indica la Fig. XXII-76. Los hilos conductores son de cobre y están colocados en unas ranuras practicadas en un cilindro de hierro laminado (para reducir al mínimo las pérdidas de energía por corrientes de Foucault); los conductores están aislados del cilindro por cubiertas protectoras. El cilindro está montado sobre un árbol que puede girar en torno a su eje.

En la Fig. XXII-77 el cilindro está representado por *R* y se ha dibujado el corte perpendicular a las varillas de cobre. El campo magnético inductor es producido por el electroimán *EE'* y sigue la trayectoria dibujada de puntos en la figura, tanto en el rotor como en la «carcasa».

Si hacemos girar un inducido de tambor construido con sólo dos cuadros en el seno del campo magnético del electroimán se verifica que cuando la fuerza electromotriz de una espira es máxima la de la otra se anula. La FEM queda representada en los diversos tiempos en la Fig. XXII-78, en la que la curva superior tiene por ordenadas la suma de las ordenadas de las curvas inferiores que representan las FEM componentes; la intensidad de la corriente tendría una representación gráfica análoga.

Si vamos aumentando el número de espiras la ondulación de la corriente resultante será cada vez menor, hasta ser, prácticamente, de intensidad constante con el tiempo (Fig. XXII-79).

**INDUCIDO DE ANILLO:** Si consideramos un núcleo anular de hierro, con un arrollamiento de cobre (aislado convenientemente del núcleo) y que el sistema gira en el seno de un campo magnético (Fig. XXII-80), las corrientes originadas a un lado y otro de la línea neutra (de puntos en la figura) anulan entre sí sus FEM por ser de sentido contrario.

Para evitar esta anulación se emplea un *colector* (Fig. XXII-81), constituido por una corona formada por piezas de cobre (*DELGAS*), *D*, aisladas entre sí por ebonita y unidas a las espiras del inducido; el colector gira con el inducido rozando las delgas con dos piezas metálicas (*ESCOBILLAS*), *E*, situadas en la línea neutra; las dos escobillas se unen entre sí por un largo hilo, que forma el circuito exterior.

Las corrientes originadas en las espiras situadas a la izquierda de la línea neutra van hacia la escobilla superior; lo mismo ocurre con las corrientes de la derecha de la línea neutra. Las corrientes de ambos lados tienen un sentido *saliente* de la escobilla inferior. Al unirse las escobillas por medio de un hilo, circula por éste una corriente que va siempre en el mismo sentido (de la escobilla superior a la inferior en el caso de la figura).

El sistema descrito o **ANILLO DE GRAMME** se reduce, en definitiva, a *dos series* de fuerzas electromotrices (una a cada lado de la línea neutra) asociadas *en paralelo*. Cada espira es asiento de una FEM y la suma de todas las correspondientes a las espiras de la izquierda (o de la derecha) de la línea neutra es la FEM total, ya que la FEM de dos series iguales de pilas en derivación es igual a la de una de las series,  $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$  en nuestro caso. Así, un circuito de cuatro espiras quedaría representado por el esquema de la Fig. XXII-82 en la que cada pila nos representa una espira de la dinamo.

La composición de tales FEM ( $\mathcal{E}_1$  y  $\mathcal{E}_2$ ) es la misma que en el inducido de tambor (Fig. XXII-76 y 77). Los inducidos de tambor han desplazado casi totalmente a los de anillo; estos últimos fueron la base de su invención.

Para evitar en las dinamos el salto de la chispa entre delgas y escobillas, se inclinan éstas sobre la línea neutra, en el sentido de la rotación del inducido. Al ángulo que forma la línea neutra con la que une las escobillas, se llama «**ÁNGULO DE DESVÍO**».

**XXII - 48. Excitación de las dinamos**

Para que una dinamo funcione es necesaria la existencia de un campo magnético, es decir, que el electroimán sea activo.

Para la iniciación del funcionamiento no es necesario el paso de corriente por el hilo del electroimán, pues el pequeño magnetismo remanente del hierro crea un campo de intensidad muy débil, pero lo suficiente para que, al girar el inducido, se produzca en él una corriente; ésta se hace

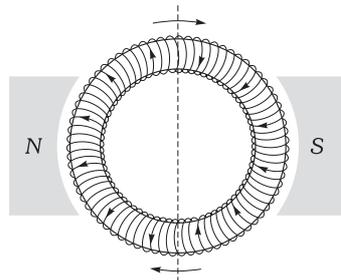


Fig. XXII - 80. Anillo de Gramme.

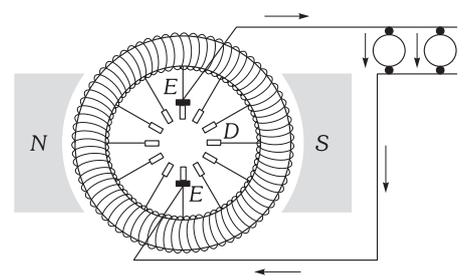


Fig. XXII - 81. Inducido de anillo en una dinamo.



circular por las bobinas del electroimán, aumentando su campo magnético y, en consecuencia, la intensidad de la corriente. A este procedimiento de puesta en marcha, se llama AUTOEXCITACIÓN.

En la EXCITACIÓN EN SERIE (Fig. XXII-83) toda la corriente del inducido pasa por los electroimanes. La resistencia de los arrollamientos de éstos debe ser pequeña para evitar en lo posible las pérdidas de energía por el efecto Joule.

En la EXCITACIÓN EN SHUNT (Fig. XXII-84) la resistencia de los hilos correspondientes a los electroimanes debe ser grande en comparación con la del inducido, para que por ellos pase una pequeña fracción de la intensidad.

En el sistema MIXTO o «COMPOUND» se produce la excitación por dos bobinados en el electroimán: uno en serie de pequeña resistencia y otro en derivación de gran resistencia (Fig. XXII-85).

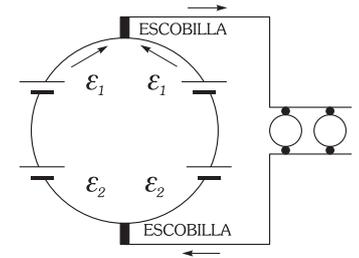


Fig. XXII - 82. Circuito de cuatro espiras.

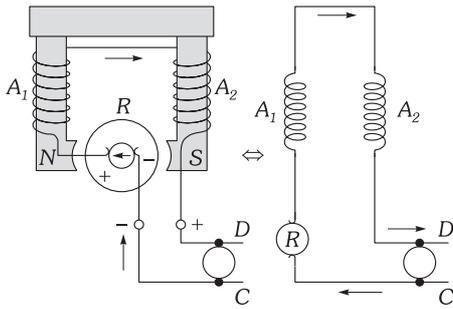


Fig. XXII - 83. Excitación en serie.

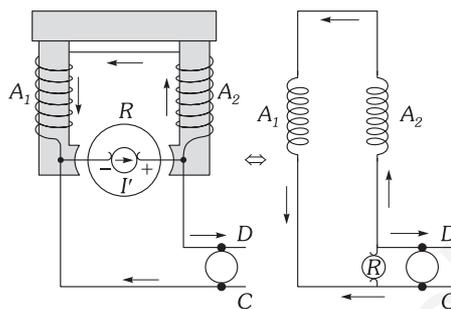


Fig. XXII - 84. Excitación en shunt.

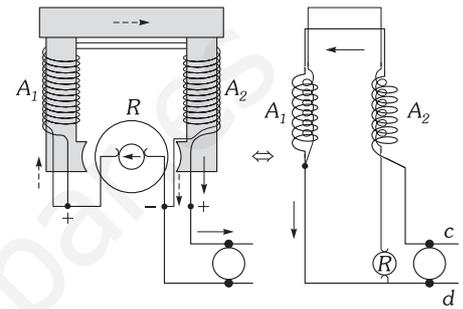


Fig. XXII - 85. Excitación compuesta.

L) ELECTROMOTORES

XXII - 49. Electromotores

Reciben el nombre de ELECTROMOTORES aquellos aparatos en los que la energía eléctrica se transforma en energía mecánica. Se clasificarán en dos grupos: a) Motores de corriente continua. b) Motores de corriente alterna que, a su vez, se clasifican en sincrónicos y asíncrónicos.

Un motor proporciona una energía:  $U = \mathcal{E}' I t$ ,  $\mathcal{E}'$  es la fuerza contraelectromotriz del motor cuyo valor es:  $\mathcal{E}' = U / I t$ .

«Fuerza contraelectromotriz es la energía proporcionada por el motor en un segundo y por unidad de intensidad.

El motor recibe una energía  $V_{AB} I t$ , siendo  $V_{AB}$  la diferencia de potencial en bornes del motor; la diferencia entre la energía recibida y la que el motor devuelve ( $\mathcal{E}' I t$ ) es la que por el efecto Joule ( $I^2 r t$ ) se transforma en calor en el propio motor.

XXII - 50. Motores de corriente continua

Si por el inducido de una dinamo se hace pasar una corriente continua, en cada uno de los puntos del hilo se originan las fuerzas de Lorentz, dando como resultado un giro del inducido. Las dinamos son máquinas reversibles.

En efecto: Supongamos que la corriente circula hacia el interior del dibujo, por los conductores de cobre de la Fig. XXII-77 que están dibujados negros; la aplicación de la ley de Biot y Savart, determina fuerzas hacia el pie del motor, que hacen girar al rotor en el sentido indicado en tal figura. Por el contrario la aplicación de la misma regla a los conductores indicados por un circulito blanco, que forman con los anteriores las espiras del devanado y por los que circula la corriente hacia el exterior del dibujo, determina fuerzas hacia la parte superior del motor, que colaboran con las anteriores en producir el mismo giro.

El inducido y las bobinas de excitación se pueden conectar, lo mismo que una dinamo de corriente continua, en serie, shunt o compound.

XXII - 51. Campo magnético giratorio. Motores de corriente alterna.

Imaginemos tres parejas de piezas polares (1,1' - 2,2' - 3,3' en la Fig. XXII-86) excitadas por corrientes trifásicas; el arrollamiento de cada pareja se ha realizado por cada uno de los hilos de conducción de las corrientes trifásicas, (R, S, T en las Figs. XXII-71 y 73). Se han realizado los arrollamientos de forma tal que se origina un polo N o positivo en las piezas 1, 2, 3 cuando la corriente que circula por las espiras de cada uno de los devanados es, por ejemplo, positiva (por encima del eje de abscisas en la Fig. XXII-87), originándose, en tal caso, polo S o negativo en las piezas opuestas (1', 2', 3').

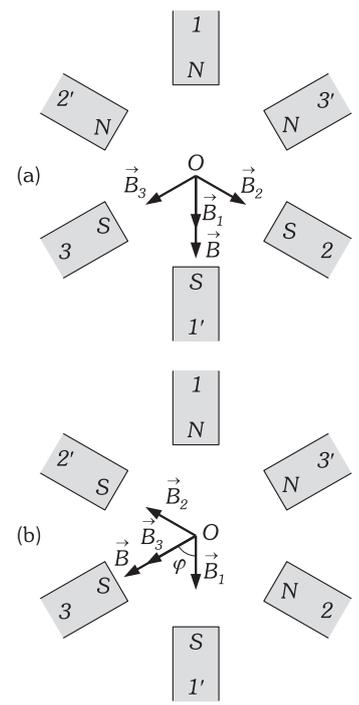


Fig. XXII - 86. Formación de un campo magnético giratorio.

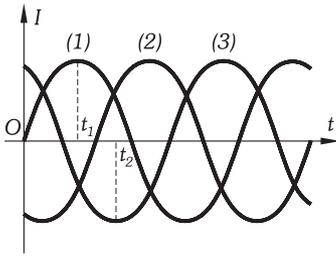


Fig. XXII - 87. Representación gráfica de la intensidad de corriente con el tiempo en las corrientes trifásicas.

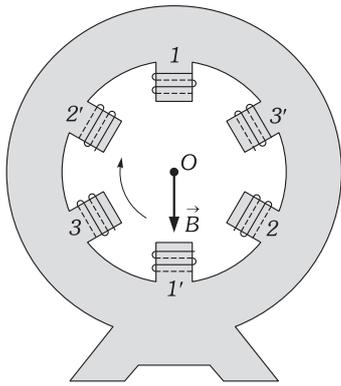


Fig. XXII - 88. Campo magnético giratorio.

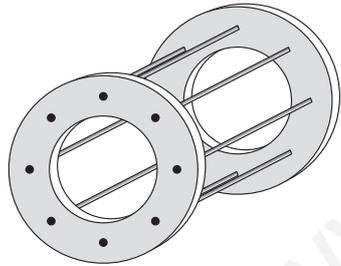


Fig. XXII - 89. Rotor de «jaula».

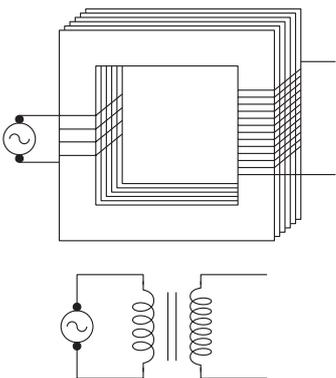


Fig. XXII - 90. Transformador y su esquema.

Supongamos que en el instante  $t_1$ , circula por el arrollamiento 1 una corriente máxima positiva (Fig. XXII-87); entonces por los 2 y 3 circulan corrientes negativas. El polo 1 será N y los 2 y 3, S; los polos quedan en la disposición de la Fig. XXII-86a. En el centro de ella se han dibujado las inducciones magnéticas  $B_1, B_2$  y  $B_3$ , así como su resultante,  $B$ .

En el instante  $t_2$  (Fig. XXII-87) circula por 3 una corriente máxima negativa, originándose un polo S en tal pieza; en las 1 y 2 circulan corrientes positivas originándose en ellas polos N. Representamos las inducciones negativas  $B_1, B_2$  y  $B_3$  y su resultante  $B$  (Fig. XXII-86b).

Observemos que la inducción ha girado un ángulo  $\varphi$  con respecto a la posición anterior. Continuando el mismo razonamiento observaríamos que la inducción en el punto O gira en torno a un eje perpendicular al plano del dibujo (Fig. XXII-88).

La frecuencia de giro de la inducción magnética (número de vueltas por segundo) es la misma que la frecuencia de la red trifásica ya que para que la inducción  $B$ , adquiera de nuevo la misma dirección y sentido, es decir, para que las corrientes 1, 2 y 3 se hallen en la misma situación que en el instante  $t_1$  (Fig. XXII-87) ha de transcurrir un tiempo igual al período de las corrientes trifásicas.

MOTORES ASINCRÓNICOS. En el seno de un campo magnético giratorio colocamos un «rotor» en forma de «jaula» (Fig. XXII-89) constituido por conductores de cobre unidos por anillos del mismo metal; todo este sistema va montado sobre un núcleo cilíndrico de hierro laminado que puede girar en torno a su eje.

Los conductores están situados perpendicularmente al campo y en ellos se originan corrientes inducidas que se oponen a la causa que las produce: es decir, al desplazamiento relativo del campo y el rotor, por lo que éste gira en el mismo sentido del campo, con velocidad angular menor que la de éste.

La ventaja de este tipo de motores es la ausencia de toda conexión eléctrica en el rotor.

MOTORES SINCRÓNICOS. Si una corriente bifásica o trifásica se hace circular por el inducido de un generador bifásico o trifásico, engendra un campo magnético giratorio, que pone en movimiento al inductor, con la misma velocidad que la de giro de campo. Los motores que funcionan de esta forma se llaman sincrónicos.

M) TRANSFORMADORES

XXII - 52. Centrales eléctricas. Transporte de energía a distancia

Una central hidroeléctrica tiene por finalidad transformar la energía potencial del agua (trabajo que puede realizar en su caída) en energía eléctrica. Las transformaciones que se realizan son:

Energía potencial  $\xrightarrow{\text{Salto de agua}}$  Energía cinética.

Energía cinética  $\xrightarrow{\text{Turbinas}}$  Energía cinética de rotación.

Energía cinética de rotación  $\xrightarrow{\text{Alternador}}$  Energía eléctrica.

En una central termoeléctrica se obtiene energía eléctrica a costa de la energía interna de un combustible. Las transformaciones que se realizan son:

Energía interna  $\xrightarrow{\text{Combustión}}$  Energía calorífica.

Energía calorífica  $\xrightarrow{\text{Turbina de vapor}}$  Energía cinética de rotación.

Energía cinética de rotación  $\xrightarrow{\text{Alternador}}$  Energía eléctrica.

En todas las transformaciones hay disipación de energía en forma de calor que disminuye el rendimiento total.

La energía eléctrica originada en un alternador debe ser transportada a los lugares de su aprovechamiento (fábricas, ciudades, etc.). Se trata de transportar P vatios, es decir P julios cada segundo; para ello se establecen las líneas de transmisión; al pasar las corrientes por ellas se pierde una cantidad de energía en forma de calor ( $I^2 R$ ).

Para que esta pérdida sea pequeña es necesario que la intensidad de la corriente también lo sea, y en consecuencia, la FEM debe ser grande ya que el producto,  $\mathcal{E}_e I_e$  (potencia teórica), queda determinado por el número de vatios que se deben transportar.

«Para transportar la energía eléctrica a distancia, siendo pequeñas las pérdidas en forma de calor, debe tener la corriente una intensidad pequeña y una alta tensión».

XXII - 53. Transformadores

«Los transformadores son aparatos destinados a variar la FEM y la intensidad de las corrientes, de forma que su producto permanezca constante».

Un transformador está constituido por un núcleo anular de hierro dulce (Fig. XXII-90), al que se arrolla el hilo que constituye el circuito externo de un alternador; en la parte opuesta del núcleo

se arrolla otro hilo de forma que el número de sus espiras sea mayor (si se quiere elevar la tensión) o menor (para reducirla).

Los cambios constantes de la intensidad y del sentido de la corriente producida por el alternador, hacen variar el flujo que atraviesa el segundo arrollamiento, ya que las líneas de campo que se concentran en el interior del núcleo anular cambian constantemente de sentido. Por ello se crean en el circuito inducido corrientes alternas de la misma frecuencia que las inductoras, pero de distinta FEM puesto que se cumple:

«Las fuerzas electromotrices inductora e inducida, son directamente proporcionales al número de espiras de inductor e inducido»:

$$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}'} = \frac{n}{n'}$$

Si el número de espiras en el inducido es 100 veces mayor que en el inductor, la tensión de la corriente es 100 veces mayor que la de la inductora, y la intensidad 100 veces menor.

Transformada la corriente del alternador en el transformador, es transmitida por las líneas de alta tensión; a la entrada de las ciudades o fábricas es reducido el voltaje por un nuevo transformador. En la Fig. XXII-91 se indica el montaje de transformadores en la línea general. El rendimiento de un transformador puede llegar hasta el 99%.

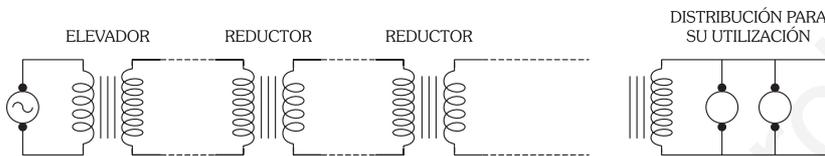


Fig. XXII - 91. Montaje de transformadores.

Para demostrar los hechos anteriores supongamos originada la corriente del *circuito primario* por una FEM alterna de valor instantáneo,  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ . Los constantes cambios de la intensidad de la corriente provocan una variación del flujo magnético a través de las espiras del primario y, por tanto, se produce en él una FEM de autoinducción, cuyo valor será:  $-n_1 d\phi/dt$ , si  $n_1$  es el número de espiras del primario y  $\phi$  el flujo que atraviesa cada espira. La suma de tales FEM, provocará una intensidad que, por la ley de Ohm, será:

$$\mathcal{E}_1 - n_1 \frac{d\phi}{dt} = R I$$

y si la resistencia del primario es despreciable:

$$\mathcal{E}_1 = n_1 \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow \frac{\mathcal{E}_1}{n_1} = \frac{d\phi}{dt}$$

El último término es la velocidad de variación del flujo a través de cada espira del primario. Como el flujo de inducción se transmite prácticamente íntegro a través del núcleo del transformador,  $d\phi/dt$  será, también, la velocidad de variación de flujo en cada espira del *circuito secundario* y  $n_2 d\phi/dt$  ( $n_2$  = número de espiras del secundario) será la velocidad de variación del flujo de inducción a través de todo el secundario. Multiplicando los dos miembros de la última igualdad por  $(-n_2)$ , se obtiene:

$$-\frac{\mathcal{E}_1}{n_1} n_2 = -n_2 \frac{d\phi}{dt}$$

El segundo miembro de la expresión anterior es, según la ley de Faraday, la FEM inducida en el circuito secundario ( $\mathcal{E}_2$ );

$$-\frac{\mathcal{E}_1}{n_1} n_2 = \mathcal{E}_2 \Rightarrow \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = -\frac{n_1}{n_2}$$

obteniéndose, en valor absoluto la relación de transformación que queríamos demostrar.

**PROBLEMAS: 85 y 90.**

**XXII - 54. Corrientes de Tesla**

Las CORRIENTES DE Nikola TESLA (1856-1943) son corrientes de gran frecuencia y alta tensión.

Producimos la gran frecuencia en un circuito RLC (párrafo 12) y se obtienen en el TRANSFORMADOR DE TESLA (Fig. XXII-92); S es el secundario de una bobina de inducción; C es un condensador; E son las escobillas de un excitador; P es un arrollamiento de pocas espiras y de hilo grueso y S' es el circuito exterior de hilo fino con un arrollamiento de muchas espiras. Por P circula corriente

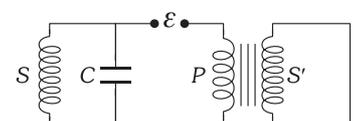


Fig. XXII - 92. Transformador de Tesla.

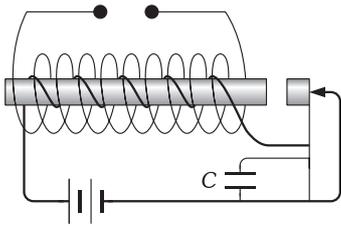


Fig. XXII - 93. Esquema del carrete de Ruhmkorff.

te de frecuencia extraordinaria, la misma que la de la chispa oscilante que salta en  $\mathcal{E}$ ; en  $S'$  se inducen corrientes de la misma frecuencia y de un potencial enorme.

Las corrientes de alta tensión y frecuencia no son peligrosas para el cuerpo humano, ya que no producen fenómenos electrolíticos que varíen la concentración de los líquidos del organismo (peligro de las corrientes continuas) ni alteran el ritmo del corazón (peligro de las corrientes alternas de baja frecuencia).

**XXII - 55. Carrete de Ruhmkorff**

El CARRETE DE Heinrich David RUHKORFF (1884-1943), llamado también BOBINA DE INDUCCIÓN, es un transformador que tiene por finalidad el elevar la tensión de una corriente continua; se obtienen en él corrientes de gran tensión cuyo sentido cambia en determinados intervalos de tiempo.

Está constituido por un núcleo de hierro dulce en el que se arrolla un hilo grueso (inductor o primario) formando pocas espiras; en él está instalado el generador de corriente continua; uno de los extremos del primario está en contacto con el pie de una laminilla de hierro, y el otro apoyado en ella por una punta metálica, muy fina. Al pasar la corriente se imanta el núcleo, atrayendo a la laminilla, cortándose el circuito e interrumpiéndose la corriente. Al cesar ésta y desmagnetarse el núcleo, la laminilla vuelve a su posición, restableciéndose el contacto y el paso de corriente. Las sucesivas interrupciones hacen que por autoinducción se formen corrientes interrumpidas cuya intensidad, representada gráficamente, se indica en la Fig. XXII-94 (superior).

El circuito inducido o secundario, es de hilo fino y de muchas espiras, estando arrollado sobre el primario y aislado de él. Cuando aumenta la intensidad en el primario, el flujo magnético que atraviesa el circuito secundario aumenta, originándose corrientes inducidas de sentido contrario a la inductora; al disminuir la intensidad en el primario se originan en el secundario corrientes del mismo sentido que la inductora. Las primeras (corrientes de cierre) son de menor tensión que las segundas (corrientes de apertura), debido a que la misma variación del flujo se verifica con más lentitud en el cierre del circuito que en su apertura. Las FEM originadas en el secundario están representadas en la Fig. XXII-94 (inferior).

Se suprimen las chispas que saltan en el interruptor y que podrían estropearlo con un condensador instalado como indica la Fig. XXII-93.

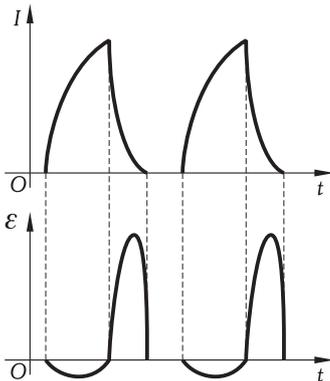
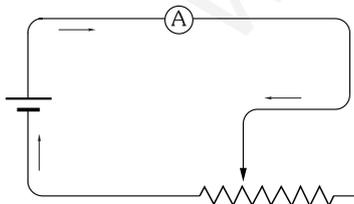


Fig. XXII - 94. Curvas de corriente inductora y FEM inducida en el carrete de Ruhmkorff.

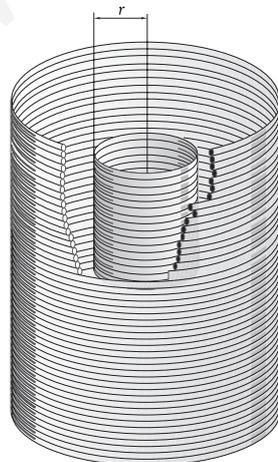
**PROBLEMAS**

**A) LEYES DE FARADAY-LENZ**

1. 1) Determinar el sentido de las corrientes de autoinducción al deslizar hacia la izquierda o hacia la derecha el contacto del réostato de la figura. 2) ¿Por qué al abrir un circuito por medio de un interruptor de palanca salta una chispa eléctrica cuando ya el circuito está abierto?



Problema XXII-1.



Problema XXII-4.

2. A una bobina de 500 espiras de alambre conductor de 5  $\Omega$  de resistencia, enrolladas sobre una estructura rectangular de 10 y 12 cm de lados, de forma que todas las espiras tienen el área del rectángulo, se le aplica un campo magnético perpendicular al plano de las espiras, varian-

do el módulo de la inducción de cero hasta 1 T en un tiempo de 1,2 s. Calcular: 1) La FEM inducida en la bobina mientras varía el campo. 2) El valor de la intensidad de corriente inducida en la bobina.

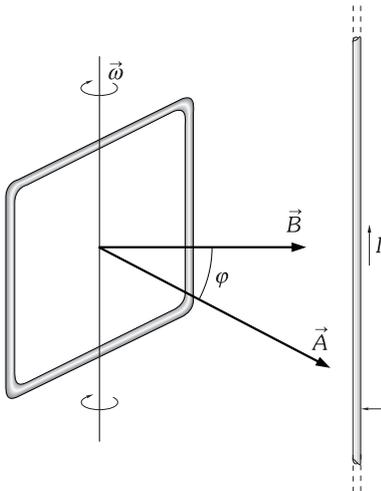
3. Una bobina circular de 4 cm de radio, consta de 200 espiras, tiene una resistencia de 20  $\Omega$ , y está situada en un campo magnético perpendicular al plano de sus espiras cuya inducción varía con el tiempo según la ecuación escrita en el SI:  $B = 0,5e^{-t/2}$ . Determinar el valor de la intensidad de corriente inducida en cualquier instante y mientras se encuentre sometido a dicho campo variable con el tiempo.

4. En el interior de un solenoide largo que tiene  $200/\pi$  vueltas/cm introducimos una bobina que posee un total de 100 espiras y un diámetro de  $2/\sqrt{\pi}$  cm, de forma que ambos (solenoides y bobina) queden con un eje común como se indica en la figura. 1) Si en el solenoide, con ritmo constante de 0,1 s, hacemos pasar una corriente de 2 A reduciéndola a cero y a continuación la aumentamos a 2 A, pero en sentido contrario, reproduciendo el ciclo cuantas veces se quiera, calcular la FEM inducida en la bobina en el período de tiempo que hemos indicado. 2) Si la intensidad de la corriente en el solenoide varía con el tiempo según la ecuación escrita en el SI:  $I = t^2 + 2t + 3$ , y la resistencia de la bobina es de 0,1  $\Omega$ , ¿cuál es la intensidad de la corriente inducida en la bobina en el instante en que  $t = 4$  s?

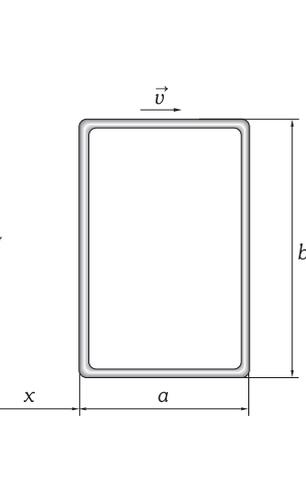
5. Hacemos girar una espira cuadrada de 0,5 m de lado con una velocidad angular de 200 rad/s en el interior de un campo magnético uniforme de 0,8 T de inducción tal y como se indica en la figura. Calcular la FEM inducida en el cuadro.

6. El circuito rectangular de la figura se mueve, perpendicularmente a una línea de corriente rectilínea atravesada por una intensidad de 10 A, con una velocidad uniforme de 1 m/s. Los valores de a y b son 5 y 10 cm, respectivamente. Determinar la fuerza electromotriz inducida en el circuito en el instante en que se encuentra a 20 cm de él ( $x = 20$  cm).

7. Calcular la FEM inducida en el circuito rectangular de la figura cuando por la línea rectilínea e indefinida circula una corriente alterna (variable con el tiempo) cuya intensidad viene dada en el si por  $I = 10 \text{ sen } 100 \pi t$ ; siendo  $a = 5 \text{ cm}$ ,  $b = 10 \text{ cm}$  y  $d = 5 \text{ cm}$ .



Problema XXII-5.

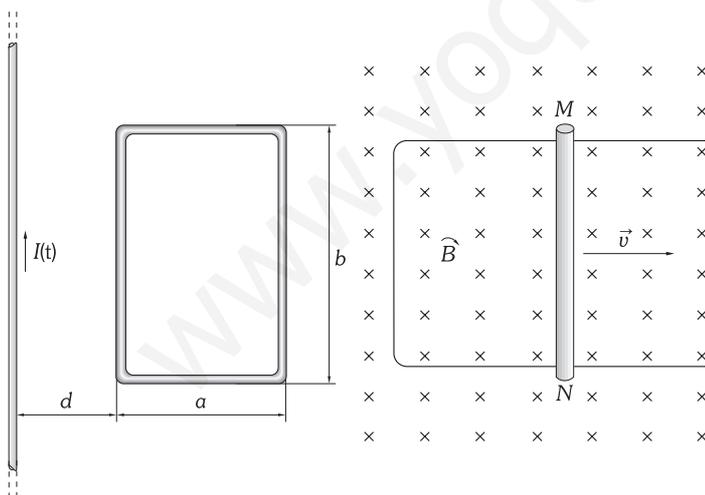


Problema XXII-6.

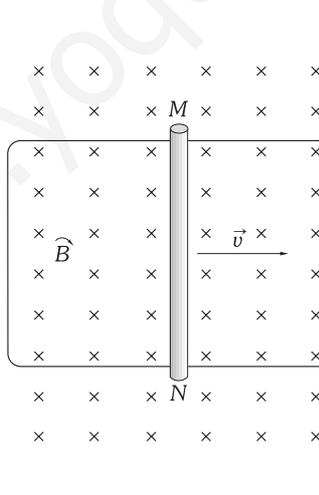
8. Justificar la ley de Faraday para un hilo recto y conductor que se mueve perpendicularmente a un campo magnético con una velocidad  $v$ .

9. El sistema del dibujo está «sumergido» en un campo magnético uniforme, perpendicular al plano del papel y hacia el interior. ¿Qué sentido tiene la corriente inducida al desplazar la varilla MN con la velocidad indicada, sin perder contacto con sus guías? Si  $B = 5 \text{ T}$ , la longitud  $MN = 10 \text{ cm}$  y la velocidad de desplazamiento,  $v = 1 \text{ m/s}$ , ¿qué FEM inducida se produce?

10. Suponiendo que en el sistema del problema anterior no hay variaciones de la resistencia del circuito sobre el que se desplaza la varilla y que la resistividad de MN es  $2 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$  y su sección  $0,1 \text{ mm}^2$ , calcular: 1) La intensidad de corriente. 2) La fuerza que actúa sobre MN. 3) El trabajo realizado en el desplazamiento durante  $0,2 \text{ s}$ . 4) La potencia mecánica para producir la velocidad.



Problema XXII-7.



Problema XXII-9 y 10.

11. El circuito de alambre de la figura está sumergido en un campo magnético perpendicular al plano del dibujo y hacia fuera. Si su parte móvil es de  $20 \text{ cm}$  de longitud,  $B = 1,8 \text{ T}$ , la resistencia del alambre por unidad de longitud es de  $2 \Omega/\text{m}$ , y el cable móvil comienza su movimiento hacia la derecha en el extremo izquierdo del montaje con velocidad constante de  $1 \text{ m/s}$ . Calcular: 1) El valor de la FEM inducida. 2) La intensidad de corriente inducida  $0,5 \text{ s}$  después del comienzo del movimiento.

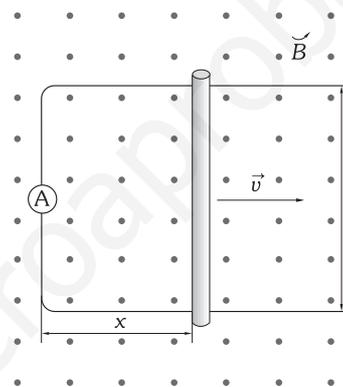
12. Una espira cuadrada de lado  $l$  y resistencia  $R$ , se mueve con una velocidad  $v$  como indicamos en la figura; penetra en una región en la que existe un campo magnético uniforme de inducción  $B$  per-

pendicular al plano del papel y hacia dentro, y limitada a una distancia  $d > l$ . Hágase una gráfica del flujo, la FEM inducida, y de la fuerza externa que debe actuar sobre la espira, anulando la fuerza magnética, cuando se encuentra la espira sumergida en  $B$  y para que se mantenga a velocidad constante, en función de la posición de la espira, antes de penetrar, cuando está penetrando, cuando se encuentra en, y cuando sale del campo magnético.

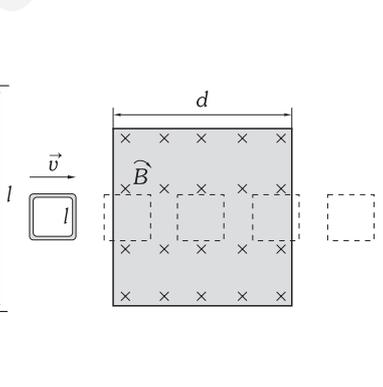
13. Demostrar sin aplicar la ley de Faraday, que la FEM inducida (FEM de movimiento) en un conductor de longitud  $l$  que se mueve con velocidad  $v$  en el interior de un campo magnético de inducción  $B$  viene dada por  $\mathcal{E} = v \cdot (B \times l)$ .

14. En la figura representamos un hilo conductor indefinido, que transporta una intensidad de corriente de  $100 \text{ A}$ , perpendicular a otro hilo conductor finito que se mueve a velocidad constante de  $10 \text{ m/s}$  en la misma dirección que la intensidad de corriente en el conductor indefinido. Calcular el valor de la FEM de movimiento inducida entre los extremos del hilo conductor móvil.

15. Hacemos girar una varilla conductora de  $1 \text{ m}$  de longitud con velocidad angular constante de  $6 \text{ rad/s}$  alrededor de su extremo en el interior de un campo magnético uniforme de  $5 \text{ T}$ , perpendicular al plano en que se encuentra la varilla y en el sentido indicado en la figura. Determinar la «FEM de movimiento» inducida entre los dos extremos de la varilla.



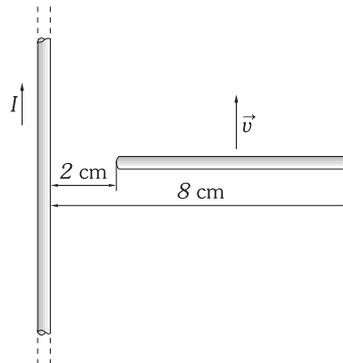
Problema XXII-11.



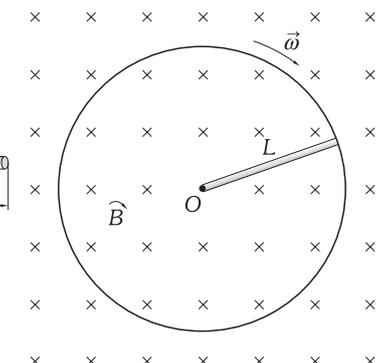
Problema XXII-12.

16. Un disco circular, conductor, de radio  $1 \text{ m}$ , gira con velocidad angular constante de  $20 \text{ rad/s}$  en su campo magnético de  $2 \text{ T}$  como se indica en la figura. ¿Qué voltaje marca el voltímetro?

17. Un dispositivo utilizado en la medida de la inducción magnética es el llamado MAGNETÓMETRO DE BOBINA EXPLORADORA, consiste en una bobina plana de  $N$  espiras y sección transversal  $A$ , instaladas en el extremo de una varilla de madera, y cuyos bornes se conectan a un galvanómetro balístico que nos mide la carga eléctrica total  $Q$  que pasa a su través (ver Fig.). Conocemos también la resistencia total del circuito  $R$  (bobina, bornes y galvanómetro). La bobina exploradora se introduce en el interior del campo magnético que queremos medir, alineándola de tal forma que el flujo que la atraviesa sea el máximo; se retira la bobina del campo magnético y se lee la carga  $Q$  en el galvanómetro. Calcular una expresión que nos dé el valor de la inducción magnética  $B$  en función de  $N$ ,  $A$ ,  $R$  y  $Q$ .



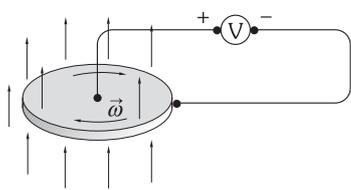
Problema XXII-14.



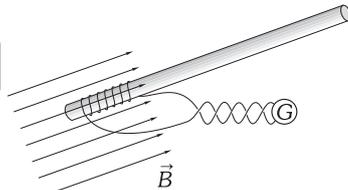
Problema XXII-15.

**B) AUTOINDUCCIÓN. INDUCCIÓN MUTUA**

**18.** Por una bobina que tiene 500 espiras muy próximas entre sí y de  $10^{-2}$  H de autoinducción circula una corriente de  $10^{-2}$  A. Determine el flujo magnético a través del arrollamiento.



Problema XXII-16.

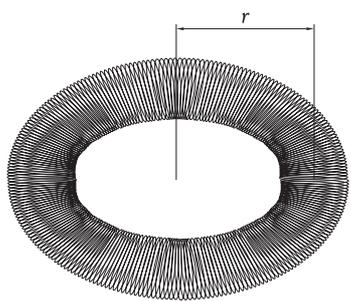


Problema XXII-17.

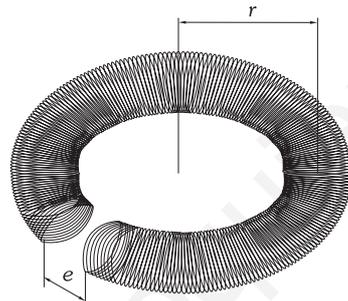
**19.** Un solenoide largo tiene una longitud  $l$  y una sección  $A$ . Si es  $n$  el número de espiras y  $\mu$  la permeabilidad magnética del medio interno, calcular el valor de la autoinducción del solenoide.

**20.** Un anillo de Rowland de 8 cm de radio medio y  $10 \text{ cm}^2$  de sección tiene arrolladas 800 vueltas de un hilo conductor recubierto de un material aislante. El núcleo tiene una permeabilidad relativa de 1 500. Calcular: 1) La autoinducción del arrollamiento. 2) Si la corriente que circula por el conductor aumenta a razón de 10 A/s, ¿qué valor toma la FEM inducida?

**21.** Se arrollan a un anillo de Rowland de hierro 4 000 espiras de un hilo conductor recubierto de una materia aislante y hacemos pasar por él una corriente de 2 A. El radio medio del anillo es 20 cm y su sección  $5 \text{ cm}^2$ . Cortamos el anillo formando un entrehierro de 2 mm de anchura. Determinar la autoinducción de éste antes y después del corte. Permeabilidad relativa del hierro: 1 000.



Problema XXII-20.



Problema XXII-21.

**22.** Un anillo de hierro de sección cuadrada y de diámetro interior y exterior 10 y 15 cm lleva un arrollamiento de 500 vueltas. Determinar el coeficiente de autoinducción de este toroide. (Para el Fe:  $\mu' = 1 200$ .)

**23.** Se tienen dos tubos concéntricos muy largos en los que el espesor de sus paredes es despreciable, de radios  $R_1$  y  $R_2$  y uno de los cuales sirve de ida y el otro para la vuelta de la corriente. Demostrar que la autoinducción por unidad de longitud del sistema así formado es:

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

**24.** Demostrar que la autoinducción en el interior de una fracción  $h$  de conductor cilíndrico muy largo es  $\mu h/8\pi$ ; suponiendo que la intensidad de corriente  $I_0$  que lo recorre es uniforme en todo punto de la sección transversal.

**25.** Demostrar que la autoinducción por unidad de longitud existente entre dos conductores cilíndricos de radio  $R$ , paralelos e indefinidos cuando se encuentran a una distancia  $d \gg R$  (de esta forma puede despreciarse la autoinducción en el interior de los hilos) por los que pasa una intensidad  $I$  que circula en sentido contrario, viene dada por:

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d-R}{R}$$

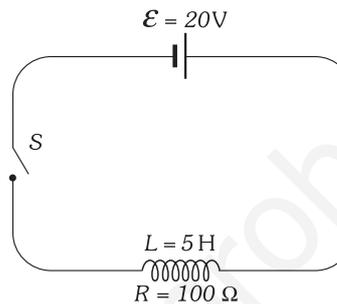
**26.** A una fuente de corriente continua de 120 V conectamos un solenoide de 0,8 H de autoinducción. Calcular la velocidad de elevación de la corriente en el solenoide en los siguientes casos: 1) En el instante en que se conecta a la fuente. 2) En el instante en que la corriente alcanza el 80 % de su valor estacionario.

**27.** En el circuito de la figura la autoinducción de la bobina es de 5 H y su resistencia 100  $\Omega$ . Despreciamos la resistencia interior de la pila. 1) Calcular la intensidad máxima estando cerrado el interruptor. 2) ¿Cuál es la constante de tiempo del circuito? 3) ¿En qué instante se hace la intensidad 0,632 veces la máxima? 4) ¿En qué tiempo se hace la mitad de la máxima?

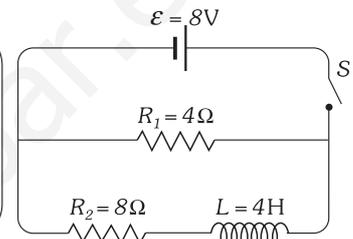
**28.** Al cerrar un circuito LR la intensidad de la corriente se hace la tercera parte de su valor estacionario en 0,3 s. Calcular: 1) La constante de tiempo del circuito. 2) Valor de la autoinducción si la resistencia del circuito es de 50  $\Omega$ .

**29.** Por un solenoide de 500  $\Omega$  de resistencia circula una corriente de 3 A. Repentinamente se corta la corriente y ésta disminuye hasta  $10^{-2}$  A en 0,5 s. Determinar la autoinducción del solenoide.

**30.** En el circuito de la figura determine: 1) La intensidad de la corriente a través de la resistencia  $R_1$  inmediatamente después de cerrar el interruptor y transcurrido el suficiente tiempo para que ésta se haga estacionaria. 2) Id., id., a través de  $R_2$ . 3) Id., id., a través del interruptor.

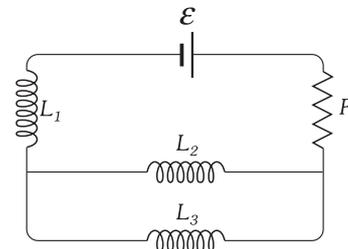


Problema XXII-27.



Problema XXII-30.

**31.** En el circuito de la figura  $L_1 = 1/3$  H,  $L_2 = 5$  H,  $L_3 = 2,5$  H y  $R = 2$  k $\Omega$ . Determinar la constante de tiempo del circuito. Suponer las bobinas lo suficientemente separadas para que las influencias mutuas entre ellas sean despreciables.



Problema XXII-31.

**32.** El coeficiente de inducción mutua entre dos bobinas es de 125 mH. Determine la FEM inducida en la primera bobina cuando por la segunda circula una intensidad variable con el tiempo y cuyo valor en el SI viene dado por:  $I = 1 - 3t^2$ .

**33.** En una bobina se induce una FEM de  $5 \times 10^{-3}$  V cuando en otra cercana a ella varía la corriente con una rapidez de 4 A/s. Determine el coeficiente de inducción mutua del sistema.

**34.** Tenemos dos espiras concéntricas y coplanarias de radios  $r_1$  y  $r_2$  con  $r_1 \gg r_2$ , supongamos que en la espira grande se produce una variación  $dI/dt$  de la corriente que por ella circula. Calcular: 1) El valor de la FEM de inducción mutua en la pequeña. 2) El coeficiente de inducción mutua de la bobina 1 sobre la 2 ( $M_{21}$ ).

**35.** La figura XXII-18 del texto nos muestra dos bobinas que poseen 5 000 y 3 000 espiras, respectivamente. Cuando por la primera circula una intensidad de corriente de 1 A se produce en ella un flujo de  $2 \times 10^{-3}$  Wb y en la segunda  $10^{-3}$  Wb. Calcular: 1) El coeficiente de autoinducción de la primera. 2) El coeficiente de inducción mutua entre ambas. 3) La FEM inducida en la segunda, si la corriente en la primera se hace nula en  $10^{-1}$  s.

**36.** Un solenoide de 1 m de longitud y 8  $\text{cm}^2$  de sección consta de 500 espiras. En su centro enrollamos 200 espiras como se indica en la figura. Calcular el coeficiente de inducción mutua entre ambas bobinas.

**37.** Sobre una barra cilíndrica de hierro muy larga de 1 cm de radio realizamos dos arrollamientos superpuestos que tienen 50 y 30 espiras por cada cm de longitud. Determine el coeficiente de inducción

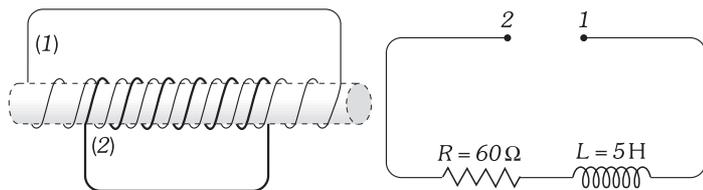
mutua por unidad de longitud del sistema así formado. (Para el hierro:  $\mu' = 800$ ).

38. Calcular el coeficiente de inducción mutua de dos arrollamientos toroidales superpuestos que tienen longitud media  $l$  y sección  $A$ , con  $n_1$  y  $n_2$  vueltas, respectivamente.

39. Un anillo de hierro de sección cuadrada y de diámetros interior y exterior  $10$  y  $15$  cm lleva dos arrollamientos aislados eléctricamente que tienen  $500$  y  $300$  vueltas, respectivamente. Determiné el coeficiente de inducción mutua entre ambos bobinados. (Para el hierro:  $\mu' = 1200$ .)

### C) ENERGÍA MAGNÉTICA. DESCARGA OSCILANTE

40. En el circuito de la figura  $V_1 - V_2 = 120$  V. Calcular la energía almacenada en el campo magnético cuando se ha alcanzado el valor máximo de la corriente.



Problema XXII-36.

Problema XXII-40.

41. Un solenoide largo que tiene  $10$  espiras por cm está recorrido por una corriente de  $10$  A. Calcular la densidad cúbica de energía en su interior. ¿Qué le ocurriría a tal densidad cúbica si el solenoide estuviese arrollado a un núcleo de hierro de permeabilidad relativa al vacío  $2000$ ?

42. Determinar la energía almacenada en el campo magnético del anillo de hierro del problema 22, en el supuesto que por el hilo del arrollamiento circule una intensidad de  $5$  A.

43. En el problema 24 demostrábamos, aplicando la definición de autoinducción, que la autoinducción de una fracción  $h$  de conductor cilíndrico largo es  $\mu h/8\pi$  cuando la intensidad  $I_0$  que lo recorre es uniforme en todo punto de la sección transversal. Demuéstre lo mismo a partir de la integral de energía.

44. En un circuito hay intercalada una autoinducción de  $5$  H y un condensador de  $20 \mu\text{F}$ . Calcular: 1) El límite superior de resistencia para que se produzca una descarga oscilante. 2) Suponiendo que el circuito tiene resistencia nula, ¿cuál será el período de la descarga oscilante?

45. ¿Qué autoinducción debe tener un circuito en el que hay intercalado un condensador de  $1 \mu\text{F}$  de capacidad para que se produzca en él una descarga oscilante de  $1,6$  kHz de frecuencia? ¿Cuál es la resistencia máxima para la producción de la descarga oscilante?

46. En un circuito de cobre ( $\rho = 0,018 \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$ ) de  $100$  m de longitud y  $1,8 \text{ mm}^2$  de sección están intercalados un condensador de  $100 \mu\text{F}$  y una bobina de  $0,01$  H de autoinducción. 1) ¿Podrán producirse corrientes oscilantes? 2) En caso afirmativo, ¿cuál es su frecuencia?

47. Se desea producir ondas electromagnéticas de  $1$  km de longitud de onda en el vacío. Se dispone de un circuito de  $10^{-3}$  H de autoinducción; calcular la capacidad que se debe intercalar en el circuito oscilante.

48. Calcular la capacidad que se tiene que intercalar en el circuito oscilante de un receptor de radio que posee una autoinducción de  $10^{-4}$  H, cuando se utiliza para sintonizar una emisora de onda corta que emite con una longitud de onda de  $10$  m.

49. Un condensador de  $2 \mu\text{F}$  se carga a una tensión de  $220$  V, se desconecta de la fuente de alimentación y se conectan sus armaduras a una bobina de resistencia despreciable y de  $5 \times 10^{-3}$  H. Calcular la intensidad de la corriente máxima que circula por la bobina.

50. Un condensador de  $2 \mu\text{F}$ , cargado con  $\sqrt{2} \times 10^{-3}$  C, se conecta a una autoinducción de resistencia despreciable y  $10^{-2}$  H. Calcular: 1) La frecuencia de la descarga oscilante. 2) La carga del condensador cuando la energía en el condensador y en la autoinducción son iguales. 3) Tiempo que se necesita para que ocurra esta última condición.

51. Un condensador de  $4 \times 10^{-2} \mu\text{F}$  se carga a una tensión de  $500$  V, se desconecta de la fuente de alimentación y se une a una bobina de  $0,1$  H y  $1000 \Omega$  de resistencia. Calcular: 1) La frecuencia de la oscilación del circuito. 2) La máxima intensidad de corriente que lo recorre. 3) Tiempo que tarda el condensador en reducir su carga a la tercera parte de su valor inicial.

### D) CORRIENTES ALTERNAS

52. En un circuito de corriente alterna hay intercalado un condensador de  $10 \mu\text{F}$  de capacidad. Calcular la capacitancia del condensador. Considerando una resistencia de  $50 \Omega$ , ¿cuál será la impedancia del circuito? La frecuencia de la corriente alterna es de  $100$  Hz.

53. Calcular la reactancia inductiva de una bobina de  $2 \times 10^{-3}$  H de autoinducción si la corriente alterna que la recorre tiene un período de  $1/50$  de segundo. ¿Cuál será la impedancia de la bobina si su resistencia es de  $5 \Omega$ ? Si la bobina está intercalada en un circuito de resistencia  $10 \Omega$ , ¿cuál será la impedancia del circuito?

54. Un condensador de  $20 \mu\text{F}$  de capacidad y una bobina de  $0,02$  H de autoinducción están colocados en serie en un circuito de resistencia total despreciable. La frecuencia de la corriente alterna que recorre el circuito es  $50$  Hz. Calcular la impedancia del circuito.

55. Calcular la impedancia de un circuito de  $2 \Omega$  de resistencia en el que hay colocados en serie una bobina de  $0,02$  H de autoinducción y un condensador de  $20 \mu\text{F}$  de capacidad, cuando apliquemos una tensión alterna de  $50$  Hz.

56. En un circuito de corriente alterna que tiene una resistencia de  $22 \Omega$  un voltímetro marca  $220$  V. Siendo su frecuencia de  $100$  Hz, determinar: 1) El valor máximo que alcanza el potencial en un ciclo. 2) La ecuación del potencial. 3) Lo que marca un amperímetro de corriente alterna.

57. Un circuito de corriente alterna de  $120$  V y  $100$  Hz consta de una autoinducción pura de  $1$  H. Calcular: 1) La intensidad de la corriente que la recorre. 2) La potencia perdida en él.

58. 1) Dibujar el diagrama vectorial de la corriente alterna que circula en un circuito, considerando únicamente la influencia de la resistencia y la autoinducción. 2) ¿La intensidad está adelantada o retrasada en fase con la FEM? 3) ¿Al disminuir la resistencia el ángulo de desfase disminuye o aumenta? 4) ¿Cuánto valdría tal ángulo si la resistencia fuese despreciable frente a  $L\omega$ ? 5) Determinar los valores de la impedancia, la intensidad máxima e instantánea en el caso límite (apartado 4).

59. 1) Dibujar el diagrama vectorial de la corriente alterna que circula por un circuito, considerando únicamente la influencia de la resistencia y la capacidad. ¿La intensidad está adelantada o retrasada en fase con la FEM? Determinar la impedancia, el ángulo de desfase y la intensidad máxima. 2) Vamos disminuyendo la resistencia. ¿El ángulo de desfase disminuye o aumenta? ¿Cuánto valdría tal ángulo al anularse la resistencia? Determinar la impedancia y la intensidad máxima e instantánea en este caso límite.

60. En el circuito completo RLC de las corrientes alternas disminuimos las resistencias. Observar en el diagrama vectorial las variaciones del ángulo de desfase y determinar su valor cuando  $R = 0$  y  $L\omega \geq 1/C\omega$ . Calcular para estos casos el valor de la impedancia y de la intensidad máxima e instantánea.

61. Se llaman FEM media e intensidad media al valor medio de la FEM o intensidad de la corriente alterna en un semiperíodo, en el que la corriente circula en todos sus instantes en el mismo sentido. Calcular sus valores: 1) En función de los valores máximos de tales magnitudes. 2) En función de los valores eficaces.

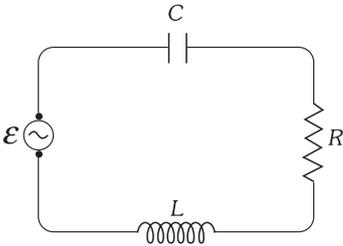
62. En un circuito de  $25 \Omega$  de resistencia hay instaladas capacidades por valor de  $2 \times 10^4 \mu\text{F}$ ; en serie con ellas se instala una bobina de  $10 \Omega$  de resistencia y  $0,02$  H de autoinducción. Aplicamos a los extremos del circuito una tensión alterna cuyo valor eficaz es de  $100$  V y de frecuencia  $100$  Hz. Calcular: 1) La impedancia del circuito y de la bobina. 2) La intensidad eficaz y máxima. 3) La tensión eficaz en los bornes de la bobina. 4) El factor de potencia. 5) Las intensidades eficaces, activa y reactiva. 6) La potencia teórica, activa y reactiva. 7) Dibujar el diagrama vectorial.

63. En un circuito de corriente alterna, de  $50$  Hz y  $22,5 \Omega$  de resistencia, los aparatos registradores señalan  $150$  V y  $5$  A como tensión e intensidad eficaces. Calcular: 1) El factor de potencia. 2) La potencia activa. 3) La potencia reactiva. 4) La potencia teórica. 5) La intensidad instantánea activa. 6) La intensidad instantánea reactiva. 7) La impedancia. 8) La reactancia. 9) Supuesta anulada la reactancia, calcular la intensidad en el fenómeno de resonancia.

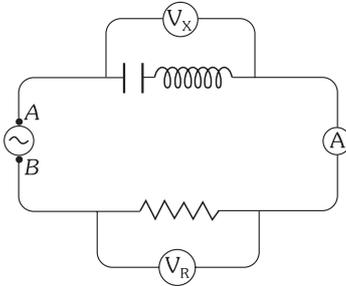
64. Un solenoide de  $1$  m de longitud, de  $50 \Omega$  de resistencia,  $10$  espiras/cm y  $10 \text{ cm}^2$  de sección tiene en su interior un núcleo de hierro ( $\mu' = 2000$ ) y es recorrido por una corriente alterna de  $50$  Hz. Calcular: 1) La autoinducción. 2) Su reactancia. 3) Si impedancia. 4) El desfase entre la tensión y la intensidad. 5) La intensidad de la corriente para

una tensión de 2000 V. 6) El factor de potencia. 7) La potencia de la corriente.

65. Los aparatos registradores nos indican para un circuito de alterna:  $I_e = 10$  A,  $V_e = 500$  V,  $P_A = 3$  kW, la frecuencia es de 50 Hz y la intensidad está retrasada respecto al voltaje. Determinar el factor de potencia y la capacidad del condensador en serie, capaz de elevarlo hasta 0,8. ¿Qué potencia tomará el circuito de la red, una vez hecha tal modificación?



Problema XXII-67.



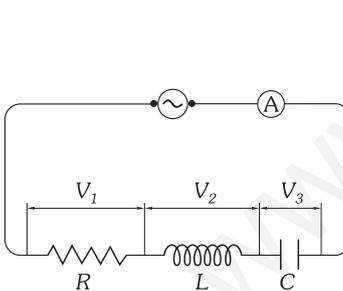
Problema XXII-68.

66. Demostrar que la impedancia equivalente a otras en serie es la suma geométrica de las impedancias asociadas. Hacer una representación gráfica.

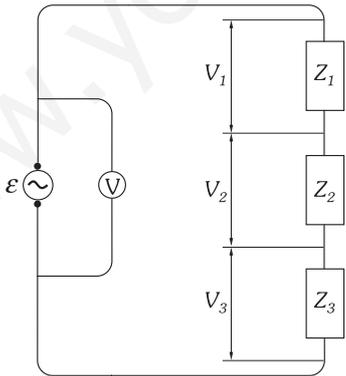
67. En el circuito RLC de la figura,  $L = 0,5$  H, la tensión aplicada es  $V = 300 \cos 500t$  y la intensidad  $I = 1,5 \cos (500t - \pi/6)$ , ambas escritas en el SI. Calcular: 1) La resistencia. 2) La capacidad del condensador. 3) La frecuencia que debería tener la corriente para que el circuito estuviera en resonancia.

68. Los voltímetros de la figura nos indican:  $V_R = 80$  V y  $V_X = 60$  V. Si el amperímetro marca 5 A, calcular: 1) La impedancia total del circuito y el ángulo de desfase. 2) La tensión eficaz  $V_{AB}$ . 3) La potencia reactiva del circuito.

69. En el circuito de la figura  $R = 40 \Omega$ ,  $L = 1/\pi$  H,  $C = 1/7\pi$  mF y la frecuencia  $\nu = 50$  Hz; el amperímetro indica una intensidad eficaz de 10 A. Calcular: 1) Las impedancias complejas de cada uno de los elementos del circuito. 2) La impedancia compleja total a que equivale todo el circuito, ángulo de desfase y diagrama vectorial de impedancias. 3) Expresión fasorial de la intensidad. 4) La diferencia de potencial entre los bornes del condensador, de la autoinducción, de la resistencia y del alternador; indicar en todos los casos los valores eficaces y dibujar el diagrama correspondiente. 5) Potencia del circuito.



Problema XXII-69.



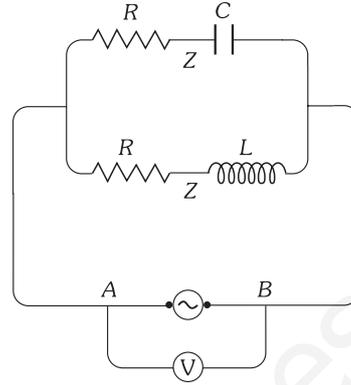
Problema XXII-70.

70. El circuito de la figura,  $[Z_1] = 20 + 30i \Omega$ ,  $[Z_2] = 10 - 20i \Omega$ ,  $[Z_3] = 20 + 20i \Omega$ , y la frecuencia  $\nu = 50/\pi$  Hz. Un voltímetro colocado entre los extremos de  $[Z_2]$  nos marca un voltaje eficaz de 224 V. Calcular: 1) La impedancia equivalente y el ángulo de desfase. 2) Si en la línea  $V = V_e \cos \omega t$ . ¿Qué ángulo  $\varphi_2$  está desfasado  $V_2$  con respecto a  $V$ ? ¿Qué valor toma  $V_2$ ? 3) Valor de  $I$  en el circuito. 4) Valor de  $V_1$ ,  $V_3$  y  $V$ . 5) Potencia del circuito.

71. Dibujar el triángulo de potencias para un circuito con una tensión  $\mathcal{E} = 300 \cos (\omega t + \pi/12)$  V y cuya intensidad es  $I = 1,4 \cos (\omega t - \pi/4)$  A, y ambos en función de sus magnitudes máximas. Calcular el factor de potencia.

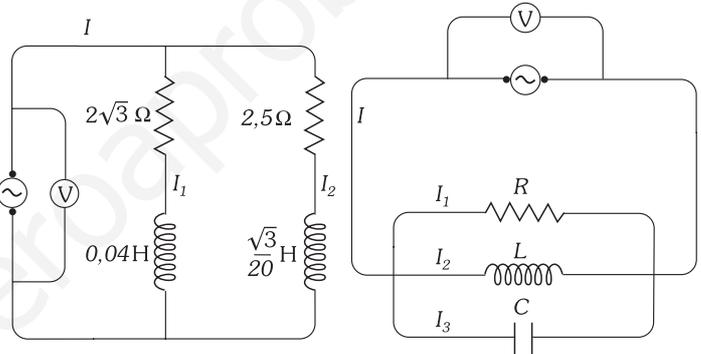
72. En el circuito de la figura las impedancias derivadas son iguales (Z), así como sus resistencias (R). El voltímetro nos indica el potencial

eficaz  $V_{AB}$  (V). Determinar los valores de las intensidades en las derivaciones y en el circuito general en función de Z, R y V. Demostrar que el valor de la impedancia equivalente a las dos derivaciones es  $Z_{eq} = Z^2/2R$ .

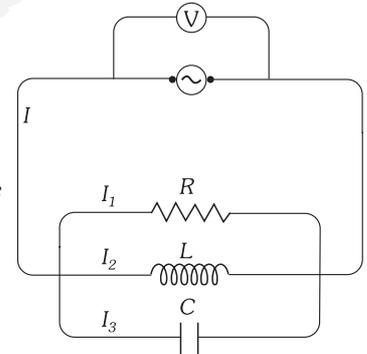


Problema XXII-72.

73. Dado el circuito en la figura, en el que  $V = 20 \sqrt{2} \cos (50t + \pi/3)$  V, determinar: 1) Intensidades que circulan por cada rama en paralelo. 2) Factores de potencia en cada rama.



Problema XXII-73.



Problema XXII-74.

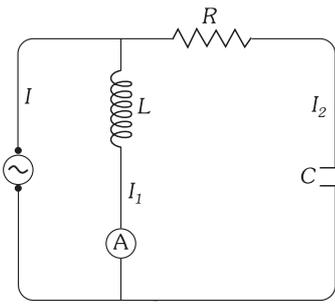
74. En el circuito de la figura el potencial eficaz en bornes del alternador es 200 V,  $R = 25 \Omega$ ,  $L\omega = 50 \Omega$ ,  $1/C\omega = 20 \Omega$  y  $\nu = 50$  Hz. Determinar: 1) Las expresiones complejas de las admitancias de cada una de las partes del circuito. 2) La intensidad en cada una. 3) La impedancia equivalente. 4) El ángulo de desfase entre el potencial y la intensidad en la línea. 5) La intensidad en la línea. 6) La potencia del circuito. 7) Dibujar los diagramas vectoriales correspondientes.

75. En el circuito de la figura  $I_1 = 5 \cos 10^3 t$ . (Los 5 A son marcados por el amperímetro.) Si  $R = 50 \Omega$ ,  $C = 4 \mu\text{F}$  y  $L = 0,1$  H, determinarse: 1) Diferencia de potencial en bornes del alternador. 2) La intensidad en la rama CR. 3) Las diferencias de potencial existentes en bornes de la resistencia y del condensador.

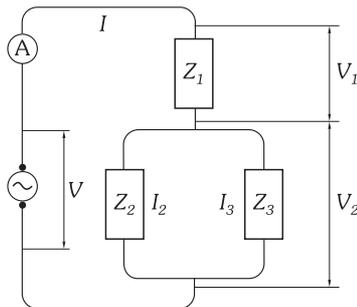
76. En el circuito de la figura el amperímetro marca 10 A eficaces y  $[Z_1] = 2 + 3i \Omega$ ,  $[Z_2] = 1 - i \Omega$  y  $[Z_3] = 3 + 2i \Omega$ , el alternador funciona a  $n = 200/\pi$  Hz. Calcular: 1) La impedancia «equivalente» del circuito y el ángulo de desfase. 2) Las expresiones de la intensidad y del potencial instantáneos en el alternador. 3) La tensión en bornes de cada impedancia. 4) La intensidad en cada una de las dos derivaciones. 5) La potencia del circuito. 6) Dibujar el diagrama vectorial de intensidades.

77. En el circuito de la figura la tensión eficaz en bornes del alternador es 206 V y  $\omega = 560$  rad/s, si  $[Z_1] = 1,5i \Omega$ ,  $[Z_2] = -2i \Omega$  y  $[Z_3] = 2 + 2i \Omega$ . Calcular: 1) La impedancia equivalente del circuito y ángulo de desfase. 2) Las expresiones de  $I$  y  $V$  en la línea. 3) La tensión en bornes de cada impedancia. 4) La intensidad en cada una de las dos derivaciones.

78. En el circuito de la figura el generador de corriente alterna tiene una FEM de 100 V eficaces y una frecuencia de 50 Hz, y su impedancia es despreciable. Determinarse: 1) La impedancia equivalente del sistema. 2) La intensidad que circula por el circuito general. 3) Las expresiones de  $V_{AB}$ ,  $V_{BC}$  y  $V_{CD}$ . 4) Las intensidades que circulan por cada derivación.

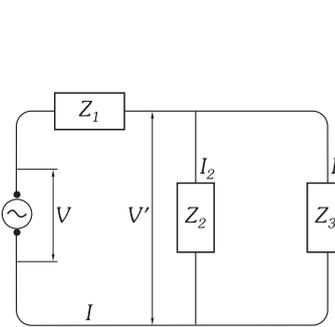


Problema XXII-75.

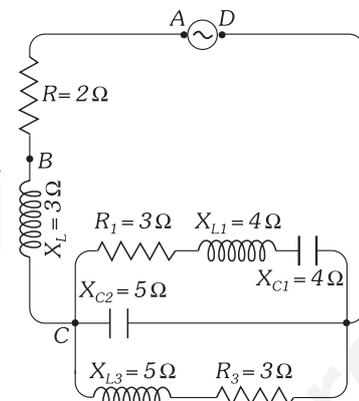


Problema XXII-76.

79. El potencial proporcionado por el alternador de la figura viene dado por:  $V_{AB} = 220 \cos 200 t$  expresado en el SI y en función de su valor eficaz. Determinar: 1) La impedancia equivalente. 2) Las expresiones de las intensidades que circulan por cada una de las impedancias representadas en la figura.

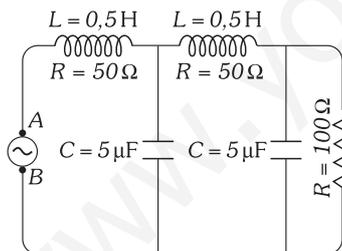


Problema XXII-77.



Problema XXII-78.

80. Determinar el intervalo de valores en el que está contenida la capacidad del condensador variable de un receptor de radio, cuyo circuito en serie LRC tiene una autoinducción de  $1,0 \mu\text{F}$  y sintoniza frecuencias entre  $500$  y  $1\ 600$  kHz.



Problema XXII-79.

81. Un generador de corriente alterna de FEM máxima  $200$  V y frecuencia variable se conecta en serie con una resistencia de  $30 \Omega$ , una autoinducción de  $4$  H y un condensador de  $1 \mu\text{F}$ . Si la frecuencia angu-

lar es de  $400$  rad/s, determinar: 1) La fase. 2) La intensidad de la corriente en cualquier instante. 3) La frecuencia en la resonancia. 4) El factor de calidad del circuito. 5) La «anchura» de la resonancia.

82. 1) Demostrar que la ecuación que corresponde al valor máximo de la intensidad en un circuito LRC de corriente alterna puede escribirse de la forma:

$$I_0 = \frac{\omega \mathcal{E}_0}{\sqrt{\omega^2 R^2 + L^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2}}$$

en la que  $\omega_0$  es la frecuencia angular del circuito en resonancia. 2) Demostrar que la ecuación que corresponde al valor de la tangente de la fase se puede escribir de la forma:

$$\text{tg } \varphi = \frac{Q_0 (\omega^2 - \omega_0^2)}{\omega \omega_0}$$

en la que  $Q_0$  es el factor de calidad del circuito.

83. Un circuito LCR está conectado a un generador de corriente alterna que le proporciona una  $\mathcal{E}_0 = 30$  V. Para una determinada frecuencia  $X_L = 4 \Omega$  y  $X_C = 16 \Omega$ . La resistencia total del circuito vale  $10 \Omega$  y la frecuencia de resonancia es  $10^4$  rad/s. Calcular: 1) La autoinducción y la capacidad del circuito. 2) El factor de calidad. 3) La intensidad máxima para la frecuencia indicada y en la resonancia.

84. Suponiendo que en un alternador trifásico cada uno de los circuitos tuviese las características calculadas en los 8 primeros apartados del problema XII-63: 1) Determinar la potencia del alternador. 2) Calcular la potencia en la resonancia.

### E) TRANSFORMADORES

85. Plantear los transformadores necesarios para conducir la energía producida en una central ( $220$  V) por líneas de alta tensión ( $300\ 000$  V) y luego reducir tal tensión a  $120$  V para su utilización.

86. Un transformador reductor, que funciona con  $88$  kV y  $2$  A, proporciona energía eléctrica a un voltaje de  $220$  V. Calcular: 1) La relación entre las espiras del primario y el secundario. 2) La corriente que circula por la línea de salida.

87. Un transformador elevador maneja en el primario  $220$  V y produce en el secundario  $2$  A. Si la razón entre el número de vueltas del primario y el secundario es  $10^{-2}$ , calcular: 1) El voltaje del secundario. 2) La intensidad en el primario. 3) La potencia generada.

88. Una casa de campo precisa de  $18$  kW y toma la corriente de una red de alta tensión a  $15$  kV. Los aparatos instalados en la casa funcionan a  $220$  V. El transformador que nos reduce tal tensión tiene un rendimiento del  $90\%$  y su primario precisa, por lo menos, de una espira por cada  $0,5$  mA. Calcular: 1) Intensidad en el primario y en el secundario. 2) El número de espiras que deben tener las dos bobinas del transformador.

89. El rendimiento de un transformador elevador es del  $90\%$  y la razón entre el número de vueltas del primario y secundario es  $1/25$ . Si la tensión alterna del primario es de  $110$  V suministrando una corriente de  $2$  A, calcular: 1) La corriente en el primario. 2) El voltaje en el secundario.

90. Un generador produce una intensidad eficaz de  $10$  A a  $400$  V también eficaces. Para su transporte se eleva a  $5\ 000$  V mediante un transformador elevador ideal; la línea de conducción tiene una resistencia de  $20 \Omega$ . Calcular: 1) El porcentaje de potencia que se pierde en el proceso de transporte. 2) El porcentaje de potencia que se perdería en la línea de conducción si no se transformara la corriente

# CAPÍTULO XXIII

## ECUACIONES DE MAXWELL. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

### A) ECUACIONES DE MAXWELL

#### XXIII – 1. Generalización de la ley de Ampère; corriente de desplazamiento: Cuarta ecuación de Maxwell

Según vimos en el párrafo XXI-39, todo campo magnético se puede interpretar como si estuviera producido por un sistema de corrientes tales que:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (\text{LEY DE AMPÈRE}) \quad (1)$$

siendo  $\mathbf{J}$  la densidad de tales corrientes. Si tenemos en cuenta la expresión vectorial:  $\text{div rot } \mathbf{V} = 0$  (La divergencia del rotacional de un vector siempre es igual a cero), al aplicarla a la ecuación (1) nos queda:

$$\text{div rot } \mathbf{H} = \text{div } \mathbf{J} = 0 \quad (2)$$

lo que nos demuestra que la ecuación (1) no es general para el campo magnético puesto que (2) sólo la cumplen las corrientes estacionarias, es decir aquellas en las que permanece constante con el tiempo la carga eléctrica en el interior de una superficie cerrada; pero es evidente que por ejemplo, en el circuito RC con dieléctrico entre sus armaduras y sin él (párrafos XX-25 y 26, y XXI-30), en la descarga oscilante de un condensador (párrafo XXII-13) deja de cumplirse, al igual que en el caso simple del campo magnético creado por una carga eléctrica en movimiento, puesto que en los puntos del espacio abandonados por la carga  $\partial\rho/\partial t < 0$ , mientras que en aquellos a los que se dirige  $\partial\rho/\partial t > 0$ . En estos casos y en otros muchos se verifica la ecuación de continuidad obtenida en el párrafo XX-3:

$$\text{div } \mathbf{J} = - \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

y como la condición (2) supone la constancia de  $\rho$  pierde su generalidad.

Maxwell resolvió esta dificultad, reemplazando al vector  $\mathbf{J}$  por otro  $\mathbf{J}'$  para el cual se verifique siempre:  $\text{div } \mathbf{J}' = 0$ , y que para el caso de corrientes estacionarias coincida con  $\mathbf{J}$ . Si derivamos respecto del tiempo la que llamamos Primera Ecuación de Maxwell, que se obtuvo en el párrafo XIX-25:

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \quad \Rightarrow \quad \text{div } \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

que sustituida en la ecuación de continuidad:  $\text{div } \mathbf{J} = - \text{div } \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \text{div } \left[ \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \right] = 0$

y el valor del vector buscado será:  $\mathbf{J}' = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$

sustituyendo el vector  $\mathbf{J}$  por  $\mathbf{J}'$  en la (1) resulta:

$$\boxed{\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}} \quad (4^{\text{a}} \text{ ECUACIÓN DE MAXWELL}) \quad (3)$$

al término  $\partial\mathbf{D}/\partial t$  se le denomina DENSIDAD DE CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO. Es claro que esta ecuación matemática no puede demostrarse (es una ley empírica), sin embargo la aplicación a cualquier situación puede ser verificada por los resultados experimentales. Como consecuencia de la ley de Faraday (3ª Ecuación de Maxwell) decíamos que «todo campo magnético variable con el tiempo genera un campo eléctrico», la (3) nos expresa el recíproco; es decir: «Todo campo eléctrico variable nos genera un campo magnético».

La aplicación del teorema de Stokes a la (3) nos determina que:

$$\boxed{\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_A \left( \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{A}}$$

expresión integral de la 4ª Ecuación de Maxwell.

## XXIII – 2. Ecuaciones generales del campo electromagnético

A medida que hemos ido avanzando en el estudio del electromagnetismo se han ido enumerando una serie de ecuaciones, generalizaciones de observaciones experimentales, a las que hemos denominado ECUACIONES DE MAXWELL y que las escribíamos:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad \Leftrightarrow \quad \oint_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q_{\text{encerrada en } A} \quad (4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (5)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} \quad (6)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_A \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{A} \quad (7)$$

la expresión analítica de cada una de éstas es:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x + \frac{\partial D_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y + \frac{\partial D_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z + \frac{\partial D_z}{\partial t} \end{cases}$$

en todas ellas hay que tener en cuenta las relaciones:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

La (4) es la ley de Gauss que a su vez se deduce de la de Coulomb, la (5) representa el hecho de la no existencia de polos magnéticos aislados, la (6) es la ley de Faraday y la (7) representa una extensión de la ley de Ampère.

Insistimos en que las ecuaciones de Maxwell son leyes empíricas y se obtienen de la generalización de un extenso trabajo experimental y se aplican a «casi» todas las situaciones; se usan como principios de la Física al igual que el de la conservación de la energía o del momento lineal.

El «casi» que hemos puesto en el párrafo anterior es debido a que tienen limitaciones y no deben ser aplicadas a las interacciones electromagnéticas entre partículas elementales (es decir: a nivel microscópico) especialmente a energías altas, que se deben tratar conforme a otras leyes diferentes que constituyen la electrodinámica cuántica. Aun así, la aplicación de las ecuaciones de Maxwell a estas situaciones, constituyen una aproximación excelente para la descripción de estas interacciones; este método se denomina electrodinámica clásica, método que empleamos para describir las ondas electromagnéticas.

## B) ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

## XXIII – 3. Ecuación de propagación de ondas electromagnéticas en el vacío y en los dieléctricos perfectos

Vamos a ver que las Ecuaciones de Maxwell nos conducen a soluciones que representan campos eléctricos y magnéticos propagándose en el espacio como ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS.

En la deducción de la llamada ecuación de onda electromagnética suponemos su propagación, en primer lugar, en un medio homogéneo e isotrópico ( $\epsilon = cte$ ;  $\mu = cte$ ) en el que no existen cargas eléctricas netas ( $\rho = 0$ ,  $\mathbf{J} = 0$ ). El medio está además en reposo respecto del sistema de referencia desde el que lo estudiamos. En estas condiciones las Ecuaciones de Maxwell toman la forma:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{E} &= 0 \\ \text{div } \mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{9}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{10}$$

Estas ecuaciones no nos proporcionan  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  directamente, para resolverlas hay en primer lugar que desacoplarlas, es decir, obtener ecuaciones separadas para ambos campos. Para ello, si tenemos en cuenta la ecuación vectorial:

$$\text{rot rot } \mathbf{V} = \text{grad div } \mathbf{V} - \nabla^2 \mathbf{V}$$

y la aplicamos a la (9), teniendo en cuenta la (8), deducimos:

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = \text{grad div } \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{E}$$

y sustituyendo el valor de  $\text{rot } \mathbf{E}$  por el dado en (10) nos conduce a:

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon \mu} \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} \right]} \tag{11}$$

un razonamiento análogo al anterior nos conduce a:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon \mu} \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} \right]} \tag{12}$$

que son las ECUACIONES DE PROPAGACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS. Una de las soluciones a las cuales dedicaremos nuestro estudio, serán las que corresponden a las ondas electromagnéticas planas y son de la forma:

$$\boxed{\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \text{ sen } k \left( \mathbf{u} \cdot \mathbf{r} \pm \frac{t}{\sqrt{\epsilon \mu}} \right)} \quad \boxed{\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \text{ sen } k \left( \mathbf{u} \cdot \mathbf{r} \pm \frac{t}{\sqrt{\epsilon \mu}} \right)}$$

#### XXIII – 4. Transporte de energía electromagnética: vector de Poynting

Vimos en los párrafos XIX-27 y XXII-11 que las energías eléctrica y magnética almacenadas en un volumen  $V$  de un medio homogéneo e isotrópico, venían dadas, respectivamente, por las cantidades:

$$\frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV \quad \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV$$

en una onda electromagnética el ser  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  funciones del tiempo, ocurrirá lo mismo con la energía; como  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  varían de cero a su valor máximo ( $\mathbf{E}_0$  y  $\mathbf{H}_0$ ) la energía electromagnética de un elemento de volumen variará de cero al valor que le corresponde con el máximo de los campos. Si consideramos la pérdida por unidad de tiempo de la energía contenida en el interior de un volumen  $V$  será:

$$\frac{dW}{dt} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dV = - \int_V \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV$$

Teniendo en cuenta la ecuación vectorial:  $\text{div} (\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2) = \mathbf{V}_2 \cdot \text{rot } \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_1 \cdot \text{rot } \mathbf{V}_2$  y las (9) y (10), entonces obtenemos:

$$\frac{dW}{dt} = - \int_V (\mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E}) dV = - \int_V \text{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV \tag{13}$$

aplicando a esta última integral el teorema de la divergencia nos queda:

$$\frac{dW}{dt} = \oint_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{A} \quad (14)$$

«A esta última integral se le denomina TÉRMINO DE RADIACIÓN y nos representa la “rapidez” (Energía por unidad de tiempo) con que la Energía Electromagnética atraviesa la superficie cerrada correspondiente al volumen considerado (volumen encerrado en A); y es consecuencia de una fuente o sumidero (generador o receptor) de ondas electromagnéticas en su interior».

Como la energía por unidad de tiempo es la potencia (P), llamando:  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$

magnitud que se le conoce como el VECTOR DE POYNTING; la (14) nos queda:  $P = \oint_A \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}$

«La variación de energía electromagnética en la unidad de tiempo (potencia) en el interior de un volumen encerrado por una superficie A, es igual al flujo del vector de Poynting a través de la superficie».

Por ejemplo, el cálculo del flujo del vector de Poynting a través de una superficie que rodee a una antena de una emisora de radio, nos mide la potencia emitida por ella.

El módulo del vector de Poynting tiene dimensiones de energía por unidad de tiempo y superficie, es decir, potencia por unidad de superficie y se medirá en W/m<sup>2</sup>, igual que la intensidad de onda, y es que, su valor promedio, coincide con el valor de la INTENSIDAD DE ONDA ELECTROMAGNÉTICA como demostraremos más adelante.

El vector de Poynting es como si comunicase energía a un sistema, y cuando «incide» sobre él la energía aumenta, pero si «sale» de él la energía del sistema disminuye; **S** nos indica, con su sentido, la dirección de propagación de la energía.

**XXIII – 5. Velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas. Índice de refracción. Características fundamentales de estas ondas**

«El campo electromagnético no se produce en el mismo instante en todos los puntos del espacio, sino que se propaga, a partir de la fuente, a una velocidad (c<sub>0</sub>) de 300 000 km/s en el vacío y c<sub>0</sub>/n (n índice de refracción) en un medio cualquiera».

En efecto: Comparando la ecuación de ondas (párrafo XVII-7) con las (11) y (12), ecuaciones de propagación de los campos eléctrico y magnético, se obtiene para velocidad de propagación de estos últimos:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

y para el vacío la velocidad de propagación será:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \approx 300\,000 \text{ km/s}$$

que coincide con la velocidad de propagación de la luz en el vacío; esta coincidencia constituye una de las principales pruebas de la naturaleza electromagnética de la luz.

En un medio dieléctrico  $\epsilon = \epsilon'\epsilon_0$ ; además se puede suponer generalmente:  $\mu = \mu_0$  y la velocidad de propagación vale:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon'\epsilon_0\mu_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon'}}$$

como  $\epsilon'$  es siempre mayor que la unidad; «la velocidad de una onda electromagnética en el vacío es siempre mayor que su velocidad en cualquier otro medio». Tomando como referencia la velocidad de propagación en el vacío se define ÍNDICE DE REFRACCIÓN de un medio con relación al vacío por:

$$n = \frac{c_0}{c} = \sqrt{\epsilon'}$$

En el fenómeno de propagación del campo electromagnético hay que considerar las siguientes características: T = período de vibración;  $\nu$  = frecuencia; c = velocidad de propagación. Podemos ligar estas magnitudes por una ecuación idéntica a la de un movimiento ondulatorio:

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu}$$

y definir una longitud de onda  $\lambda$ , como el espacio recorrido en la propagación del campo electromagnético en un período de vibración.

Llamando  $\lambda_0$  y  $c_0$  a la longitud de onda y velocidad de propagación de una onda en el vacío, y  $\lambda$  y  $c$  a las mismas magnitudes en otro medio, escribiremos:

$$c_0 = \lambda_0 \nu \quad \left| \quad \begin{aligned} c_0 &= n \lambda \\ c &= \lambda \nu \end{aligned} \right. \Rightarrow \quad \frac{c_0}{c} = n = \frac{\lambda_0}{\lambda} \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = \frac{\lambda_0}{n}}$$

con lo que existe una dependencia de la longitud de onda con el índice de refracción del medio; así por ejemplo, la longitud de onda de la luz naranja en el aire es aproximadamente igual a  $6 \times 10^{-7}$  m, mientras que en el vidrio es  $\sim 4 \times 10^{-7}$  m.

Siendo  $c_0$  un límite impuesto por la naturaleza, el índice de refracción para cualquier sustancia tendrá que ser mayor que la unidad; en los gases en condiciones normales es muy próximo a la unidad (por ejemplo: en el Helio es 1,000 036, en el Hidrógeno 1,000 132, en el Aire 1,000 293, en el Amoníaco 1,000 376, en el Metano 1,000 444, en el Cloro 1,000 773, etc.); en los líquidos y sólidos transparentes varían de 1,3 hasta 1,5 aproximadamente en el caso de líquidos y disoluciones salinas, entre  $\sim 1,5$  y 1,9 en el caso de vidrios y plásticos, y desde  $\sim 1,5$  hasta 2,8 para la mayoría de las sustancias cristalinas. El índice de refracción es característico de los elementos, compuestos y disoluciones, por lo que se utiliza como un método sensible y exacto en la determinación de la composición de ciertas sustancias.

**XXIII – 6. Propiedades de las ondas electromagnéticas planas**

«Las ondas electromagnéticas planas son transversales y su dirección de propagación es la del vector de Poynting y por tanto perpendicular al campo eléctrico y magnético, que a su vez son perpendiculares entre sí y están en fase (Fig. XXIII-1); siendo en cada instante y en cada punto las densidades de energía magnética y eléctrica iguales, y el cociente entre los módulos instantáneos del campo eléctrico (E) y el magnético (B), igual a la velocidad de la luz».

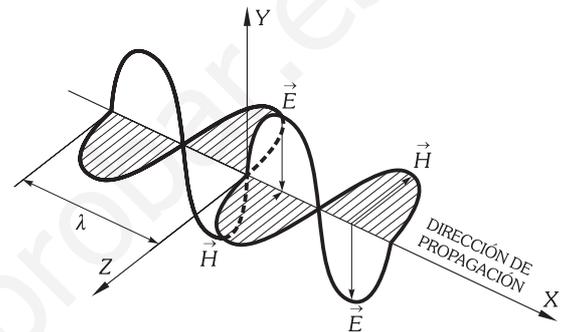


Fig. XXIII-1.- Onda electromagnética plana propagándose en un medio homogéneo e isótropo, en la dirección del eje OX, en un instante determinado.

Para demostrar este enunciado, consideremos una onda electromagnética propagándose en un medio homogéneo e isótropo ( $\epsilon = cte$ ,  $\mu = cte$ ) y en ausencia de carga neta y densidad de corriente ( $\rho = 0$ ,  $\mathbf{J} = 0$ ); para este medio las ecuaciones de Maxwell se escribirán analíticamente:

$$(15) \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad (16)$$

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} & \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} & \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} & \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{aligned} \quad (18)$$

Supongamos que la onda es plana y sinusoidal y que se propaga en la dirección del eje de las X; en estas condiciones las ecuaciones (11) y (12) se escriben:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2}$$

en las que  $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ ; y cuyas soluciones para este caso son:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \text{ sen } k(x - ct) \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \text{ sen } k(x - ct)$$

y por consiguiente: 
$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = 0$$

luego la (15) se convierte en: 
$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad (19)$$

de la (16) se obtiene: 
$$\frac{\partial H_x}{\partial x} = 0 \quad (20)$$

las (17) nos quedan:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (22)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (23)$$

por último de las (18) se obtiene:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \quad (24)$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (25)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (26)$$

consecuencia de (20) y (21) es que  $H_x$  es constante en el tiempo y en el espacio y las (19) y (24) nos dicen lo mismo para  $E_x$ ; siendo nulos los campos eléctrico y magnético antes de la llegada de la onda, seguirán siendo nulos en todo instante, con lo que:

$$(27) \quad \boxed{E_x = 0} \quad \boxed{H_x = 0} \quad (28)$$

quedando demostrado que  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  son perpendiculares a la dirección de propagación y por tanto las ondas electromagnéticas son transversales.

Las ecuaciones (22) o (26) nos permiten encontrar una relación entre  $H_y$  y  $E_z$ . En efecto, sea:

$$E_z = E_{oz} \sin k(x - ct) \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial x} = kE_{oz} \cos k(x - ct)$$

según (22) se obtiene:  $kE_{oz} \cos k(x - ct) = \mu \frac{\partial H_y}{\partial t}$

integrando:  $H_y = -\frac{1}{c\mu} E_{oz} \sin k(x - ct)$

la constante de integración no la hemos puesto ya que es nula por no existir campo antes de la llegada de la onda; y por tanto nos queda:

$$H_y = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_z \quad (29)$$

podríamos haber obtenido lo mismo a partir de (26).

De una forma análoga, de las ecuaciones (23) o (25) resulta:

$$H_z = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_y \quad (30)$$

teniendo en cuenta estas dos últimas junto con (27) y (28) se deduce:

$$\boxed{\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = E_x H_x + E_y H_y + E_z H_z = 0}$$

quedando demostrado que el campo eléctrico y el magnético son perpendiculares.

Además:  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = (E_y H_z - H_y E_z) \mathbf{i} = \left( \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_y^2 + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_z^2 \right) \mathbf{i} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^2 \mathbf{i}$

lo que nos demuestra que el vector de Poynting tiene la dirección del eje de propagación; resultado que cabía esperar dado el significado físico de éste (Fig. XXIII-2).

Al elevar al cuadrado las ecuaciones (29) y (30) y sumarlas se obtiene:

$$H_y^2 + H_z^2 = \frac{\varepsilon}{\mu} (E_y^2 + E_z^2) \Rightarrow H^2 = \frac{\varepsilon}{\mu} E^2 \Rightarrow \boxed{H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E} \quad (31)$$

de la que deducimos que las ecuaciones de los campos eléctrico y magnético difieren en una constante, luego: «Los campos eléctrico y magnético están en fase, es decir que toman valores extremos y nulos al mismo tiempo».

De la (31) deducimos:  $H^2 = \frac{\varepsilon}{\mu} E^2 \Leftrightarrow \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} = \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}$

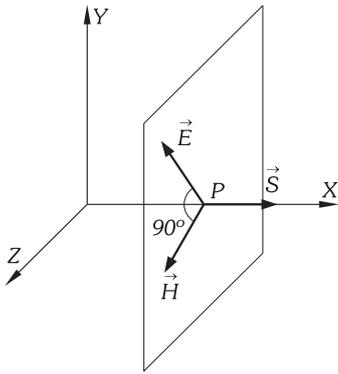
quedando demostrado que en todo instante y en cada punto, la densidad de energía magnética es igual a la densidad de energía eléctrica.

También de la (31), se deduce:  $\frac{B}{\mu} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E \Rightarrow \boxed{\frac{E}{B} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = c}$

con lo que queda demostrado: «En cualquier instante, la relación entre los módulos del campo eléctrico y la inducción magnética, de una onda electromagnética, es igual a la velocidad de la luz».

Una onda electromagnética plana sinusoidal, que se propaga en el sentido positivo del eje de las X con la condición de que el campo eléctrico tome la dirección del eje de las Y y elegido convenientemente el origen de tiempos y de los ejes se representa como en la Fig. XXIII-1.

Todas las conclusiones que hemos obtenido, para una onda electromagnética plana para el caso de propagarse en la dirección de un eje determinado, son generales, ya que la elección de los ejes XYZ es cuestión de conveniencia.



EN UN DETERMINADO INSTANTE:

$$\begin{aligned} E_x &= 0 & H_x &= 0 \\ \vec{E} \cdot \vec{H} &= 0 & \vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H} \\ \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} &= \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \\ \frac{E}{B} &= c \end{aligned}$$

Fig. XXIII-2.- El campo eléctrico y el magnético son perpendiculares, el vector del Poynting es a su vez perpendicular a ambos.

Todo lo que es este párrafo se ha obtenido puede aplicarse a porciones pequeñas de ondas electromagnéticas esféricas o cilíndricas, considerando a éstas a grandes distancias del foco emisor de ondas.

**PROBLEMAS: 1 al 7.**

**XXIII – 7. Intensidad de una onda electromagnética plana**

«INTENSIDAD de una onda electromagnética es la energía que por unidad de tiempo atraviesa la unidad de superficie perpendicular a la dirección de propagación; su valor coincide con el valor promedio del vector de Poynting (FLUJO DE ENERGÍA)».

En efecto: el valor de la energía de la onda electromagnética que llega a la superficie  $da$  perpendicular a la dirección de su propagación con velocidad  $c$  en el tiempo  $dt$ , se calculará teniendo en cuenta que es la contenida en el volumen indicado en la Fig. XXIII-3, cuyo valor es  $c dt da$ ; la energía contenida en tal volumen es el producto de la energía promedio por unidad de volumen, que llamaremos  $\langle u \rangle$ , multiplicada por dicho volumen; por lo que la intensidad de la onda será este producto dividido por  $dt$  y por  $da$ , y su valor nos queda:

$$I = c \langle u \rangle$$

Por otro lado, para el caso de la onda electromagnética, que suponemos se propaga en el vacío, representada en la Fig. XXIII-1, tendremos:

$$\mathbf{E} = E_0 \mathbf{j} \text{ sen } (kx - \omega t) \quad \mathbf{H} = H_0 \mathbf{k} \text{ sen } (kx - \omega t)$$

luego el vector de Poynting es:  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = E_0 H_0 \mathbf{i} \text{ sen}^2(kx - \omega t)$

variando su módulo con el tiempo según representamos en la Fig. XXIII-4. El valor medio en un período de  $\text{sen}^2(kx - \omega t)$  es igual a  $1/2$  (como se ha visto en corrientes alternas); por tanto, el valor medio de  $S$  será:

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} E_0 H_0 = \frac{1}{2} E_0 \frac{E_0}{\mu_0 c} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$$

y llamando VALOR EFICAZ DEL CAMPO ELÉCTRICO a:  $E_e = E_0/\sqrt{2}$  se obtiene:

$$\langle S \rangle = c \epsilon_0 E_e^2$$

Siendo el valor de la energía electromagnética por unidad de volumen:

$$u = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \left[ \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H_0^2 \right] \text{sen}^2(kx - \omega t)$$

su valor promedio será:  $\langle u \rangle = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \frac{E_0^2}{\mu_0^2 c^2} \right] = \frac{1}{4} \epsilon_0 E_0^2 \left[ 1 + \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0 c^2} \right]$

y, como  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ , se obtiene:

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 = \epsilon_0 E_e^2 = \frac{\langle S \rangle}{c} \Leftrightarrow I = \langle S \rangle = c \langle u \rangle \quad (32)$$

como queríamos demostrar. En consecuencia:

«El FLUJO DE ENERGÍA (intensidad de la onda electromagnética o valor medio del módulo del vector de Poynting) es igual al producto de la densidad volumétrica media de la energía multiplicada por la velocidad con que ésta se propaga».

**XXIII – 8. Momento lineal transportado por las ondas electromagnéticas**

Supongamos que una onda electromagnética viaja en la dirección del eje  $OX$ , con el vector campo eléctrico contenido en el plano  $XY$  y el vector inducción magnética contenido en el  $XZ$  como se indica en la Fig. XXIII-1, y que incide normalmente sobre la superficie plana de un material dieléctrico que la absorbe totalmente (no existe reflexión alguna de la onda). El principio de conservación de la energía nos exige que el material aumente su energía interna; para explicar este aumento, deduciremos, realizando el razonamiento que sigue a continuación, que tal absorción ocurre al interactuar el campo eléctrico y el magnético con los electrones ligados a los átomos o moléculas de material por las fuerzas de enlace, y que también nos conducirá a la existencia del transporte del momento lineal por la onda electromagnética.

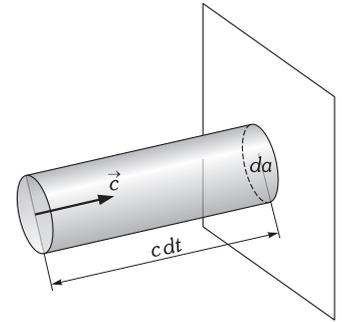


Fig. XXIII-3.- La energía que incide sobre la superficie  $da$  en un tiempo  $dt$ , es la contenida en el volumen sombreado.

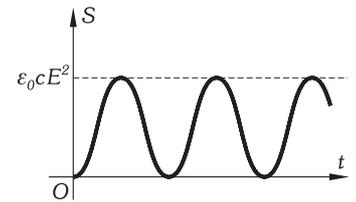


Fig. XXIII-4.- Variación del módulo del vector de Poynting para el caso de una onda electromagnética plana sinusoidal que se propaga en la dirección positiva del eje  $OX$ .

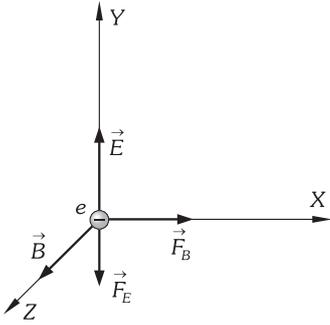


Fig. XXIII-5.— En un instante determinado, en que  $\vec{E}$  está dirigido en la dirección positiva del eje OY, y  $\vec{B}$  en la positiva del eje OZ, la onda electromagnética actúa sobre un electrón, sobre el que se ejercen las fuerzas  $\vec{F}_E$  y  $\vec{F}_B$  en las direcciones indicadas.

Al llegar la onda electromagnética, en un instante determinado, al electrón de material indicado en la Fig. XXIII-5, sobre él, y debido a  $\vec{E}$ , actuará una fuerza de módulo  $eE$  en la dirección de OY y en sentido negativo, puesto que el electrón posee carga negativa; esta fuerza aumenta su momento lineal y por tanto su velocidad en la dirección del eje OY; transcurrido medio período, la fuerza debida al campo eléctrico será igual y opuesta que en el instante que hemos considerado anteriormente, aumentando su momento lineal y su velocidad en sentido contrario al antes indicado; después de otro medio período se presenta otro cambio en la dirección ... y así sucesivamente. El resultado es, que el electrón adquiere un movimiento vibratorio armónico de la misma frecuencia que la de la onda electromagnética (el movimiento se superpondrá al que inicialmente posea el electrón). El promedio en un período de la fuerza  $F_E$  que el electrón experimenta en la dirección OY es cero, por tanto no recibe momento lineal en dicha dirección.

Sobre el electrón oscilante dentro del campo magnético que transporta la onda, y para el instante considerado en la Fig. XXIII-5, la fuerza de Lorentz actuará en la dirección positiva del eje OX; al cabo de medio período sigue actuando en la misma dirección y sentido, ocurriendo esto cualquiera que sea el tiempo transcurrido, por lo que existirá una fuerza neta en la dirección indicada, y por consiguiente, la  $F_B$  entrega momento lineal al electrón del material absorbente en la dirección en que viaja la onda. Siendo que el momento lineal se tiene que conservar, el momento lineal adquirido por el material tiene que proceder de la onda que absorbe, luego: «las ondas electromagnéticas transportan momento lineal en su dirección de propagación», y según la segunda ley de Newton ( $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ ),  $F_B$  es la velocidad con que el electrón absorbe momento lineal de la onda electromagnética. Su módulo es:  $F_B = |e\vec{v} \times \vec{B}| = evB$ , ya que la velocidad producida por  $\vec{E}$  es perpendicular a  $\vec{B}$  en cualquier instante, y teniendo en cuenta que  $B = E/c$ , obtenemos:

$$F_B = \frac{evE}{c} = \frac{vF_E}{c} \tag{33}$$

La fuerza magnética, nos da una explicación de la transferencia de momento lineal de la onda al material, pero ésta no realiza trabajo sobre el electrón del material dieléctrico, ya que se encuentra fuertemente ligado al átomo o molécula correspondiente, y se encuentra vibrando (desplazándose) en la dirección del campo eléctrico, con lo que su movimiento se realiza perpendicular a la dirección de  $F_B$ . Por tanto, el trabajo efectuado sobre el electrón lo hace la  $F_E$  a lo largo del eje OY, siendo su valor  $F_E dy$ , en el tiempo  $dt$ , la potencia desarrollada por  $F_E$  es:  $F_E dy/dt = F_E v$ ; en consecuencia: siendo  $F_E$  la única fuerza que realiza trabajo sobre los electrones que absorben la onda incidente,  $F_E v$  es la velocidad con que el electrón del correspondiente material absorbe energía de la onda electromagnética. Teniendo en cuenta la (33) enunciamos: «La velocidad con que se absorbe momento lineal de la onda ( $F_B$ ), es igual a la velocidad con que se absorbe energía de la onda ( $F_E v$ ) dividida por la velocidad con que se propaga ( $c$ )».

Llamando  $\langle \rho \rangle$  a la DENSIDAD VOLUMÉTRICA MEDIA DE MOMENTO LINEAL, cantidad de momento lineal contenido en el volumen de la Fig. XXIII-3, que en el tiempo  $dt$  es absorbido por el material, de la misma manera que hemos llamado  $\langle u \rangle$  a la energía electromagnética media contenida en dicho volumen, la (33) la podemos escribir:

$$\langle \rho \rangle = \frac{\langle u \rangle}{c} \tag{34}$$

teniendo en cuenta (32) se obtiene la relación:

$$\langle \rho \rangle = \frac{\langle S \rangle}{c^2} \tag{35}$$

La expresión (34), escrita en la forma  $\langle u \rangle = \langle \rho \rangle c$ , es idéntica a la prevista por la relatividad especial  $E = pc$  (capítulo XXVII) para una partícula de masa en reposo nula, que como se verá sólo puede existir moviéndose a la velocidad de la luz. No debe extrañar el hecho de que las ecuaciones de Maxwell resulten concordantes con la teoría de la relatividad especial, formulada medio siglo más tarde, ya que fue precisamente su invarianza en un cambio de sistema de referencia lo que indujo a Einstein a formular esa teoría.

**XXIII – 9. Presión de radiación**

«A la fuerza ejercida por la onda electromagnética que incide sobre la unidad de área de una superficie, la llamamos PRESIÓN DE RADIACIÓN  $p$ ».

Consideremos el caso de la Fig. XXIII-3 y en el que la onda es absorbida totalmente por el material dieléctrico; la segunda ley de Newton nos indica que la presión de radiación es igual al momento lineal promedio absorbido por la unidad de superficie en la unidad de tiempo; un razonamiento análogo al realizado al principio del párrafo XXIII-7 para la obtención del valor de la intensidad de la onda, nos conduce a que:

$$\langle p \rangle = c \langle \rho \rangle$$

y teniendo en cuenta la (35), obtenemos:

$$\langle \rho \rangle = \frac{\langle S \rangle}{c}$$

que comparada con (32), conduce a:  $\langle p \rangle = \langle u \rangle$ ; es decir, la presión que ejerce la onda electromagnética es, en este caso, numéricamente igual a su densidad de energía. Se pueden aplicar estos resultados a un cuerpo negro perfecto, en los demás casos, se tendrá que conocer el factor de absorción (poder absorbente) del material en estudio (ver capítulo XXVI). Si la superficie sobre la que incide normalmente la onda electromagnética es un reflector perfecto, el momento de la onda se refleja en sentido contrario (el fenómeno es semejante al caso de una partícula que choca elásticamente contra una pared), y, por consiguiente, el momento transmitido al cuerpo es el doble que en el caso de absorción total, al igual que la presión de radiación, que toma el valor:  $\langle p \rangle = 2 \langle S \rangle / c$ .

Para una incidencia oblicua con un ángulo de incidencia  $i$ , la densidad de momento lineal transferida es:  $\langle u \rangle \cos i / c$  y la presión de radiación será:  $\langle p \rangle = 2 \langle S \rangle \cos i / c$ , para un reflector perfecto.

La presión de radiación por la luz solar es muy pequeña (del orden de  $5 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2$ ), siendo muy difícil detectarla; fue P. N. Lebedev, el que en 1900 logró medirla obteniendo resultados satisfactorios, para lo que empleó el aparato esquematizado en la fig. XXIII-6, que consiste en una campana en la que se hace un alto vacío, y en la que se introducen dos discos de igual superficie, uno negro y el otro espejado, suspendidos de un hilo de torsión muy fino (balanza de torsión), sobre los que se hace incidir una luz; la presión ejercida por ésta sobre la superficie espejada es doble que sobre la negra, por lo que se realizará un giro; medido el ángulo correspondiente, se calcula la presión de radiación. Una de las grandes dificultades que tuvo que salvar Lebedev en esta experiencia se debía al hecho de que el disco absorbente se calentaba más que el espejado, y lo mismo ocurría con el gas residual próximo a cada uno de ellos, con lo que la presión cinética del gas, mayor que el disco negro, enmascaraba el efecto de la presión de la radiación.

La experiencia de Lebedev confirmó la idea de campo electromagnético como realidad física con entidad propia, un ente que posee energía y momento lineal, y que ejerce presión cuando incide sobre un cuerpo.

**PROBLEMAS: 8 al 15.**

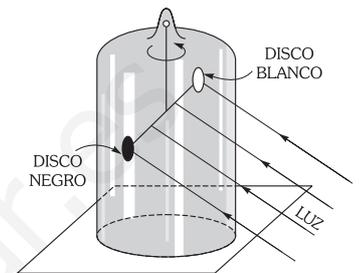


Fig. XXIII-6.- Montaje para la medida de la presión de radiación dentro de alto vacío.

**XXIII - 10. Propagación de ondas electromagnéticas planas en medios conductores**

Consideremos el caso de un medio lineal, homogéneo e isotrópico, es decir, que verifica  $\epsilon = cte$ ,  $\mu = cte$ , conductividad  $\sigma = cte$ , y que está en reposo respecto al sistema de referencia desde el que lo estudiamos. La ecuación (7) se escribe en este caso:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{36}$$

En este medio se propaga según el eje OX una onda plana cuyos vectores eléctrico y magnético expresaremos, con notación compleja, de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} && \text{paralelo a OY} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 e^{i(kx - \omega t)} && \text{paralelo a OZ} \end{aligned} \tag{37}$$

sustituyendo estas expresiones en (36):

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} \mathbf{j} = -ikH \mathbf{j} \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= -i\omega \mathbf{E} \mathbf{j} \end{aligned} \right\} \Rightarrow -ikH = \sigma E - i\omega \epsilon E \Rightarrow kH = \omega \epsilon \left( 1 - \frac{\sigma}{i\omega \epsilon} \right) E$$

La relación  $E/H$  entre ambos campos es el producto de la permeabilidad por la velocidad de fase de la onda, en efecto:

$$\frac{E}{B} = c \Rightarrow \frac{E}{H} = \mu c \Rightarrow \frac{E}{H} = \mu \frac{\omega}{k}$$

por tanto:  $k = \omega \epsilon \left( 1 - \frac{\sigma}{i\omega \epsilon} \right) \mu \frac{\omega}{k} \Rightarrow \boxed{k^2 = \epsilon \mu \omega^2 \left( 1 - \frac{\sigma}{i\omega \epsilon} \right)}$  (38)

relación que se denomina ECUACIÓN DE DISPERSIÓN. Si  $k/\omega$  es función de  $\omega$ , el medio se denomina DISPERSIVO (con el mismo significado que el visto en ondas elásticas) ya que el índice de refracción  $n = ck/\omega$  varía con la frecuencia de la onda, y por tanto ondas de distinta frecuencia se propagan con distinta velocidad (fenómeno de dispersión).

La expresión anterior pone de manifiesto que los materiales conductores son dispersivos para las ondas electromagnéticas, y en ellos la constante de propagación es una magnitud compleja. En

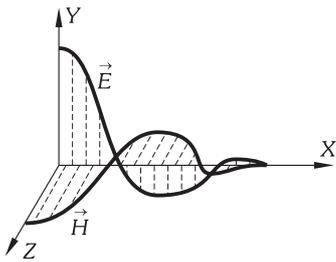


Fig. XXIII-7.- En un conductor, la OEM se amortigua exponencialmente, y si es  $k_i \neq 0$  los campos  $E$  y  $H$  están desfasados.

(38),  $k^2$  debe entenderse como el cuadrado de un número complejo, y no como el cuadrado de su módulo.

Si separamos  $k$  en sus partes real e imaginaria tendremos una expresión del tipo:

$$k = k_r + ik_i$$

y el vector campo eléctrico tendrá la forma:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i[(k_r + ik_i)x - \omega t]} = \mathbf{E}_0 e^{-k_i x} e^{i(k_r x - \omega t)}$

(con una amplitud análoga para el campo magnético), que es la expresión de una onda que se propaga amortiguándose exponencialmente, tanto más rápidamente cuanto mayor es  $k_i$  (fig. XXIII-7); por tanto, la parte imaginaria de  $k$  describe la absorción de la onda en el medio. El inverso de  $k_i$  es la distancia en la que la amplitud de la onda disminuye en un factor  $e$ , se denomina PROFUNDIDAD DE PENETRACIÓN  $\delta = 1/k_i$ .

Su expresión la podemos obtener fácilmente en el caso de que la densidad de corriente sea mucho mayor que la de desplazamiento, lo que ocurre generalmente en los metales hasta frecuencias ópticas. En este caso, al sustituir (37) en (36) resulta:

$$-ikH = \sigma E \Rightarrow k = i \frac{\sigma E}{H} = i \frac{\sigma \mu \omega}{k} \Rightarrow k^2 = i \sigma \mu \omega$$

Separamos las partes real e imaginaria de la forma siguiente:

$$(k_r + ik_i)^2 = (k_r^2 - k_i^2) + 2ik_r k_i \Rightarrow \begin{cases} k_r^2 - k_i^2 = 0 \\ 2k_r k_i = \sigma \mu \omega \end{cases} \Rightarrow k_r = k_i = \sqrt{\frac{\sigma \mu \omega}{2}}$$

La profundidad de penetración se expresa, en este caso:

$$\delta = \frac{1}{k_i} = \sqrt{\frac{2}{\sigma \mu \omega}}$$

y disminuye conforme aumentan la conductividad o la permeabilidad del medio, o la frecuencia de la onda. Por ejemplo, para el cobre ( $\sigma = 6 \times 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ ) y para frecuencias de  $10^{14}$  Hz (infrarrojo), con  $\mu = \mu_0$  se obtiene  $\delta = 6,5 \times 10^{-9} \text{m} = 65 \text{ \AA}$ . La onda penetra en el cobre solamente unas pocas capas de átomos en las que es absorbida por el metal, que disipa la energía electromagnética, por medio de corrientes de conducción, en forma de calor. Para una frecuencia de 60 Hz la profundidad de penetración es de aproximadamente 8 mm.

Cuando en un conductor cilíndrico se establece una corriente alterna, en su interior la densidad de corriente tiene la misma distribución que el campo eléctrico, con lo que su amplitud decrece exponencialmente a partir de la superficie del conductor. Este efecto, conocido como EFECTO DE PIEL, es el responsable de que las corrientes de alta frecuencia no se establezcan en todo el volumen de un conductor, sino que se localicen en una delgada película superficial, aumentando con ello la resistencia eléctrica del material conforme aumenta la frecuencia.

### XXIII - 11. Ecuación de dispersión en función de la densidad de electrones

Vamos a desarrollar la expresión (38) de la ecuación de dispersión en función de las características del movimiento de los electrones en el material y de su número por unidad de volumen. Para ello suponemos el material constituido por  $N$  iones positivos por unidad de volumen, fijos, de carga  $+e$ , y  $N$  electrones, de carga  $-e$  y masa  $m$ , capaces de desplazarse de su posición de equilibrio estable y atraídos hacia ella por una fuerza recuperadora  $\mathbf{F}_1 = -m\omega_0^2 \mathbf{r}$ . Consideramos que, en su movimiento, los electrones experimentan una fuerza resistiva proporcional a la velocidad  $\mathbf{F}_2 = -R\mathbf{v}$ . El medio es lineal, homogéneo e isótropo, y supondremos  $\epsilon = \epsilon_0$  y  $\mu = \mu_0$ .

Cuando en este medio se propaga una onda electromagnética caracterizada por las expresiones (37), la ecuación de movimiento de un electrón en la dirección del campo eléctrico es:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -e\mathbf{E} - R\mathbf{v} - m\omega_0^2 \mathbf{r}$$

que podemos poner en la forma:  $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{R}{m} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{r} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}$  (39)

Esta expresión es idéntica a la (9) del párrafo VII-29 (vibraciones forzadas), su solución es, por tanto:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}$ , escrita en forma exponencial compleja. Sustituyendo dicha solución en (39) tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= -i\omega \mathbf{r} \\ \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= -\omega^2 \mathbf{r} \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\omega^2 \mathbf{r} - i\omega \frac{R}{m} \mathbf{r} + \omega_0^2 \mathbf{r} = -\frac{e}{m} \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{r} = \frac{e}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega R/m} \mathbf{E}$$

La velocidad del electrón es:  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = -i\omega\mathbf{r}$ , y por tanto, la densidad de corriente que es  $\mathbf{J} = -Ne\mathbf{v}$  (párrafo XX-3), se expresará:

$$\mathbf{J} = iNe\omega\mathbf{r} = i \frac{Ne^2}{m} \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega R/m} \mathbf{E}$$

identificando esta expresión con  $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ , despejando la conductividad y sustituyéndola en (38), obtenemos una forma más general de la ECUACIÓN DE DISPERSIÓN:

$$k^2 = \varepsilon_0\mu_0\omega^2 \left[ 1 - \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + iR\omega/m} \right]$$

o bien, haciendo  $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$  (con  $c$  = velocidad de la luz en el vacío):

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[ 1 - \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega R/m} \right]$$

donde, de nuevo,  $k^2$  es el cuadrado del número complejo  $k$ . Si escribimos:  $k = k_r + ik_i$ , tendremos  $k^2 = k_r^2 - k_i^2 + 2ik_r k_i$ , con lo que las expresiones:

$$k_r^2 - k_i^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[ 1 - \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + R^2\omega^2/m^2} \right] \quad 2k_r k_i = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{R\omega/m}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + R^2\omega^2/m^2}$$

nos permiten obtener la longitud de onda en el medio  $\lambda = 2\pi/k_r$ , y la profundidad de penetración  $\delta = 1/k_i$ . Los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  no están en fase, sino que  $\mathbf{H}$  se atrasa en  $\varphi$  radianes, donde  $\varphi = \arctg k_i/k_r$ .

Cuando el material estudiado en esta cuestión sea un metal podremos considerar a los electrones de conducción no sujetos a la fuerza recuperadora  $-m\omega_0^2\mathbf{r}$  y aplicar las expresiones obtenidas con la condición  $\omega_0 = 0$ .

### XXIII - 12. Propagación de ondas electromagnéticas planas en un gas ionizado. Frecuencias de plasma y de corte

En un metal los electrones de conducción sufren un gran número de colisiones con los iones de la red cristalina, por lo que el término  $R\omega/m$  de la cuestión anterior es siempre considerable. En el caso de un gas ionizado (*plasma neutro*) este término es generalmente débil, aunque su influencia depende de la presión a que esté sometido el gas.

Si el rozamiento viscoso del electrón es despreciable ( $R = 0$ ) la ecuación de dispersión se puede escribir de la forma:

$$k = \frac{\omega}{c} \left[ 1 - \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \right]^{1/2}$$

Para obtener la expresión del índice de refracción del medio, introducimos la FRECUENCIA ANGULAR DEL PLASMA  $\omega_p$ :

$$\omega_p = (Ne^2/m\varepsilon_0)^{1/2}$$

y la FRECUENCIA ANGULAR DE CORTE  $\omega_c$ :  $\omega_c = (\omega_0^2 + \omega_p^2)^{1/2}$

con lo cual, por ser  $n = c/c'$ , con  $c'$  = velocidad de fase:

$$n = \frac{ck}{\omega} = \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \right]^{1/2} = \left[ \frac{\omega^2 - (\omega_0^2 + \omega_p^2)}{\omega^2 - \omega_0^2} \right]^{1/2} \Rightarrow n = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_c^2}{\omega^2 - \omega_0^2}}$$

La onda plana se propagará sin amortiguamiento en el medio considerado cuando  $n$ , y por tanto  $k$ , sea real, es decir para frecuencias tales que  $n^2 > 0$ , lo que supone  $0 < \omega < \omega_0$  y  $\omega_c < \omega$ . Sin embargo, para frecuencias menores que la de corte (y mayores que  $\nu_0$ ),  $\omega_0 < \omega < \omega_c$ , la onda no se propaga. Así, si una onda alcanza una zona en la que existe un plasma neutro con frecuencia angular mayor que la natural del plasma y menor que la de corte, será totalmente reflejada; es el caso de las ondas de radiofrecuencia al alcanzar la ionosfera, que comentaremos en esta misma cuestión.

Un caso de particular interés se presenta cuando el gas se encuentra a muy baja presión; en estas condiciones podemos despreciar la fuerza recuperadora sobre los electrones, y haciendo  $\omega_0 = 0$  obtenemos para el número de ondas y el índice de refracción las expresiones:

$$\boxed{k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \quad \boxed{n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \quad (40)$$

De nuevo comprobamos que si es  $\omega < \omega_p$  tanto el índice de refracción como el número de ondas resultan imaginarios, en particular  $k = ik_i$ , con  $k_r = 0$ . En este caso, el vector campo eléctrico queda de la forma:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-k_i x} e^{-i\omega t}$$

que ya no representa una onda viajera sino un campo que oscila sinusoidalmente y cuya amplitud disminuye exponencialmente con la profundidad de penetración en el gas ionizado. Este se comporta por tanto como un filtro que impide el paso de ondas de frecuencia menor que la del plasma.

Estas mismas conclusiones pueden aplicarse a los metales que, aunque en realidad no constituyen un plasma neutro de baja densidad de electrones de conducción, pueden ser tratados como tales para frecuencias lo suficientemente altas como para compensar el efecto de las colisiones; así, con densidades de electrones del orden de  $N = 10^{29}$ , presentan frecuencias de plasma en el rango de  $10^{16}$  Hz correspondiente al ultravioleta y próximas ya a los rayos X.

En el caso  $\omega > \omega_p$  tanto  $n$  como  $k$  son reales, el medio se hace transparente a la radiación, y la onda se propaga en él sin atenuación. Si se verifica  $\omega \gg \omega_p$  el índice de refracción es muy próximo a la unidad y la onda no es afectada en absoluto por la presencia del plasma.

En el caso de la ionosfera, en la que densidad de electrones libres puede considerarse, en promedio, de  $10^{11}$  electrones/m<sup>3</sup>, la frecuencia angular de plasma es de aproximadamente  $2 \times 10^7$  Hz = 20 MHz, con lo que las ondas de radio son reflejadas hacia el suelo.

El índice de refracción del medio, dado por la expresión (40), siempre que es real resulta menor que la unidad con lo que la velocidad de fase  $c'$  de la onda resulta mayor que la de la luz en el vacío:  $c' = c/n > c$ . Sin embargo hay que volver a insistir aquí, como ya se hizo en la cuestión XVII-21, que la velocidad de fase es la de propagación de una fase dada, no es la velocidad a la que viaja la energía de una señal compuesta por la superposición de varias ondas de frecuencias distintas, que lo hace a la velocidad de grupo. Como se vio en la cuestión citada la velocidad de grupo es  $c_g = d\omega/dk$ , y en nuestro caso, de (40) obtenemos:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \Rightarrow k dk = \frac{1}{c^2} \omega d\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_g = \frac{d\omega}{dk} = c^2 \frac{k}{\omega} = c^2 \frac{1}{c'} \Rightarrow \boxed{c' c_g = c^2}$$

el producto de la velocidad de fase por la velocidad de grupo de un paquete de ondas es igual al cuadrado de la velocidad de la luz en el vacío (esta relación no se aplica a ondas planas moviéndose en medios no dispersivos, en los que las velocidades de fase y de grupo son idénticas).

En nuestro caso  $c' > c$  nos conduce a:

$$\boxed{c_g < c}$$

lo que está en completo acuerdo con lo que se verá en el tema de relatividad (capítulo XXVII) sobre la velocidad de transmisión de información de un punto a otro. Conforme un paquete de ondas electromagnéticas se propaga en un gas ionizado cambia la forma de su envolvente por viajar cada componente a distinta velocidad, el paquete se dispersa.

### XXIII - 13. Fuentes de ondas electromagnéticas. El resonador de Hertz

Las ecuaciones de Maxwell nos han conducido a que las ondas electromagnéticas son producidas como consecuencia de dos efectos: 1) un campo magnético variable produce un campo eléctrico y 2) un campo eléctrico variable produce un campo magnético. Por lo tanto, es evidente, que las cargas en reposo y las corrientes eléctricas constantes no producen ondas electromagnéticas; y en consecuencia podemos enunciar la siguiente ley:

«Siempre que existe una carga eléctrica con aceleración hay emisión de energía radiante»; o lo que es lo mismo: «las fuentes de radiación electromagnética son cargas eléctricas aceleradas».

Como ejemplo, consideremos un alambre por el que circula una corriente variable con el tiempo, éste emitirá radiación electromagnética; esto, en realidad, es una fuente de ondas de radio emitidas por la antena de una radiodifusora.

Consideremos un circuito en el que se están produciendo corrientes oscilantes (Fig. XXIII-8); A es un conductor lineal (ANTENA) uno de cuyos extremos está unido a tierra y el otro libre. La corriente oscilante del circuito induce en la antena una tensión oscilante análoga. Supongamos

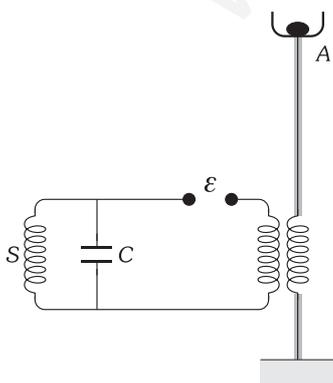


Fig. XXIII-8.- La corriente del oscilador LC induce en la antena A una tensión alterna.

que, en un determinado instante, la corriente en la antena circula hacia tierra. El extremo libre  $M$  (Fig. XXIII-9), tiene mayor potencial que  $N$  y, en consecuencia, existe en el espacio un campo idéntico al que crearían una carga positiva localizada en  $M$  y otra negativa en  $N$ . En el punto  $P$ , el campo eléctrico es el resultado de los dos campos  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$ , que podemos imaginar creados por  $M$  y  $N$ . Conforme la intensidad de corriente va disminuyendo, por disminuir la diferencia de potencial entre  $M$  y  $N$ , el campo  $\vec{E}$  disminuye. Al anularse la diferencia de potencial, el campo desaparece. Al invertirse la tensión hay en  $P$  un campo de sentido contrario al anterior ( $-\vec{E}$ ).

*Al producirse la corriente oscilante en una antena se crea en el espacio un campo eléctrico oscilatorio, del mismo período que el de la descarga.*

Al pasar la corriente eléctrica de  $M$  a  $N$ , se crea en el punto  $P$  un campo magnético ( $\vec{B}$ ) (Fig. XXIII-9), determinado por la ley de Biot y Savart, de dirección perpendicular al plano formado por la corriente y el punto y de sentido el dado por la regla del sacacorchos. También este campo se amortigua por el hecho de disminuir la intensidad de la corriente y se invierte cuando el sentido de la descarga cambia.

*«Al producirse la corriente oscilante en una antena se crea en el espacio un campo magnético oscilatorio, del mismo período que el de la descarga».*

Tanto los campos magnéticos como los eléctricos así producidos, son perpendiculares entre sí y se encuentran en fase, es decir, cada uno de ellos es cero en los mismos puntos y alcanzan su máximo en los mismos puntos; almacenando energía que se transfiere en dirección perpendicular a ambos (vector de Poynting) a puntos distantes de la fuente y a la velocidad de la luz.

Las ondas electromagnéticas de radiofrecuencia fueron generadas y detectadas por primera vez por Henrich Hertz en 1887, su descubrimiento condujo a la consolidación de muchos sistemas prácticos de comunicación, incluyendo la radio, la televisión y el radar. Llegando a demostrar que:

*Cuando un circuito, en el que se pueden propagar corrientes oscilantes de una determinada frecuencia, se encuentra en un campo electromagnético de frecuencia idéntica a la suya, se producen en él corrientes oscilantes por fenómenos de inducción.*

El fenómeno no es más que un caso de resonancia. El resonador de Hertz es un circuito abierto cuyos extremos, siempre muy próximos, se pueden acercar o alejar.

Colocado el resonador con respecto a una antena por la que circulan corrientes oscilantes, en la posición primera de la Fig. XXIII-10, se verifica en él, en todo instante, una variación del campo magnético que le atraviesa, produciéndose corrientes oscilantes y saltando una chispa eléctrica de un extremo a otro del circuito. Colocado en la segunda posición de la figura (perpendicular al plano del papel) el campo eléctrico oscilatorio actúa sobre los electrones del propio metal y producen en el resonador corrientes y chispas oscilantes análogas. Desde el punto de vista de la teoría de circuitos eléctricos, esto equivale a un circuito  $LC$ , donde la inducción corresponde a la espira y la capacidad a la antena.

El experimento de Hertz es análogo al fenómeno mecánico en el cual un diapason recoge las vibraciones de otro diapason que oscila en idénticas condiciones.

Hertz, en otra serie de experimentos, también demostró que la radiación generada por su dispositivo presentaba las mismas propiedades que la luz (reflexión, refracción, interferencias, difracción, polarización, ...), e incluso midió la velocidad de propagación de estas radiaciones, coincidiendo con la velocidad de propagación de la luz. Por consiguiente, llegó a la conclusión de que las ondas de radiofrecuencia diferían solamente en la frecuencia, de las ondas luminosas.

**XXIII - 14. Espectro de ondas electromagnéticas**

A las ondas electromagnéticas las caracterizamos por su frecuencia (no por su longitud de onda ya que es una función del medio en que se propagan) que tiene una gama de valores que comprende desde unos pocos Hz hasta más de  $10^{22}$  Hz. Puesto que todas las ondas electromagnéticas viajan a través del vacío con una velocidad  $c$ , y su frecuencia y longitud de onda sabemos que están relacionadas por:  $c = \lambda\nu$ , podemos caracterizarlas también por su longitud de onda en el vacío. *Al conjunto de frecuencias cubierto por las ondas electromagnéticas se le llama ESPECTRO DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS*; el que damos en el cuadro de la página siguiente.

Los límites entre los diferentes tipos de ondas electromagnéticas no están claramente definidos, solapándose las frecuencias de las diferentes clases de radiación; sus distintas denominaciones se hacen atendiendo a los diversos procedimientos de obtención. Para casos como las bandas de AM y FM-TV, los intervalos de frecuencia son cuestión de definición legal y están claramente demarcados.

Las ecuaciones de Maxwell no imponen ningún límite a la frecuencia de las ondas electromagnéticas. El espectro que experimentalmente se ha encontrado es, desde las ondas de frecuencia aproximadamente igual a  $10^{-2}$  Hz, a la que corresponde una longitud de onda de aproximadamente 5 000 radios terrestres, que han sido detectadas en la superficie de la Tierra, hasta valores mayores de  $10^{23}$  Hz y menores de  $3 \times 10^{-15}$  m para sus longitudes de onda, observados en la aniquilación de un protón y un antiprotón.

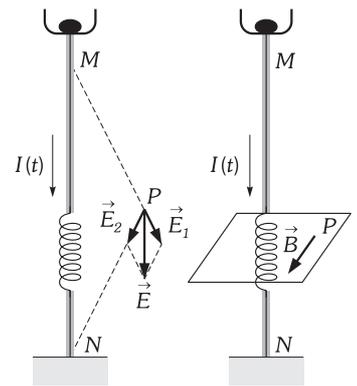


Fig. XXIII-9.- Explicación elemental de la formación del campo electromagnético.

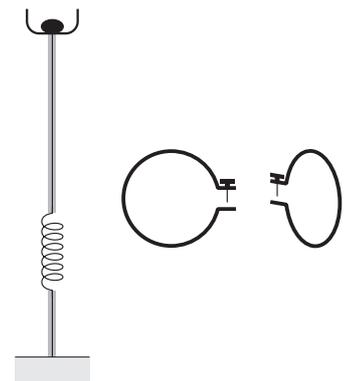
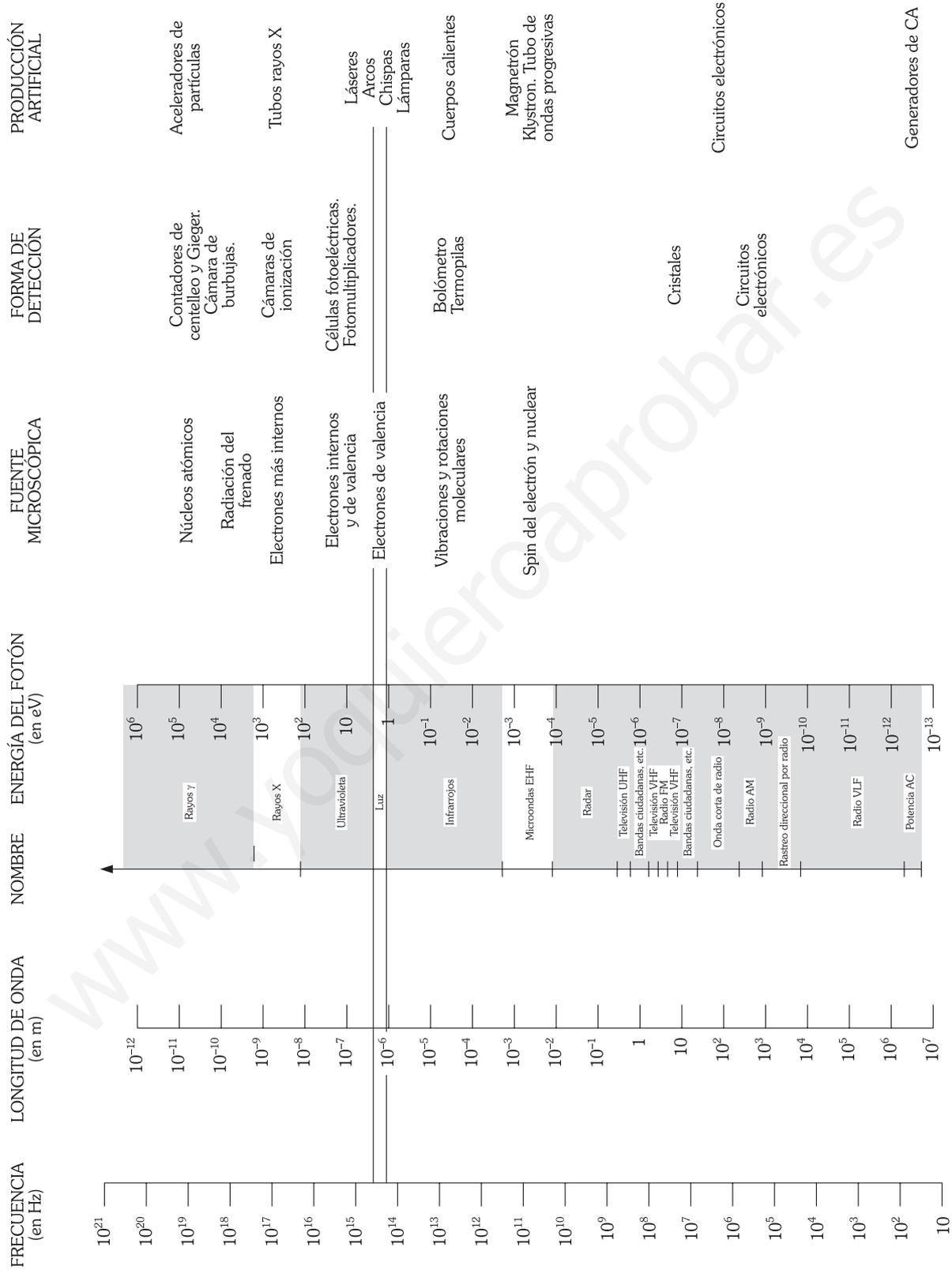


Fig. XXIII-10.- El resonador de Hertz.

ESPECTRO DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS



Muchas veces, las ondas electromagnéticas, se caracterizan por la energía de los fotones correspondientes; en efecto, como se verá en el capítulo XXVIII, las ondas electromagnéticas se emiten por cuantos de energía, llamados FOTONES; la energía de un fotón vale  $h\nu$  en la que  $h$  es la constante de Planck ( $6,626 \times 10^{-24}$  J · s), con lo que:

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

si expresamos esta energía en electrón-voltios ( $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19}$  J) y la longitud de onda en angstrom ( $1 \text{ \AA} = 10^{-10}$  m), se obtiene:  $h\nu = 12\,393/\lambda$  eV. La emisión del fotón la provoca el paso de una partícula cargada de un nivel de energía a otro de energía inferior; la energía de este fotón es igual a la diferencia entre los dos niveles considerados (si se supone que la energía cinética de retroceso del sistema es despreciable, lo que sucede con frecuencia). De una forma general, esta transición puede tener lugar si el sistema se encuentra en un estado excitado, es decir, en un estado de energía superior a la del estado fundamental, en que la energía es mínima. En un átomo, una molécula, un cristal, y más generalmente, en un sistema formado por átomos aislados o en interacción, el paso de un nivel de energía a otro inferior provoca la emisión de un fotón que, según sea la energía de la transición, será un fotón de onda infrarroja, luz visible, onda ultravioleta o un fotón X. Si las transiciones posibles forman una serie discontinua, el espectro de frecuencia de los fotones también lo será; en caso contrario es continuo o casi continuo (niveles muy próximos).

En el núcleo del átomo, los niveles de energía de los nucleones (protones y neutrones) forman una serie discontinua y los intervalos de energía son muy grandes. Si la energía de los fotones es muy grande, se les llama fotones  $\gamma$  (o radiación  $\gamma$ ).

A continuación damos una descripción de las distintas ondas electromagnéticas expresadas en el cuadro. En el estudio de la Óptica y el Átomo trataremos algunas de ellas con más profundidad.

**ONDAS DE RADIOFRECUENCIA.** Tienen un intervalo de frecuencias que va desde unos pocos Hz, con longitud de onda de unos pocos km, hasta aproximadamente  $10^9$  Hz y  $\lambda = 0,3$  m; las ondas de radiofrecuencia se han discutido en parte en el párrafo XXIII-13. Se generan al acelerar las cargas a través de hilos conductores (*circuitos electrónicos*).

**MICROONDAS.** Se extienden desde  $\sim 10^9$  Hz ( $\lambda = 0,3$  m) hasta  $\sim 3 \times 10^{11}$  Hz. Son generadas por dispositivos electrónicos especiales (Klistrón, Magnetrón, ...). Son utilizadas en las comunicaciones; empleándose para la transmisión telefónica entre grandes ciudades; una red de este tipo tiene la ventaja, con respecto al sistema tradicional, de que pueden transmitirse simultáneamente muchas más conversaciones. Como en las ondas de radiofrecuencia, para su uso en grandes distancias, es necesaria la utilización de infraestructuras (torres repetidoras y satélites artificiales); esta técnica se utilizó por primera vez en 1962 con el satélite Telstar y en 1968, este medio de comunicación, permitió ver en todo el mundo los Juegos Olímpicos de Japón.

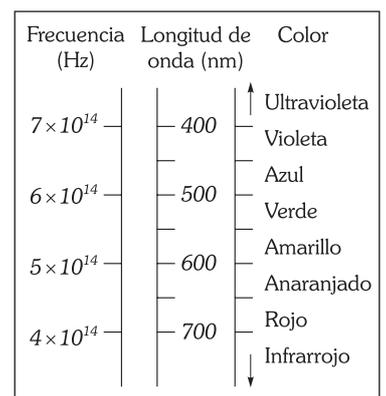
Son también utilizadas en los sistemas de radar, en radio-astronomía y en el estudio de las propiedades atómicas y moleculares de la materia; los hornos de microondas son una interesante aplicación doméstica; en una reciente investigación se ha sugerido que la energía solar podría ser aprovechada mediante la emisión de microondas hacia la Tierra desde un colector solar situado en el espacio.

**RAYOS INFRARROJOS.** Ocupan el intervalo de frecuencias comprendido entre  $3 \times 10^{11}$  Hz ( $\lambda = 10^{-3}$  m) y  $4 \times 10^{14}$  Hz ( $\lambda = 7,8 \times 10^{-7}$  m = 780 nm). Son emitidos por rotaciones y vibraciones moleculares y por los cuerpos calientes. Pueden ser detectados por películas fotográficas especiales, capaces de distinguir diferencias de temperatura muy pequeñas, empleándose como detectores. Puesto que todos los cuerpos las emiten en mayor o menor cantidad según la temperatura a que se encuentren, permiten fotografiar los objetos en la oscuridad; tienen, por tanto, aplicaciones militares, también se emplean en el estudio del comportamiento de los animales nocturnos, localizan fronteras terrestres y marítimas cálidas y frías. Por ser las frecuencias de las radiaciones infrarrojas emitidas a una determinada temperatura, características de cada elemento químico, se emplean en el análisis químico de las sustancias, técnica que se denomina espectroscopía infrarroja.

**LUZ o ESPECTRO VISIBLE.** Tiene un intervalo muy estrecho del espectro de las ondas electromagnéticas y comprende desde aproximadamente  $4 \times 10^{14}$  Hz ( $\lambda = 780$  nm, rojo) hasta  $\sim 8 \times 10^{14}$  Hz ( $\lambda \approx 380$  nm, violeta). La luz es producida por el ajuste interno de los electrones más periféricos de los átomos y las moléculas. Es obvia su importancia, a ella se dedica una de las partes de la Física: la Óptica. Produce diferentes sensaciones en los seres humanos, llamadas colores, que dependen de la frecuencia de la onda electromagnética detectada por el ojo. En el espectro visible que damos, las bandas correspondientes a los colores son aproximadas.

**RAYOS ULTRAVIOLETA.** Cubren la región del espectro de frecuencias comprendidas entre  $\sim 8 \times 10^{14}$  Hz ( $\lambda \approx 3,8 \times 10^{-7}$  m) y  $\sim 3 \times 10^{17}$  Hz ( $\lambda \approx 6 \times 10^{-10}$  m). Se producen por átomos y moléculas en descargas eléctricas. El Sol es una fuente muy poderosa de radiación ultravioleta. Se detectan con placas fotográficas y con dispositivos electrónicos tales como: la célula fotoeléctrica y

ESPECTRO VISIBLE



los fotomultiplicadores. La radiación ultravioleta del Sol tiene la energía suficiente como para activar ciertas reacciones químicas, al proceso se le llama *fotoquímica*; también, es capaz de ionizar los átomos de la alta atmósfera y formar la capa llamada *ionosfera*. Esta radiación procedente del Sol es, en parte, absorbida por la *ozonósfera*, si no fuera así, sería letal su incidencia sobre la superficie terrestre; es también, la responsable del bronceado de la piel, pudiendo dañarla por una contumaz exposición a ella. Tienen aplicaciones biológicas importantes, ya que son capaces de eliminar bacterias y otros microorganismos como consecuencia de las reacciones químicas que producen al absorber éstos la radiación y disociarse e ionizarse las moléculas que los componen; empleándose por ello para la esterilización de instrumentos y otras aplicaciones médicas...

**RAYOS X.** Cubren la región del espectro electromagnético comprendida entre  $\sim 3 \times 10^7$  Hz ( $\lambda \approx 10^{-9}$  m) y  $\sim 5 \times 10^{19}$  Hz ( $\lambda \approx 6 \times 10^{-12}$  m). Fueron descubiertos por el físico alemán W. C. Roentgen en 1895 cuando estaba estudiando los «rayos catódicos» (haces de electrones). Los rayos X se producen por las transiciones de los electrones más fuertemente ligados al núcleo; también se generan al hacer variar la trayectoria de una partícula cargada de alta energía, y por lo tanto emitir una radiación. En los tubos de rayos X utilizados en medicina e industria, generalmente, se obtienen haciendo incidir un haz de electrones sobre un blanco de tungsteno. Se detectan con placas fotográficas y placas fluorescentes que, al incidir en ellas, emiten luz. Al igual que las radiaciones ultravioletas, son ionizantes, por su gran energía pueden atravesar en menor o mayor grado todas las sustancias, dependiendo de la penetración de la naturaleza y densidad de éstas; así por ejemplo, las partes blandas del cuerpo humano transmiten más radiación que las ocupadas por los huesos, razón por la que son utilizados en los diagnósticos médicos (*radiografías*). Debido a su poder ionizante, producen procesos químicos, dañando a los tejidos y a organismos vivos, es por esta razón por la que son utilizados en el tratamiento del cáncer, ya que parecen tener una tendencia a destruir los tejidos enfermos más fácilmente que los sanos; sin embargo, cualquier cantidad de radiación X destruye tejidos sanos, pudiendo producir la destrucción suficiente, como para ocasionar graves daños o incluso la muerte. En la industria son utilizados para detectar posibles defectos en las piezas constitutivas de una determinada estructura (conducciones eléctricas, planchas para los barcos, bielas, ..., etc.); las técnicas de utilización de los rayos X en la industria son semejantes a las utilizadas en medicina, aunque los haces son de mucha mayor intensidad. Otra aplicación de los rayos X se encuentra en la determinación de la disposición de los átomos en un compuesto, mediante las figuras de difracción que se obtienen, al incidir sobre las redes de difracción a nivel atómico que presentan los cristales...

**RAYOS GAMMA.** Se extienden desde  $\sim 3 \times 10^{18}$  Hz ( $\lambda \approx 10^{-10}$  m) hasta más de  $3 \times 10^{22}$  m ( $\lambda \approx 10^{-14}$  m). Los rayos gamma son emitidos por núcleos radiactivos (como  $^{60}\text{Co}$  y  $^{137}\text{Cs}$ ) y está presentes con gran intensidad en los reactores nucleares. Se detectan con placas fotográficas y pantallas fluorescentes especiales. Tienen un gran poder de penetración y la mayoría de las sustancias no las absorben, pero cuando son absorbidos por los seres vivos, producen serios daños. Se han utilizado para esterilizar los alimentos y conservarlos en mejor estado; para inducir mutaciones en los genes de las plantas que, si bien en algunos casos producen efectos nocivos, en otros pocos casos los resultados son muy útiles.

## PROBLEMAS

1. Demostrar la homogeneidad de las siguientes expresiones: 1)  $I = \langle S \rangle$  ( $I$ : intensidad de la onda.  $\langle S \rangle$ : valor promedio del módulo del vector de Poynting). 2)  $\langle u \rangle = \langle S \rangle / c$  ( $\langle u \rangle$ : densidad volumétrica de energía;  $c$ : velocidad de la luz). 3)  $\langle \rho \rangle = \langle S \rangle / c^2$  ( $\rho$ : densidad volumétrica de momento lineal). 4)  $\langle P \rangle = \langle S \rangle / c$  ( $\langle P \rangle$ : presión de radiación).

2. Una onda senoidal electromagnética plana polarizada, viaja en el vacío en la dirección positiva del eje  $OX$ ; el valor máximo del vector del campo eléctrico, que se encuentra vibrando en la dirección del eje  $OY$ , es de 30 N/C; si su frecuencia es de 15 MHz, determinar: 1) Valor máximo del campo magnético asociado. 2) Ecuaciones de los campos  $\mathbf{E}(x, t)$  y  $\mathbf{B}(x, t)$  de la onda.

3. Una onda electromagnética armónica plana de  $6 \times 10^{14}$  Hz de frecuencia, se propaga en el vacío en el sentido positivo del eje  $OX$ . La onda está polarizada con el campo eléctrico, de amplitud 25 V/m, vibrando en la dirección  $z = 3y/4$ . Obtener las ecuaciones de propagación de la onda.

4. Un condensador plano paralelo está lleno con un dieléctrico no perfecto de permitividad  $\epsilon$  y conductividad  $\sigma$ , siendo  $C$  su capacidad. Se carga el condensador con una diferencia de potencial  $V$  y se aísla. Calcular: 1) El campo magnético en el interior del condensador. 2) La carga del condensador en función del tiempo. 3) La corriente de desplazamiento en el dieléctrico.

5. Se tiene una esfera conductora, maciza, de radio  $R_1$  y otra también conductora, de radio  $R_2$ , hueca, de espesor despreciable y concén-

trica con la primera, siendo  $R_2 > R_1$ . La esfera interior está cargada con carga  $Q_0$  y la exterior descargada. En un instante determinado, el medio que hay entre ellas, de  $\epsilon = cte$  y  $\mu = cte$ , se hace conductor con conductividad  $\sigma$ . Calcular la expresión de los vectores  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{J}$  en función del tiempo y para todo el espacio.

6. Demostrar que el flujo del vector de Poynting hacia un alambre largo, cilíndrico de longitud  $l$  y radio  $r$ , que conduce una corriente eléctrica  $I$ , es igual a la potencia disipada en forma de calor por el efecto Joule ( $I^2 R$ ).

7. En una zona del espacio existen cargas estáticas, que producen un campo  $\mathbf{E}$ , e imanes permanentes, que originan un campo  $\mathbf{H}$ , de tal manera que en cada punto podemos definir el vector  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ . Calcular el flujo neto de energía a través de una superficie que encierra a las fuentes de campo.

8. Una onda de radio que se encuentra polarizada, se propaga en el vacío en la dirección positiva del eje  $OX$ , teniendo el vector  $\mathbf{E}$  la dirección del eje  $OY$ , transmite una potencia media de  $20 \text{ W/m}^2$  y su frecuencia es de 1 MHz. Determinar las ecuaciones de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  para cualquier posición e instante.

9. Suponiendo que de una bombilla de 60 W, el 60% se convierte en radiación electromagnética y que ésta se propaga uniformemente en todas las direcciones (isotrópicamente), determinar a 2 m de ella: 1) La intensidad. 2) La presión de la radiación. 3) Las amplitudes de los campos eléctrico y magnético.

**10.** En un horno de microondas calentamos una tortilla de patata de 250 g, 10 cm de radio y  $400 \text{ cal/kg} \cdot \text{K}$  de calor específico, durante 2 min; ofrece a la radiación incidente toda su área superior y la absorbe totalmente. Si el valor del campo eléctrico eficaz es de  $10^3 \text{ N/C}$ , calcular la elevación de temperatura que experimenta.

**11.** Supongamos que un sistema de cargas oscilantes irradia energía electromagnética en todas las direcciones por igual, a razón de 200 W. Calcular a una distancia de 3 m: 1) El módulo de las amplitudes de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ . 2) La densidad de energía. 3) La densidad de momento lineal.

**12.** Si el flujo medio de energía solar más allá de la atmósfera es de  $1,34 \text{ kW/m}^2$ , y queremos construir una nave de 4 t de masa, impulsada por esta radiación al incidir en una vela totalmente reflectora, que funcione fuera de la atmósfera, calcular cuál sería la superficie mínima de vela necesaria para comunicarle una aceleración máxima de  $10^{-3} \text{ m/s}^2$ .

**13.** Se estima que el Sol entrega a la Tierra un flujo de energía medio de  $10^3 \text{ W/m}^2$ . Determinar: 1) La densidad promedio de energía incidente sobre la superficie terrestre. 2) El momento lineal promedio. 3) La presión de radiación. 4) La amplitud eficaz del vector campo eléctrico.

**14.** Una onda electromagnética plana de  $10^2 \text{ W/m}^2$  incide sobre una superficie de  $10^2 \text{ cm}^2$ . Determinar: 1) La fuerza ejercida sobre tal superficie si la incidencia es normal y absorbe toda la radiación. 2) Si se refleja totalmente. 3) ¿Cómo se modifican estos resultados si el ángulo de incidencia de la radiación es de  $45^\circ$ ?

**15.** El flujo de energía medio de una onda electromagnética plana es de  $10^2 \text{ W/m}^2$ , e incide normalmente sobre una superficie de  $10^2 \text{ cm}^2$  de un material que la absorbe en un 30%, reflejando el resto. Determinar: 1) La energía reflejada en un minuto. 2) El momento lineal transferido al material en ese tiempo.

### A) PROPAGACIÓN DE LA LUZ, REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN

#### XXIV – 1. Óptica

La palabra Óptica deriva de otra griega que significa *ver*; es una de las parcelas más antiguas de la Física, precedida únicamente por la Astronomía.

*«La ÓPTICA es la ciencia que trata de las propiedades y de la naturaleza de la Luz y sus interacciones con la materia».*

Según lo que hemos tratado hasta ahora en los capítulos XVII y XXIII, tenemos cierto conocimiento sobre lo que es la luz, pudiéndola definir por ahora como:

*«La LUZ es una onda electromagnética (o una forma de energía radiante) visible con el ojo humano, que ocupa un determinado intervalo del espectro de estas ondas; se propaga en el vacío con una velocidad constante, cualquiera que sea el sistema de referencia en que la midamos, de aproximadamente 300 000 km/s, siendo esta velocidad un límite irrebalsable que impone la naturaleza».*

El rango de frecuencias del espectro electromagnético en que se define la luz es  $4,3 \times 10^{14}$  Hz  $< \nu < 7,5 \times 10^{14}$  Hz (ver párrafo XXIII-14); fisiológicamente, las diferentes frecuencias de la luz, son distinguidas por el ojo por su *color*.

Según el comportamiento de los objetos con la luz, estos se clasifican en:

*Cuerpos LUMINOSOS son los emisores de luz* (el Sol, los cuerpos incandescentes, los gusanos de luz, etc.); *cuerpos ILLUMINADOS son los que se hacen visibles al devolver toda o parte de la luz que reciben* (por ejemplo, la Luna, la Tierra, etc.).

*Cuerpos TRANSPARENTES son los que dejan ver los objetos a su través* (el vidrio). *TRASLÚCIDOS son los que son atravesados por la luz, pero no permiten ver los objetos a través de ellos* (un papel de fumar). *OPACOS los que no se dejan atravesar por la luz* (una gruesa lámina de madera).

En las superficies mates, por ejemplo, en el papel, al encontrar los rayos rugosidades (para nosotros imperceptibles en ocasiones) son reflejados en todas las direcciones, viéndose, entonces, los cuerpos regularmente iluminados. A este fenómeno, que presenta el papel, el yeso, la nieve, etc., se llama *DIFUSIÓN DE LA LUZ*.

También la luz se puede difundir por transparencia al atravesar determinados cuerpos (un cristal esmerilado) emergiendo de él en todas las direcciones y viéndose, por ello, luminosidad regular (*DIFUSORES*).

El estudio de la Óptica se divide en tres partes: Óptica Geométrica, la Óptica Física y la Óptica cuántica.

*«La ÓPTICA GEOMÉTRICA estudia la luz independientemente de su naturaleza, se ocupa de las propiedades de los instrumentos ópticos».*

*«La ÓPTICA FÍSICA estudia la luz desde el punto de vista de su naturaleza ondulatoria».*

*«La ÓPTICA CUÁNTICA analiza las interacciones de la luz y las partículas atómicas, requiere el empleo de la mecánica cuántica».*

Podríamos decir que estas tres partes de la Óptica corresponden a un análisis *macroscópico*, *microscópico* y *atómico* respectivamente, limitándonos claramente su campo de aplicación.

Vamos primeramente a estudiar la Óptica Geométrica (Capítulos XXIV y XXV) suponiendo la existencia de lo que llamaremos «rayos luminosos» y basándonos en la «teoría de la emisión», haciendo un análisis del funcionamiento del ojo y de los instrumentos ópticos que lo complementan; a continuación estudiaremos la luz como movimiento ondulatorio (capítulo XXVI) en los que se verá, la dispersión, fotometría, radiación térmica, interferencias, difracción y polarización de la luz, para lo cual es recomendable repasar los conceptos dados en el capítulo XVII; finalmente en el capítulo XXVIII daremos una reseña de la Óptica Cuántica.

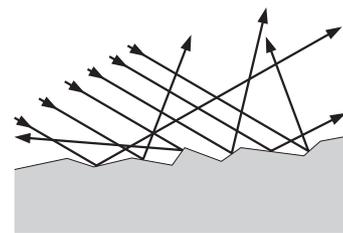


Fig. XXIV-1.- Difusión de la luz.

## XXIV – 2. Breve introducción histórica de la Óptica hasta Sir Isaac Newton

Los filósofos de la antigua Grecia consideraban a la luz como un *fluido* que manaba de los ojos del observador, algo así como una especie de tentáculos, asemejando el sentido de la vista al sentido del tacto; esta interpretación de la naturaleza de la luz recibió el nombre de «*Teoría Tactil*». Pitágoras de Samos (500 años a. de C.) sostenía que la luz es «algo» que fluye y que captan nuestros ojos excitando el sentido de la vista; a esta interpretación se la denominó «*Teoría de la emisión*». Platón (350 años a. de C.) complica la teoría de Pitágoras suponiendo una acción entre algo que mana de tres focos: los ojos, el objeto que se ve y el foco que ilumina.

En cualquier caso, era creencia general que la luz estaba formada por partículas, las cuales se movían en línea recta a gran velocidad (hipótesis que, como relataremos, fue la que más convenció a Newton). Euclides (300 años a. de C.) en su «*Catóptrica*», y debido a su gran intuición geométrica, hizo los primeros razonamientos utilizando el concepto de «*rayo luminoso*» y con él dedujo, entre otras cuestiones, la «*ley de la reflexión*».

Los primeros indicios que tenemos de la observación y estudio de la «*refracción*», datan de la época de Platón, que en su «*República*», menciona el aparente doblamiento de los objetos cuando se encuentran parcialmente sumergidos en agua; sabemos que fue estudiada por Cleómedes (50 d. C.) y por Claudio Tolomeo de Alejandría (130 d. C.) que hizo y tabuló medidas muy precisas del «*ángulo de refracción*» para diversos medios.

Existen pruebas de la utilización de «*lentes*» desde que en el año 425 a. de C., Aristófanes, en su sátira «*Las Nubes*» hace mención al «*vidrio quemador*» (lente convergente); los romanos, como lo confirman los escritos del historiador Plinio (años 23-79 d. C.) poseían vidrios quemadores; el filósofo Séneca (3 a. C., 65 d. C.) escribe que la visión de los objetos se aumenta al realizarla a través de esferas de vidrio llenas de agua; esferas de cristal han sido encontradas en ruinas romanas y hasta una lente *plano-convexa* fue recuperada en las ruinas de Pompeya. Es muy posible, que los artesanos romanos, para realizar determinados trabajos de detalle, utilizaron lentes de aumento.

Parece ser que a partir de los años citados, la Óptica no tuvo grandes progresos, hasta Alhazem de Basora (~1000 d. C.) que apostillando la idea pitagórica de que la luz, comportándose como un proyectil, va de los focos luminosos (el Sol, una llama, etc.) a los objetos y de éstos a nuestros ojos, aplicando las leyes del choque elástico, deduce la «*ley de la reflexión*», poniendo el *rayo incidente*, el *reflejado* y la *normal* en el mismo plano; por otro lado, realizó estudios sobre *espejos esféricos* y *parabólicos*, y detalló de forma bastante precisa el funcionamiento del *ojo humano*.

A partir de Alhazem y hasta principios del siglo XVII, en que Villebrord Snell (1591-1626) profesor de Leyden, descubre empíricamente en 1621 la «*Ley de la refracción*» enunciándola de la forma que se conoce hoy en día, se hicieron progresos muy significativos en el campo experimental de la Óptica, inventándose alguno de sus instrumentos más valiosos. Parece ser que Roger Bacon (1215-1294) inició la idea de usar *lentes* para corregir determinadas anomalías del ojo; también sugirió la forma de combinar las lentes para construir un *telescopio* basándose en el conocimiento que tenía de la marcha de los rayos al atravesar las lentes (en algunas pinturas del siglo XIII aparecen monjes con gafas). Leonardo da Vinci (1452-1519) inventa la *cámara oscura*, popularizada más tarde por Juan Bautista Laporta (1535-1615); ambos diseñaron y analizaron la marcha de la luz en combinaciones de lentes y espejos (por aquella época inventaron los alquimistas el «*espéculum*», amalgama de mercurio y estaño con la que recubrían el vidrio para hacer espejos). No está muy claro quien construyó el primer *telescopio refractor*, sus inicios se encuentran en los archivos de La Haya, en los que existen pruebas documentales de la patente para tal instrumento, solicitada por un comerciante holandés en el año 1608. Enterado Galileo Galilei (1564-1642) de la existencia del telescopio, construye su propio aparato, descubriendo las lunas de Júpiter, los anillos de Saturno y el giro del Sol, ya que las manchas de éste se movían en su superficie; por otro lado, para él, la luz era un simple movimiento en el medio, reduciendo el problema a un planteamiento cinemático, considerando que el principal parámetro a determinar era la velocidad con que se propaga; ideó diversos procedimientos terrestres para su determinación y a falta de una tecnología adecuada, fracasó en todos sus intentos.

Johannes Kepler (1571-1630), en su obra «*Dioptrice*», expone la proporcionalidad entre el ángulo de incidencia y el de refracción para pequeños ángulos y da a conocer el fenómeno de *reflexión total*; desarrolló un tratamiento para sistemas de lentes delgadas y perfeccionó el telescopio, utilizando como ocular un sistema de lentes «*positivo*» (*convergente*). Como ya se ha dicho, fue Snell el que enunció empíricamente la ley de la refracción que lleva su nombre, hecho que constituye un hito en el estudio de la Óptica. Rene Descartes (1596-1650), del que no está claro si conocía o no los trabajos de Snell, fue el primero en publicar en su «*Dióptrica*», la ley de la refracción, demostrándola partiendo de un modelo en que la luz se visualizaba como una «*presión transmitida*» por un medio elástico. Pierre de Fermat (1601-1665), sin tener en cuenta las suposiciones de Descartes, postuló que la luz se propaga de un punto a otro por el «*camino óptico*» más corto, aunque tenga que desviarse de su trayectoria más corta para hacerlo (en los párrafos 3 y 4 de esta sección analizaremos este principio y el concepto de camino óptico); y basándose en tal ley a la que se llamó «*Principio del tiempo mínimo*» dedujo las leyes de la reflexión y de la refracción.

Francisco María Grimaldi (1618-1663) y Robert Hooke (1635-1703), fueron los iniciadores de la «teoría ondulatoria de la luz». Grimaldi observó la «difracción» que se producía dentro de la sombra de una varilla iluminada por una pequeña fuente; Hooke estudiando los colores de las burbujas y otras láminas delgadas, llega a la conclusión de que la luz es la vibración rapidísima de «algo», y que además, cada pulso de luz o vibración de ese algo generaba una esfera. La idea de Hooke es recogida por Christian Huygens (1629-1695), sabio danés que consagró su vida a la física, las matemáticas y la astronomía. La teoría ondulatoria de Huygens supone que *la energía emitida por el cuerpo luminoso se propaga en el vacío y en los enormes espacios vacíos que dejan entre sí los corpúsculos que constituyen la materia, por medio de un movimiento ondulatorio transversal. Como a la inteligencia, le era difícil concebir en aquel entonces un movimiento ondulatorio sin que éste se propague apoyado en un soporte material, para la explicación de la transmisión de la luz, sienta la hipótesis de que «la nada» está ocupada por una materia sutilísima y perfectamente elástica, a la que llama «éter lumínico».* El principio establecido por el sabio danés «principio de Huygens», explica perfectamente los fenómenos de reflexión y refracción (como vimos en el capítulo XVII), concluyendo correctamente que la luz disminuye la velocidad al penetrar en medios más densos. Sus descubrimientos sobre polarización de la luz y doble refracción en los cristales de calcita, no son sino confirmación de sus teorías.

Newton (1642-1727) fue partidario de la «Teoría de la emisión» (corpúscular) imaginando al cuerpo emisor de luz «como productor de partículas o granos de luz que cruzan el espacio a velocidades vertiginosas; estas partículas excitan el medio que atraviesan y en él se producen vibraciones más rápidas que las propias partículas». Como vemos tenía una cierta propensión para unificar la teoría de la emisión con la ondulatoria; no en vano fue el primero en descubrir, con la ayuda del prisma y de láminas delgadas (anillos de Newton), que la luz se descompone en lo que él llamó «spectrum» (fantasma; quizás porque doblegaba su creencia en la teoría corpúscular); observando las figuras de interferencia, veía la periodicidad de los fenómenos luminosos, además llegó a la conclusión de que la sensación del rojo correspondía a la vibración más larga del éter y el violeta a la más corta. Dedujo la ley de Snell basándose en la teoría de la emisión, suponiendo que las partículas de luz eran atraídas hacia la superficie de separación de dos medios, aumentando la componente de su velocidad en la dirección de la normal a la superficie de separación, como se indica en la Fig. XXIV-2 (razonando en base a su Ley de Gravitación Universal), y disminuyendo en caso contrario, no variando la componente transversal ( $c_x = c'_x$ ), llevándole a la relación de Descartes:  $\sin \varepsilon / \sin \varepsilon' = v'/v = cte$ ; esto lo condujo a la conclusión errónea de que la luz en medios más densos viaja con una velocidad mayor que en los menos densos. A pesar de su tendencia correcta a unificar ambas teorías, se inclinó cada vez más hacia la teoría corpúscular a medida que envejecía; quizás, su principal razón de rechazo de la teoría ondulatoria, era la explicación al problema de la propagación rectilínea en términos de ondas que se dispersan en todas las direcciones; problema que como ya se ha dicho, fue resuelto por su contemporáneo Huygens y que él desoyó.

El gran prestigio de Newton, hizo que los científicos del siglo XVII y comienzos del XVIII, hicieran poco caso a la teoría ondulatoria y atendieran a sus explicaciones. Más adelante, en el capítulo de Óptica Física, seguiremos esta historia de la Óptica; por ahora y salvo determinados argumentos que difieren de la óptica corpúscular (por ejemplo, que la velocidad de la luz en medios más densos es menor que en menos densos), la aplicamos para lo que se ocupa exclusivamente de las cuestiones relacionadas con la propagación de la luz en los diferentes medios; su desarrollo se basa en los conceptos de rayo luminoso, índice de refracción y en el Principio de Fermat, describiéndose como una geometría pura.

**XXIV – 3. Definiciones**

«RAYO LUMINOSO es una trayectoria (línea geométrica) que sigue la luz al ir de un foco luminoso a un receptor, su dirección coincide con la de propagación de la energía radiante».

Imaginemos un foco puntual (punto luminoso) (Fig. XXIV-3), emisor de luz en todas las direcciones; si ante él colocamos una lámina opaca con un orificio (DIAFRAGMA) de superficie A, habremos seleccionado lo que llamaremos:

«HAZ LUMINOSO: radiaciones luminosas transmitidas en el interior de una figura que tiene por vértice el punto luminoso y está limitada por una abertura de dimensión considerable en relación con la longitud de onda de las radiaciones que componen la luz».

Si, con nuestra imaginación, disminuimos las dimensiones del orificio, haciendo a su superficie menor que cualquier superficie, por pequeña que sea, en el límite, habremos aislado un RAYO LUMINOSO. Si pretendemos realizar esta experiencia, no conseguiremos aislar un rayo, pues al ir achicando el orificio, el estrecho haz que lo limita, se abre tras él; el fracaso de este intento es debido al fenómeno llamado de «difracción» que veremos en la Óptica Física.

Está claro que la óptica de rayos tiene limitada su aplicación, y hay que saber distinguir en qué condiciones debe utilizarse. Sin embargo, en la mayoría de los instrumentos ópticos, utilizaremos

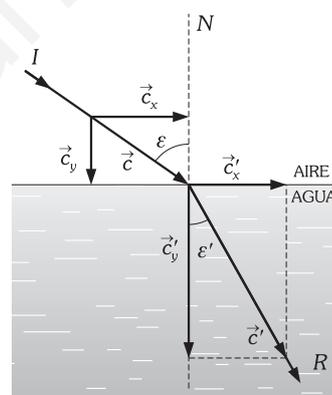


Fig. XXIV-2.- Razonamiento de Newton para explicar la ley de Snell.

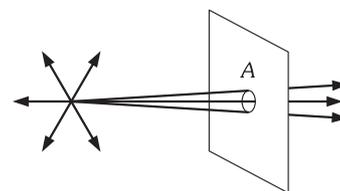


Fig. XXIV-3.- Haz luminoso.

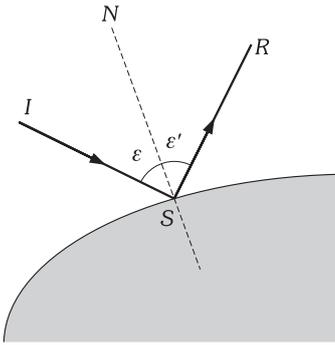


Fig. XXIV-4.- Reflexión de la luz.

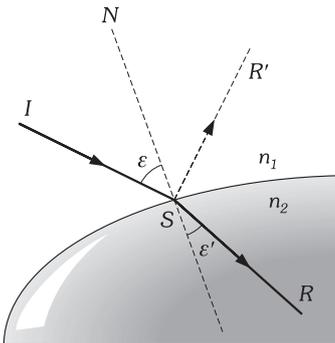


Fig. XXIV-5.- Refracción de la luz.

haces luminosos lo suficientemente anchos como para despreciar los efectos de la difracción; en este caso los rayos luminosos son de gran utilidad, explicándonos su funcionamiento.

«REFLEXIÓN es el retorno de la luz por el mismo medio en que se propagaba, al llegar a la superficie de separación de dos sustancias distintas». Se llama **ÁNGULO DE INCIDENCIA** ( $\epsilon$ ) el que forma el rayo incidente (IS) y la normal (SN) a la superficie. Se llama **ÁNGULO DE REFLEXIÓN** ( $\epsilon'$ ) el que forma el rayo reflejado (SR) y la normal (SN) (Fig. XXIV-4).

«La REFRACCIÓN es el cambio de velocidad que experimenta la luz al pasar de un medio a otro». Este cambio de velocidad se manifiesta por una variación en la dirección de propagación, en todos los casos, excepto cuando el rayo incidente es normal a la superficie de separación de los medios. **ÁNGULOS DE INCIDENCIA** ( $\epsilon$ ) y de **REFRACCIÓN** ( $\epsilon'$ ) son los formados por los rayos incidente (I) y refractado (R), con la normal (N) a la superficie en el punto de incidencia (S) (Fig. XXIV-5).

En las superficies refringentes la energía luminosa del rayo incidente se divide en dos, una que corresponde al rayo refractado R y otra al reflejado R'.

La luz viaja en los diferentes medios materiales con distinta velocidad ( $v$ ), siempre menor con la que lo hace en el vacío ( $c$ ). Ópticamente se caracterizan los medios transparentes por un escalar ( $n$ ) que se define como:

$$n = \frac{c}{v}$$

«ÍNDICE DE REFRACCIÓN ABSOLUTO de una sustancia es el cociente de dividir la velocidad de la luz en el vacío, por la velocidad de la luz en ella».

$n$  es siempre mayor que la unidad, puesto que  $v$  es menor que  $c$ . (El índice de refracción del aire se puede considerar la unidad, ya que su valor es 1,000 293).

Si  $c$ ,  $v$  y  $v'$  son respectivamente las velocidades de propagación de la luz en el vacío y en los medios 1 y 2, los índices de refracción de estos últimos tienen por valor:  $n = c/v$  y  $n' = c/v'$ .

«ÍNDICE DE REFRACCIÓN RELATIVO o índice de refracción de una sustancia con relación a otra, es el cociente obtenido al dividir el índice de refracción de la primera por el de la segunda».

Así el índice de refracción del medio 2, con relación al 1, es:  $n_{21} = \frac{n'}{n} = \frac{v}{v'}$

Las refringencias son inversamente proporcionales a las velocidades de la luz en los distintos medios. Como índice de refracción relativo se toma, siempre, el de la sustancia más refringente con respecto a la menos refringente; los índices de refracción relativos son mayores que la unidad.

«Se dice en óptica que el medio es **HOMOGÉNEO** e **ISÓTROPO** cuando la velocidad de la luz es la misma en todos sus puntos y direcciones, luego su índice de refracción es constante. Si esta velocidad varía con la dirección lo llamamos **ANISÓTROPO** y si varía de unos puntos a otros, pero en cada uno de ellos es independiente de la dirección, se llama **HETEROGÉNEO**».

«**DIOPTRIO** es la superficie de separación de dos medios de distinta refringencia».

«**SISTEMA ÓPTICO** es un conjunto de superficies que separan medios de distintos índices de refracción; si están formados por superficies esféricas con los centros alineados los llamaremos **SISTEMA ÓPTICO CENTRADO**; a la recta que uno los centros la denominaremos **EJE DEL SISTEMA**».

En todos los estudios que vamos a realizar nos referiremos a este tipo de sistemas (Fig. XXIV-6).

Un haz de rayos procedentes de un punto **OBJETO** (O en la Fig. XXIV-7) después de sufrir variaciones diversas en su propagación rectilínea, por la interposición de un sistema óptico, forma un haz que emerge del sistema óptico. Si los rayos, componentes de este haz concurren en un punto, en él se forma una **IMAGEN REAL**, (punto O' de la Fig. XXIV-7-1) la cual se puede hacer perfectamente visible colocando una pantalla en el lugar de la formación. Si los rayos emergentes no concurren, pero lo hacen sus prolongaciones en sentido contrario al de su propagación, el ojo, recogiendo el haz que sale del sistema, ve una imagen en la intersección de los rayos salientes, **IMAGEN VIRTUAL** (punto O' de la Fig. XXIV-7-2).

Es posible hablar de *objeto virtual* cuando la luz incidente sobre el sistema óptico es convergente. En la Fig. XXIV-7 se han representado todos los casos posibles, la zona sombreada nos representa un sistema óptico. Los casos de objeto virtual son posibles cuando hay dos o más sistemas acoplados (Fig. XXIV-8); en tal caso  $O_2 = O_1'$ , imagen de  $O_1$  producida por el primer sistema  $S_1$ , hace de objeto para el  $S_2$  que produce la imagen real  $O_2'$ .

ÍNDICES DE REFRACCIÓN ( $\lambda = 0,5893 \mu\text{m}$ )	
Aire (c.n.)	1,000 293
Metano (c.n.)	1,000 444
Cloro (c.n.)	1,000 773
Agua	1,336 9
Etanol	1,364 5
Disulfuro de Carbono	1,625 9
Hielo	1,309
Óxido de Al (rubí)	1,76
Diamante	2,417
Cuarzo fundido	1,458 5
Vidrio crown	1,517
Vidrio flint medio	1,627 3
Vidrio flint denso	1,655 5
Lucita (o plexiglás)	1,49
Polycarbonato (plástico)	1,605 6

«Los objetos pueden ser PUNTALES o EXTENSOS. Las imágenes de los objetos extensos están formadas por las imágenes puntuales de todos los puntos del objeto. En cualquier caso, objeto e imagen se dice que son CONJUGADOS respecto del sistema».

«Un sistema se llama ESTIGMÁTICO cuando se verifica que todo rayo que parte del punto objeto y es captado por el sistema, pasa por el mismo punto imagen».

En la Fig. XXIV-9 hemos dibujado un sistema que no es estigmático, si lo fuera los rayos emergentes del sistema (1', 2' y 3' en la figura) se encontrarían en un punto, como es el caso de las Figs. XXIV-7 y 8. En general, los sistemas no son estigmáticos y sólo con determinadas restricciones consideraremos al sistema como estigmático. (Como se verá más adelante, a la región en que el sistema es prácticamente estigmático se le llama zona paraxial o de Gauss).

«Se llama FOCO OBJETO de un sistema óptico estigmático, a un punto situado en el eje del sistema cuyo conjugado se encuentra en el infinito».

«Se llama FOCO IMAGEN de un sistema estigmático, al punto sobre el eje que es conjugado de uno que se encuentra sobre él y en el infinito».

«CONVERGENCIA o POTENCIA de un sistema estigmático es la inversa de su distancia focal imagen». La unidad de convergencia es la DIOPTRIA (dp): «convergencia de un sistema de distancia focal imagen un metro».

«Se llama CAMINO ÓPTICO (C) para un camino geométrico (s) de la luz, dentro de un medio homogéneo de índice de refracción (n) al producto de n por s».

$$C = ns$$

«Si la trayectoria que sigue la luz atraviesa diversos medios de distinto índice de refracción entonces:

$$C = \sum n_i s_i \tag{1}$$

siendo  $n_i$  los índices de refracción de los diversos medios por los que atraviesa la luz y  $s_i$  los diversos caminos geométricos recorridos en tales medios».

TEOREMA: «El camino óptico de un punto A a otro B coincide con el camino que recorrería la luz en el vacío, en el mismo tiempo que tarda en ir de A a B».

En efecto: teniendo en cuenta la definición de camino óptico y de índice de refracción, podemos escribir:

$$\sum n_i s_i = n_1 s_1 + n_2 s_2 + \dots = \frac{c}{v_1} s_1 + \frac{c}{v_2} s_2 + \dots = c \left( \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} + \dots \right)$$

El cociente del espacio a la velocidad es el tiempo empleado en recorrer los diversos caminos. La expresión anterior se transforma en:

$$\sum n_i s_i = c (t_1 + t_2 + \dots) = ct \tag{c.q.d.}$$

Si el medio es heterogéneo, también se verifica este teorema, ya que descomponiendo la trayectoria en elementos infinitesimales  $ds$ , en la expresión (1) el sumatorio se transforma en la integral correspondiente, y el camino óptico toma el valor:

$$C = \int_A^B n ds = \int_A^B \frac{c}{v} ds = c \int_A^B \frac{ds}{v} = c \int_A^B dt = c (t_B - t_A) = ct \tag{2}$$

#### XXIV - 4. Principio de Fermat

Una forma de comenzar el estudio de la Óptica Geométrica es tomar como hipótesis:

1. La propagación rectilínea de la luz en medios homogéneos.
2. La no interacción entre los rayos de luz.
3. El principio de reversibilidad de rayos.

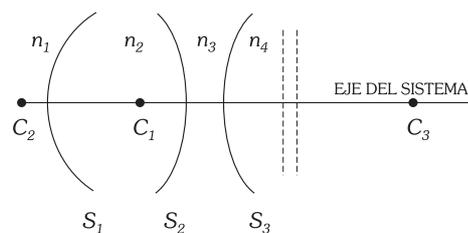


Fig. XXIV-6.- Sistema óptico centrado.

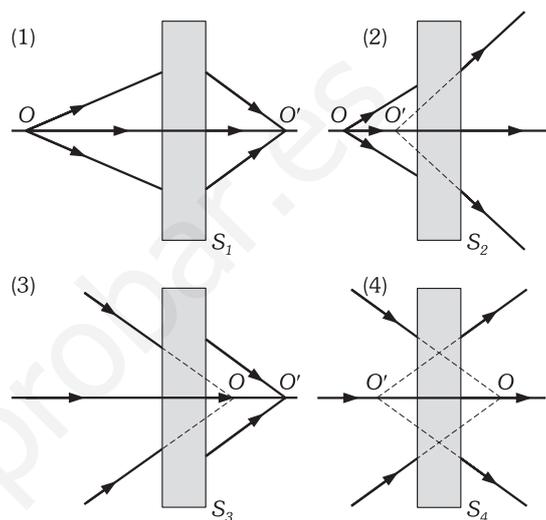


Fig. XXIV-7.- Las partes sombreadas de la figura (S) nos representan sistemas ópticos. (1) Objeto real e imagen real. (2) Objeto real e imagen virtual. (3) Objeto virtual e imagen real. (4) Objeto virtual e imagen virtual.

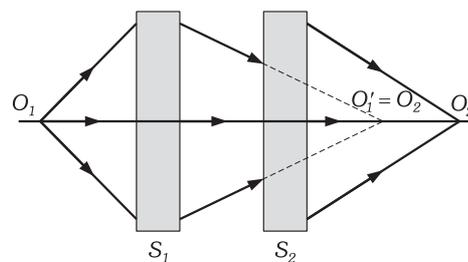


Fig. XXIV-8.- Sistemas ópticos acoplados compuestos.

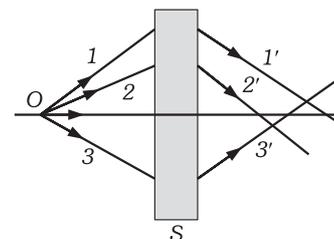


Fig. XXIV-9.- Sistema no estigmático.

4. La ley de los ángulos en la reflexión.
5. La ley de Snell.
6. La conservación del plano de incidencia en la reflexión y en la refracción.

Otra forma es: considerar la existencia del rayo de luz como un límite y tener en cuenta la naturaleza ondulatoria de la luz, adoptando como hipótesis fundamental el principio de Huygens, del que se deducen las leyes de la reflexión y la refracción, como ya vimos en el capítulo XVII.

Nosotros ignoraremos, por ahora, la naturaleza ondulatoria de la luz, y vamos a edificar la Óptica Geométrica partiendo del PRINCIPIO DE FERMAT y describiéndola en base a una geometría pura; de esta manera resultan como teoremas las hipótesis formuladas al principio.

EL PRINCIPIO DE FERMAT O HIPÓTESIS DEL TIEMPO MÍNIMO dice: «cuando la luz va de un punto a otro lo realiza en una trayectoria tal, que el tiempo empleado es mínimo» .

De la constancia de la velocidad de la luz en el vacío, del principio de Fermat y considerando la (2), deducimos de forma inmediata que:

«La trayectoria real seguida por la luz es aquella que hace mínimo el camino óptico».

**XXIV – 5. Consecuencias del Principio de Fermat. Leyes de la reflexión y de la refracción**

1.ª «En un medio homogéneo los rayos de luz se propagan en línea recta».

En efecto: si el medio es homogéneo el índice de refracción será el mismo en todos sus puntos, el camino óptico entre dos puntos cualesquiera A y B será:

$$C = \int_A^B n ds = n \int_A^B ds = n (s_B - s_A) = n s_{AB}$$

y será mínimo cuando lo sea la trayectoria geométrica entre A y B ( $s_{AB}$ ), correspondiéndole un segmento de recta, como queríamos demostrar.

Consecuencia inmediata y comprobación experimental de la propagación rectilínea de la luz es la formación de sombra al colocar un cuerpo opaco en las proximidades de un objeto luminoso. Si éste es un punto (Fig. XXIV-10) y los bordes del objeto no son afilados, los contornos de la sombra, son netos. Si el foco es extenso (Fig. XXIV-11) los conos de la sombra, producidos por cada uno de sus puntos, coinciden en su región central (sombra), no coincidiendo en su parte lateral (penumbra) que está iluminada por parte de los puntos del cuerpo luminoso. La penumbra es cada vez más luminosa conforme se aleja de la región de la sombra.

**PROBLEMA: 1.**

2.ª Cuando un rayo de luz se refleja en una superficie, el rayo incidente, la normal a la superficie reflectora en el punto de incidencia y el rayo reflejado están en un mismo plano, que es el de incidencia.

En efecto: sean dos puntos cualesquiera A y B situados en el mismo medio homogéneo de índice de refracción n. Un rayo de luz va de A a una superficie reflectante y llega a B (Fig. XXIV-12); llamando  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{u}'$  a los vectores unitarios en las direcciones de los rayos incidentes s y reflejado s', el camino óptico es:

$$C = n (s + s') = n (\mathbf{u} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{s}')$$

cuya diferencial es:  $dC = n (\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} + d\mathbf{u} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{u}' \cdot d\mathbf{s}' + d\mathbf{u}' \cdot \mathbf{s}')$

$d\mathbf{u}$  y  $d\mathbf{u}'$ , serán perpendiculares a  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{u}'$  respectivamente, puesto que estos últimos son unitarios, y por tanto  $d\mathbf{u} \cdot \mathbf{s} = d\mathbf{u}' \cdot \mathbf{s}' = 0$ ; si además tenemos en cuenta que  $d\mathbf{s} = d\mathbf{s}'$ , la anterior nos queda:

$$dC = n (\mathbf{u} + \mathbf{u}') \cdot d\mathbf{s}$$

para que el campo óptico sea mínimo tendrá que verificarse:  $dC = 0$ , lo cual será cierto cuando  $\mathbf{u} + \mathbf{u}'$  y  $d\mathbf{s}$  sean perpendiculares; llamando  $\boldsymbol{\eta}$  al vector unitario con la dirección perpendicular a la superficie reflectante en el punto de incidencia del rayo luminoso, y teniendo en cuenta que  $d\mathbf{s}$  es tangente a esta superficie en dicho punto,  $\mathbf{u} + \mathbf{u}'$  y  $\boldsymbol{\eta}$  tienen la misma dirección, y por tanto podemos escribir:

$$\mathbf{u} + \mathbf{u}' = a \boldsymbol{\eta} \quad (a \in \mathbb{R}) \tag{3}$$

para que esto se verifique  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}'$  y  $\boldsymbol{\eta}$  tienen que ser coplanarios, o lo que es lo mismo: el rayo incidente que tiene la dirección y sentido de  $\mathbf{u}$ , el rayo reflejado con dirección y sentido  $-\mathbf{u}'$  y el vector unitario normal a la superficie reflectora en el punto de incidencia  $\boldsymbol{\eta}$ , están en el mismo plano; como se quería demostrar.

3.ª «Los ángulos de incidencia y de reflexión son iguales».

$$\varepsilon = \varepsilon'$$

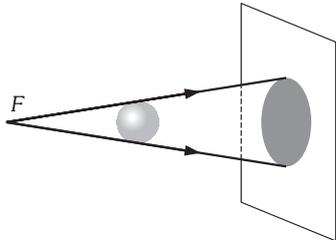


Fig. XXIV-10.- Formación de sombra con un foco puntual.

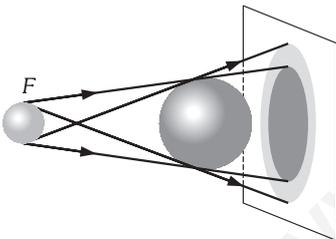


Fig. XXIV-11.- Sombra y penumbra producidas por un foco extenso.

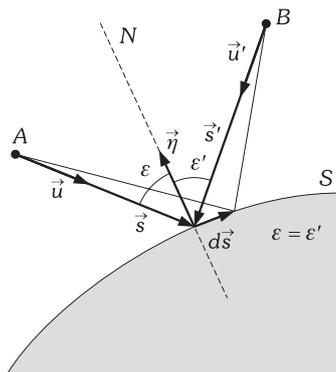


Fig. XXIV-12.- Reflexión de la luz.

En efecto: llamando  $\beta$  al vector unitario normal al plano de incidencia y dirigido hacia afuera del plano de la Fig. XXIV-12 y multiplicando vectorialmente la ecuación (3) por  $\eta$ , obtenemos:

$$\mathbf{u} \times \boldsymbol{\eta} + \mathbf{u}' \times \boldsymbol{\eta} = 0 \Rightarrow \text{sen } \varepsilon \boldsymbol{\beta} - \text{sen } \varepsilon' \boldsymbol{\beta} = 0 \Rightarrow \text{sen } \varepsilon = \text{sen } \varepsilon' \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon' \quad \text{c.q.d.}$$

**PROBLEMAS: 2 al 6.**

4ª. «Cuando un rayo luminoso se refracta en la superficie de separación de dos medios, el rayo incidente, la normal a la superficie en el punto de incidencia y el rayo refractado están en un mismo plano, que es el de incidencia».

En efecto: Sea A un punto situado en un medio homogéneo de índice de refracción  $n$  y otro B situado en otro medio homogéneo de índice de refracción  $n'$ ; ambos medios se encuentran separados por una superficie S (Fig. XXIV-13); procediendo analíticamente de la misma forma que lo hemos hecho para la reflexión, resulta:

$$C = ns + n's' = n\mathbf{u} \cdot \mathbf{s} + n'\mathbf{u}' \cdot \mathbf{s}' \Rightarrow dC = n d\mathbf{u} \cdot \mathbf{s} + n\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} + n' d\mathbf{u}' \cdot \mathbf{s}' + n'\mathbf{u}' \cdot d\mathbf{s}' + n'\mathbf{u}' \cdot d\mathbf{s}'$$

y como:  $d\mathbf{u} \cdot \mathbf{s} = d\mathbf{u}' \cdot \mathbf{s}' = 0 \quad \wedge \quad d\mathbf{s} = d\mathbf{s}'$

y la condición de camino óptico mínimo, tendremos:

$$dC = (n\mathbf{u} + n'\mathbf{u}') \cdot d\mathbf{s} = 0 \Rightarrow n\mathbf{u} + n'\mathbf{u}' = b\boldsymbol{\eta} \quad (b \in R) \quad (4)$$

en consecuencia: el rayo incidente que tiene la dirección y sentido de  $\mathbf{u}$ , el rayo refractado con dirección y sentido  $-\mathbf{u}'$  y el vector unitario normal a la superficie de separación de ambos medios en el punto de incidencia  $\boldsymbol{\eta}$ , son coplanarios; quedando así demostrado el teorema.

5ª. «La relación entre los senos de los ángulos de incidencia y los de refracción es una cantidad constante, igual al cociente entre el índice de refracción del segundo medio y el índice de refracción del primero» (LEY DE SNELL).

$$\frac{\text{sen } \varepsilon}{\text{sen } \varepsilon'} = \frac{n'}{n} = \text{cte} \Leftrightarrow \boxed{n \text{ sen } \varepsilon = n' \text{ sen } \varepsilon'}$$

En efecto: utilizando  $\boldsymbol{\beta}$ , definido para la reflexión y multiplicando vectorialmente (4) por  $\boldsymbol{\eta}$ , obtenemos:

$$n\mathbf{u} \times \boldsymbol{\eta} + n'\mathbf{u}' \times \boldsymbol{\eta} = 0 \Rightarrow n \text{ sen } \varepsilon \boldsymbol{\beta} - n' \text{ sen } \varepsilon' \boldsymbol{\beta} = 0 \Rightarrow n \text{ sen } \varepsilon = n' \text{ sen } \varepsilon' \quad \text{c.q.d.}$$

6ª. «Si un rayo de luz va de un punto a otro siguiendo una trayectoria, puede ir del segundo al primero recorriendo el mismo camino en sentido inverso» (LEY DE REVERSIBILIDAD DE RAYOS).

La demostración es inmediata, puesto que si la luz siguiera el camino en el sentido inverso BA a como lo hemos tomado en la reflexión y en la refracción, el camino óptico mínimo seguiría correspondiendo al mismo trayecto.

**PROBLEMAS: 7 al 9.**

**XXIV - 6. Construcción geométrica del rayo refractado**

Sea CD (Fig. XXIV-14) la superficie de separación de dos medios de índices de refracción  $n$  y  $n'$ , IS es el rayo incidente. Se trata de trazar el rayo refractado conocidos  $n$ ,  $n'$  y la dirección de incidencia.

Con centro en S y con radios SA y SA', respectivamente iguales a  $n$  y  $n'$ , se trazan dos circunferencias. Por el punto P (intersección de la prolongación del rayo incidente y la circunferencia de radio  $n$ ), se traza una paralela a la normal NM. El punto en que esta recta N'M' corta a la circunferencia de radio  $n'$  (punto P') unido con S, determina el rayo refractado SR.

En efecto: el ángulo de incidencia  $\varepsilon$  es igual al  $\widehat{SPS}'$  por correspondientes; su seno es (triángulo SPS'):  $\text{sen } \varepsilon = SS'/SP$ . El ángulo  $\varepsilon'$  (que queremos demostrar es el de refracción) es igual a  $\widehat{SP'S}$  por alternos internos; su seno es (triángulo SP'S):  $\text{sen } \varepsilon' = SS'/SP'$ . El cociente de los dos senos es:

$$\frac{\text{sen } \varepsilon}{\text{sen } \varepsilon'} = \frac{SP'}{SP} = \frac{n'}{n} \Rightarrow n \text{ sen } \varepsilon = n' \text{ sen } \varepsilon'$$

Por cumplirse las leyes de la refracción, SR es el rayo refractado.

**XXIV - 7. Ángulo límite y reflexión total. Aplicaciones**

ÁNGULO LÍMITE es el ángulo de incidencia que corresponde a uno de refracción de  $90^\circ$ .

Al rayo A (normal) (Fig. XXIV-15) corresponde el refractado A' (normal); al B el B', apartado de la normal más que el incidente; a C el C' rasante a la superficie. El ángulo de incidencia  $l$ , que corresponde el refractado  $A'SC' = 90^\circ$ , es el ángulo límite.

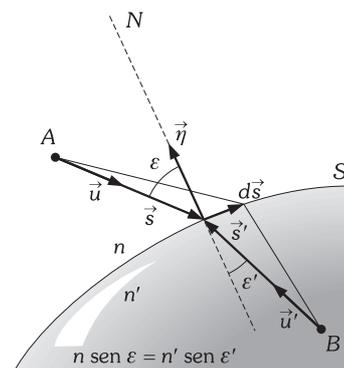


Fig. XXIV-13.- Refracción de la luz.

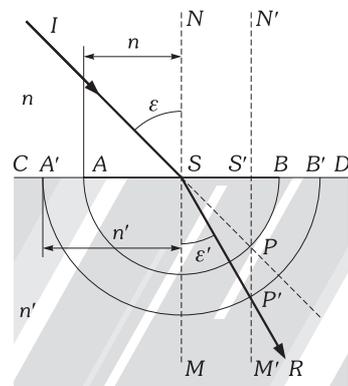


Fig. XXIV-14.- Construcción geométrica de Huyghens del rayo refractado.

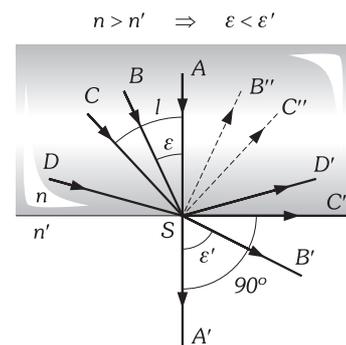


Fig. XXIV-15.- Ángulo límite y reflexión total.

A un rayo  $D$  que incide con ángulo mayor que el límite no corresponde rayo refractado, reflejándose en la superficie de separación de los dos medios y verificando el fenómeno de la *reflexión total*, llamado así porque toda la intensidad del rayo incidente la contiene el rayo reflejado, a diferencia de los rayos que inciden con ángulo igual o menor que el límite ( $B$ ) cuya intensidad se reparte entre el refractado ( $B'$ ) y el reflejado ( $B''$ ), de puntos en la figura.

Para que se verifique el fenómeno de la REFLEXIÓN TOTAL son necesarios dos condiciones: que la luz vaya en un medio más hacia otro menos refringente y que incida con un ángulo mayor que el límite.

La ley general de la refracción aplicada en el caso que  $\epsilon$  sea el ángulo límite y en consecuencia,  $\epsilon' = 90^\circ$ , se transforma en:

$$n \operatorname{sen} l = n' \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} l = \frac{n'}{n}}$$

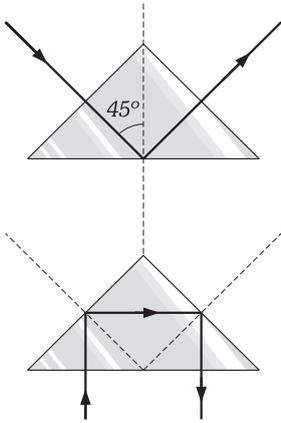


Fig. XXIV-16.- Prismas de reflexión total.

La reflexión total tiene muchas aplicaciones. Así, por ejemplo, el PRISMA DE REFLEXIÓN TOTAL es utilizado en diversos instrumentos ópticos como el periscopio, los prismáticos, etc. Consiste en un prisma isósceles rectángulo de un vidrio cuyo ángulo límite sea menor que  $45^\circ$  (Fig. XXIV-16), la luz que incide normalmente en una de las caras sigue la marcha indicada en las figuras, verificándose la reflexión total al cumplirse las condiciones especificadas en el párrafo anterior. En el periscopio, la marcha de la luz es la indicada en la Fig. XXIV-17.

Las FIBRAS ÓPTICAS son otra aplicación de la reflexión total; se fabrican con vidrios y plásticos de alto índice de refracción y de un diámetro de unos pocos micrómetros. La Fig. XXIV-18 nos hace comprender su fundamento; la luz, penetra normalmente a la superficie extrema plana, quedando atrapada en su interior si el rayo incidente, en sus múltiples reflexiones con las paredes, sufre el fenómeno de reflexión total, hasta salir por el otro extremo plano. Estas fibras se agrupan en manojos flexibles formados por agrupaciones de éstas para formar lo que llamamos un «tubo de luz», pudiéndose transmitir la luz a través de él rodeando obstáculos y a distancias muy largas casi sin pérdidas; en su formación debe, cada fibra, aislarse ópticamente, mediante un recubrimiento muy fino de un material cuyo índice de refracción sea menor que el de la fibra, y colocándolas de forma que queden paralelas entre sí (Fig. XXIV-19).

En medicina tienen su aplicación, ya que por su flexibilidad pueden transmitir imágenes muy claras del interior del cuerpo humano con los llamados broncoscopios, citoscopios, microscopios hipodérmicos, etc., todos ellos construidos con estas fibras.

Los refractómetros son aparatos que sirven para medir el índice de refracción de cuerpos transparentes; su fundamento es: se ilumina por el sector  $AB$  una semiesfera de vidrio con rayos que inciden en direcciones radiales (Fig. XXIV-20). En su cara plana se ha colocado una gota del líquido cuyo índice de refracción se trata de medir y que es de menor refringencia que el vidrio de la semiesfera. Los rayos correspondientes a la región  $AC$ , por incidir con un ángulo mayor que el límite sufren la reflexión total; los que inciden con menor ángulo (de  $C$  a  $B$ ) en parte se refractan y en parte se reflejan.

Al observar con un antejo, la región  $BC'$  se ven dos regiones distintamente iluminadas: la  $BL$  más oscura y la  $LC'$  más luminosa, netamente separadas entre sí. La medida del ángulo  $BOL$  da el ángulo límite. Como se ha de cumplir:  $n \operatorname{sen} l = n' \operatorname{sen} 90^\circ \Rightarrow n' = n \operatorname{sen} l$ . Si  $n$  (índice de refracción del vidrio de la semiesfera) no se conoce, se hace una previa determinación en la que el medio 2 es el aire.

**PROBLEMAS: 10 al 15.**

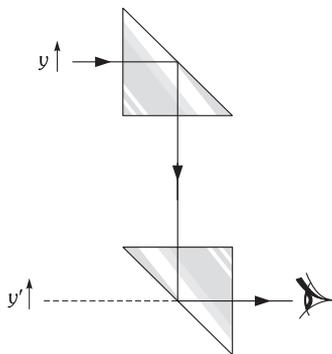


Fig. XXIV-17.- Marcha de los rayos en un periscopio.

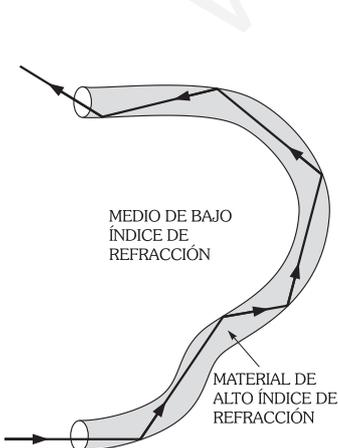


Fig. XXIV-18.- Fibra óptica.

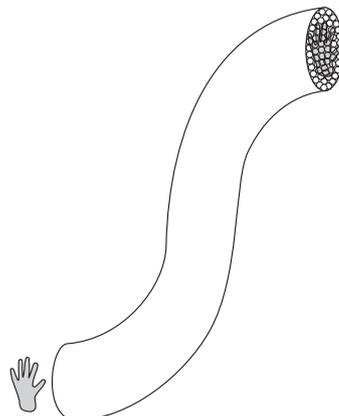


Fig. XXIV-19.- Tubos de luz. Imagen óptica en un tubo.

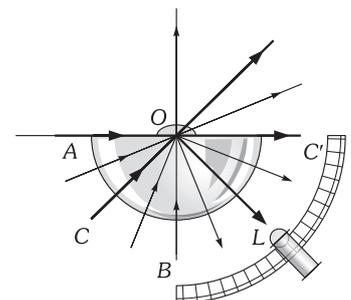


Fig. XXIV-20.- Fundamento de un refractómetro.

**XXIV – 8. Refracción en superficies planas**

«El DIOPTRIO PLANO es una superficie plana que separa dos medios transparentes de distinta refringencia.» Un dioptrio plano forma imágenes virtuales de los objetos reales (Fig. XXIV-21).

Las imágenes se ven a menor distancia de la superficie que la distancia real del objeto, si el medio de observación es el menos refringente.

Un bastón introducido en agua se ve torcido por un observador cuyo ojo está en la posición indicada en la Fig. XXIV-22; el extremo que está en  $O$ , parece estar en  $O'$ .

Si la observación se hace desde el medio más refringente (mirar objetos situados en el aire, desde dentro del agua) las imágenes se forman más distanciadas de la superficie que el objeto (Fig. XXIV-23).

**PROBLEMA: 16.**

**XXIV – 9. Paso de la luz a través de láminas de caras planas y paralelas**

Supongamos un rayo de luz que atraviesa una lámina de vidrio de caras paralelas, limitadas por medio de índices de refracción  $n_1, n_2$  y  $n_3$ , se habrá de cumplir:  $n_1 \text{ sen } \varepsilon_1 = n_2 \text{ sen } \varepsilon'_1$  y  $n_2 \text{ sen } \varepsilon'_2 = n_3 \text{ sen } \varepsilon_2$ , pero como  $\varepsilon'_1 = \varepsilon_2$  (alternos internos), se cumple:  $n_1 \text{ sen } \varepsilon_1 = n_3 \text{ sen } \varepsilon_2$ .

Si los medios exteriores en contacto con las caras son idénticos (aire, por ejemplo) al ser:  $n_1 = n_3 \Rightarrow \text{sen } \varepsilon_1 = \text{sen } \varepsilon_2$  y, puesto que los ángulos son agudos:  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ .

«El rayo emergente es paralelo al incidente si los medios en contacto con las caras de la lámina son idénticos».

El rayo incidente sufre, en tal caso, un desplazamiento  $d$  paralelamente a sí mismo, que es directamente proporcional al espesor  $e$  de la lámina, crece con el ángulo de incidencia y varía con los índices de refracción:  $d = f(e, \varepsilon_1, n_1, n_2)$ .

En efecto: de la Fig. XXIV-24, se obtiene:

$$d = SS' \text{ sen } (\varepsilon_2 - \varepsilon'_2) = \frac{e}{\cos \varepsilon'_1} \text{ sen } (\varepsilon_1 - \varepsilon'_1)$$

y teniendo en cuenta la ley de refracción ( $n_1 \text{ sen } \varepsilon_1 = n_2 \text{ sen } \varepsilon'_1$ ), se obtiene, después de desarrollar la anterior:

$$d = e \text{ sen } \varepsilon_1 \left( 1 - \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2 \text{ sen}^2 \varepsilon_1}}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \text{ sen}^2 \varepsilon_1}} \right)$$

Un caso particular interesante es la marcha de la luz en una pila de láminas paralelas de índice de refracción decreciente. La luz procedente del punto  $P$  (Fig. XXIV-26) al pasar del medio  $A$  a otro menos refringente  $B$  se aleja de la normal; la luz pasa a sucesivos medios alejándose, en todos ellos, de la normal y rebasando el ángulo límite en una de las superficies de separación, sufre la reflexión total, retornando, en orden inverso, por los distintos medios, acercándose a la normal en las nuevas refracciones. Un ojo colocado en  $O$  ve la imagen del punto  $P$  en  $P'$  y el verdadero objeto  $P$  en su posición por los rayos directos. Este fenómeno (*espejismo*) se produce en el desierto (y en la carretera) debido a la gran temperatura de la arena y disminución de la densidad e índice de refracción de las capas que están en contacto con ella. Aunque estas capas de menor densidad ascienden con rapidez, son sustituidas, instantáneamente, por otras en las mismas condiciones.

El caso inverso al descrito es el que se produce en la atmósfera debido a que el índice de refracción del aire disminuye al aumentar la altura, pudiéndola considerar como una sucesión de capas esféricas; de forma que la luz que procede de los cuerpos celestes, como el Sol y las estrellas,

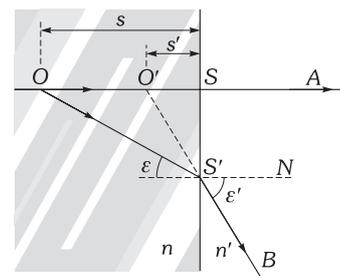


Fig. XXIV-21.– Imagen en un dioptrio plano ( $n > n'$ ).

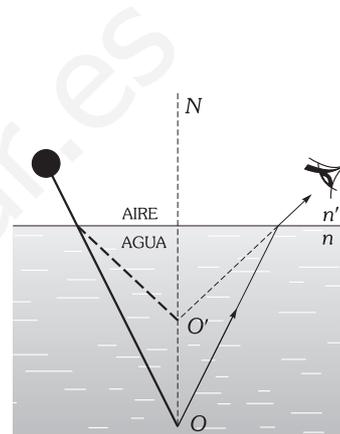


Fig. XXIV-22.– La imagen  $O'$  está más próxima a la superficie que el objeto  $O$  cuando  $n > n'$ .

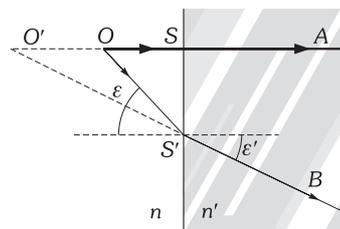


Fig. XXIV-23.– La imagen  $O'$  está más alejada de la superficie de separación de ambos medios que  $O$  (objeto), cuando  $n < n'$ .

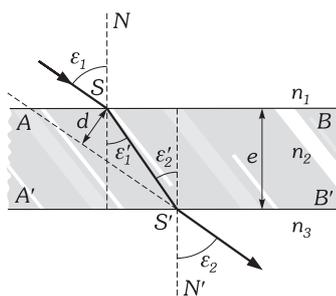


Fig. XXIV-24.– Marcha de un rayo de luz en una lámina plano-paralela.

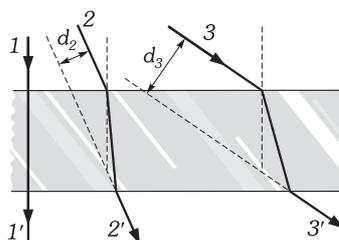


Fig. XXIV-25.– Variaciones del desplazamiento en una lámina plano-paralela.

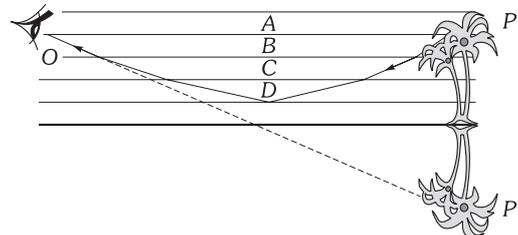


Fig. XXIV-26.– Espejismo.

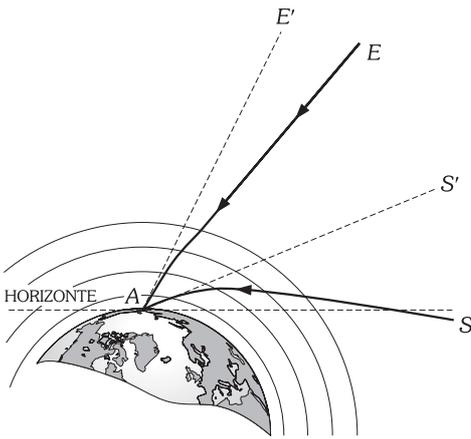


Fig. XXIV-27.- Refracción atmosférica.

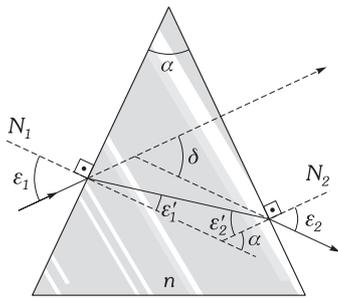


Fig. XXIV-28.- Marcha de la luz en un prisma.

por ejemplo de E (Fig. XXIV-27), para un observador situado en A, es percibida como si procediera de E', incluso puede verse la imagen de un astro cuya posición real está bajo el horizonte, como se indica en la figura para el caso de la estrella S.

PROBLEMAS: 17 al 19.

**B) PRISMA ÓPTICO**

**XXIV - 10. Prisma**

Un PRISMA ÓPTICO es un medio refringente limitado por caras planas que se cortan (ellas o sus prolongaciones). **ÁNGULO DE REFRACTANCIA del prisma** es el ángulo que forman entre sí sus dos caras.

Supongamos que la substancia que forma el prisma (vidrio) es más refringente que el medio que está en contacto con sus caras (aire); entonces, la luz que llega al prisma incidiendo con un ángulo  $\epsilon_1$  (Fig. XXIV-28), se acerca a la normal,  $N_1$ , por pasar de un medio menos a otro más refringente, y forma con ella un ángulo  $\epsilon'_1$ , cumpliéndose:

$$\frac{\text{sen } \epsilon_1}{\text{sen } \epsilon'_1} = n$$

La luz que se propaga en el interior del prisma llega a la segunda cara formando con su normal  $N_2$ , un ángulo  $\epsilon'_2$  y cuando emerge (para lo cual  $\epsilon'_2$  ha de ser igual o menor que el ángulo límite) lo hace alejándose de la normal por pasar del vidrio a aire:

$$\frac{\text{sen } \epsilon_2}{\text{sen } \epsilon'_2} = n$$

el rayo de luz se acerca a la base del prisma.

El ángulo de refringencia del prisma es igual al que forman entre sí las normales, por tener los lados perpendiculares; este ángulo, como exterior de un triángulo, es igual a la suma de los interiores no adyacentes:

$$\alpha = \epsilon'_1 + \epsilon'_2 \tag{5}$$

Se llama **ÁNGULO DE DESVIACIÓN ( $\delta$ )** al ángulo formado por las direcciones de propagación de los rayos incidente y emergente.

Este ángulo, como exterior de un triángulo, tiene por valor:

$$\delta = (\epsilon_1 - \epsilon'_1) + (\epsilon_2 - \epsilon'_2) = \epsilon_1 + \epsilon_2 - (\epsilon'_1 + \epsilon'_2) \Rightarrow \delta = \epsilon_1 + \epsilon_2 - \alpha$$

El conjunto de las cuatro fórmulas citadas (fórmulas del prisma) contiene siete magnitudes:  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon'_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon'_2$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $n$ . Conocidas tres de ellas  $\epsilon_1$ ,  $n$  y  $\alpha$ , se pueden determinar las demás, por constituir un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Interesa particularmente el valor del ángulo de desviación que, como consecuencia de la afirmación anterior, es:

$$\delta = f(\epsilon_1, \alpha, n)$$

«El ángulo de desviación es función del ángulo de incidencia, del de refringencia y del índice de refracción del prisma».

Los rayos que intervienen en la formación de la imagen son los expresados en la Fig. XXIV-29 y el haz cónico del vértice P' es el captado por el ojo del observador.

«En un prisma las imágenes de los objetos reales son virtuales».

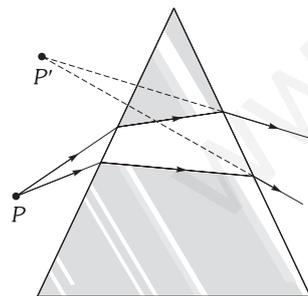


Fig. XXIV-29.- Formación de imágenes en un prisma.

**XXIV - 11. Emergencia de la luz en un prisma**

Para que la luz salga por la segunda cara, después de atravesar el prisma, es necesario que se cumplan determinadas condiciones relativas al valor del ángulo de refringencia y al de incidencia.

El rayo que llega al prisma puede incidir con un ángulo  $\epsilon_1$ , comprendido entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ . El ángulo  $\epsilon'_1$  toma, en consecuencia, valores comprendidos entre  $0^\circ$  y  $l^\circ$  (ángulo límite y reversibilidad de rayos):  $0 \leq \epsilon'_1 \leq l$ .

Para que exista emergencia es necesario que  $\epsilon'_2$  tome valores comprendidos entre  $0^\circ$  y  $l^\circ$ , pues si es mayor que  $l^\circ$  se verifica, en la segunda cara, la reflexión total:  $0 \leq \epsilon'_2 \leq l$ ; para estos valores de  $\epsilon'_2$  (de  $0^\circ$  a  $l^\circ$ ), corresponden al ángulo de emergencia valores de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ .

Condiciones que debe cumplir el ángulo de refringencia: Si sumamos miembro a miembro las dos desigualdades anteriores obtendremos:  $\epsilon'_1 + \epsilon'_2 \leq 2l$ ; y como:

$$\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 = \alpha \Rightarrow \boxed{\alpha \leq 2l}$$

«El ángulo de refringencia del prisma no puede ser mayor que el doble del ángulo límite de la sustancia, para que exista emergencia».

Condiciones que debe cumplir el ángulo de incidencia: De (5) obtenemos:  $\varepsilon'_1 = \alpha - \varepsilon'_2$ , y como  $0 \leq \varepsilon'_2 \leq l$ , se puede escribir:  $0 \geq \varepsilon'_2 - l$ , sumando miembro a miembro:  $\varepsilon'_1 \geq \alpha - l$ , y teniendo en cuenta que  $0 \leq \varepsilon'_1 \leq l$ , obtendremos la limitación:

$$l \geq \varepsilon'_1 \geq \alpha - l \Rightarrow \text{sen } l \geq \text{sen } \varepsilon'_1 \geq \text{sen } (\alpha - l)$$

y multiplicando los tres miembros para  $n$ :

$$n \text{ sen } l \geq n \text{ sen } \varepsilon'_1 \geq n \text{ sen } (\alpha - l) \Rightarrow \boxed{1 \geq n \text{ sen } \varepsilon'_1 \geq n \text{ sen } (\alpha - l)}$$

que expresa la condición que debe cumplir el ángulo de incidencia.

**XXIV - 12. Mínima desviación. Medidas de índices de refracción**

Si se hace girar a un prisma alrededor de un eje paralelo a su arista (Fig. XXIV-30) se pueden observar, por un ateojo convenientemente dispuesto sobre un limbo graduado, las variaciones de dirección del rayo emergente, encontrando una posición para la cual existe la mínima desviación, es decir, el rayo emergente se propaga en la dirección que forma un menor ángulo con el rayo incidente  $I$ . La medida del ángulo  $E'I$  da el ángulo de mínima desviación  $\delta_m$ .

Este hecho se verifica cuando el rayo en el interior del prisma es normal al plano bisector, es decir, cuando:  $\varepsilon'_1 = \varepsilon'_2 \Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ . En la posición de mínima desviación las fórmulas del prisma se transforman en:

$$\begin{aligned} 2\varepsilon'_2 = \alpha &\Rightarrow \varepsilon'_1 = \alpha/2 \\ \delta_m = 2\varepsilon_1 - \alpha &\Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{\delta_m + \alpha}{2} \end{aligned} \Rightarrow \boxed{n = \frac{\text{sen } \varepsilon_1}{\text{sen } \varepsilon'_1} = \frac{\text{sen } \frac{\delta_m + \alpha}{2}}{\text{sen } \frac{\alpha}{2}}}$$

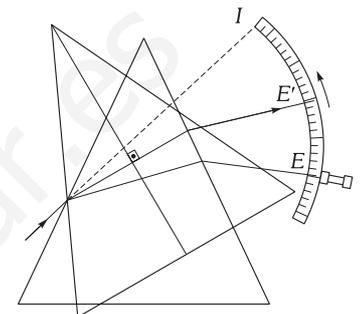


Fig. XXIV-30.- Medida de las variaciones de dirección del rayo emergente.

Medido el ángulo del prisma por el método de reflexión (párrafo XXIV-29) y el ángulo de mínima desviación, como se ha descrito en este párrafo, queda determinado el índice de refracción del prisma.

**PROBLEMAS: 20 al 23.**

**XXIV - 13. Prismas de pequeño ángulo**

En los prismas de pequeño ángulo, si se considera un pequeño ángulo de incidencia, se pueden confundir los senos con los ángulos. Las cuatro fórmulas del prisma se transforman en:  $\varepsilon_1/\varepsilon'_1 = n \Rightarrow \varepsilon_1 = n\varepsilon'_1$ ,  $\varepsilon_2/\varepsilon'_2 = n \Rightarrow \varepsilon_2 = n\varepsilon'_2$ , y como:  $\alpha = \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2$

$$\delta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \alpha = n\varepsilon'_1 + n\varepsilon'_2 - \alpha = n(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2) - \alpha = n\alpha - \alpha \Rightarrow \boxed{\delta = \alpha(n - 1)}$$

«El ángulo de desviación en un prisma óptico es independiente del ángulo de incidencia, cuando el ángulo de refringencia del prisma y el de incidencia son lo suficientemente pequeños para poderlos confundir con sus senos».

**C) DIOPTRIO ESFÉRICO**

**XXIV - 14. Dioptrio esférico. Convenio de signos**

«El DIOPTRIO ESFÉRICO es una superficie esférica que separa dos medios transparentes de distinta refringencia».

Un rayo incidente  $OI$  (Fig. XXIV-31) que procede de un punto en el eje, atraviesa el dioptrio, se acerca a la normal  $NC$  ( $C$  centro de curvatura del dioptrio), si el medio en que penetra la luz es más refringente que el de incidencia, y se propaga en el segundo medio en la dirección  $IO'$ . El rayo incidente  $OC$ , no sufre desviación en el segundo medio, por seguir la dirección de la normal. Considerando los rayos incidentes  $OI$  y  $OC$ , el punto  $O'$  es la imagen de  $O$ .

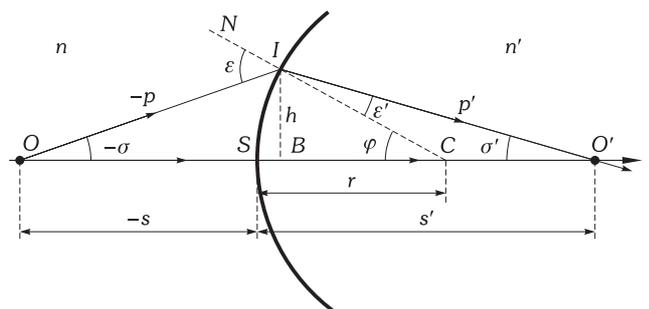


Fig. XXIV-31.- Marcha de rayos de luz en un dioptrio esférico.

CONVENIO DE SIGNOS. En todas nuestras construcciones geométricas la luz se propagará de izquierda a derecha. El origen de coordenadas es  $S$  (polo del casquete esférico); a partir de este punto contaremos las distancias en el sentido de la luz incidente.

**DISTANCIAS.** Puntos a la izquierda de  $S$  tienen abscisa negativa y a la derecha, positiva, puntos en el semiplano superior al eje  $SC$ , tienen ordenada positiva y en el inferior, negativa.

**ÁNGULOS.** Los ángulos que forman los rayos con el eje son positivos si al llevar el rayo sobre el eje por el menor ángulo, el sentido de giro es contrario a las agujas de un reloj; en caso contrario son negativos.

Los ángulos que forman los rayos con la normal al dioptrio son positivos si al llevar el rayo sobre la normal por el menor ángulo, el sentido de giro es el de las agujas de un reloj; en el caso contrario son negativos.

Según este convenio, expresando las magnitudes con valor y signo, tendremos para ángulos y distancias los valores expresados en la figura XXIV-31.

**XXIV – 15. Puntos conjugados en el dioptrio esférico**

Tratamos de hallar la relación que liga a las posiciones de los puntos objeto e imagen (puntos conjugados) con las características del dioptrio (índices de refracción de entrada y salida  $n$ ,  $n'$  y el radio  $r$  del dioptrio).

En los triángulos  $OIC$  y  $O'IC$ , se verifica:

$$\frac{\text{sen } \varepsilon}{\text{sen } \varphi} = \frac{-s+r}{-p} \quad (\varepsilon, \text{ suplemento de } \widehat{OIC}) \quad \frac{\text{sen } \varepsilon'}{\text{sen } \varphi} = \frac{s'-r}{p'} \quad (\varphi, \text{ suplemento de } \widehat{ICO'})$$

por división y considerando que  $n \text{ sen } \varepsilon = n' \text{ sen } \varepsilon'$ :

$$\frac{\text{sen } \varepsilon}{\text{sen } \varepsilon'} = \frac{s-r}{s'-r} \frac{p'}{p} = \frac{n'}{n} \Rightarrow \boxed{n \frac{s-r}{p} = n' \frac{s'-r}{p'}} \quad (6)$$

de la que deducimos que la posición del punto imagen  $O'$  (determinada por  $s'$ ), depende no sólo de las características del dioptrio, sino de  $p$  y  $p'$  cuyos valores dependen de la inclinación de los rayos que hayamos considerado en la formación de la imagen, correspondiendo así, en general, infinitos puntos imágenes del mismo punto objeto\*. *El dioptrio esférico no es un sistema estigmático.*

**XXIV – 16. Zona paraxial o de Gauss**

*Es aquella en que los rayos de luz que intervienen en la formación de la imagen son muy próximos al eje, verificándose que la altura ( $IB$ ), en que el rayo más alejado del eje encuentra al dioptrio, así como la distancia  $SB$  son despreciables frente a los valores de  $s$ ,  $s'$  y  $r$ . En la zona paraxial los ángulos medidos en radianes se confunden con sus senos y tangentes.*

Así, expresando todas las magnitudes con su valor y signo, y llamando  $h$  a  $IB$ , podremos escribir (Fig. XXIV-31):

$$\boxed{-\sigma = \frac{h}{-s}} \quad \boxed{\sigma' = \frac{h}{s'}}$$

y expresar la ley de refracción por:  $\boxed{n \varepsilon = n' \varepsilon'}$

Siendo  $h$  y  $SB$  despreciables, se verificará así mismo:  $\boxed{-p = -s}$   $\boxed{p' = s'}$

fórmulas a las que haremos referencia en todo el estudio del dioptrio esférico considerando rayos paraxiales.

**XXIV – 17. Imágenes paraxiales en el dioptrio esférico. Invariante de Abbe**

Considerando la zona paraxial, tenemos:  $-s = -p$  y  $s' = p'$ ; que sustituidas en (6) nos da:

$$n \frac{s-r}{s} = n' \frac{s'-r}{s'} \Rightarrow n \left[ 1 - \frac{r}{s} \right] = n' \left[ 1 - \frac{r}{s'} \right] \Rightarrow \boxed{n \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right] = n' \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{s'} \right]} \quad (7)$$

A cada uno de los miembros de la expresión anterior se le llama INVARIANTE DE ABBE, el cual permanece constante siempre que los haces de luz que intervienen en la formación de la imagen pertenezcan a la zona paraxial. En tal zona:  $s' = f(s, n, n', r)$ , es decir: para un determinado dioptrio la posición del punto imagen (dada por  $s'$ ) depende tan sólo de la del punto objeto (dada

\* Hay que advertir que en el dioptrio esférico existen dos determinados puntos objeto e imagen con correspondencia estigmática.

por  $s$ ); pudiendo considerar que se cumple la condición de *estigmatismo* en la zona paraxial o de Gauss. De la fórmula anterior se obtiene fácilmente:

$$\boxed{-\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n' - n}{r}} \quad (8)$$

que es otra forma de expresar la ecuación (6). En adelante consideraremos la zona paraxial en el dioptrio esférico.

**XXIV – 18. Dioptrio plano en visión perpendicular a su plano**

Cuando se mira normalmente a la superficie (zona paraxial;  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  son iguales o muy cercanos a  $0^\circ$ ) las distancias de ésta al objeto  $SO = s$  y la imagen  $SO' = s'$  (Figs. XXIV-21 y 23) están ligadas con los índice de refracción por la expresión:

$$\boxed{\frac{n}{s} = \frac{n'}{s'}}$$

En efecto: si en la fórmula del invariante de Abbe hacemos  $r = \infty$ , queda demostrada la anterior afirmación. Al ser  $n$  y  $n'$  positivos,  $s$  y  $s'$  serán del mismo signo y por tanto situadas al mismo lado de dioptrio produciéndose, así, imágenes *virtuales*.

Observemos un punto  $O_1$  (Fig. XXIV-32) a través de una lámina de caras planas y paralelas realizando la visión normalmente a sus caras; los medios en contacto con las caras son idénticos. La imagen del punto objeto  $O_1$  en el dioptrio  $AB$  cumple la condición  $s_1/n_1 = s_2/n_2$ , el punto  $O_2$  hace de objeto con respecto al dioptrio  $CD$ , verificándose:

$$\frac{s'_2}{n_2} = \frac{s_3}{n_1} \Rightarrow \frac{s_2 + e}{n_2} = \frac{s_3}{n_1}$$

sustituyendo en esta última el valor de  $s_2/n_2$ , obtenemos:

$$\frac{s_1}{n_1} + \frac{e}{n_2} = \frac{s_3}{n_1} \Rightarrow \boxed{s_3 = s_1 + e \frac{n_1}{n_2}}$$

La imagen se ha desplazado la distancia  $O_1O_3$  ( $y$ ) cuyo valor es:

$$y = s_1 + e - s_3 = s_1 + e - s_1 - e \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow \boxed{y = e \left( 1 - \frac{n_1}{n_2} \right)}$$

Si el medio que está en contacto con las caras de la lámina es aire  $n_1 = 1$ , luego:

$$\boxed{y = e \frac{n - 1}{n}}$$

Al intercalar una lámina de caras planoparalelas entre los rayos de luz que van a formar una imagen, ésta sufrirá un desplazamiento que se calculará con la expresión anterior.

**PROBLEMAS: 24 al 27.**

**XXIV – 18. Focos de un dioptrio esférico. Planos focales**

**FOCO-IMAGEN**, es un punto del eje que es la imagen de un punto situado en el eje y en el infinito. Los rayos paralelos al eje concurren, después de la refracción, en el foco imagen (Fig. XXIV-33).

Haciendo  $s = -\infty$  en la fórmula (8) y llamando  $f'$  a la distancia del foco imagen al punto principal (DISTANCIA FOCAL IMAGEN), obtenemos:

$$\frac{n'}{f'} = \frac{n' - n}{r} \Rightarrow \boxed{f' = r \frac{n'}{n' - n}} \quad (9)$$

**FOCO-OBJETO**, es un punto del eje cuya imagen está sobre el eje y en el infinito. Los rayos que parten del foco objeto, emergen paralelos al eje, después de la refracción (Fig. XXIV-34).

Haciendo  $s' = \infty$  en la fórmula (8) y llamando  $f$  a la distancia del foco objeto al punto principal (DISTANCIA FOCAL OBJETO), obtenemos:

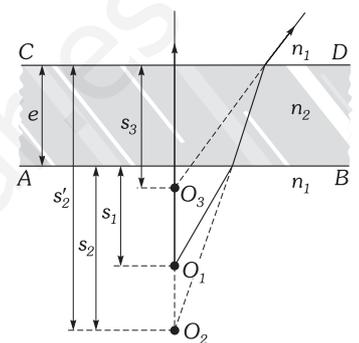


Fig. XXIV-32.- Desplazamiento de la imagen.

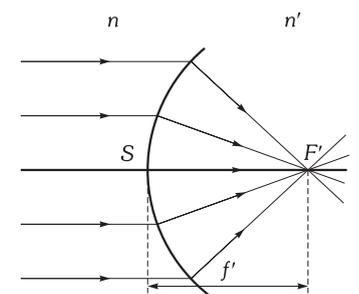


Fig. XXIV-33.- Foco imagen de un dioptrio esférico.

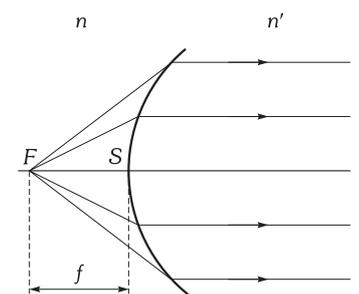


Fig. XXIV-34.- Foco objeto de un dioptrio esférico.

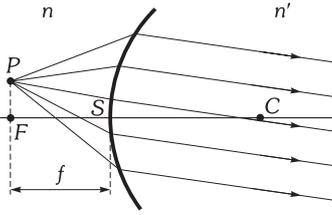


Fig. XXIV-35.- Plano focal objeto de un dioptrio esférico.

$$-\frac{n}{f} = \frac{n' - n}{r} \Rightarrow \boxed{f = -r \frac{n}{n' - n}} \quad (10)$$

PLANOS FOCALES, son dos planos perpendiculares al eje en los focos.

Un haz de rayos procedentes de un punto del plano focal objeto, atraviesan al dioptrio y emergen de forma que son paralelos entre sí. (Fig. XXIV-35). Para conocer la trayectoria de los rayos basta considerar que el rayo PC que pasa por el centro de curvatura, no se desvía y que los demás que parten del mismo punto P, han de ser paralelos a PC después de atravesar la superficie esférica.

Los rayos paralelos entre sí que llegan al dioptrio, lo atraviesan y emergen reuniéndose en un punto P', del plano focal imagen (Fig. XXIV-36). La determinación de P' se realiza considerando que el rayo que pasa por C, no se desvía.

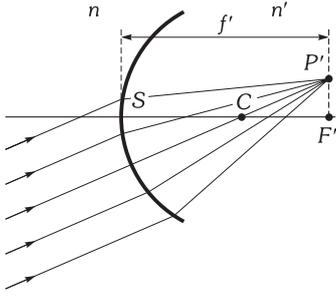


Fig. XXIV-36.- Plano focal imagen de un dioptrio esférico.

**XXIV - 20. Relación de las distancias focales del dioptrio esférico. Fórmula de los puntos conjugados en función de las distancias focales**

Por división de (10) y (9) obtenemos: 
$$\boxed{\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}} \quad (11)$$

«El cociente de las distancias focales objeto e imagen del dioptrio esférico, es igual al cociente de los índices de refracción de entrada y salida con signo contrario».

Multiplicando los dos miembros de la fórmula (8) por la inversa de su segundo miembro  $r/n' - n$ , se obtiene:

$$\frac{-r \frac{n}{n' - n}}{s} + \frac{r \frac{n'}{n' - n}}{s'} = 1$$

los numeradores de las fracciones son las distancias focales  $f$  y  $f'$  (fórmulas 9 y 10); por tanto:

$$\boxed{\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1} \quad (12)$$

Las fórmulas (11) y (12) son generales en los llamados sistemas centrados en la zona paraxial, como se verá en el capítulo siguiente.

**XXIV - 21. Construcción de imágenes**

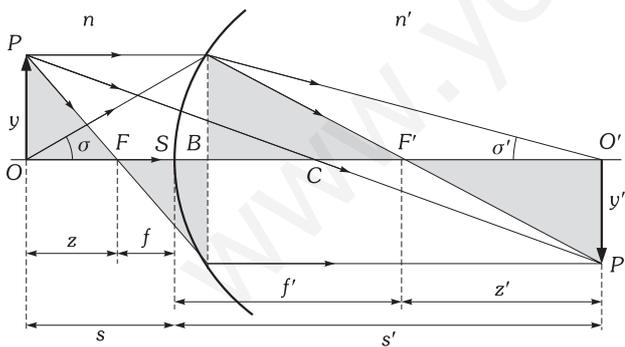


Fig. XXIV-37.- Construcción de imágenes en un dioptrio esférico.

Para obtener la imagen P' de un punto P, conocidos los focos del sistema, bastará trazar el rayo que pasa, partiendo de P, por el foco objeto y se propaga paralelamente al eje, después de atravesar el dioptrio (Fig. XXIV-37) y otro rayo paralelo al eje, que al atravesar la superficie del dioptrio, adquiere dirección hacia el foco imagen. La intersección de ambos rayos determina la posición de P'. El rayo PC, que pasa por el centro geométrico (C) del dioptrio, no sufre desviación.

**XXIV - 22. Aumento lateral**

«AUMENTO LATERAL ( $\beta$ ) es el cociente de la ordenada del punto imagen a la ordenada del punto objeto».

Los triángulos sombreados en la Fig. XXIV-37 son semejantes dos a dos; considerando la zona paraxial y expresando las distancias con su valor y signo, obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{-y'}{y} &= \frac{-f}{-s + f} \\ \frac{-y'}{y} &= \frac{s' - f'}{f'} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \beta = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{s - f} = -\frac{s' - f'}{f'}$$

El numerador del último miembro se puede escribir:  $s' - f' = s' \left(1 - \frac{f'}{s'}\right) = s' \frac{f}{s}$

ya que según (12):  $1 - f'/s' = f/s$ , por sustitución de tal numerador obtenemos:

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \frac{f}{f'} = \frac{s'}{s} \frac{n}{n'} \quad (13)$$

Para obtener la última expresión basta considerar (11). Si  $\beta$  es positivo o negativo, la imagen es, con respecto al objeto, derecha o invertida, respectivamente.

**PROBLEMAS: 28 al 36.**

**XXIV – 23. Fórmula de Newton**

Los triángulos sombreados en la Fig. XXIV-37, son semejantes dos a dos; considerando la zona paraxial y expresando las distancias con su valor y signo ( $f$  y  $f'$  contadas a partir de  $S$  y  $z$  y  $z'$  a partir de  $F$  y  $F'$  respectivamente) obtenemos:

$$\frac{-y'}{y} = \frac{-f}{-z} = \frac{z'}{f'} \Rightarrow \beta = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{z} = -\frac{z'}{f'}$$

y de ésta:

$$zz' = ff'$$

fórmulas de Newton que, como veremos en el capítulo siguiente, son generales para los llamados sistemas centrados, en la zona paraxial.

**XXIV – 24. Aumento angular**

«AUMENTO ANGULAR ( $\gamma$ ) es la relación entre los ángulos que forma con el eje un rayo que pasa por los puntos imagen y objeto, situados en el eje».

Considerando que estamos en la zona paraxial confundiremos los ángulos, expresados en radianes, con sus tangentes. Expresando todas las magnitudes con su valor y signo, obtendremos (Fig. XXIV-37):

$$\frac{\sigma'}{-\sigma} = \frac{y}{s'} : \frac{y}{-s} = \frac{-s}{s'}$$

y considerando el valor de  $s/s'$  en (13) obtenemos:

$$\gamma = \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{s}{s'} = -\frac{1}{\beta} \frac{f}{f'} = \frac{1}{\beta} \frac{n}{n'} \quad (14)$$

fórmula que nos da la relación entre los aumentos angular y lateral.

**XXIV – 25. Invariante de Helmholtz**

De la ecuación (14) correspondiente al aumento angular, obtenemos:

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{1}{\beta} \frac{n}{n'} = \frac{1}{y'/y} \frac{n}{n'} = \frac{y}{y'} \frac{n}{n'} \Rightarrow ny\sigma = n'y'\sigma' \quad (15)$$

fórmula que nos relaciona índices de refracción, ordenadas del punto objeto e imagen y ángulos de entrada y salida que forma el rayo que parte de un punto del eje, con tal eje.

**D) ESPEJOS**

**XXIV – 26. Espejos. Analogías entre los espejos y los dioptrios**

«Los ESPEJOS son superficies pulimentadas capaces de reflejar la luz».

Considerando los signos de los ángulos de incidencia ( $\varepsilon$ ) y refracción ( $\varepsilon'$ ) (ver convenio de signos) obtenemos para ley de reflexión:  $\varepsilon = -\varepsilon'$ .

La ley de la refracción, referida a los ángulos  $\varepsilon$  y  $\varepsilon'$  se cumplirá, si se considera la igualdad «formal».

$$n = -n'$$

ya que obtenemos de tal ley:  $n \text{ sen } \varepsilon = -n \text{ sen } \varepsilon'$ , y por tanto:  $\varepsilon = -\varepsilon'$ , de acuerdo con los valores de los ángulos de incidencia y reflexión.

Todas las fórmulas correspondientes a la refracción son aplicadas a la reflexión suponiendo que los medios de entrada y salida tienen índices de refracción iguales y de signo contrario.

**XXIV – 27. Espejos planos**

«Son superficies planas pulimentadas y capaces de reflejar la luz». Las imágenes de los objetos reales en estos espejos son siempre virtuales, del mismo tamaño y simétricas del obje-

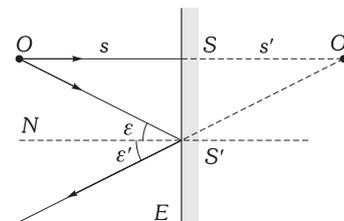


Fig. XXIV-38.– Espejo plano.

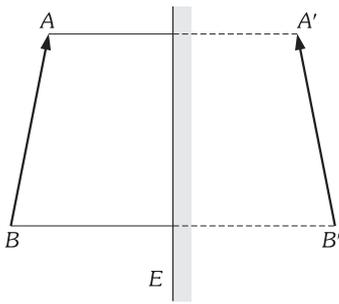


Fig. XXIV-39.- Imagen de un objeto extenso.

to con relación al plano del espejo; se verifica, por lo tanto, que la imagen de un determinado punto objeto siempre es el mismo punto imagen, cualesquiera que sean los rayos que intervengan en la formación de éste (sistema estigmático).

En efecto: si en (8) hacemos  $r = \infty$  y  $n = -n'$ , obtenemos:  $s' = -s$ , quedando demostradas las condiciones de simetría y virtualidad; y como en esta demostración no hacen falta las restricciones de la zona paraxial o de Gauss, queda demostrado también el estigmatismo del espejo plano.

«La imagen de un objeto AB en un espejo plano, se obtiene formando la imagen de cada uno de sus puntos siendo, por lo tanto virtual, del mismo tamaño y a la misma distancia del espejo que el objeto está de él» (Fig. XXIV-39).

El haz luminoso que capta el espejo (Fig. XXIV-40) se transforma, después de la reflexión, en otro cuyo vértice es la imagen. Los rayos parecen proceder del  $O'$ . El haz de rayos luminosos que intervienen en formar la imagen visible, es el resaltado en la figura, en el caso de ser este haz el captado por la pupila del ojo.

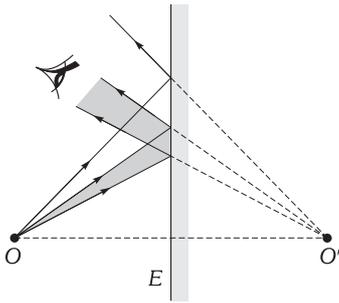


Fig. XXIV-40.- Haz de rayos que interviene en formar la imagen visible.

**XXIV - 28. Espejos planos paralelos y en ángulo**

Por sucesivas reflexiones en el espejo A y luego en el B, Fig. XXIV-41, se forman las imágenes  $O_1, O_2, O_3$ , etc. Por reflexiones primero en B y luego en A se forman las  $O', O'', O'''$ , etcétera. El número de imágenes es infinito.

Poniendo el ojo en P, la marcha de la luz en la visión de una de las imágenes  $O_2$  se obtiene uniendo P con  $O_2$ ; el punto en que esta línea corta al espejo B se une con  $O_1$  objeto virtual productor de  $O_2$ ; el punto en que esta línea corta al espejo A, se une con O productor de  $O_1$ . La línea quebrada de O a P, obtenida entre los dos espejos, indica la marcha de la luz.

Un punto O se refleja en el espejo A produciendo la imagen  $O_1$  (Fig. XXIV-42) que reflejándose a su vez en el espejo B forma la imagen  $O_2$ ; la cual produce en A la  $O_3$  y ésta en B la  $O_4$ ; esta última imagen no se refleja de nuevo por estar localizada detrás de la parte pulimentada del espejo A.

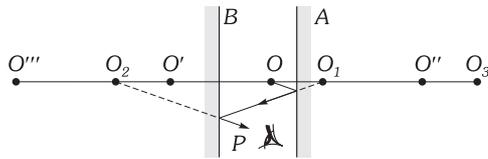


Fig. XXIV-41.- Espejos planos paralelos.

Las imágenes formadas y el punto O están sobre una circunferencia de radio OP (Fig. XXIV-43), puesto que  $OP = O_1P$  (igualdad de los triángulos OPC y  $O_1PC$ ) y  $O_1P = O_2P$  (igualdad de los triángulos  $O_1PD$  y  $O_2PD$ ), etc. Iniciando las reflexiones de O en el espejo B obtenemos, de la misma manera y sobre la misma circunferencia, las imágenes  $O', O'', O'''$ , etc.

Si el arco a correspondiente al ángulo  $\widehat{OPC}$  es igual al que le corresponde al  $\widehat{O_1PC}$  y el  $OO_1 = 2a$ , los arcos  $O'O_2, O''O_3$ , y  $O'''O_4$  también son  $2a$  (arcos comprendidos entre paralelas). Si el arco  $OF = b$ , el  $FO' = b$  y el  $OO' = 2b$ ; los arcos  $O_1O'', O_2O'''$  y  $O_4O_3$  también son  $2b$ . Así, observamos que para obtener las imágenes del punto O basta llevar alternativamente sobre la circunferencia de radio PO los arcos  $2a$  y  $2b$ , en el sentido de O al espejo A y  $2b$  y  $2a$  en el sentido del B, hasta encontrar en los dos giros, una imagen situada detrás de la parte pulimentada de los espejos.

En el caso particular de que  $2a + 2b$  esté contenido exactamente en la circunferencia, la última imagen, en los dos giros, coincide. Se formarán (incluido el objeto) tantas parejas de imágenes como  $2(a + b)$  está contenido en la circunferencia; si el ángulo correspondiente al arco  $a + b$  (ángulo de los espejos) es  $\varphi$ , el número de pares de imágenes es:  $360/2\varphi$ ; y el número de imágenes (incluido el objeto):  $360/\varphi$ .

El número de imágenes, si  $\varphi$  (ángulo de los espejos) está contenido exactamente en  $360^\circ$ , es:  $n = 360/\varphi - 1$ . En el caso de que  $360^\circ$  no contengan exactamente a  $\varphi$ , la última imagen  $O_4$ , se desdobra en 2: una de ella misma (procedente de  $O_3$ ) y otra imagen de  $O'''$  en el espejo A. El número de imágenes aumenta, en este caso, en una:  $n = 360/\varphi$ .

Poniendo el ojo en la posición indicada en la Fig. XXIV-42, la marcha de la luz en la visión de una de las imágenes ( $O_4$ ) se obtiene como se ha descrito.

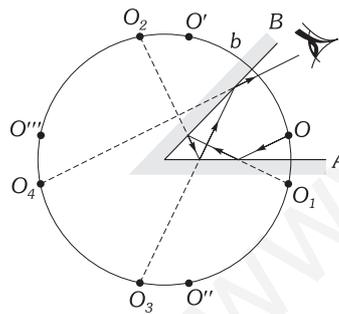


Fig. XXIV-42.- Espejos planos en ángulo.

**XXIV - 29. Medida del ángulo de un prisma por el método de reflexión**

Si a la arista de un prisma de vidrio se hace llegar un haz de rayos paralelos (Fig. XXIV-44), éste se refleja en sus dos caras.

El ángulo del prisma es la mitad del que forman los rayos reflejados en cada una de sus caras.

En efecto: el rayo AV, componente del haz y que incide en la arista del prisma, produce en cada una de las dos caras, un rayo reflejado; el ángulo  $\alpha$  del prisma es suplemento de  $\widehat{N_1VN_2}$  puesto que el giro completo lo forman estos dos ángulos más los dos rectos que forman las normales  $N_1$  y  $N_2$  con las caras del prisma:  $\alpha = 180 - \widehat{N_1VN_2}$ .

El ángulo  $\delta$  que forman los rayos reflejados, compone un giro completo con  $2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2$ :

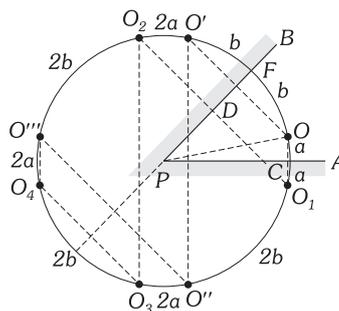


Fig. XXIV-43.- Espejos planos en ángulo.

$$\delta = 360 - 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = 360 - 2\widehat{N_1VN_2} \Rightarrow \frac{\delta}{2} = 180^\circ - \widehat{N_1VN_2}$$

y por lo tanto, por igualación se obtiene:

$$\alpha = \frac{\delta}{2}$$

**XXIV – 30. Espejos esféricos**

Los ESPEJOS ESFÉRICOS son casquetes esféricos pulimentados por el interior (cóncavos) o por el exterior (convexos). CENTRO DE CURVATURA: Es el centro de la superficie esférica (C). CENTRO DE FIGURA: Es el polo del casquete (S). EJE PRINCIPAL: Es la línea que une el centro de la figura y el de curvatura (CS). EJE SECUNDARIO: Es cualquier recta que pasa por el centro de curvatura (IC). Todo rayo de luz que sigue la dirección del eje principal o de un eje secundario, se refleja sobre sí mismo por coincidir con la normal a la superficie esférica (radio de la esfera).

El conocimiento de estos elementos y las leyes de la reflexión permiten dibujar imágenes de cualquier punto O (Fig. XXIV-45): Tracemos desde O un rayo cualquiera -OI- que incide en el espejo y que forma con la normal (radio de la esfera) un ángulo ε, este rayo se refleja en la dirección IO' que forma con la normal un ángulo ε' = ε. El rayo OS, que sigue la dirección del eje principal, se refleja sobre sí mismo. La imagen del punto O es el punto O'.

El único punto con correspondencia estigmática es el centro que es conjugado de sí mismo.

**XXIV – 31. Fórmula de los puntos conjugados en los espejos esféricos (zona paraxial)**

En la zona paraxial los espejos esféricos (lo mismo que el dioptrio) se pueden considerar como un sistema estigmático. Apliquemos la fórmula del invariante de Abbe con la sustitución, indicada en el párrafo XXIV-26, de n' por -n:

$$n \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right] = -n \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{s'} \right] \Rightarrow \frac{1}{r} - \frac{1}{s} = -\frac{1}{r} + \frac{1}{s'} \Rightarrow \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r}$$

**XXIV – 32. Focos de un espejo esférico**

Las distancias focales imagen y objeto vendrán dadas (9 y 10), por:

$$f' = r \frac{n'}{n' - n} \Rightarrow f' = r \frac{-n}{-n - n} \Rightarrow f' = \frac{r}{2}$$

$$f = -r \frac{n}{n' - n} \Rightarrow f = -r \frac{n}{-n - n} \Rightarrow f = \frac{r}{2}$$

Los focos objeto e imagen para la zona paraxial, coinciden en el punto medio del radio.

La coincidencia de los focos entre sí era de esperar, ya que la relación de distancias focales ha de ser (11):

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'} = -\frac{n}{-n} = 1$$

Como consecuencia de las definiciones de los focos, se derivan los siguientes hechos:

En el foco de un espejo cóncavo se reúnen los rayos paraxiales paralelos al eje principal después de la reflexión (Fig. XXIV-46-1). En el foco de un espejo convexo se reúnen las prolongaciones de los rayos paraxiales paralelos al eje principal, después de la reflexión (Fig. XXIV-46-2).

Considerando inversamente la trayectoria de la luz se observa que todos los rayos paraxiales incidentes que pasan por el foco de un espejo cóncavo, se reflejan paralelamente al eje principal. Todos los rayos paraxiales que inciden en un espejo convexo de forma que sus prolongaciones pasen por el foco, se reflejan paralelamente al eje principal. (El foco en ese último caso es virtual).

**XXIV – 33. Construcción geométrica de las imágenes**

Para obtener la imagen de un punto A (Fig. XXIV-47) basta dibujar dos de los tres rayos siguientes: Un eje secundario, que se refleja sobre sí mismo. Un rayo paralelo al eje principal que se refleja pasando por el foco (cóncavos) o pasando su prolongación por el foco (convexo). Un rayo que pasa (él o su prolongación) por el foco y que se refleja paralelamente al eje principal.

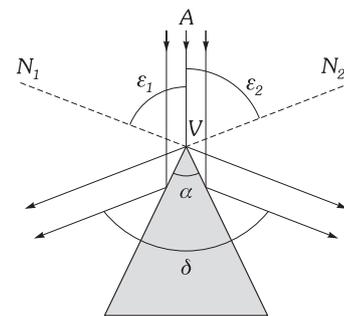


Fig. XXIV-44.- Medida del ángulo de un prisma por el método de reflexión.

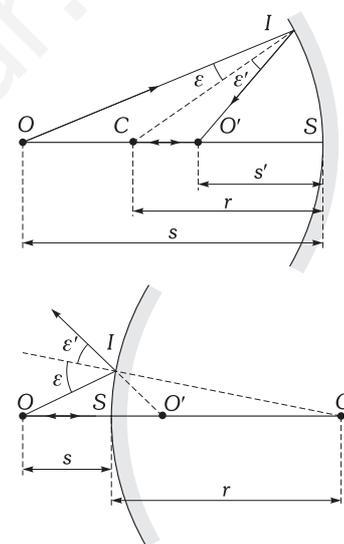


Fig. XXIV-45.- Espejos esféricos cóncavo y convexo.

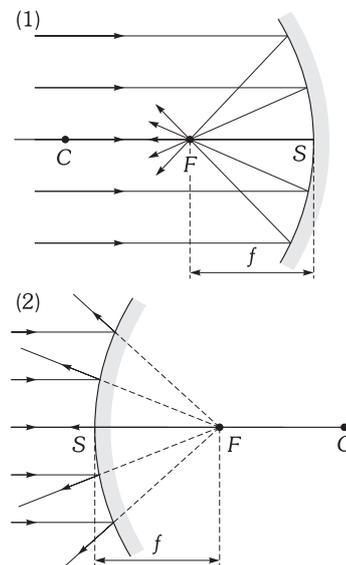


Fig. XXIV-46.- Foco objeto e imagen de espejos esféricos.

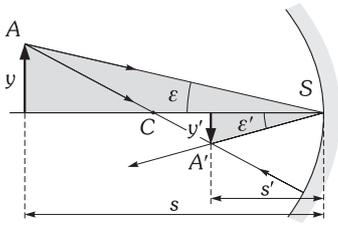


Fig. XXIV-47.- Construcción geométrica de imágenes.

Podría dibujarse, también, un rayo que llega al centro de la figura (S) y que se refleja formando con la normal (eje principal) un ángulo igual al que forma el rayo incidente (Fig. XXIV-47).

**XXIV - 34. Aumento lateral en los espejos esféricos**

De la fórmula (13) que nos da el aumento lateral para un dioptrio esférico en zona paraxial, sustituyendo  $n'$  por  $-n$ , nos queda:

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

Podríamos haber demostrado esta fórmula considerando la semejanza de los triángulos sombreados en la Fig. XXIV-47.

«Las ordenadas de los puntos imagen y objeto son directamente proporcionales a sus distancias al espejo».

Así, si la imagen se forma a mayor distancia que el objeto, es mayor que él; si se forma a igual distancia que el objeto es de igual altura; y si se forma a menor distancia que el objeto es de menor altura.

Si el aumento es negativo la imagen es invertida con respecto al objeto; si es positivo la imagen es derecha.

**XXIV - 35. Aumento angular en los espejos esféricos**

De la fórmula (14) que nos da el aumento angular para un dioptrio esférico, en la zona paraxial, obtendremos:

$$\gamma = \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{1}{\beta} \frac{n}{n'} = \frac{1}{\beta} \frac{n}{-n} \Rightarrow \gamma = -\frac{1}{\beta} = \frac{s}{s'}$$

**XXIV - 36. Imágenes en los espejos cóncavos**

IMÁGENES DE LOS OBJETOS REALES

Objeto - entre C y $-\infty$ Imagen - entre C y F	Imagen menor que el objeto	
Objeto - en C Imagen - en C	Imagen igual que el objeto	Imagen real e invertida
Objeto - entre C y F Imagen - entre C y $-\infty$	Imagen mayor que el objeto	
Objeto - entre F y S Imagen - entre S e $\infty$ (detrás del espejo)	Imagen mayor que el objeto	Imagen virtual y derecha

Para comprobar todas estas posiciones y tamaños basta considerar las fórmulas:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} = \frac{1}{f'} \quad \beta = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

1) El objeto está situado delante del espejo, entre el infinito y el centro de curvatura.

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{s} = \frac{s - f'}{sf'} \quad s' = \frac{s}{\frac{s}{f'} - 1} \quad (16)$$

s y  $f'$  son negativos y s, en valor absoluto, mayor que  $2f'$ ; por tanto:  $s/f' > 2$  y el denominador de la fracción (16) mayor que la unidad. Como s es negativa  $s'$  también lo será (imagen real) y menor, en valor absoluto, que s (imagen menor que el objeto).

El valor de  $s'$  es también:

$$s' = \frac{f'}{1 - \frac{f'}{s}} \quad (17)$$

Si en esta fórmula hacemos tender s a  $-\infty$ ,  $s'$  tiende al valor  $f'$ ; si s tiende al valor  $2f'$ ,  $s'$  tiende a  $2f'$ .

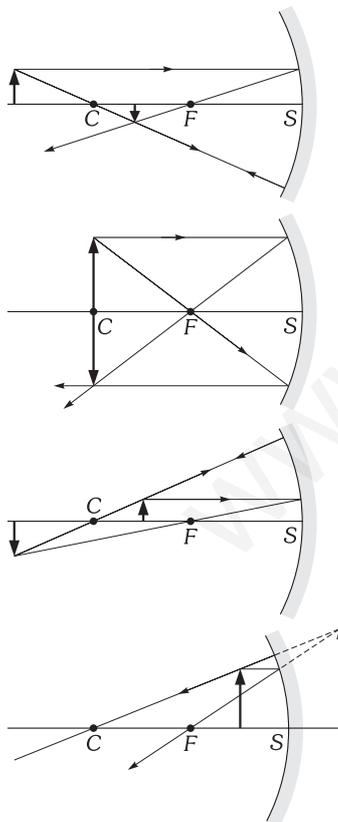


Fig. XXIV-48.- Imágenes en los espejos cóncavos.

La imagen está situada entre el centro de curvatura y el foco y es real, invertida y menor que el objeto.

- 2) El objeto está situado en el centro de curvatura.  
Al ser  $s' = 2f'$ , la aplicación de (16) nos determina que  $s' = s$ .  
El aumento lateral es, por tanto,  $-1$ .  
La imagen está situada en el centro de curvatura y es real, invertida y de igual altura que el objeto.
- 3) El objeto está situado entre el centro de curvatura y el foco.  
Es el mismo caso 1.º considerando la imagen como objeto y la inversa. (Reversibilidad de los rayos luminosos).  
La imagen está situada entre el centro de curvatura y el infinito y es real, invertida y mayor que el objeto.
- 4) El objeto está situado entre el foco y el espejo.  
Consideremos la fórmula (16):  $s/f'$  es positivo y menor que 1, el denominador de la fracción es negativo; su valor está comprendido entre cero y  $-1$ ; por tanto  $s'$  es positivo (imagen virtual) y su distancia al punto principal es mayor, en valor absoluto, que  $s$  (imagen mayor). Como  $s$  y  $s'$  son de distinto signo, el aumento lateral es positivo (imagen derecha). La imagen es virtual, derecha y de mayor altura que el objeto.

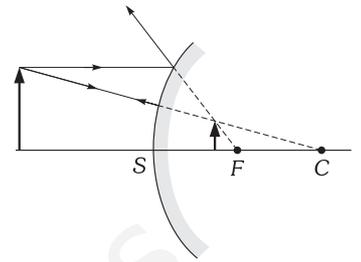


Fig. XXIV-49.- Imágenes en los espejos convexos.

### XXIV - 37. Imágenes en los espejos convexos

Las imágenes de los objetos reales en los espejos convexos son siempre virtuales, menores, derechas y situadas entre el foco y el espejo (Fig. XXIV-49).

En efecto: considerando (17),  $f'/s$  es negativo y, por tanto, el denominador de la fracción es positivo y mayor que 1;  $s'$  es positivo (imagen virtual) y menor que  $f'$ . Considerando (16) al ser  $s/f'$  negativo, el denominador también lo es y de valor absoluto mayor que 1, por lo que  $s'$  es menor que el valor absoluto de  $s$  (imagen menor). Al ser  $s'$  y  $s$  de distinto signo, el aumento lateral es positivo (imagen derecha).

PROBLEMAS: 37 al 53.

### XXIV - 38. Aberraciones en los espejos esféricos

Considerando rayos paraxiales se cumplen muy aproximadamente las construcciones y leyes expresadas. Si así no fuese, los rayos paralelos al eje principal no se reúnen en un punto (Fig. XXIV-50): los marginales lo hacen en un punto más próximo al eje ( $F_m$ ) que los centrales ( $F_c$ ). Una pantalla puede colocarse de  $F_m$  a  $F_c$  recogiendo, en este espacio una imagen del infinito. A la distancia  $F_m F_c$  se le llama ABERRACIÓN ESFÉRICA LONGITUDINAL. En la pantalla puesta en  $F_c$  se observa una imagen rodeada de un círculo luminoso a cuyo radio se le llama ABERRACIÓN TRANSVERSAL.

Los rayos reflejados son tangentes a una superficie llamada *cáustica*, cuyo vértice es  $F_c$ . La *cáustica* se puede ver muy bien iluminando una sortija colocada sobre un papel blanco.

En los espejos de pequeña abertura el punto  $F_c$  es el que se toma como foco principal.

En los espejos parabólicos (paraboloides de revolución) todos los rayos paralelos al eje principal se reúnen en el foco de la parábola, aunque el espejo sea de gran abertura (Fig. XXIV-51).

Si en el foco  $F$ , se coloca un punto luminoso, los rayos emergentes son paralelos al eje principal; se aprovecha esta propiedad en la construcción de sistemas (faros de automóvil) que deben iluminar a grandes distancias.

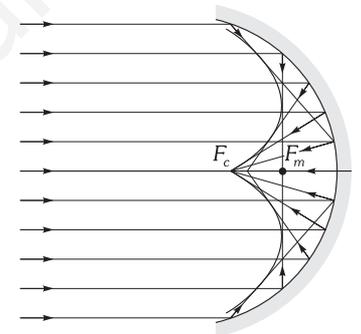


Fig. XXIV-50.- Aberraciones esféricas longitudinal y transversal.

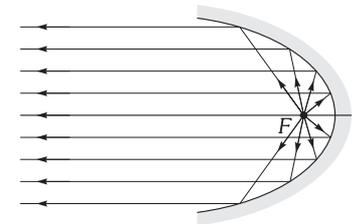


Fig. XXIV-51.- Espejo parabólico

## PROBLEMAS

### A) REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN

1. Un foco luminoso en forma de disco de 2 cm de diámetro está situado a 20 cm de una lámina cuadrada opaca de 20 cm de lado. Determinínese el ancho de la sombra y penumbra formadas en una pantalla a 20 cm de la lámina teniendo todo el sistema un eje de simetría perpendicular.

2. ¿Cuál es la altura mínima de un espejo plano para que una persona se vea en él de cuerpo entero?

3. 1) En el interior de un automóvil parado observamos por el espejo retrovisor (plano) otro automóvil que por detrás se acerca a nosotros; la velocidad de este último es de 30 km/h. ¿A qué velocidad vemos que se acerca su imagen? 2) El coche que se acercaba en el apartado anterior se ha parado y nuestro automóvil emprende la marcha. ¿A qué velocidad se aleja la imagen del coche parado formada en el espejo retrovisor si nuestra velocidad es de 60 km/h? 3) Ahora marcha nuestro automóvil a 60 km/h y el que está detrás a 30 km/h siguiéndonos. ¿A

qué velocidad se aleja la imagen del coche que miramos por el espejo retrovisor?

4. Demostrar geoméricamente que un espejo plano es un sistema estigmático.

5. Demostrar que al mover un espejo plano paralelamente a sí mismo la imagen de un punto se desplaza el doble que el desplazamiento del espejo.

6. Demostrar que al girar un espejo un ángulo en torno a un eje perpendicular al plano de incidencia el rayo reflejado gira un ángulo doble que el espejo.

7. Un rayo de luz incide, formando un ángulo de 40° con la normal, sobre la superficie plana de separación de dos medios de índices de refracción 1,3 y 1,5. Determinínese los ángulos de refracción según que el rayo proceda de uno u otro medio.

8. Basándose en el principio de Fermat demostrar geoméricamente (sin utilizar el cálculo vectorial), la ley de Snell.

9. Un rayo de luz monocromática entra en una esfera homogénea transparente de índice de refracción  $n = 4/3$ . Después de sufrir  $p$  reflexiones, emerge en la dirección  $R$ . Calcular: 1) La desviación  $\Delta$  final experimentada por el rayo. 2) La expresión que da la variación de  $\Delta$  con el ángulo de incidencia  $i$ .

10. Calcular el ángulo límite entre el diamante ( $n_1 = 2,5$ ) y el vidrio ( $n_2 = 1,5$ ).

11. Calcular el índice de refracción de una sustancia con relación al aire, sabiéndolo que su ángulo límite es de  $30^\circ$ .

12. El ángulo límite que corresponde a la refracción entre el aire y el hielo es de  $45^\circ$ . ¿Cuál debe ser el radio de un disco para que, colocado sobre un bloque de hielo, no permita ver una burbuja situada dentro de éste y a 10 cm de la superficie?

13. Sobre la superficie de un líquido contenido en un vaso colocamos una superficie flotante opaca que cubre por completo a la del líquido. La superficie opaca tiene un orificio circular de radio 4 cm. En el fondo del vaso se ha colocado un pequeño objeto  $P$ , en la vertical que pasa por el centro del orificio. Calcular hasta qué altura se debe llenar el vaso para que el objeto se vea desde cualquier posición exterior a través del orificio. El índice de refracción del líquido con respecto al aire es 2.

14. Construir geoméricamente el rayo refractado de un rayo de luz incidente en la superficie plana de separación entre dos medios de índice  $n_1$  y  $n_2$ .

15. Construir gráficamente el ángulo límite de una sustancia, conocido su índice de refracción  $n$  con relación al aire.

16. Un foco puntual está sumergido a una profundidad desconocida  $x$  en un lago y en un punto a 18 m de la orilla. Un observador, cuyo ojo está a 1,5 m del suelo en el borde del lago, desplaza lentamente su mirada partiendo de la orilla y observa que el primer rayo que emerge del agua se encuentra a 6 m de dicha orilla. Si el índice de refracción del agua es  $4/3$  y para el aire lo consideramos prácticamente 1, ¿a qué profundidad está sumergido el foco luminoso?, ¿a qué profundidad ve el observador el objeto luminoso?

17. Demostrar que al atravesar un rayo de luz una lámina de vidrio de caras planas y paralelas «el rayo emergente es paralelo al incidente si los medios en contacto con las caras de la lámina son idénticos».

18. Calcular el desplazamiento que sufre un rayo de luz al atravesar una lámina de vidrio de caras planas y paralelas cuando los medios en contacto con las caras de la lámina son idénticos. DATOS:  $e$ : espesor de la lámina.  $\varepsilon_1$ : ángulo de incidencia.  $n_2$ : índice de refracción del vidrio.  $n_1$ : índice de refracción del medio en contacto con las caras.

19. A una lámina de caras planas y paralelas de índice de refracción igual a 1,5 llega un rayo con un ángulo de incidencia de  $45^\circ$ . El espesor de la lámina es de 10 cm y se encuentra rodeada de aire. Calcular el desplazamiento lateral del rayo incidente.

**B) PRISMA ÓPTICO**

20. Un prisma óptico de ángulo de refringencia  $60^\circ$  y cuyo índice de refracción es 1,5 recibe un rayo de luz perpendicularmente a una de sus caras. Determinar el ángulo de desviación.

21. ¿Cuál es el ángulo de desviación mínima de un prisma equilátero cuyo índice de refracción es  $\sqrt{3}$ ? Representétese en un diagrama la trayectoria de un rayo que atraviesa dicho prisma en las condiciones de desviación mínima.

22. Determinar el índice de refracción de un prisma cuyo ángulo de refringencia es  $30^\circ$ , sabiendo que el ángulo de mínima desviación es  $16^\circ$ .

23. Tenemos un prisma de vidrio (índice de refracción  $n = \sqrt{2}$ ) cuyo ángulo es de  $60^\circ$ ; en una de sus caras incide un rayo formando un ángulo de  $45^\circ$ , siendo la dirección del mismo hacia el vértice. Determinar: 1) Ángulo de refracción (en el interior del prisma). 2) Valor del ángulo de emergencia. 3) Ángulo de mínima desviación. 4) Dibujar la marcha de la luz en el caso de que el rayo incida normalmente a una cara.

**C) DIOPTRIO PLANO**

24. Un muchacho que no sabe nadar observa perpendicularmente a la superficie de un lago y calcula que, a lo sumo, su profundidad es de 1,5 m. Como es prudente y sabe Física, tomó la precaución antes de bañarse de medir la profundidad introduciendo una caña hasta tocar el

fondo; hecho esto, decidió no bañarse. ¿Por qué? (Índice de refracción del agua con respecto al aire = 1,33.)

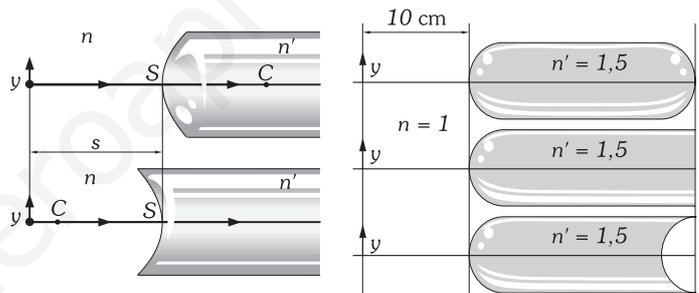
25. Un buzo observa normalmente a la superficie de un lago y desde dentro del agua a un avión que pasa a 200 m sobre dicha superficie. ¿A qué distancia ve el avión?

26. Un vaso de vidrio es de fondo grueso (2 cm) y está lleno de agua, siendo la altura de ésta 5 cm. Determinar la posición de la imagen de una mancha de tinta que se ha hecho en la cara inferior del fondo del vaso ( $n_{\text{vidrio}} = 1,5$ ;  $n_{\text{agua}} = 1,33$ ; considerar visión vertical).

27. Un estanque contiene agua ( $n_a = 4/3$ ) cuya superficie es  $AB$ . En una misma vertical  $OP$  se hallan: en  $O$ , a 1,20 m por encima de  $AB$ , el ojo de un observador; en  $P$ , a 0,80 m por debajo de  $AB$ , el ojo de un pez. 1) ¿El observador y el pez se ven separados por la misma distancia  $OP$ ? Calcular estas distancias aparentes. 2) El fondo del estanque está formado por un espejo plano horizontal  $CD$ . El espesor de la capa de agua por encima del espejo es de 1,20 m. El observador, permaneciendo en la misma posición  $O$ , se mira en el espejo  $CD$ . ¿A qué distancia ve su imagen? ¿En qué sentido y cuánto se desplaza ésta cuando se hace vaciar toda el agua del estanque?

**D) DIOPTRIO ESFÉRICO**

28. Determinar las distancias focales de los dioptrios esféricos, de radio 5 cm de la figura ( $s = 20$  cm,  $y = 1$  mm), y averiguar la posición y tamaño de la imagen del objeto en ambos casos. ¿Cuántas dp tienen ambos sistemas? El medio exterior a la varilla es aire; la varilla es de vidrio ( $n = 1,5$ ).



Problema XXIV-28.

Problema XXIV-33.

29. Una larga y recta varilla de vidrio, de índice de refracción  $n = 1,5$ , termina por un extremo en una cara esférica convexa de radio 8 cm. 1) Calcular la posición y el tamaño de la imagen que esa cara produce de una flechita luminosa de 4 mm colocada de pie sobre el eje, en el aire, a 20 cm del vértice. 2) Lo mismo, en el caso de que la cara fuese cóncava y de la misma curvatura. 3) Lo mismo que en el caso 1, suponiendo que la varilla y la flecha están sumergidas en agua ( $n = 1,33$ ).

30. Un tubo de vidrio lleno de agua (índice de refracción:  $4/3$ ) está cerrado por un extremo con una superficie esférica de vidrio delgadísimo de 20 cm de radio, que separa el agua del aire, y de manera que su convexidad mira hacia el aire; se desea saber: 1) La distancia focal imagen de dicho dioptrio esférico. 2) Su distancia focal objeto. 3) La distancia en donde se formará la imagen de un objeto situado en el aire perpendicular al eje principal y a 1 m del vértice del dioptrio. 4) La naturaleza de la imagen. 5) Sabiendo que el objeto es de 1 mm de altura, calcular el tamaño de la imagen. 6) Dibujar un esquema de la marcha de los rayos.

31. Una varilla cilíndrica de vidrio, de índice de refracción 1,5 y de radio 2 cm, termina por uno de sus extremos en una semiesfera de igual radio. En el eje del cilindro y a 6 cm del polo de la esfera hay dentro del vidrio una pequeña burbuja de aire de 0,2 mm de diámetro. Determinar: 1) Posición de la imagen que se forma de la burbuja. 2) Tamaño aparente de la misma. 3) Dibújese un esquema explicando cómo se forma dicha imagen.

32. Una varilla de vidrio de 1 cm de diámetro termina en dos semiesferas convexas miradas desde el exterior. En el eje de la varilla y a 10 cm del polo de uno de los dioptrios hay un pequeño objeto de 1 mm de altura. Determinar: 1) La posición de la imagen final a través de la varilla y en la dirección de su eje. 2) El tamaño de la imagen. La distancia entre polo y polo es 11,66 cm ( $n = 1,5$ ).

33. Los cuerpos cilíndricos de la figura, terminados por caras esféricas o planas, son de vidrio ( $n = 1,5$ ). El medio exterior es aire y el radio de los dioptrios esféricos es 5 cm. Determinar la posición de la imagen que se obtiene del objeto indicado en la Figura, en cada uno de los casos.

34. En el centro de una esfera de vidrio ( $n = 1,5$ ) hay una pequeña burbuja de aire. Determinar la posición de la imagen de la burbuja y el aumento del sistema.

35. Ante una esfera de vidrio ( $r = 10$  cm,  $n = 1,5$ ) se coloca un pequeño objeto de 1 mm de altura, perpendicularmente al eje, a 20 cm del centro de la esfera. Considerando la zona paraxial, determinar: 1) Posición de la imagen. 2) Altura de la imagen. 3) La imagen ¿es derecha o invertida?, ¿es real o virtual? 4) Tras el dioptrio de salida de los rayos de luz, antes de formarse la imagen y perpendicularmente al eje, se intercala una lámina plano-paralela de vidrio ( $n = 1,5$ ) de 15 cm de espesor. ¿Cuánto se desplaza la imagen? ¿Se acerca o aleja de la esfera?

36. Un objeto de 1 mm de altura se mira a través de una esfera de vidrio de 10 cm de radio. Determinar la posición y tamaño de la imagen (considerar zona paraxial). La distancia del objeto al centro de la esfera es 40 cm ( $n = 1,5$ ).

**E) ESPEJOS ESFÉRICOS**

37. Obtener la fórmula de los espejos esféricos para rayos paraxiales, aplicando las leyes de la reflexión y consideraciones geométricas.

38. Delante de un espejo cóncavo de 50 cm de distancia focal y a 25 cm de su centro de figura se encuentra un objeto perpendicular al eje y cuya altura es de 1 cm. Calcular la posición y el tamaño de la imagen.

39. Resolver el problema anterior, siendo el espejo convexo.

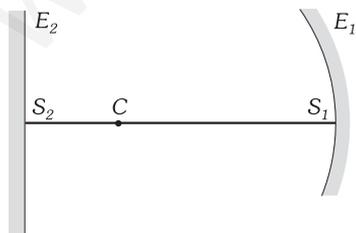
40. A 150 cm del centro de un espejo cóncavo se forma una imagen real, invertida y de doble altura que el objeto. Calcular la posición del objeto y el radio del espejo.

41. Un espejo cóncavo forma una imagen real, invertida y de tamaño triple de un objeto vertical, situada sobre el eje óptico a 10 cm del espejo. 1) Dibujar un esquema con la marcha geométrica de los rayos que definen la imagen del objeto. 2) Determinar el radio de curvatura del espejo. 3) Determinar la distancia a que se encuentra el objeto del espejo.

42. Determinar el radio de curvatura de un espejo que forme una imagen real, invertida y de tamaño doble de los objetos situados a 20 cm del espejo. Dibujar un esquema con la marcha geométrica de los rayos para definir la imagen de un objeto vertical situado en el lugar indicado.

43. Por medio de un espejo cóncavo se quiere proyectar un objeto de 1 cm sobre una pantalla plana, de modo que la imagen sea derecha y de 3 cm. La pantalla ha de estar colocada a 2 m del objeto. Calcular: 1) El radio del espejo. 2) Su distancia focal. 3) Su potencia. 4) Distancias del objeto e imagen al espejo.

44. A una distancia de 60 cm de un espejo cóncavo  $E_1$  de 80 cm de radio y sobre su eje óptico existe una fuente luminosa puntual  $P$  (ver figura). ¿A qué distancia del espejo cóncavo deberá situarse un espejo plano  $E_2$  para que los rayos, después de reflejarse sucesivamente sobre el espejo cóncavo y el espejo plano, converjan en  $P$  nuevamente?



Problema XXIV-44 al 48.

45. Un espejo esférico cóncavo  $E_1$  de 1 m de radio está enfrente de un espejo plano  $E_2$  colocado perpendicularmente al eje del espejo (ver figura). La distancia entre los dos espejos es 1,80 m. A 20 cm del espejo plano y en el eje hay un punto luminoso  $P$ , de forma que un rayo que parte de  $P$  se refleja primero en el plano y luego en el esférico. Determinar la posición de la imagen y el aumento del conjunto. Dibujar la marcha de un rayo de luz que parte de  $P$ .

46. Resolver el mismo problema anterior, suponiendo la primera reflexión en el espejo esférico y la segunda en el plano.

47. Tenemos un espejo cóncavo  $E_1$ , de 1 m de radio de curvatura. Se pide: 1) Situación y naturaleza de la imagen que el anterior espejo da de un objeto, situado sobre el eje principal a 75 cm del vértice del espejo. 2) Interceptando los rayos procedentes del espejo cóncavo mediante un espejo plano  $E_2$ , queremos que la imagen se forme en el plano focal del espejo  $E_1$ ; ¿dónde hemos de colocar el espejo  $E_2$ ? 3) Y para que la imagen se forme en el mismo plano en que está el objeto, ¿dónde colocaremos el espejo plano  $E_2$ ? 4) En este último caso determinar la situación de las sucesivas imágenes dadas por los espejos  $E_1$  y  $E_2$ .

48. Tenemos un espejo cóncavo  $E_1$  de 2 m de radio. A una distancia de 1,40 m del vértice  $S_1$  se coloca un pequeño círculo luminoso de 1 cm de radio, cuyo centro coincide con el eje principal. Se pide a qué distancia de  $S_1$  se deberá colocar un espejo plano  $E_2$  perpendicular al eje para que el centro de la imagen se confunda con el centro de curvatura del espejo. ¿Cuál será el diámetro de círculo de esta imagen?

49. A 35 cm de un espejo esférico cóncavo  $E_1$  de 60 cm de radio se encuentra un objeto; determinar a qué distancia hay que colocar un espejo plano  $E_2$  normal al eje del sistema para que la imagen, después de reflejarse los rayos en este espejo quede situada en el centro de curvatura del espejo cóncavo. Hágase la construcción gráfica. ¿Cuánto valdrá el aumento lateral?

50. Dos espejos esféricos cóncavos  $E$  y  $E'$ , de radios iguales a 1 m, están situados a 2 m de distancia, coincidiendo sus ejes ópticos. Determinar: 1) El punto del eje cuya imagen es el mismo punto, después de reflejarse la luz en  $E$  y  $E'$  sucesivamente. 2) El punto del eje cuya imagen es  $F'$  (foco de  $E'$ ), después de reflejarse la luz en  $E$  y  $E'$  sucesivamente. 3) La imagen de  $F'$  (foco de  $E'$ ), después de reflejarse la luz en  $E$  y  $E'$  y el aumento del sistema. Dibujar la marcha de la luz en todos los casos.

51. Dos espejos esféricos, uno cóncavo y el otro convexo, tienen el mismo eje principal y radios de igual longitud  $r = 2$  m; están colocados a 2,50 m uno del otro. A 1,50 m del espejo cóncavo se halla una pequeña recta luminosa perpendicular al eje. Los rayos luminosos llegan unos sobre el espejo convexo después de su reflexión sobre el espejo cóncavo; otros, sobre el espejo cóncavo después de su reflexión sobre el espejo convexo. Se pide dónde se formarán las imágenes que proceden de cada una de estas dos reflexiones. Construir estas imágenes.

52. Sea un sistema centrado formado por dos espejos esféricos, uno convexo y otro cóncavo, ambos de 4 m de radio, separados 5 m uno de otro. A la distancia de 2 m del espejo convexo hay un pequeño objeto luminoso situado sobre el eje principal. Se pide: 1) Calcular el lugar en que se formará la imagen del objeto por los rayos que, partiendo de él, llegan al espejo convexo después de reflejarse en el cóncavo. 2) El lugar de la imagen que se formará por los rayos que lleguen al espejo cóncavo después de haberse reflejado en el convexo. 3) Naturaleza de las imágenes. 4) Dibujar en cada caso la marcha de los rayos.

53. Un espejo esférico que actúa de retrovisor de un coche parado proporciona una imagen virtual de un vehículo que se aproxima con velocidad constante. El tamaño de dicha imagen es 1/10 del tamaño real del vehículo cuando éste se encuentra a 8 m del espejo. 1) ¿Cuál es el radio de curvatura del espejo? 2) ¿A qué distancia del espejo se forma la correspondiente imagen virtual? 3) Un segundo después la imagen observada en el espejo se ha duplicado. ¿A qué distancia del espejo se encuentra ahora el vehículo? 4) ¿Cuál es su velocidad?

# CAPÍTULO XXV

## ÓPTICA GEOMÉTRICA II

### A) SISTEMAS ÓPTICOS CENTRADOS

#### XXV – 1. Sistema centrado

SISTEMA CENTRADO es una sucesión de dioptrios esféricos cuyos centros están sobre el mismo eje (eje del sistema) existiendo simetría de revolución en torno de él. ESPACIO OBJETO es el lugar donde hemos de colocar un punto, para que se pueda formar una imagen en el sistema óptico. ESPACIO IMAGEN es el lugar donde se han de formar las imágenes de los puntos colocados en el espacio objeto.

En todo el estudio de los sistemas centrados, consideraremos rayos en la zona paraxial o de Gauss.

#### XXV – 2. Generalización de la fórmula de Helmholtz para sistemas centrados

Hay que considerar como se expresa en la Fig. XXV-1 que el índice de refracción de salida de un dioptrio es el de entrada en el siguiente, que la imagen en un dioptrio hace de objeto del siguiente y que el ángulo que forma un rayo saliente del dioptrio con el eje es el ángulo de entrada en el dioptrio siguiente.

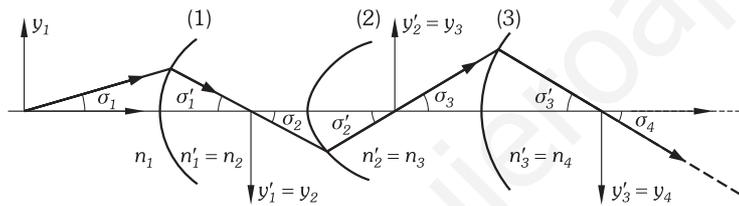


Fig. XXV-1.- Sistemas centrados.

Aplicando la fórmula de Helmholtz (15) del párrafo XXIV-25 a cada dioptrio, obtenemos:

$$n_1 y_1 \sigma_1 = n'_1 y'_1 \sigma'_1 \quad n_2 y_2 \sigma_2 = n'_2 y'_2 \sigma'_2 \quad n_3 y_3 \sigma_3 = n'_3 y'_3 \sigma'_3 \quad \dots$$

Como el segundo miembro de cada igualdad es idéntico al primero de la siguiente, se habrá de verificar:

$$n_1 y_1 \sigma_1 = n'_k y'_k \sigma'_k$$

siendo el dioptrio  $k$  el último de los dioptrios alineados en el eje. Queda así generalizada la ecuación de Helmholtz.

#### XXV – 3. Aumento lateral y angular

Quedan definidos como ya se hizo en el dioptrio esférico. Aplicando la fórmula de Helmholtz obtenemos:

$$\gamma = \frac{\sigma'_k}{\sigma_1} = \frac{n_1 y_1}{n'_k y'_k} = \frac{n_1}{n'_k} \frac{1}{\beta}$$

$$\beta = \frac{y'_k}{y_1} = \frac{n_1 \sigma_1}{n'_k \sigma'_k} = \frac{n_1}{n'_k} \frac{1}{\gamma}$$

Si los medios de entrada y salida del sistema son idénticos (aire, generalmente) las fórmulas anteriores se reducen a:

$$\beta = \frac{y'_k}{y_1} = \frac{\sigma_1}{\sigma'_k} = \frac{1}{\gamma}$$

$$\gamma = \frac{\sigma'_k}{\sigma_1} = \frac{y_1}{y'_k} = \frac{1}{\beta}$$

#### XXV – 4. Focos y planos focales

FOCO OBJETO es un punto del eje del sistema ( $F$ ), cuya imagen está en el infinito y sobre el eje (Fig. XXV-2a).

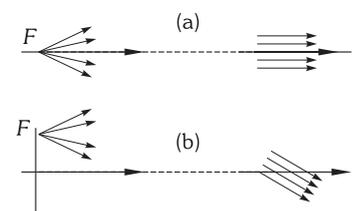


Fig. XXV-2.- Foco y plano focal objeto.

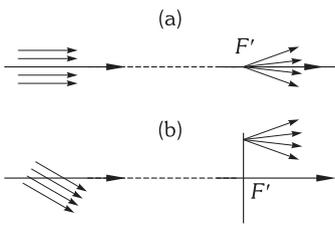


Fig. XXV-3.- Foco y plano focal imagen.

En consecuencia, todo haz de rayos homocéntricos (que parten de un punto), procedentes del foco objeto ( $F$ ), forman un haz de rayos paralelos al eje (se encontrarán con él en el infinito) en el espacio imagen (Fig. XXV-2a).

PLANO FOCAL OBJETO es un plano perpendicular al eje en el foco objeto cuya imagen es otro plano perpendicular al eje situado en el infinito (Fig. XXV-2b).

Todo haz de rayos homocéntricos procedentes de un punto del plano focal objeto, forma un haz de rayos paralelos entre sí en el espacio imagen (Fig. XXV-2b).

FOCO IMAGEN ( $F'$ ) es un punto del eje del sistema que es la imagen de un punto situado en el infinito y sobre el eje (Fig. XXV-3a).

Todo haz de rayos paralelos al eje principal en el espacio objeto forma un haz de rayos concurrentes en el foco imagen ( $F'$ ) (Fig. XXV-3a).

PLANO FOCAL IMAGEN es un plano perpendicular al eje en el foco imagen que es la imagen de otro plano perpendicular al eje, situado en el infinito (Fig. XXV-3b).

Todo haz de rayos paralelos entre sí en el espacio objeto forma un haz de rayos concurrentes en un punto del plano imagen (Fig. XXV-3b).

Para el foco objeto se verifica:  $\gamma = 0, \beta = \infty$ . Y para el foco imagen:  $\gamma = \infty, \beta = 0$ .

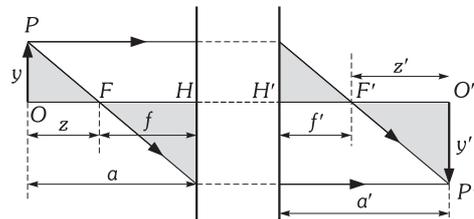


Fig. XXV-4.- Puntos y planos principales. distancias focales. Sistema positivo.

**XXV - 5. Puntos y planos principales. Distancias focales**

PUNTOS PRINCIPALES son puntos del eje del sistema que tienen un aumento lateral unidad.

PLANOS PRINCIPALES son dos planos perpendiculares al eje en los puntos principales en los que se verifica:  $\beta = 1$ ; cada punto de tales planos tiene su imagen en el otro y a la misma altura sobre el eje.

DISTANCIAS FOCALES ( $f$  y  $f'$ ) son las que hay entre los puntos principales objeto e imagen y los respectivos focos. Se miden siempre a partir de los puntos principales ( $H$  y  $H'$ ).

Un sistema es POSITIVO cuando su distancia focal imagen es positiva y NEGATIVO cuando su distancia focal imagen es negativa.

Los focos, los puntos principales y los nodales (que definiremos más adelante) constituyen los PUNTOS CARDINALES DEL SISTEMA CENTRADO.

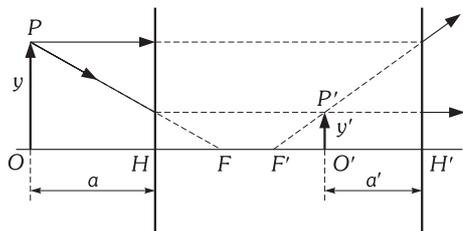


Fig. XXV-5.- Puntos y planos principales. Distancias focales. Sistema negativo.

**XXV - 6. Trazado de imágenes**

De los infinitos rayos que emite un punto luminoso  $P$  (Fig. XXV-4 y 5) situado en el espacio objeto se puede considerar:

- 1º. Uno paralelo al eje principal, que corta al plano principal-objeto a una altura  $y$ ; después de atravesar el sistema, emerge del plano principal imagen a una altura idéntica a  $y$ , pasando él o su prolongación por el foco-imagen.
- 2º. Otro rayo que pasa por el foco objeto, debe salir paralelo al eje principal, cortando al plano principal imagen a una altura  $y'$  igual a la correspondiente al rayo incidente. La imagen del punto  $P$  es  $P'$ .

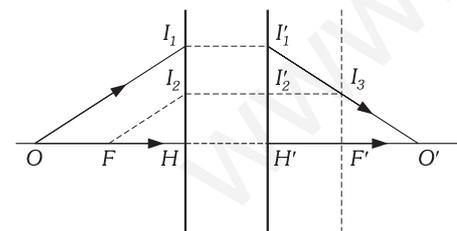


Fig. XXV-6.- Trayectoria del rayo  $OI_1$  en un sistema positivo.

**XXV - 7. Trayectoria de cualquier rayo de luz. Imagen de un punto situado en el eje**

Para saber qué rayo corresponde en el espacio imagen a uno cualquiera situado en el espacio objeto ( $OI_1$ ) se traza un rayo paralelo a éste que pasa por el foco-objeto (Fig. XXV-6 y 7); ambos rayos emergen, en el espacio imagen, de los puntos  $I_1$  e  $I_2$ , del plano principal imagen; tales rayos, por ser paralelos entre sí en el espacio-objeto, habrán de concurrir en un punto  $I_3$  del plano focal imagen (ya que el  $FI_2$  por proceder del foco objeto ha de propagarse en el espacio imagen paralelamente al eje); la recta de unión de  $I_1$  e  $I_3$  nos determina la propagación del rayo emergente que corresponde al  $OI_1$ .

Para trazar la imagen del punto en el eje basta considerar el rayo  $OI_1$ , procedente del punto objeto ( $O$ ); el punto en que el rayo emergente  $I_1I_3$  corta al eje ( $O'$ ) es el punto imagen.

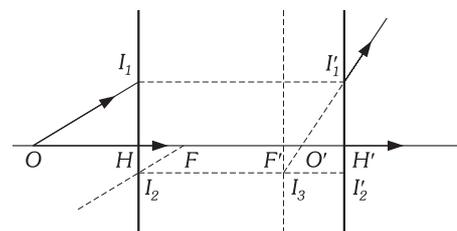


Fig. XXV-7.- Trayectoria del rayo  $OI_1$  en un sistema negativo.

**XXV – 8. Fórmulas de Newton**

Considerando los triángulos semejantes sombreados en la Fig. XXV-4 y expresando las diversas distancias con su valor y signo ( $z$  y  $z'$  contadas a partir de  $F$  y  $F'$ , y  $f$  y  $f'$  a partir de  $H$  y  $H'$ ) obtenemos:

$$\frac{-y'}{y} = \frac{-f}{-z} = \frac{z'}{f'} \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{z} = -\frac{z'}{f'}} \Rightarrow \boxed{zz' = ff'}$$

que son las fórmulas de Newton de los sistemas centrados que nos relacionan las distancias imagen y objeto ( $z$  y  $z'$ ) a los focos, y el aumento lateral, con las distancias focales del sistema óptico.

**XXV – 9. Fórmulas de los puntos conjugados referidas a los planos principales**

Si llamamos  $a$  y  $a'$  las distancias de objeto e imagen a los planos principales respectivos, de la Fig. XXV-4 obtenemos:

$$z = a - f \quad z' = a' - f'$$

que substituidas en las fórmulas de Newton nos dan: 
$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{a-f} = -\frac{a'-f'}{f'} \quad (1)$$

operando:  $(a-f)(a'-f') = ff' \Rightarrow aa' - af' - fa' + ff' = ff' \Rightarrow fa' + af' = aa'$

y dividiendo por  $aa'$ :

$$\boxed{\frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1}$$

análoga a la obtenida en el estudio del dioptrio esférico.

El numerador de la (1) lo podemos escribir, teniendo en cuenta la anterior:

$$a' - f' = a' \left(1 - \frac{f'}{a'}\right) = \frac{a'f}{a}$$

que substituida en tal valor de  $\beta$ , nos da:

$$\boxed{\beta = -\frac{a'f}{af'}}$$

**XXV – 10. Puntos nodales**

PUNTOS NODALES son dos puntos del eje del sistema centrado cuyo aumento angular es la unidad.

Todo rayo de luz que pasa por el punto nodal objeto, pasa por el nodal imagen formando el mismo ángulo con el eje, es decir: propagándose el rayo en el espacio imagen paralelamente al correspondiente en el espacio objeto.

Conocidos los focos y puntos principales, es muy sencilla la determinación geométrica de los puntos nodales (Fig. XXV-8); se traza un rayo 1 que pasa por el foco objeto  $F$  y forma cualquier ángulo  $\sigma$  con el eje; este rayo se propagará en el espacio imagen paralelamente al eje y cortará al plano focal imagen en el punto  $A$ . Por tal punto trazamos el rayo 2 paralelo a 1 y que corta al eje en  $N'$  (punto nodal imagen). Dibujemos el rayo conjugado del 2; para ello trazamos por el punto  $C$  ( $CH = BH' = h$ ) una paralela a los rayos 1 y 2, obteniendo al rayo 3 que corta al eje en el punto  $N$  (punto nodal objeto).

La construcción es correcta: el rayo 3 que forma un ángulo  $\sigma$  con el eje y pasa por  $N$ , corta al eje, en el espacio imagen, en  $N'$ , formando el mismo ángulo  $\sigma$  con el eje.

(Cualquiera que sea la dirección del rayo primeramente trazado –rayo 1– los puntos  $N$  y  $N'$  están en la misma posición, como demostraremos a continuación.)

Se ve, a primera vista, que los triángulos  $CHN$  y  $BH'N'$  son iguales, así como los  $FHD$  y  $N'F'A$ . Llamando  $z$  y  $z'$  a las distancias de  $F$  y  $F'$  a  $N$  y  $N'$ , y recordando que  $f$  y  $f'$  se miden siempre a partir de  $H$  y  $H'$ , obtenemos:

$$z = f' \quad (\text{suma de catetos de triángulos iguales})$$

$$-z' = -f \Rightarrow z' = f \quad (\text{catetos de triángulos iguales})$$

Siendo constantes para cada sistema los valores de  $f$  y  $f'$ , no existen más que dos puntos del eje  $N$  y  $N'$ , que cumplen que su aumento angular sea la unidad.

Las anteriores ecuaciones nos indican que para determinar los puntos nodales basta tomar a partir del foco objeto y del imagen distancias respectivamente iguales a la focal imagen y a la objeto.

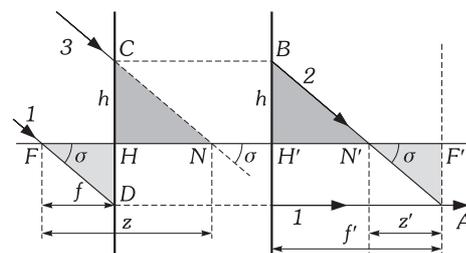


Fig. XXV-8.– Puntos nodales.

De la figura se desprende claramente que:  $HH' = NN'$ . Como consecuencia, se deduce fácilmente, que el centro geométrico de un dioptrio o espejo esférico es a la vez punto nodal objeto e imagen.

**XXV – 11. Relación entre las distancias focales de un sistema centrado**

Considerando la fórmula del aumento angular:  $\gamma = n_1/n'_k \beta$ , y la de Newton:  $\beta = -f/z$ , obtenemos:  $\gamma = -n_1 z/n'_k f$ , que aplicada a los puntos nodales ( $\gamma = 1$ ), teniendo en cuenta que  $z = f'$ , nos da:

$$1 = -\frac{n_1}{n'_k} \frac{f'}{f} \Rightarrow \boxed{\frac{f'}{f} = -\frac{n'_k}{n_1}}$$

«La relación de distancias focales de un sistema óptico centrado es igual a la de sus índices de refracción extremos cambiada de signo».

Al ser positivos los índices de refracción de los medios correspondientes a los espacios objeto e imagen, las distancias focales de los sistemas ópticos son de signo contrario. Se exceptúan los espejos en los que, como ya estudiamos, se considera negativo el índice de refracción del medio en que se propagan los rayos reflejados.

En los instrumentos ópticos, salvo excepciones (microscopio con objetivo de inmersión, cámaras fotográficas submarinas, etc.), los medios extremos del sistema son iguales (aire); por tanto: las distancias focales son iguales y de signo contrario y los puntos principales coinciden con los nodales (Fig. XXV-9).

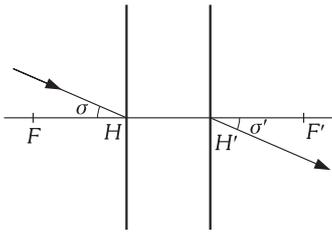


Fig. XXV-9.- Si los medios extremos del sistema centrado son iguales, las distancias focales son iguales y de signo contrario y los puntos principales coinciden con los nodales.

La fórmula del aumento lateral queda de la forma:

$$\boxed{\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{a'}{a} \frac{f}{f'} = \frac{a' n}{a n'}}$$

**B) SISTEMAS COMPUESTOS. LENTES**

**XXV – 12. Determinación de los puntos cardinales de un sistema compuesto**

Supongamos dos sistemas ópticos, centrados en un eje común (Fig. XXV-10). Se trata de determinar los focos, los puntos principales y los nodales del sistema compuesto (sistema centrado resultante).

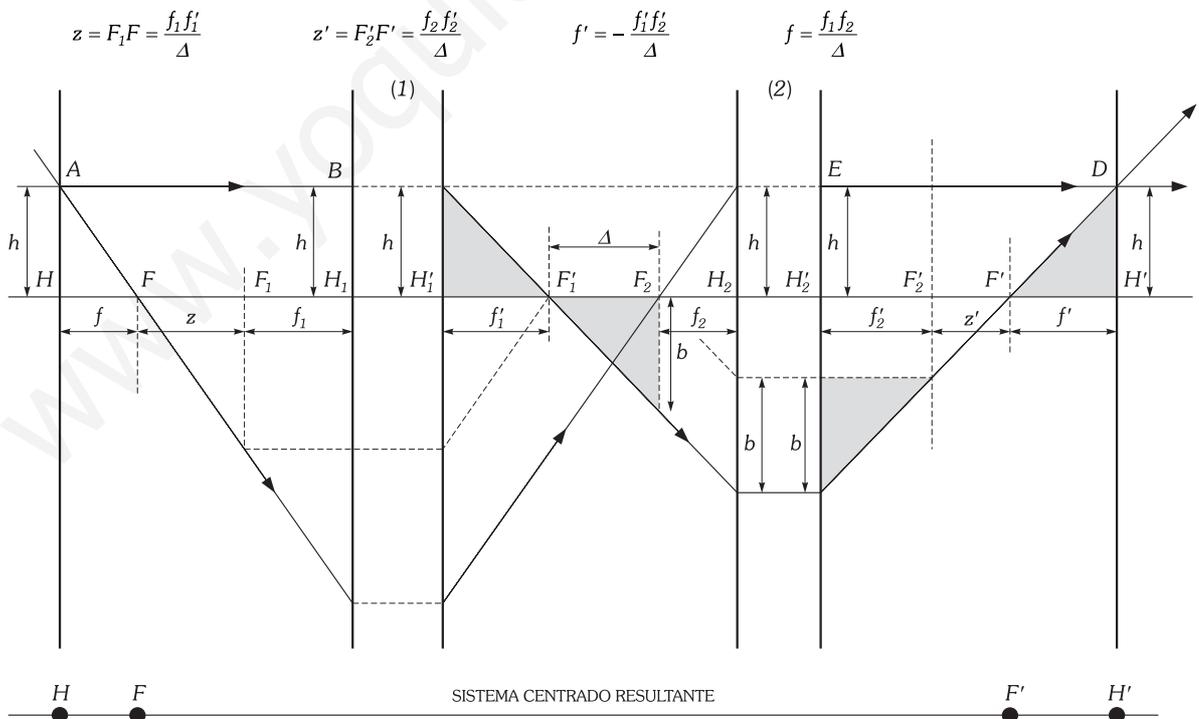


Fig. XXV-10.- Determinación de los puntos cardinales de un sistema compuesto.

Se llama INTERVALO ÓPTICO ( $\Delta$ ) a la distancia ( $F'_1, F_2$ ) del foco imagen del primer sistema al foco objeto del segundo; a  $\Delta$  lo consideramos siempre como positivo si, siguiendo la marcha de la luz (de izquierda a derecha),  $F'_1$  está antes que  $F_2$  (caso de la figura) y negativo en caso contrario.

Consideremos un rayo (AB) paralelo al eje que corta el plano principal objeto del primer sistema a la altura  $h$ ; dibujemos su trayectoria a través de los sistemas; el rayo emergente del segundo sistema corta al eje en  $F'$ , que es el *foco imagen compuesto* ya que es el punto en que el rayo paralelo al eje en el espacio objeto, corta a dicho eje en el espacio imagen. La prolongación de AB y el rayo emergente del segundo sistema se cortan en el punto D, que proyectado sobre el eje nos determina el *punto principal imagen (H')* del sistema; en efecto DH' pertenece al plano principal imagen, puesto que el rayo AB que se propaga a una altura  $h$  sobre el eje, en el espacio objeto, corta a tal plano a la misma altura  $h$  en el espacio imagen.  $H'F'$  nos determina la distancia focal  $f'$  (negativa en el dibujo).

Considerando la misma construcción a la inversa, dibujando la trayectoria de DE a través del segundo y primer sistema, encontraremos  $F$  y  $H$ , *foco objeto* y *punto principal del sistema compuesto*.  $HF$  nos determina la distancia focal objeto  $f$  (positiva en el dibujo).

Para determinar las distancias  $F_1F = z$  y  $F_2F' = z'$  nos basta considerar que  $F$  es un punto cuya imagen en el medio (1) es  $F_2$  y que  $F'$  es la imagen en el medio (2) de  $F_1$ . Aplicando la fórmula de Newton  $zz' = ff'$  a cada uno de los casos tomando en ambos  $\Delta$  como positivo, obtenemos:

$$-z\Delta = -f_1f'_1 \Rightarrow z = F_1F = \frac{f_1f'_1}{\Delta}$$

$$z'\Delta = -f_2f'_2 \Rightarrow z' = F_2F' = -\frac{f_2f'_2}{\Delta}$$

quedando, así, determinados los focos del sistema.

Para hallar el valor de  $f'$  (distancia focal del sistema compuesto) consideremos los triángulos semejantes sombreados en la figura, en los que se verifica:

$$\frac{h}{-b} = \frac{-f'}{f'_2} \wedge \frac{h}{-b} = \frac{f'_1}{\Delta} \Rightarrow \frac{-f'}{f'_2} = \frac{f'_1}{\Delta} \Rightarrow f' = -\frac{f'_1f'_2}{\Delta}$$

Llevando estas distancias con signo contrario a partir de  $F'$  y  $F$ , obtendremos  $H$  y  $H'$ . (Se ha cambiado el signo pues  $f'$  y  $f$  son distancias contadas desde  $H$  y  $H'$ ).

$$f = \frac{f_1f_2}{\Delta}$$

De la misma forma obtendríamos como valor de la distancia focal objeto:

Conocidas las distancias focales y la posición de los focos, se determinan los puntos nodales de la forma conocida (párrafo XXV-10).

El sistema estudiado en el dibujo ha quedado reducido al de la Fig. XXV-10 (inferior).

**XXV - 13. Determinación de los puntos cardinales de una lente gruesa**

Una lente es una asociación de dos dioptrios esféricos. Estudiaremos, como en todo lo que antecede, la formación de imágenes correspondientes a rayos en la zona paraxial.

Los puntos principales de los dioptrios se identifican con los polos de los casquetes esféricos y sus planos principales con los tangentes a la esfera en tales puntos. Las distancias focales quedan determinadas por las fórmulas del dioptrio esférico:  $f' = rn/(n' - n)$  y  $f = -rn/(n' - n)$ ; considerando que en el primer dioptrio el medio de entrada es el aire y el de la salida vidrio (índices 1 y  $n$  respectivamente) y en el segundo dioptrio a la inversa, obtenemos:

$$f'_1 = r_1 \frac{n}{n-1} \quad f_1 = -r_1 \frac{1}{n-1} \quad f'_2 = r_2 \frac{1}{1-n} \quad f_2 = -r_2 \frac{n}{1-n}$$

Como ejemplo supongamos el caso de la Fig. XXV-11, en que los valores de  $r_1$  y  $r_2$  son iguales y de signo contrario:  $r_1 = -r_2 = r$ . También hemos supuesto que el espesor máximo de la lente es:  $e = r$ , y que su índice de refracción es:  $n = 1,5$ . Las distancias focales de los dioptrios son, en tal caso:

$$f'_1 = 3r \quad f_1 = -2r \quad f'_2 = 2r \quad f_2 = -3r$$

observemos que los focos imagen ( $F'_1$  y  $F'_2$ ) y objeto ( $F_1$  y  $F_2$ ) de ambos dioptrios coinciden en el ejemplo que estudiamos.

Realizando una construcción idéntica a la de los sistemas compuestos, obtenemos  $F'$ ,  $H'$ ,  $F$  y  $H$ ; en el dibujo se han especificado, únicamente, las posiciones de  $F'$  y  $H'$  ya que, dada la simetría del sistema que nos ha servido como ejemplo,  $F$  y  $H$  están a la misma distancia de  $H_1$  que  $F'$  y  $H'$  lo están de  $H_2$ .

Analíticamente obtenemos:

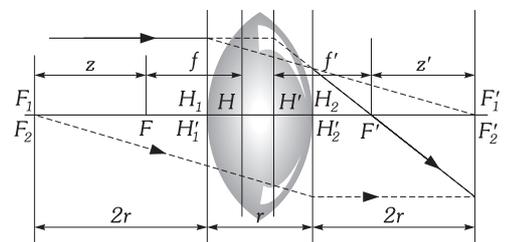


Fig. XXV-11.- Determinación de los puntos cardinales de una lente gruesa.

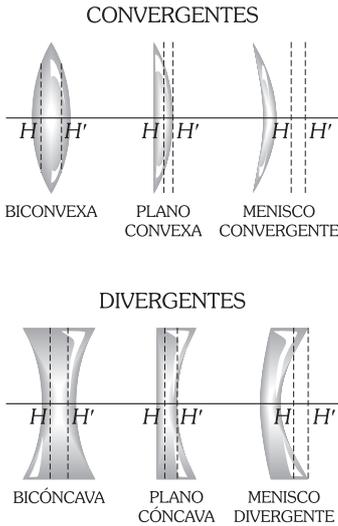


Fig. XXV-12.- Diversos tipos de lentes.

$$\Delta = -5r$$

$$F_2'F' = \frac{f_2 f_2'}{\Delta} = -\frac{(-3r) 2r}{-5r} = -\frac{6}{5} r$$

$$F_1F = \frac{f_1' f_1}{\Delta} = \frac{(-2r) 3r}{-5r} = \frac{6}{5} r$$

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta} = -\frac{3r 2r}{-5r} = \frac{6}{5} r$$

$$f = \frac{f_1 f_2}{\Delta} = \frac{(-2r)(-3r)}{-5r} = -\frac{6}{5} r$$

quedando, así, determinadas las posiciones de los focos y los planos principales, simplificándose la construcción de imágenes a la de la Fig. XXV-4.

Hemos resuelto, en el ejemplo precedente, el problema: *conocidos los radios de los dioptrios que forman las caras de una lente, el espesor de ésta y su índice de refracción con relación al medio exterior, determinar la posición de sus focos y planos principales.*

Resuelto el problema para los distintos casos que pueden presentarse, obtenemos los resultados indicados en la Fig. XXV-12.

En toda lente limitada en sus dos caras por el mismo medio se verifica: *Las distancias focales son iguales y de signo contrario:*

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'} = -1 \Rightarrow f = -f'$$

Los puntos nodales (N y N') se confunden con los principales, debido a la anterior propiedad.

**XXV - 14. Convergencia o potencia de una lente**

CONVERGENCIA o potencia de un sistema óptico es la inversa de su distancia focal imagen.

$$\varphi' = \frac{1}{f'}$$

En las lentes convergentes la distancia focal imagen es positiva y la convergencia también lo es. En las lentes divergentes son negativas ambas.

La unidad de convergencia es la DIOPTRÍA: «convergencia de un sistema de distancia focal imagen un metro». El número de veces que un metro contiene a la distancia focal, da su convergencia en dioptrías.

Consideremos la lente de la Fig. XXV-13; el medio exterior a ella es el aire; las distancias focales de los dioptrios viene dadas por:

$$f_1 = -r_1 \frac{1}{n-1} \quad f_1' = r_1 \frac{n}{n-1} \quad f_2 = r_2 \frac{n}{n-1} \quad f_2' = -r_2 \frac{1}{n-1}$$

Considerando el valor de la distancia focal imagen de un sistema compuesto ( $f' = -f_1' f_2' / \Delta$ ) y el intervalo óptico [ $\Delta = e - f_1' - (-f_2) = e - f_1' + f_2$ ], obtenemos:

$$\varphi' = \frac{1}{f'} = -\frac{\Delta}{f_1' f_2'} = \frac{(n-1)^2}{nr_1 r_2} \left[ e - r_1 \frac{n}{n-1} + r_2 \frac{n}{n-1} \right] = \frac{n-1}{r_1 r_2} \left[ \frac{e(n-1)}{n} - r_1 + r_2 \right]$$

$$\varphi' = (n-1) \left[ \frac{e(n-1)}{nr_1 r_2} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right]$$

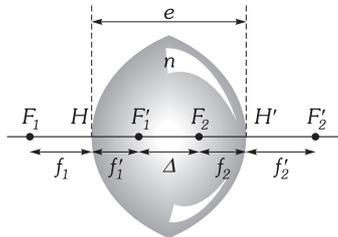


Fig. XXV-13.- Lente gruesa con el medio externo aire.

**XXV - 15. Lentes delgadas**

Considerando en la fórmula de la convergencia para una lente gruesa, obtenida en párrafo anterior, que el espesor de la lente e es despreciable frente a los valores de r1 y r2, obtenemos, para una lente delgada:

$$\varphi' = \frac{1}{f'} = (n-1) \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]$$

en la que r1 y r2, deben ser expresadas en metros, para obtener phi' en dioptrías; n es el índice de refracción relativo de la sustancia que constituye la lente, con respecto al medio exterior.

En toda lente, en que los medios que limitan las caras son idénticos (aire generalmente), las distancias focales son iguales y de sentido contrario:

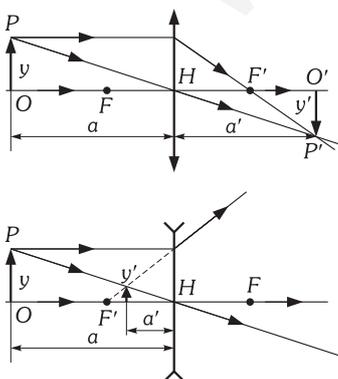


Fig. XXV-14.- Construcción geométrica de imágenes en lentes convergentes y divergentes.

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'} = -1 \Rightarrow f = -f'$$

La fórmula general de los sistemas centrados, para la zona paraxial se expresa:

$$\frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1 \Rightarrow \frac{-f'}{a} + \frac{f'}{a'} = 1 \Rightarrow -\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f'}$$

y en el caso de lentes delgadas:

$$\boxed{-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f'} = (n-1) \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]}$$

Los puntos principales y los nodales se confunden en el centro de la figura H (Fig. XXV-14) de la lente.

**XXV – 16. Construcción geométrica de las imágenes**

Para obtener la imagen de un punto, basta determinar el punto de concurrencia de los rayos que parten del punto objeto (Fig. XXV-14).

LENTES CONVERGENTES: Un eje secundario (rayo que pasa por el centro óptico) que no sufre desviación al atravesar la lente. Un rayo paralelo al eje principal que atraviesa la lente y pasa por el foco imagen. También se puede dibujar un rayo que pasa por el foco objeto, llega a la lente, la atraviesa y emerge paralelo al eje principal.

LENTES DIVERGENTES: Un eje secundario que no sufre desviación al atravesar la lente. Un rayo paralelo al eje que atraviesa la lente y emerge de forma que su prolongación pase por el foco imagen. También se puede dibujar un rayo que llega a la lente en una dirección tal que su prolongación pase por el foco objeto, atraviesa la lente y emerge paralelo al eje principal.

**XXV – 17. Aumento lateral**

Si los medios que limitan las caras son idénticos su valor es:

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} \frac{n}{n'} \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a}}$$

Las alturas de imagen y objeto son proporcionales a sus distancias al centro óptico de la lente.

Geoméricamente podemos deducir la fórmula anterior de la Fig. XXV-14, teniendo en cuenta los triángulos semejantes POH y P'O'H y expresando todas las magnitudes con su valor y signo: PO = y; P'O' = -y'; HO = -a; HO' = a', obteniendo y'/y = a'/a.

**XXV – 18. Imágenes en lentes convergentes**

Objeto: entre 2f y -∞ Imagen: entre 2f' y f'	Imagen menor, real e invertida (Fig. XXV-15-1ª)
Objeto: en 2f Imagen: en 2f'	Imagen igual, real e invertida (Fig. XXV-15-2ª)
Objeto: entre 2f y f Imagen: entre 2f' e ∞	Imagen mayor, real e invertida (Fig. XXV-15-3ª)
Objeto: entre f y la lente Imagen: entre la lente y -∞	Imagen mayor, virtual y derecha (Fig. XLV-15-4ª)

**XXV – 19. Imágenes en las lentes divergentes**

Las imágenes de los objetos reales en las lentes divergentes son siempre virtuales, menores, derechas y situadas entre el foco y la lente (Fig. XXV-16).

La comprobación matemática de posiciones y tamaños de las imágenes en lentes convergentes y divergentes, se realiza de forma análoga a la efectuada en los espejos esféricos.

**XXV – 20. Imagen de un punto del eje**

Para determinar geoméricamente la imagen de un punto del eje, basta trazar un rayo cualquiera OI (Fig. XXV-17) y otro imaginario paralelo a él, y que pase por el centro óptico, que atraviesa la lente sin experimentar desviación. Los rayos (lentes convergentes) o sus prolongaciones (lentes divergentes) se habrán de unir en el punto A del plano focal imagen. La recta IA determina la dirección del rayo emergente. Se considera el propio eje principal como otro rayo de luz.

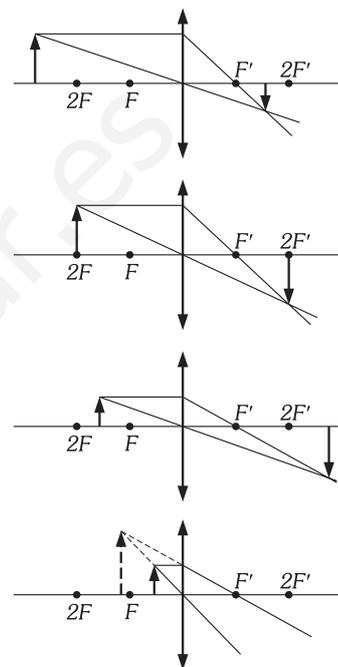


Fig. XXV-15.- Imágenes en las lentes convergentes.

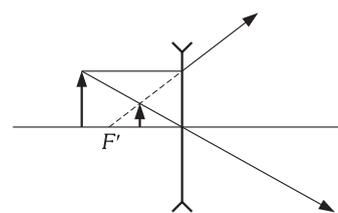


Fig. XXV-16.- Imágenes en las lentes divergentes.

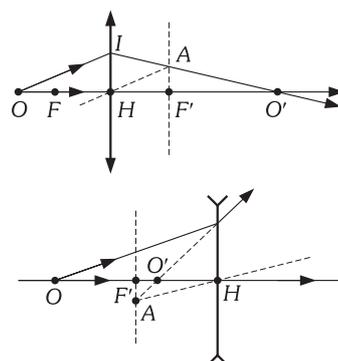


Fig. XXV-17.- Imagen de un punto del eje en lentes convergentes y divergentes.

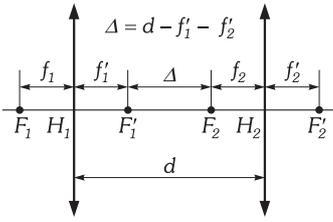


Fig. XXV-18.- Intervalo óptico.

**XXV - 21. Convergencia de un sistema de lentes**

Teniendo en cuenta la Fig. XXV-18, obtenemos:  $\Delta = d - f_1 - (-f_2) = d - f_1 - f_2'$

ya que:  $-f_2 = f_2'$ . La convergencia del sistema es (párrafo XXV-12):

$$\varphi' = \frac{1}{f'} = -\frac{\Delta}{f_1 f_2'} = -\frac{d - f_1 - f_2'}{f_1 f_2'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2'} - \frac{d}{f_1 f_2'} \Rightarrow \boxed{\varphi' = \varphi_1' + \varphi_2' - d \varphi_1' \varphi_2'}$$

Si las lentes están en contacto ( $d = 0$ ) la convergencia del sistema es la suma de las convergencias:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2'} \Rightarrow \boxed{\varphi' = \varphi_1' + \varphi_2'}$$

Si las dos lentes son convergentes ( $f_1'$  y  $f_2'$  positivas) la convergencia va disminuyendo conforme aumenta  $d$ .

Cuando: 
$$\frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} = \frac{d}{f_1' f_2'}$$

o sea: 
$$\frac{f_1' + f_2'}{f_1' f_2'} = \frac{d}{f_1' f_2'} \Rightarrow f_1' + f_2' = d$$

la convergencia es cero, y al sistema se le llama TELESCÓPICO (Fig. XXV-19), estando la imagen de un punto en el infinito, también en el infinito; y emergiendo paralelos al eje, los rayos que inciden paralelos a él.

Si las lentes se siguen separando, al ser:  $\frac{d}{f_1' f_2'} > \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'}$  el sistema es negativo.

Las lentes divergentes producen en su asociación, sistemas negativos; el valor absoluto de la convergencia aumenta conforme aumenta la distancia entre las lentes.

**PROBLEMAS: 1 al 47.**

**C) ABERRACIONES GEOMÉTRICAS**

**XXV - 22. Aberraciones geométricas**

Se dice que un sistema óptico es perfecto cuando de todo plano objeto perpendicular al eje produce una imagen plana también perpendicular al eje, tal que, a todo punto del plano objeto corresponde estigmáticamente otro punto, su conjugado en el plano imagen, y a toda figura en el plano objeto otra semejante en el plano imagen. Cuando esto no sucede se dice que la imagen tiene *aberraciones* o defectos, los cuales se clasifican para una luz monocromática en cinco tipos: *aberración esférica*, *coma*, *astigmatismo*, *curvatura de imagen* y *distorsión*. Las tres primeras se refieren a la calidad del punto imagen, es decir, son puros defectos de estigmatismo, y las dos últimas, supuesta la perfecta correspondencia estigmática, a la posición del punto de imagen respecto al plano imagen y al punto imagen ideal.

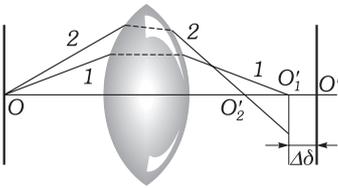


Fig. XXV-20.- Aberración esférica.

**XXV - 23. Aberración esférica**

Significa que no todos los rayos que salen de un punto del eje van al punto paraxial (imagen formada por los rayos muy próximos al eje) (Fig. XXV-20). Aberración esférica de un rayo (rayo 1 de la figura), es la distancia desde el punto imagen paraxial ( $O'$ ) al punto donde dicho rayo corta al eje ( $O_1'$ ). En la figura es el segmento  $O_1'O' = \Delta\delta$ .

**XXV - 24. Coma**

Es una aberración propia de los puntos fuera del eje. Supongamos un punto A de un objeto OA (Fig. XXV-21a) que emite un haz de luz del cual penetra en el sistema todo lo que permite el diafragma D. Si de este haz consideramos el rayo principal (RP) que pasa por el centro del diafragma y los que limitan los bornes superior e inferior (RS) y (RI), si no pasan los tres por A', imagen ideal de A, se dice que hay *coma* y en lugar de obtenerse como imagen de un punto otro punto, se obtiene una mancha como la Fig. XXV-21b en forma de cometa, de donde viene su nombre.

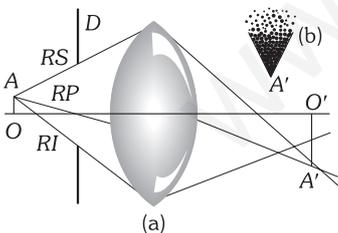


Fig. XXV-21.- Coma.

**XXV - 25. Astigmatismo**

También se refiere a puntos fuera del eje. Supongamos un punto A fuera del eje (Fig. XXV-22) y consideremos un pincel infinitesimal de luz en torno al rayo principal (RP) dentro de los cuatro rayos 1 y 2 en el plano meridiano y 3 y 4 en el perpendicular al meridiano.

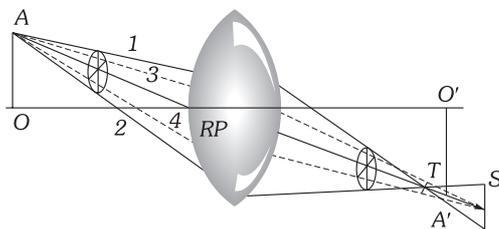


Fig. XXV-22.- Astigmatismo.

Cuando hay astigmatismo en el punto donde se cortan los rayos meridianos 1 y 2, aparece como imagen un segmento de recta  $T$ , contenido en el plano de los rayos 3 y 4; donde se cortan los rayos 3 y 4 con el eje del pincel aparece otro segmento de recta brillante  $S$ , contenido en el plano de los rayos 1 y 2. Estas dos imágenes rectilíneas brillantes, perpendiculares entre sí, se llaman FOCAL DE STURM y se suelen denominar FOCAL TANGENCIAL ( $T$ ) y FOCAL SAGITAL ( $S$ ). La distancia entre ellas, medida sobre el rayo principal es lo que se llama ASTIGMATISMO DEL PINCEL. Otros pinceles infinitesimales que saliendo de  $A$  atraviesan el sistema, pueden tener astigmatismo diferente.

**XXV – 26. Curvatura de imagen**

Suponiendo que un sistema no tenga aberración esférica, ni coma, ni astigmatismo, todos los rayos que salgan de un punto objeto  $A$  (Fig. XXV-23) irán a reunirse en el punto imagen  $A'$ ; pero si  $A'$  no está en el plano imagen ideal, la imagen del plano objeto que pasa por  $OA$  será una superficie curvada  $O'A'$ . Este defecto es la CURVATURA DE IMAGEN.

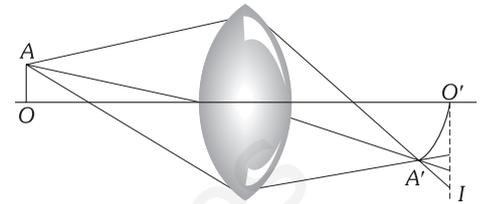


Fig. XXV-23.- Curvatura de imagen.

**XXV – 27. Distorsión**

La distorsión, suponiendo que no existe ninguna de las aberraciones anteriores, es una falta de constancia en el aumento al variar el tamaño del objeto.

Supongamos un plano perpendicular al eje. Por estar este plano en una posición ante el sistema, le corresponde un plano imagen con un aumento fijo  $\beta$ ; pero si éste no es constante con el tamaño del objeto y suponemos que el aumento crece con tal tamaño, al segmento  $OA$  le corresponderá  $O'A' > \beta \times OA$  y al  $OB$  le corresponderá el  $O'B' > \beta \times OB$ . Si consideramos un segmento de recta que pasa por  $A$ , a los puntos  $A_1$  y  $A_2$  que distan del eje más que  $A$  les corresponderán aumentos mayores que al  $A$  y la imagen del segmento  $A_1A_2$  será, no la recta  $A'_1A'_2$ , sino la curva  $A''_1A''_2$ . Si por el contrario el aumento disminuyera con el tamaño del objeto, a segmentos de recta cruzados perpendicularmente con el eje en el plano objeto, corresponderán, en el plano imagen, curvas con la concavidad hacia la imagen paraxial  $O'$ . En el primer caso se dice que hay DISTORSIÓN EN CORSÉ y en el segundo DISTORSIÓN EN BARRILETE. Las imágenes de una cuadrícula son, en estos casos, como indica la Fig. XXV-25.

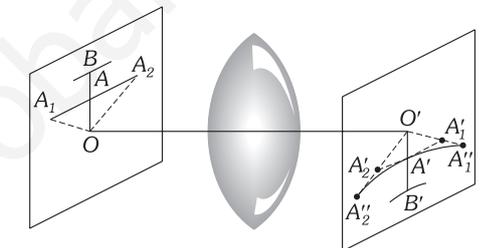


Fig. XXV-24.- Distorsión.

**D) EL OJO HUMANO**

**XXV – 28. Ojo humano**

Es un cuerpo casi esférico de uno dos cm de diámetro, recubierto de una membrana blanca –LA ESCLERÓTICA ( $E$ )– que en su parte anterior se abomba y se hace transparente –CÓRNEA ( $C$ )–. Esta membrana, salvo en dicha parte anterior, está tapizada por otra oscura llamada COROIDE ( $K$ ). Tras atravesar la luz a la córnea encuentra al HUMOR ACUOSO, líquido transparente (solución de sal común en agua) y tras él al CRISTALINO ( $Cr$ ) cuerpo gelatinoso que es una verdadera lente convergente; la luz atraviesa después el HUMOR VÍTREO ( $H$ ) –líquido gelatinoso– llegando a la RETINA ( $Re$ ), tapiz de ramificaciones nerviosas del NERVIÓ ÓPTICO ( $N$ ).

En la RETINA, de tejido formado por células llamadas CONOS y BASTONES, se proyecta la imagen formada por el cristalino, obteniendo una visión tanto más detallada cuantas más células abarca la imagen. La densidad de elementos sensible es máxima en la «FOSETA O MANCHA AMARILLA».

Los movimientos instintivos de los ojos, al fijarnos en un objeto, tiene por finalidad la formación de la imagen en la mancha amarilla.

El cristalino está diafragmado por su parte anterior por una membrana opaca –IRIS ( $I$ )– con un orificio circular –PUPILA ( $P$ )– que aumenta o disminuye su diámetro involuntariamente para regular la cantidad de luz que penetra en el ojo.

Una serie de músculos, llamados CILIARES, que rodean el cristalino permiten disminuir sus radios de curvatura y distancia focal aumentando, en consecuencia, su potencia.

La luz, propagada en el aire, tiene que atravesar la córnea, el humor acuoso, el cristalino y el humor vítreo, llegando a la retina.

Listing identifica el ojo humano a un dioptrio esférico de 0,5 cm de radio, separando dos medios de índices de refracción 1 y 4/3. La distancia focal-imagen tiene por valor:

$$f' = rn'/(n' - n) = 2 \text{ cm}$$

El centro de curvatura del dioptrio está muy próximo a la cara posterior de cristalino.

El cristalino produce imágenes reales sobre la retina y el nervio óptico transmite el estímulo de la visión al cerebro.

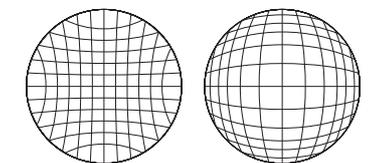


Fig. XXV-25.- Distorsión en corsé y en barrilete.

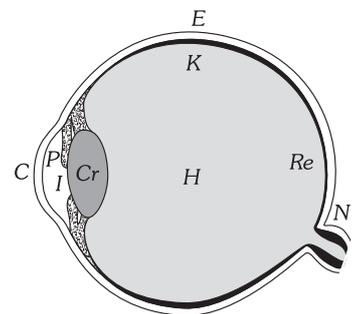


Fig. XXV-26.- Fisiología del ojo humano.

**XXV – 29. Ojo normal. Acomodación**

En un ojo normal y en actitud de descanso (sin actuar los músculos ciliares), el foco-imagen del sistema, está en la retina.

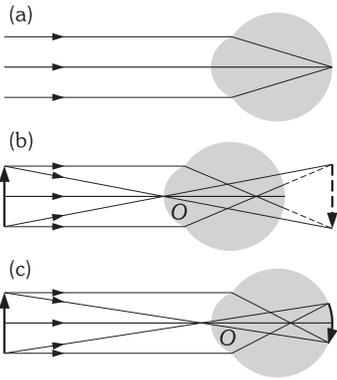


Fig. XXV-27.- Ojo normal.

Los objetos muy lejanos (infinito óptico) forman su imagen en el foco –sobre la retina– y se ven con toda nitidez (Fig. XXV-27a).

Conforme se acerca el objeto, la imagen se aleja del cristalino y si éste fuera indeformable la imagen de un punto sería una superficie y, al suponerse las imágenes correspondientes a los diversos puntos del cuerpo, la visión sería borrosa (b).

Para la visión de los objetos próximos, los músculos ciliares verifican la ACOMODACIÓN: el cristalino se hace más curvo, aumenta su convergencia y disminuye su distancia focal, hasta que la imagen se proyecta sobre la retina (c).

Conforme se acerca el objeto, la acomodación es mayor, hasta que se llega a un límite máximo de acomodación; el objeto está entonces colocado en el PUNTO PRÓXIMO a una distancia del ojo llamado distancia mínima de la visión que, en el ojo normal, es de 25 centímetros aproximadamente.

*El ojo normal ve en el infinito sin acomodación; del infinito al punto próximo con acomodación creciente y en el punto próximo con la máxima acomodación.*

**XXV – 30. Ojo miope**

La MIOPIA es un exceso de convergencia del sistema óptico que forma el ojo; el foco-imagen de éste, en actitud de descanso (sin actuar los músculos ciliares), está entre el cristalino y la retina.

La causa de la miopía puede ser un exceso de convergencia del cristalino, de la córnea o de ambas a la vez o, también, que siendo estas convergencias normales sea grande el diámetro antero-posterior del ojo y la retina está más lejos de lo que conviene.

Los objetos situados en el infinito forman la imagen antes de la retina y no se ven con nitidez (Fig. XXV-28a). (Los músculos ciliares no son aptos para disminuir la convergencia del cristalino.) Al ir acercando el objeto, la imagen se va alejando del foco, y acercando a la retina. En un punto determinado –PUNTO REMOTO– la imagen se forma en la retina, viéndose con nitidez (b).

A partir de este punto, acercando el objeto, el proceso de acomodación es idéntico al del ojo normal (c).

El ojo miope tiene el punto próximo más cercano que el normal.

*El ojo miope no ve con nitidez los objetos situados del infinito al punto remoto. En el punto remoto se ven sin acomodación; del punto remoto al próximo con la máxima acomodación.*

El ojo miope necesita lentes divergentes para tener una visión normal. El foco objeto de las lentes debe estar en el punto remoto, pues de esta forma los rayos procedentes del infinito llegan al ojo como si procediesen del punto remoto, formándose la imagen en la retina sin ninguna acomodación (Fig. XXV-28d).

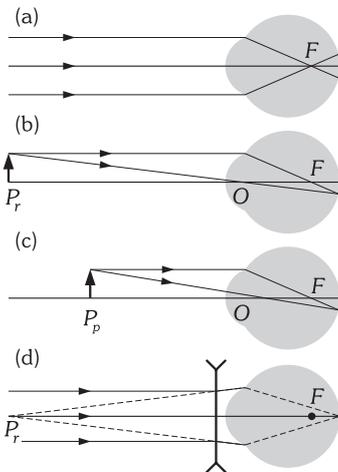


Fig. XXV-28.- Ojo miope.

**XXV – 31. Ojo hipermetrope**

La HIPERMETROPÍA es un defecto de convergencia del sistema óptico que forma el ojo; el foco-imagen de éste, en actitud de descanso (sin actuar los músculos ciliares), está detrás de la retina.

Las causas de la hipermetropía son las contrarias a las descritas en la miopía.

Los objetos situados en el infinito formarían la imagen detrás de la retina (Fig. XXV-29a); el ojo se acomoda transportándose el foco a la retina, consiguiéndose así la visión de los objetos lejanos (b).

Al acercarse el objeto el proceso de acomodación es idéntico al del ojo normal (c).

El ojo hipermetrope tiene el punto próximo más lejano que el ojo normal.

El punto remoto es virtual; es decir, unas series de rayos, ya convergentes, cuyas prolongaciones se reúnen en ( $P_r$ ) penetran en el ojo y, sin acomodación de éste, forman una imagen en la retina (d).

*El ojo hipermetrope ve los objetos del infinito con mínima acomodación, del infinito al punto próximo con acomodación creciente y en el punto próximo con la máxima acomodación.*

El ojo hipermetrope necesita lentes convergentes para tener una visión normal. El foco imagen de las lentes debe estar en el punto remoto (Fig. XXV-29e), pues de esta forma los rayos procedentes del infinito llegan al ojo con la inclinación adecuada para formar la imagen en la retina, sin acomodación.

**PROBLEMAS: 48 al 56.**

**XXV – 32. Ojo presbita**

La PRESBICIA o vista cansada es un defecto adquirido con la edad y el trabajo intelectual; el cristalino pierde flexibilidad y los músculos ciliares se debilitan y, en consecuencia, el poder de acomodación disminuye, alejándose el punto próximo.

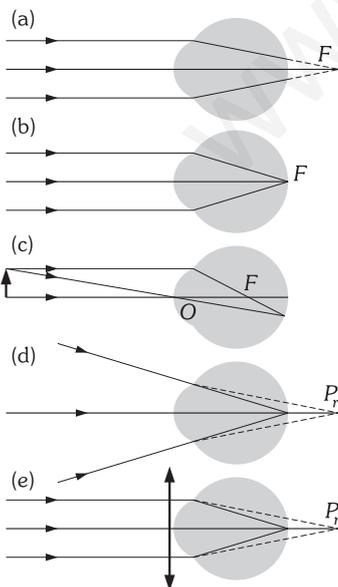


Fig. XXV-29.- Ojo hipermetrope.

El defecto se corrige con lentes convergentes que suplan la acomodación defectuosa del ojo. Un ojo, sin acomodación alguna, y cuya configuración es normal, necesita lentes cuyo foco esté, precisamente, en el punto que se quiere ver; de esta forma los rayos de luz penetran en el ojo como si procedieran del infinito, y se forma la imagen en la retina (Fig. XXV-30).

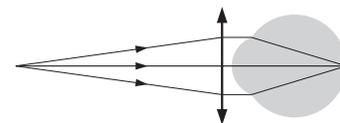


Fig. XXV-30.- Gafas de ojo presbita.

**XXV – 33. Ojo astigmático**

El ASTIGMATISMO es un defecto de curvatura de la córnea, que presenta secciones distintas en diversos planos meridianos (párrafo XXV-25).

Este defecto impide ver con nitidez y simultáneamente los diversos diámetros de una circunferencia. Se corrige el defecto con lentes cilíndricas orientadas convenientemente.

**XXV – 34. Ángulo aparente. Tamaño de la imagen retiniana**

ÁNGULO APARENTE de un objeto es el ángulo bajo el cual se ven sus extremos.

Cuanto mayor es el ángulo aparente, tanto mayor es la imagen que se forma en la retina y mayor nos parece el objeto que miramos.

La tangente del ángulo de la visión es:  $\text{tg } \alpha = I/d$ , siendo  $I$  el tamaño de la imagen retiniana y  $d$  la distancia del centro de curvatura del dioptrio de Listing a la retina.

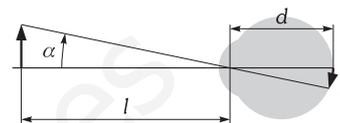


Fig. XXV-31.- Ángulo aparente.

$$I = d \text{tg } \alpha$$

«El tamaño de la imagen retiniana es directamente proporcional a la tangente del ángulo aparente».

**XXV – 35. Agudeza visual y poder separador**

Ángulo de AGUDEZA VISUAL es el mínimo ángulo bajo el cual se pueden ver dos puntos separadamente; a la inversa de tal ángulo se le llama PODER SEPARADOR.

El poder separador queda limitado por la necesidad de que las imágenes de dos puntos que se ven separadamente, deben formarse en distintas células sensibles de la retina; su valor ordinario es de 1 a 2 minutos.

Teóricamente, como se verá en el párrafo XXVI-11, la agudeza visual siguiendo el criterio de Rayleigh, toma el valor:

$$\varphi \geq \frac{1,22 \lambda}{Dn}$$

siendo  $\lambda$  la longitud de onda en el vacío de la luz que penetra en el ojo,  $D$  el diámetro de la pupila y  $n$  el índice de refracción del ojo. Suponiendo para la pupila un diámetro de 2 mm y para el índice de refracción del ojo 4/3, escribiremos en el si para valores de la agudeza visual y poder separador del ojo:

$$\varphi \geq \frac{1,22 \times 3}{2 \times 10^{-2} \times 4} \lambda = 91,5 \lambda \quad p \leq \frac{1}{91,5 \lambda}$$

en consecuencia, para que el ojo distinga separadamente dos puntos A y B (Fig. XXV-32) situados a una distancia  $l$  del observador, tendrán que estar separados una distancia  $y$ , que calculamos tomando  $\text{tg } \varphi = \varphi$ , quedándonos:

$$y = l\varphi \geq 91,5 \lambda l$$

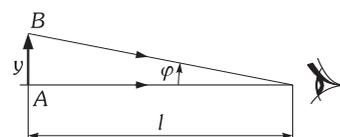


Fig. XXV-32.- Ángulo de agudeza visual.

**XXV – 36. Visión binocular**

Las imágenes formadas en la retina de cada uno de los dos ojos no son idénticas. Si miramos un cilindro normalmente a su base, el ojo izquierdo ve la base y parte del área lateral izquierda; el derecho ve la base y parte del área lateral derecha; la superposición cerebral de las dos imágenes produce la sensación de relieve.

**E) INSTRUMENTOS DE ÓPTICA**

**XXV – 37. Instrumentos de óptica**

Los instrumentos de óptica –aparatos empleados para mejorar la visión–, pueden ser de proyección y de visión directa. Los primeros tienen como finalidad la formación de imágenes reales del objeto a observar, las cuales se recogen en una pantalla. Los instrumentos de visión directa forman imágenes virtuales.

En la visión sin acomodación con estos últimos aparatos, la imagen final ha de formarse en el punto remoto del ojo observador; si el ojo es normal, en el infinito. Como el punto remoto de un ojo miope está delante del ojo, la imagen que dé el aparato, en este caso, debe ser virtual. Si el ojo

es *hipermétrope* la imagen debería formarse en su punto remoto, situado detrás del cristalino; pero antes de la formación de tal imagen *real*, se interpone el ojo para recoger los rayos que han de formar una definitiva imagen en la retina. En este mecanismo de visión, el observador elimina la fatiga correspondiente de acomodación, realizada por los músculos ciliares.

**XXV – 38. Aumento**

AUMENTO de un instrumento de proyección es el cociente de dividir la altura de la imagen por la del objeto:

$$\beta = \frac{y'}{y}$$

AUMENTO VISUAL en un instrumento de visión directa es el cociente de dividir la altura de la imagen retiniana formada con el instrumento, por la altura de la imagen retiniana visto el objeto sin el instrumento.

Si es un objeto de pequeño tamaño, cuya posición podemos modificar a voluntad, la imagen retiniana formada sin aparato, es la obtenida cuando el objeto está colocado en el punto próximo del ojo observador. Como la altura de la imagen retiniana es proporcional a la tangente del ángulo de la visión, podremos definir:

$$A = \frac{\text{tg } \alpha}{\text{tg } \alpha'}$$

«El aumento visual en un instrumento de visión directa es el cociente de dividir la tangente del ángulo de la visión observado el objeto con el aparato, por la tangente del ángulo de la visión, visto sin él».

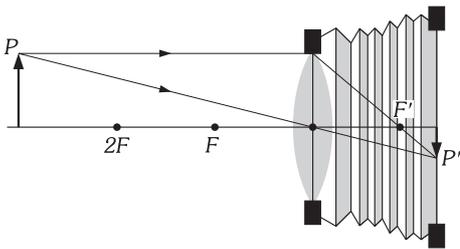


Fig. XXV-33.– Cámara fotográfica.

Si es un objeto de pequeño tamaño, cuya posición podamos modificar a voluntad, el ángulo de visión sin aparato es el obtenido cuando el objeto está colocado en el punto próximo del ojo observador.

**XXV – 39. Cámara fotográfica**

La misión de la CÁMARA FOTOGRÁFICA es formar imágenes reales y menores (en general), que proyectadas sobre una placa sensible a la luz, den una reproducción permanente del objeto.

Consta de una lente o sistema de lentes convergentes –objetivo– y una pantalla –placa fotográfica–. El objeto está colocado (en general) entre el doble de la distancia focal y el infinito, dando así imágenes menores e invertidas.

La marcha de la luz está indicada en la Fig. XXV-33. Un fuelle, o cualquier dispositivo modificador de la distancia entre el objetivo y la placa, permite enfocar, es decir, que la imagen se forme exactamente en la placa sensible a la luz.

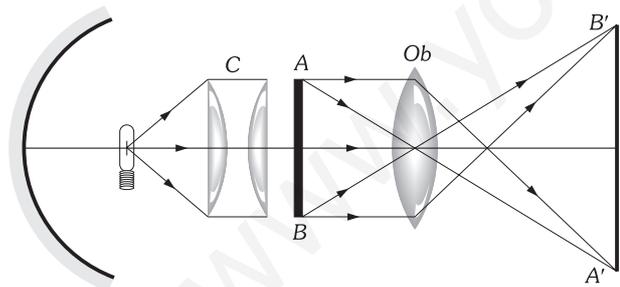


Fig. XXV-34.– Proyector de transparencias.

**XXV – 40. Proyectores de transparencias y opacos**

El proyector de transparencias tiene por finalidad formar imágenes reales y mayores que son recogidas en una pantalla.

Consta de una lente o sistema de lentes convergentes; entre su foco-objeto y el doble de tal distancia focal se coloca el objeto a proyectar (AB).

Puesto que la imagen resulta invertida, se coloca el objeto invertido para que en la pantalla se proyecte la imagen derecha.

El sistema de iluminación consta de un arco voltaico o lámpara eléctrica muy potente cuya luz atraviesa un sistema de lentes (condensador C) que forma una imagen del manantial luminoso en el objetivo (si éste es un sistema de lentes la imagen del manantial debe formarse en el diafragma del objetivo).

En el EPIDIÁSCOPO, aparato destinado a proyectar cuerpos opacos, la luz producida por una lámpara, ilumina directamente al objeto opaco O (Fig. XXV-35); los rayos que emergen de éste inciden en el espejo plano E y llegan al objetivo L, que forma la imagen correspondiente.

**XXV – 41. Cinematógrafo**

Las imágenes formadas en la retina persisten en ella durante 1/10 de segundo; si antes de finalizar la sensación es sustituida la imagen retiniana por otra del mismo objeto, en posición muy poco distinta, y ésta por otra, etc., nuestra vista percibirá un movimiento.

La cámara cinematográfica proyecta en una pantalla fotografías de un objeto en movimiento, obtenidas y proyectadas en intervalos menores de 1/10 de segundo.

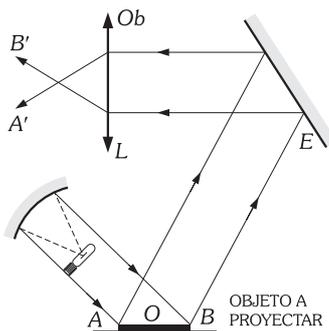


Fig. XXV-35.– Epidiáscopo.

Las fotografías pasan por delante del objetivo, deteniéndose un determinado tiempo; mientras son sustituidas por otras, un obturador giratorio tapa el objetivo. Al ser destapado, la nueva fotografía está perfectamente encuadrada y quieta siendo sustituida por la siguiente, cuando se obtura el objetivo. La cinta cinematográfica pasa por enfrente del objetivo a *tirones*.

La película se obtiene por una cámara fotográfica de funcionamiento análogo al proyector.

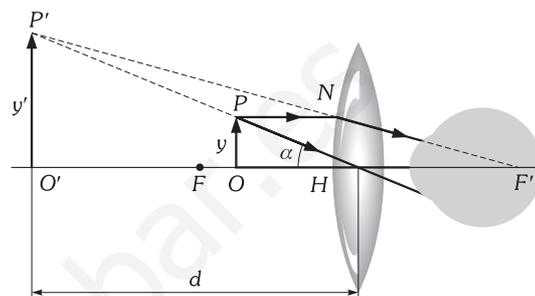
**XXV – 42. Aumento de un proyector**

La fórmula general de los sistemas centrados cuando los medios extremos son idénticos, conduce a:  $\beta = y'/y = a'/a$ . En el caso de cinematógrafo, en el que se obtienen aumentos muy grandes, el objeto está muy cerca del foco-objeto del objetivo ( $a \approx f = f'$ ), pudiendo escribir:

$$\beta = -\frac{a'}{f'} = -a'\varphi'$$

siendo  $\varphi'$  la convergencia del objetivo (como  $a'$  y  $\varphi'$  son positivos, el aumento es negativo, produciéndose imágenes invertidas).

«El aumento en una linterna de proyección es directamente proporcional a la convergencia de su objetivo y a la distancia entre éste y la pantalla».



**XXV – 43. Lupa**

La LUPA es una lente convergente destinada a formar imágenes que perciba el ojo con un ángulo aparente mayor que el correspondiente a la visión del objeto colocado en el punto próximo.

La imagen debe ser virtual; colocándose el objeto entre el foco y la lente (Fig. XXV-36).

Siendo  $y'$  e  $y$ , las alturas de imagen y objeto,  $d$  la distancia del centro óptico a la imagen, colocado el ojo detrás de la lente y muy próximo a ella, y  $l$  la mínima distancia de la visión directa, el *aumento visual* de la lupa es:

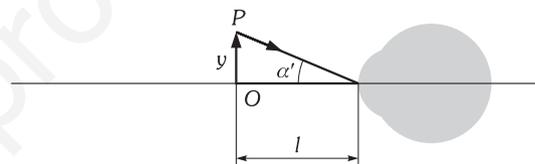


Fig. XXV-36.– Lupa.

$$A = \frac{\text{tg } \alpha}{\text{tg } \alpha'} = \frac{y'/-d}{y/-l} = \frac{y'}{y} \frac{l}{d}$$

considerando los triángulos semejantes  $P'O'F'$  y  $NHF'$  obtenemos:  $\frac{y'}{y} = \frac{-d + f'}{f'} = \frac{-d}{f'} + 1$

por sustitución obtenemos:

$$A = \left(\frac{-d}{f'} + 1\right) \frac{l}{d} = \frac{-l}{f'} + \frac{l}{d}$$

Como  $d$  y  $l$  son negativas al sustituir sus valores, quedan positivos los dos términos de la suma anterior, obteniéndose aumentos visuales positivos, lo que indica la visión de una *imagen derecha*.

Si  $d = 0$ , el aumento visual es  $A = \infty$ .

Si  $d = -\infty$ :

$$A = \frac{-l}{f'} = -l\varphi'$$

Este último aumento corresponde a la visión sin acomodación de un ojo normal. En este caso es indiferente la posición del ojo observador con respecto a la lente, posición que influye en los demás casos. Al ser  $l = -0,25$  m, obtenemos para  $A$  el valor:

$$A = 0,25\varphi' = \frac{\varphi'}{4}$$

«El aumento visual de una lupa con observación al infinito, es la cuarta parte de su potencia en dioptrías».

Para la visión sin acomodación, el objeto se debe colocar en el foco de la lente, cuando por ella mira un individuo de vista normal, formándose una imagen virtual en el infinito (Fig. XXV-37) que el ojo percibe así, sin acomodación.

La lupa y el ojo forman un sistema óptico en el cual la imagen de  $P$  es  $P'$  en la retina. La imagen del punto  $P$  en la lupa es un punto situado en el infinito.

Se llama AUMENTO COMERCIAL al aumento visual, cuando la imagen se forma a la mínima distancia de la visión del observador y éste tiene su ojo a distancia prácticamente nula de la lente.

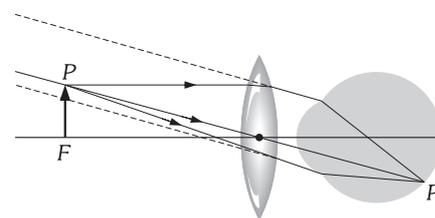


Fig. XXV-37.– Visión al infinito con una lupa.

En tales condiciones,  $l = d$  y la fórmula general queda:

$$A_c = 1 + \frac{-l}{f'} = 1 - l\phi'$$

Siendo la misma distancia de la visión, para un ojo normal, unos 25 cm ( $l = -0,25$  m), el aumento comercial es  $1 + 0,25\phi' = 1 + \phi'/4$ , expresando la convergencia en dioptrías.

**PROBLEMAS: 57 al 64.**

**XXV – 44. Microscopio**

La finalidad del MICROSCOPIO es formar imágenes que perciba el ojo con un ángulo aparente mayor que el correspondiente a la visión del objeto en el punto próximo.

Consta de dos sistemas de lentes llamados *objetivo* y *ocular*. La misión del objetivo es formar imágenes reales y mayores; el objeto ha de colocarse, por lo tanto, entre el foco objeto y el doble de la distancia focal. La misión del ocular es idéntica a la de la lupa: formar imágenes virtuales (Fig. XXV-38).

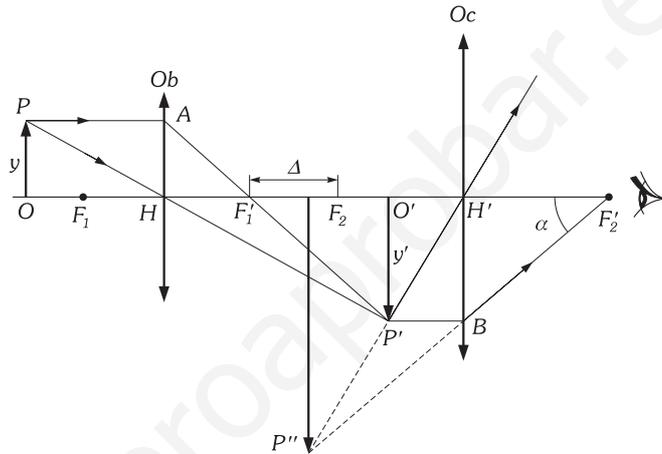


Fig. XXV-38.- Esquema de un microscopio.

**AUMENTO VISUAL:** en la deducción consideraremos que, prácticamente, los rayos que recibe el ojo procedentes del punto imagen  $P''$ , forman con el eje el ángulo  $\alpha$ . En tales condiciones y expresando todas las magnitudes con su valor y signo, la tangente del ángulo de visión con el aparato es:

$$\text{tg}(-\alpha) = \frac{H'B}{H'F'_2} \quad -\text{tg} \alpha = \frac{-y'}{f'_2}$$

siendo  $y'$  la altura de la imagen producida por el objetivo y  $f'_2$  la distancia focal del ocular.

La tangente de  $\alpha'$  es, igualmente que en la lupa:  $\text{tg} \alpha' = y/l$ , siendo  $y$  la altura del objeto y  $l$  la mínima distancia de la visión del observador. Por división se obtiene:

$$A = \frac{\text{tg} \alpha}{\text{tg} \alpha'} = -\frac{y'}{y} \frac{l}{f'_2} \tag{2}$$

El cociente  $-l/f'_2 = -l\phi'_2$  es el valor del *aumento visual del ocular*, considerado como lupa y formándose la imagen en el infinito; el cociente  $y'/y$ , igual al de las alturas de la imagen formada por el objetivo y la altura del objeto, es el *aumento lateral del objetivo*. Se llama respectivamente *aumento del ocular* y *del objetivo* y su producto nos da el aumento del microscopio.

El intervalo óptico  $\Delta$  de un microscopio coincide, prácticamente, con su *longitud óptica* o distancia entre el objetivo y el ocular. Se conviene en considerar esta distancia 16 cm para valorar el aumento del objetivo y en su montura graban tal aumento las casas constructoras, seguido del signo de multiplicar. Realizado el producto de tal número por la cuarta parte de las dioptrías del ocular, se obtiene el aumento visual del microscopio.

Considerando (en la Fig. XXV-38) los triángulos semejantes  $AHF'_1$  y  $F'_1O'P'$ , se tiene:  $-y'/y = F'_1O'/HF'_1$ . Confundiendo  $F'_1O'$  con  $F'_1F_2$  (ya que  $y'$  debe estar siempre muy próxima a  $F_2$  y confundirse con él, en caso de visión al infinito) y llamando a esta distancia entre el foco imagen del objeto y el foco objeto del ocular «INTERVALO ÓPTICO»  $\Delta$  (positivo siempre que  $F'_1$  esté ante  $F_2$ ) obtenemos:  $-y'/y = \Delta/f'_1$ , siendo  $f'_1$  la distancia focal del objetivo. Por sustitución en (2) se tiene:

$$A = \frac{\Delta l}{f'_1 f'_2} = \Delta l \phi'_1 \phi'_2$$

ya que  $1/f'_1$  y  $1/f'_2$  son, respectivamente, las convergencias del objetivo y del ocular.

«El aumento es directamente proporcional a las convergencias del objetivo y del ocular, al intervalo óptico y a la mínima distancia de la visión del observador».

Siendo todos los factores positivos excepto  $l$  ( $-0,25$  m para el ojo normal) el aumento visual del microscopio es negativo, viéndose las imágenes invertidas.

Si el ojo observador es normal y se verifica una visión sin acomodación, la imagen formada por el objetivo deberá situarse en el foco objeto del ocular.

La marcha de los rayos de luz es, en este caso, la dibujada en la Fig. XXV-39. El dibujo se ha realizado considerando objetivo y ocular como sistemas centrados. El punto  $P$  produce en el objetivo la imagen  $P'$ ; ésta a su vez produce en el ocular una imagen  $P''$  en el infinito, que se observa sin acomodación. El cálculo del aumento visual es análogo al realizado anteriormente.

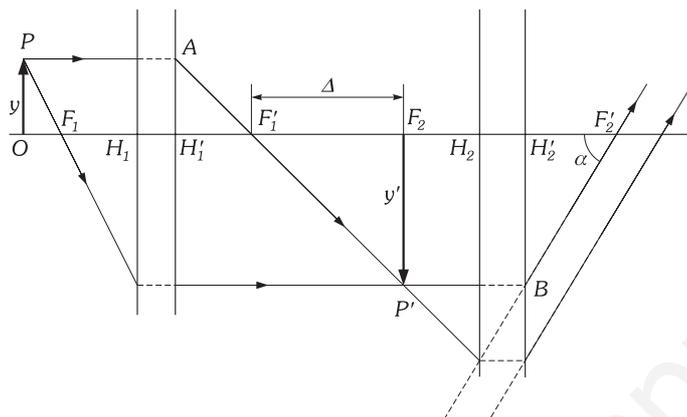


Fig. XXV-39.- Microscopio (visión al infinito).

El microscopio se enfoca acercando o alejando del objeto el sistema objetivo ocular (sin modificar la distancia entre ellos). El alejar entre sí objetivo y ocular, supone un mayor aumento del microscopio.

La iluminación se verifica por medio de un espejo que refleja los rayos de luz de un foco luminoso, hacia el objeto; éste está colocado sobre un porta-objetos (placa de vidrio rectangular) apoyado, a su vez, en una platina, con un orificio circular; la iluminación es, pues por transparencia. Se refuerza la iluminación por medio de un condensador (sistema de lentes) interpuesto entre el objeto y el espejo iluminador.

**PROBLEMAS: 65 al 69.**

**XXV - 45. Anteojo astronómico**

El ANTEOJO ASTRONÓMICO tiene por finalidad el observar los objetos situados en el infinito con un mayor ángulo que en la visión directa.

Los rayos procedentes de un punto (Fig. XXV-40) situado en el borde superior de un objeto muy lejano, llegan al anteojo paralelos entre sí y con una cierta inclinación con respecto al eje. Recibidos en un sistema convergente -objetivo- forman una imagen real en un punto situado en el plano focal. Esta imagen se observa a través del ocular, cuya finalidad es la misma que la de la lupa y la del ocular del microscopio.

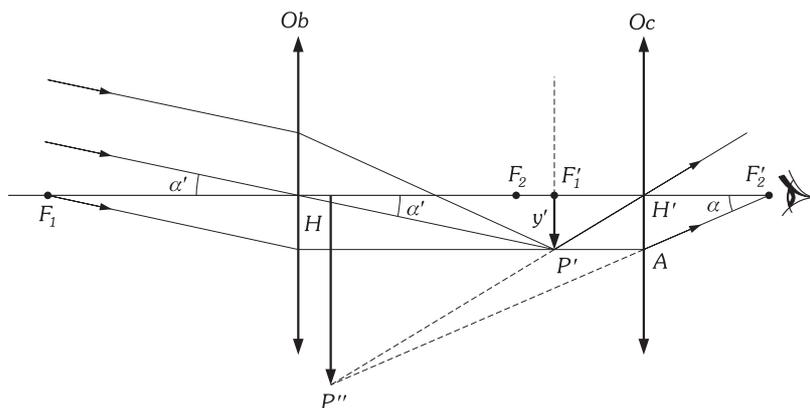


Fig. XXV-40.- Anteojo astronómico.

La pupila del ojo se coloca en un punto muy próximo al foco del ocular, para captar el mayor flujo luminoso posible que parte del punto objeto; tal punto de mayor rendimiento luminoso, es la imagen del centro óptico del objetivo  $-H-$ .

La propia montura del objetivo es la *pupila de entrada del sistema*, limitando el flujo luminoso entrante en el antejo; la imagen de tal abertura (lente objetivo en el dibujo) en el ocular, determina la *pupila de salida o anillo ocular*, que da paso a todo el flujo luminoso que pasa por la pupila de entrada.

AUMENTO. En el triángulo se tiene (Fig. XXV-40): 
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = \frac{H'A}{H'F'_2} = \frac{-y'}{f'_2}$$

y en el triángulo  $HF'_1P'$ : 
$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{F'_1P'}{HF'_1} = \frac{-y'}{f'_1} \Rightarrow \boxed{A = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'} = -\frac{f'_1}{f'_2} = -\frac{\varphi'_2}{\varphi'_1}}$$

siendo  $\varphi'_2$  y  $\varphi'_1$  las convergencias de ocular y objetivo respectivamente. El valor negativo del aumento nos indica que las imágenes se ven invertidas.

*«El aumento es directamente proporcional a la convergencia del ocular, e inversamente proporcional a la convergencia del objetivo».*

Para obtener grandes aumentos el objetivo debe ser de pequeña convergencia (gran distancia focal) y el ocular de gran convergencia (pequeña distancia focal).

Si el ojo observador es normal y se verifica una visión sin acomodación, la imagen formada por el objetivo deberá situarse en el foco objeto del ocular (Fig. XXV-41) (se ha realizado el dibujo considerando objetivo y ocular como sistemas centrados). Así la imagen de  $P'$  se forma en  $P''$  (en el infinito) y esta imagen produce por intermedio del cristalino una imagen en la retina. Las imágenes se observan invertidas.

El antejo astronómico forma un sistema de los llamados *telescopios*.

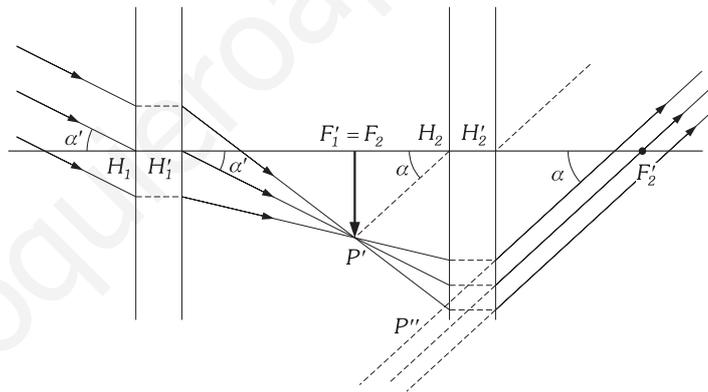


Fig. XXV-41.- Antejo astronómico (visión al infinito).

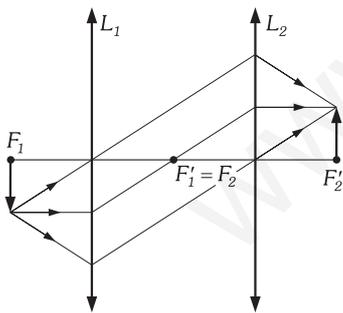


Fig. XXV-42.- Par inversor.

**XXV - 46. Antejo terrestre**

Para que las imágenes se formen derechas en el antejo, se usan diversos procedimientos, constituyendo los ANTEOJOS TERRESTRES.

En el que se suele llamar propiamente «ANTEOJO TERRESTRE» se interpone un par de inversión entre el objetivo y el ocular del astronómico. Éste está constituido en general por un sistema telescópico de dos lentes convergentes, es decir, que tales lentes distan entre sí la suma de las distancias focales. La imagen formada por el objetivo del antejo, se sitúa en el foco objeto de la primera lente del par; los rayos paralelos entre sí, que llegan a la lente posterior, forman la imagen en el foco-imagen de tal lente (Fig. XXV-42). Esta última imagen es observada a través del ocular del antejo.

**XXV - 47. Antejo de Galileo**

En el ANTEOJO DE GALILEO (Fig. XXV-43) el objetivo es idéntico al del antejo astronómico, su ocular es divergente y está situado (ojo normal) de forma que coinciden el foco imagen del objetivo con el foco objeto del ocular ( $F$  en la figura). Los rayos procedentes de  $P$  en el infinito, formarían una imagen  $P'$ , punto del plano focal del objetivo. Antes de formarse esta imagen se encuentran los rayos con el ocular y por ser rayos «cuyas prolongaciones coinciden en un punto del plano focal objeto de una lente divergente» emergen paralelos entre sí. La imagen de  $P$  se forma en  $P''$  en el infinito. El aumento es positivo y su valor absoluto igual al del antejo astronómico.

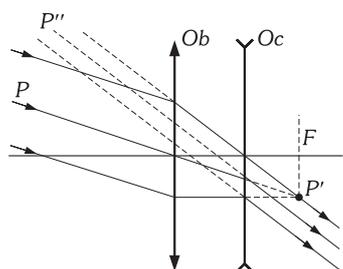


Fig. XXV-43.- Antejo de Galileo.

Estos anteojos se construyen en parejas, con una separación igual a la de los ojos de un individuo constituyendo, entonces, los gemelos de teatro. Constituye, como los anteriores anteojos, un sistema *telescópico*.

**PROBLEMAS: 70 al 72.**

**XXV – 48. Prismáticos**

Otro artificio para reducir las dimensiones de un antejo y hacer que las imágenes se vean derechas, es el realizado en los **PRISMÁTICOS**. La luz recorre en ellos una trayectoria quebrada, al encontrarse con dos prismas de reflexión total, colocados de forma tal (secciones homólogas perpendiculares) que el primero de ellos produce una inversión lateral de los rayos (en la Fig. XXV-44 se observa que el rayo *B* que incide a la derecha de *A* emerge del primer prisma a su izquierda) y el segundo una inversión antero-posterior (el rayo *C* situado delante de *A*, emerge del segundo prisma detrás de *A*).

El objetivo y el ocular funcionan igual que en el antejo astronómico.

**XXV – 49. Telescopio de espejo**

Se diferencia de los demás anteojos o telescopios, en tener como objetivo un espejo cóncavo.

Los rayos procedentes del infinito formarían una imagen real del astro en el plano focal del espejo. Antes de su formación se interpone un espejo plano, que desvía la imagen a *P''*. Esta imagen se observa a través de un ocular análogo al de los instrumentos anteriores.

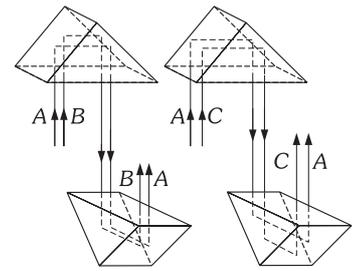


Fig. XXV-44.- Marcha de la luz en los prismáticos.

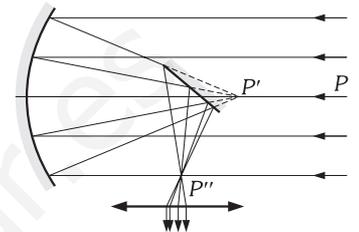


Fig. XXV-45.- Telescopio de espejo.

**PROBLEMAS**

**A) SISTEMAS CENTRADOS. SISTEMAS COMPUESTOS. LENTES**

- Calcular el número de dioptrías de una lente cuya distancia focal imagen es: 1) 10 cm. 2) 20 cm. 3) 25 cm. 4) 50 cm. 5) 2 m. 6) 4 m. 7) 5 m. 8) 10 m.
- 1) ¿Qué tipos de lentes delgadas pueden construirse combinando dos superficies cuyos radios de curvatura son, en valor absoluto, 10 cm y 20 cm? 2) ¿Cuáles son convergentes y cuáles divergentes? 3) Calcular la distancia focal de cada una si el vidrio utilizado tiene un índice de refracción  $n = 3/2$ .
- Delante de una lente convergente de 25 cm de distancia focal y a 30 cm del centro óptico se encuentra un objeto cuya altura, perpendicular al eje óptico, es de 1 cm. Determinar la posición y el tamaño de la imagen. Consideramos rayos correspondientes a la zona paraxial o de Gauss.
- Resolver el problema anterior considerando la lente divergente.
- Delante de una lente convergente de 50 cm de distancia focal y a 25 cm de su centro óptico se encuentra un objeto cuya altura, perpendicular al eje, es de 1 cm. Calcular la posición y el tamaño de la imagen (suponemos rayos en la zona paraxial).
- Resolver el problema anterior considerando la lente divergente.
- Delante de una lente convergente de 5 dp y a 50 cm del centro óptico se encuentra un objeto cuya altura, perpendicular al eje, es de 2 cm. Determinar la posición y el tamaño de la imagen. Considerar la imagen correspondiente a la zona paraxial.
- Resolver el problema anterior considerando la lente divergente.
- Calcular las potencias de las siguientes lentes delgadas, cuyo radio de curvatura es siempre de 40 mm y que están fabricadas de un vidrio de  $n = 1,5$ . 1) Una lente biconvexa. 2) Una lente bicóncava. 3) Una lente plano-convexa. 4) Una lente plano-cóncava. 5) Calcular la situación y el tamaño de la imagen producida por la primera lente de un objeto real situado en el eje principal y a 20 cm delante de la lente.
- A 50 cm del centro óptico de una lente convergente se forma una imagen real y de doble altura que el objeto. Calcular la posición del objeto y la convergencia de la lente. (Consideramos la zona paraxial.)
- En una delgada lente plano-convexa buscamos una posición en que el tamaño de un objeto sea igual al de su imagen real. La distancia del objeto al centro óptico de la lente es entonces de 50 cm. El radio de la cara curva, determinado con un esférómetro, es de 12,50 cm. Calcular la convergencia de la lente y el índice de refracción del vidrio que la forma. (Consideramos la zona paraxial.)
- Se desea proyectar sobre una pantalla la imagen de un objeto de 2 cm de alto, y para ello contamos con una lente convergente biconvexa de 5 dp o con un espejo cóncavo de 0,5 m de radio. La pantalla

- está situada a 2 m de distancia del sistema. 1) Utilizando la lente, determinar a qué distancia de la misma debe colocarse al objeto para que la imagen se forme exactamente sobre la pantalla. 2) Utilizando el espejo, indicar dónde se ha de colocar el objeto para cumplir el mismo fin que el caso anterior. 3) ¿Qué tamaño tendría la imagen en ambos casos?
- Con dos vidrios de reloj del mismo radio de curvatura *R* y de espesor despreciable se forma, pegándolos, una especie de lente biconvexa hueca. Si se llena con un líquido de índice de refracción  $5/4$ , la imagen de un objeto situado a 40 cm de la lente está en el infinito. Si se llena con un líquido de índice de refracción *n* desconocido, la imagen del mismo objeto resulta estar a 40 cm de la lente. ¿Cuáles son los valores de *n* y *R*?
- El radio de curvatura de una lente plano-convexa es de 30 cm. Delante de ella se coloca un objeto de 5 mm perpendicular al eje principal y detrás, una pantalla a 4 m de distancia. Calcular: 1) Distancia focal de la lente. 2) Distancia a que habrá que colocar el objeto para que la imagen se recoja en la pantalla. 3) Tamaño de la imagen. 4) Lente, objeto y pantalla se sumergen en el agua. Calcular la posición en que habrá que colocar en este caso el objeto para que su imagen se recoja en la pantalla. DATOS: Índices de refracción: vidrio,  $3/2$ ; agua,  $4/3$ .
- Entre un objeto de 2 cm de tamaño y una pantalla que dista de él 60 cm se coloca una lente biconvexa de radios iguales e índice de refracción  $n = 1,5$ . Se obtienen imágenes nítidas en la pantalla para dos posiciones de la lente separadas entre sí 40 cm. Calcular: 1) La distancia focal de la lente y su potencia. 2) El radio de las caras de la lente. 3) El tamaño de las imágenes en las dos posiciones de la lente.
- 1) Hallar una fórmula que exprese la distancia *D* entre un objeto y su imagen, formada por una lente convergente, en función de la distancia focal y de la distancia del objeto a la lente. 2) ¿A qué distancia de la lente debe encontrarse el objeto para que *D* sea mínima? 3) ¿Cuánto vale esta distancia mínima? 4) ¿Cuál es el aumento de la lente en este caso?
- Una lente convergente *L* de 1 dp está enfrente de un espejo plano *E* colocado perpendicularmente al eje. La distancia entre el espejo y la lente es de 1,80 m. A 20 cm del espejo y en el eje hay un punto luminoso *P* que se refleja en el espejo plano y luego su imagen hace de objeto con respecto a la lente. Determinar la posición de la imagen y el aumento del conjunto. Dibujar la marcha de un rayo de luz que parte de *P*. (Consideramos la zona paraxial.)
- A 40 cm de distancia del centro óptico de una lente de 5 dp se halla un objeto luminoso. Detrás de la lente y a 1 m de distancia, formando con ella un sistema centrado, existe un espejo convexo de 60 cm de radio. 1) Construir gráficamente la imagen del objeto formado por el sistema. 2) Deducir las posición, la naturaleza de la imagen y el aumento del sistema.

**19.** Sea una lente biconvexa esférica de radios de curvatura iguales a 50 cm y de índice de refracción  $n = 1,5$ . Se pide: 1) Calcular su potencia. 2) Determinar la posición y el tamaño de la imagen de un objeto de 5 mm situado sobre el eje principal a 1 m de distancia de la lente. 3) Suponiendo que plateamos la cara posterior de la lente, calcular la posición de la imagen final que producirá del objeto colocado tal como se describe en el apartado anterior. (En todo el problema consideramos nulo el espesor de la lente.)

**20.** Una lente plano convexa tiene su cara plana plateada. La lente tiene un índice de refracción de 1,4 y el radio de la cara convexa es de 30 cm. Supuesta la lente delgada, determinar: 1) La posición de la imagen de un objeto situado en el eje principal a 30 cm de la lente. 2) Tamaño y naturaleza de la imagen si el objeto tiene un tamaño de 1 mm.

**21.** Averiguar la potencia de una lente semiesférica de vidrio ( $n = 1,5$ ) de radio 2 cm. Un objeto de 2 mm de altura está colocado ante ella a una distancia de 1 cm. Determinar la posición y tamaño de la imagen.

**22.** El espesor de la lente de la figura es de 2 cm y el radio de su cara curva 10 cm. Determinar su potencia, la posición de la imagen de un objeto situado a 10 cm ante la lente y el aumento del sistema ( $n = 1,5$ ).



Problema XXV-22.

**23.** Los radios de curvatura de una lente menisco-convergente son 10 y 20 cm. Su espesor es 1 cm. Determinar su convergencia y la posición de un objeto para que forme su imagen virtual a 1 m delante de la lente. Calcular el aumento del sistema ( $n = 1,5$ ).

**24.** Resolver el problema anterior, suponiendo la lente menisco divergente.

**25.** Se tiene una lente delgada plano-convexa, de índice de refracción 1,5 y radio de la cara convexa igual a 10 cm. En contacto con la cara plana hay una lámina de vidrio de 1 cm de espesor e índice de refracción igual a 1,4. Determinar: 1) La potencia de la lente, que consideramos como delgada. 2) ¿Dónde se forma la imagen de un objeto situado en el lado de la lámina plana y a 5 cm de la misma? 3) ¿Dónde se forma la imagen de un objeto situado en el lado de la cara convexa y a 10 cm de ella?

**26.** Se tiene una lente biconvexa de vidrio ( $n = 1,5$ ) de potencia de 2,5 dp; el radio de una de las caras es de 60 cm. Determinar: 1) El radio de la otra cara (considerar la lente como delgada). 2) Delante de ella, a 50 cm, se coloca un objeto de 3 cm de altura; determinar la posición de la imagen. 3) Calcular el tamaño de la imagen anterior y el aumento. 4) Yuxtapuesta con la anterior se coloca una lente divergente del mismo vidrio, de potencia 4 dp; ¿cuál será la potencia del sistema?

**27.** Un doblete plano-convexo está formado por el acoplamiento de dos lentes: una biconvexa, de índice de refracción 1,6, y otra plano-cóncava, de índice de refracción 1,5. Los radios de las superficies curvas valen 10 cm. Determinar considerando las lentes como delgadas: 1) Potencia de cada lente. 2) Potencia del doblete. 3) Naturaleza y posición de la imagen que produce el sistema de un objeto situado a 10 cm de la lente y situado en el eje principal. 4) Si el objeto tiene de tamaño 2 mm, ¿cuál será el tamaño de la imagen?

**28.** Un doblete está formado por la unión de dos lentes delgadas, una plano-convexa y otra biconcava; el índice de refracción de la primera es de 1,3 y el de la segunda 1,4. El radio de las superficies curvas es de 10 cm. Determinar: 1) La potencia del sistema. 2) El radio de la lente plano-cóncava equivalente, si se hace con un vidrio de índice de refracción 1,5. 3) ¿Dónde se formará la imagen de un punto situado sobre el eje del sistema, a 15 cm del mismo?

**29.** Se tiene una lente plano-convexa de índice de refracción  $n_1 = 1,3$  y radio  $r_1 = 15$  cm; por su cara plana se une a la cara plana de otra plano-cóncava de índice de refracción  $n_2 = 1,4$  y radio  $r_2 = 10$  cm. Determinar: 1) La potencia en dioptrías de cada una y del sistema formado por ambas. 2) La posición, tamaño y naturaleza de la imagen de un objeto de 2 mm situado en el eje principal del sistema y a 40 cm del mismo. Las lentes se consideran como delgadas.

**30.** Una lente convergente de radios iguales y distancia focal 50 cm proyecta sobre una pantalla la imagen de un objeto de 5 cm de longitud. 1) Calcular la distancia de la pantalla a la lente para que la imagen sea de longitud igual a 4 dm. 2) Si el índice de refracción de la lente es igual a 1,5, ¿qué valor tienen los radios de la lente? 3) Acoplando a la lente primera otra para que la imagen sea doble que el objeto, ¿qué clase de lente debe emplearse y cuál será la convergencia del sistema?

**31.** Se tiene un sistema óptico formado por una lente convergente de 5 dp y una lente divergente de potencia desconocida, ambas yuxtapuestas con el mismo eje principal. Un objeto de 5 cm de altura situado a 40 cm de distancia a la izquierda del sistema forma una imagen real situada a 80 cm a la derecha del mismo. 1) ¿Cuál es la distancia focal y la potencia de la lente divergente del sistema? 2) ¿Cuál es el tamaño de la imagen dada por el sistema? 3) ¿Cómo se modifica la situación y el tamaño de esta imagen si se yuxtapone al sistema una lámina de vidrio de caras plano-paralelas de 3 cm de espesor e índice de refracción 1,5? La lámina está al mismo lado del sistema que el objeto.

**32.** Dos lentes convergentes A y B de 9 y 15 cm, respectivamente, de distancia focal forman un sistema centrado de tal modo que la lente B está situada en el plano focal de la A. Un objeto de 2 cm de altura se sitúa a una distancia de 36 cm delante de la lente A. 1) Construir gráficamente la imagen del objeto formado por el sistema. 2) Determinar la naturaleza, tamaño y distancia de la imagen a la lente B.

**33.** Tenemos un sistema óptico formado por dos lentes convergentes de 20 dp cada una, separadas entre sí 20 cm. Un objeto vertical de 5 cm está situado 10 cm a la izquierda de la primera lente sobre el eje óptico. 1) Representar gráficamente la marcha geométrica de los rayos a través de todo el sistema hasta formar la imagen definitiva de dicho objeto. 2) Determinar la naturaleza, el tamaño y la posición de la imagen definitiva, así como las características de la imagen formada por la primera lente. 3) Calcular el aumento de todo el sistema óptico.

**34.** Dos lentes convergentes de 2 dp están una enfrente de otra, con sus ejes coincidiendo. La distancia entre sus centros ópticos es de 2 m. Delante de una de las lentes (fuera del espacio comprendido entre ellas), y a 1 m de distancia de su centro óptico, se coloca, en el eje, un punto luminoso. Determinar la posición de la imagen formada por el sistema.

**35.** Buscar la posición de un punto del eje en el sistema óptico del problema anterior para que los rayos emergentes de la segunda lente sean paralelos al eje principal.

**36.** Determinar la posición y tamaño de la imagen de un objeto de 1,2 cm de altura situado ante un sistema constituido por dos lentes delgadas de eje común y cuyas focales son 4 y 8 cm y la distancia entre ellas 2 cm. El objeto está situado 20 cm ante la primera lente.

**37.** Dos lentes convergentes A y B de 10 y 20 dp respectivamente, y con el eje principal común, están separadas entre sí 24 cm. Delante de la lente A y a 20 cm de distancia se sitúa un objeto de 2 cm de altura. 1) Construir el diagrama de formación de la imagen para esta combinación de lentes. 2) Determinar la posición, naturaleza y tamaño de la imagen que da la primera lente, así como las mismas características ofrecidas por la combinación de A y B.

**38.** Se tiene una lente delgada, convergente, de 10 cm de distancia focal. En el foco de esta lente hay otra, también delgada, divergente y de 15 cm de distancia focal. Determinar: 1) La potencia del sistema. 2) Posición de la imagen de un objeto en el eje principal del sistema a 5 cm de la lente convergente y 15 cm de la divergente.

**39.** Una lente convergente A y otra divergente B, de 10 y -20 dp, respectivamente, y con el eje principal común están separadas entre sí 15 cm. Delante de la lente A y a 25 cm de distancia se sitúa un objeto de 3 cm de altura. 1) Construir el diagrama de formación de la imagen para esta combinación de lentes. 2) Determinar la posición, naturaleza y tamaño de la imagen que da la primera lente, así como las mismas características ofrecidas por la combinación de A y B.

**40.** Un sistema óptico centrado está formado por dos lentes de las siguientes características: a) Lente biconvexa de radios  $r_1 = 10$  cm y

$r_2 = 20$  cm; índice de refracción  $n_1 = 1,3$ . b) Lente plano-cóncava de radio  $r_3 = 25$  cm; índice de refracción  $n_2 = 1,4$ . La separación entre ambas es de 5 cm. Determinar: 1) La potencia de cada lente en dp. 2) La potencia del sistema. 3) Posición y naturaleza de la imagen de un objeto situado en el eje principal del sistema, en el lado de la lente convergente y a 30 cm de ella.

**41.** Un objeto recto de 2 mm de altura está situado a 90 cm a la izquierda de una lente delgada divergente de 30 cm de distancia focal. A continuación de la lente divergente se dispone una lente delgada convergente de 5 dp de convergencia. 1) Determinarse cuál debe ser la distancia entre las dos lentes para que la imagen definitiva del objeto anterior sea real y esté situada a 30 cm a la derecha de la lente convergente. 2) Dibújese la marcha aproximada de los rayos. 3) Determinar la potencia de una lente única que produzca el mismo efecto.

**42.** Un cuerpo de vidrio de 3 cm de largo e índice de refracción 1,5 tiene dos caras, centradas en el mismo eje y talladas en forma de superficies esféricas de radio  $r_1 = 2$  cm y  $r_2 = -2$  cm. Determinar los puntos cardinales del sistema y su convergencia. Un objeto de 1 cm de altura está colocado normalmente al eje y a una distancia de 10 cm ante el polo del dioptrio de entrada. ¿Cuál es la posición y tamaño de la imagen?

**43.** Una varilla de vidrio ( $n = 1,5$ ) de 10 cm de longitud actúa como lente gruesa, teniendo el extremo izquierdo tallado y pulido en forma de casquete esférico convexo de 50 cm de radio y el extremo derecho está igualmente tallado y pulido simétrico al anterior. 1) Determinarse las posiciones de los focos y planos principales de dicha lente. 2) Un objeto en forma de flecha de 1 mm de altura está situado a la distancia de 100 cm a la izquierda de la lente. Calcúlese la posición de la imagen del objeto formada por la lente utilizando sólo los rayos paraxiales. 3) ¿Cuál es el tamaño de la imagen? ¿Es derecha o invertida? ¿Real o virtual?

**44.** Determinar los puntos cardinales de una lente plano-convexa de espesor y radio iguales ( $r$ ) e índice de refracción 1,5.

**45.** La lente del problema anterior tiene una de sus caras plateada. Determinar su convergencia o potencia: 1) En el caso de estar plateada la cara plana. 2) En el caso de estar plateada la cara esférica.

**46.** Dos lentes delgadas de 4 y 5 dp con el eje común están a distancia de 50 cm. Determinar los puntos cardinales del sistema compuesto y la posición y tamaño de la imagen formada por un objeto situado 20 cm delante de la primera lente, normalmente al eje y de 2 cm de altura. Calcular la convergencia del sistema.

**47.** Determinar la posición de los puntos cardinales y la potencia del sistema compuesto, formado por tres lentes delgadas convergentes de focales 10 cm separadas una de otra 5 cm y cuyo eje es común.

## B) EL OJO HUMANO. INSTRUMENTOS ÓPTICOS

**48.** Listing identifica el ojo humano con un dioptrio esférico de 5 mm de radio que separa dos medios de índice de refracción 1 y 4/3. Calcular las distancias focales, objeto e imagen. ¿A qué distancia del polo del dioptrio debe estar la retina?

**49.** Un ojo normal puede acomodar desde el infinito hasta 25 cm de él. Calcular el PODER DE ACOMODACIÓN, es decir, la convergencia de una lente que colocada ante el ojo permitiera ver el punto próximo sin necesidad de acomodación.

**50.** ¿Qué gafas deben prescribirse para un ojo miope cuyo punto próximo está a 10 cm del ojo?

**51.** ¿Qué gafas deben prescribirse para un ojo miope que no puede distinguir objetos más allá de 75 cm?

**52.** 1) Calcular el poder de acomodación de un ojo miope cuyo punto remoto está a 1/2 m y el próximo a 15 cm de su centro óptico. 2) Calcular las dioptrías de una lente divergente que se debe colocar ante este ojo para corregir su miopía, es decir, para que vea los objetos situados en el infinito sin necesidad de acomodación.

**53.** Calcular la convergencia de una lente que se comportase como el cristalino de un ojo miope cuyo punto remoto está a 1 m del centro óptico del ojo y la distancia de éste a la retina es 22 mm (se supone la lente en el aire).

**54.** Calcular la distancia entre la retina y el polo del dioptrio esférico en un «ojo reducido de Listing» con miopía y que necesitase para su corrección una lente divergente de 4 dp. El radio del dioptrio es 5 mm y los medios que separa el dioptrio son de 1 y 4/3 de índice de refracción.

**55.** 1) Un ojo hipermetrope tiene su punto remoto a 25 cm de su centro óptico y detrás de la retina. Calcular la potencia de la lente con-

vergente que se debe colocar ante él para corregir su defecto. 2) ¿Qué gafas necesita un hipermetrope cuyo punto próximo está situado a 1 m de su ojo?

**56.** El ojo humano como instrumento óptico se puede considerar simplificada como un dioptrio esférico convexo de 5 mm de radio e índice de refracción 4/3. Calcúlese: 1) Las distancias focales, objeto e imagen, de dicho dioptrio. 2) La separación con que se formarán en la retina las imágenes de dos estrellas que subtenden un ángulo de  $1^\circ$  en el campo visual, estando el ojo enfocado al infinito y en la dirección de dichas estrellas.

**57.** Un ojo miope cuyo punto remoto está a 1,10 m mira a través de una lupa de 10 dp. ¿A qué distancia de la lupa debe colocarse el objeto para ver la imagen sin acomodación?

**58.** Una lente plano-convexa cuya convergencia es 50 dp constituye una lupa. 1) Sabiendo que el índice de refracción del vidrio del que está construida es 3/2, calcular el radio de curvatura de la cara convexa. 2) Calcular su aumento. 3) Un ojo miope no distingue más que en el caso de que los objetos estén situados entre 100 cm y 10 cm de distancia de él, ¿cuál será la amplitud de la zona en que habrá de colocar el objeto del miope para ver perfectamente?

**59.** Con una cámara fotográfica cuyo objetivo tiene 10 dp se retransmite a una persona situada a 2,10 m de distancia. ¿A qué distancia del centro óptico del objetivo debe colocarse la placa? Si la persona tiene 1,70 m de estatura, ¿qué altura mínima debe tener la placa para formar una imagen de cuerpo entero?

**60.** Tenemos una lente biconvexa tal que colocando un objeto luminoso a 25 cm de distancia nos da una imagen real y cuatro veces mayor que el objeto. 1) Calcular la convergencia de esa lente. 2) Calcular el radio de curvatura de su segunda cara, sabiendo que el de la primera es de 30 cm y que el índice de refracción del vidrio es 3/2. 3) Esta lente se utiliza como objetivo de una cámara fotográfica y se fotografía a un automóvil que pasa, perpendicularmente al eje óptico de la lente, a 1 000 m del objetivo y con una velocidad de 75 km/h. Calcular cuál debe ser el tiempo máximo durante el que está abierto el obturador para que la imagen de un punto del automóvil no barra sobre la placa más de 0,1 mm.

**61.** Con una cámara fotográfica cuyo objetivo tiene una distancia focal de 20 cm sacamos una foto de un coche que corre a la velocidad de 60 km/h, a 100 m por delante de nosotros y en dirección perpendicular al eje del objetivo. 1) Calcular el tiempo máximo de exposición, sabiendo que la foto es nítida si durante la exposición un punto imagen no se desplaza más de 0,1 mm. 2) Si la distancia máxima entre el objetivo y la placa es de 21 cm, ¿cuál será la mínima distancia a la que podemos sacar una foto correcta? 3) Si quisiéramos con esa cámara retratar un objeto situado a 40 cm del objetivo, ¿qué lente hemos de colocar yuxtapuesta al objetivo?

**62.** El teleobjetivo de una cámara fotográfica está formado por una lente convergente de 6 cm de distancia focal y otra divergente, de distancia focal  $-2,5$  cm, separada de la anterior 4 cm. (La lente convergente es la más próxima al objeto). 1) Dibujar la imagen de un objeto muy lejano. 2) Calcular la distancia de esta imagen a la lente convergente. 3) Comparar el tamaño de la imagen formada por esta combinación de lentes con el de la imagen que se hubiese obtenido de no existir la lente divergente.

**63.** Se desea proyectar una diapositiva sobre una pantalla que se encuentra a 10 m de distancia del proyector. El dispositivo que para enfocar lleva el aparato permite acercar o alejar la diapositiva al objetivo entre los límites 25 y 30 cm. Calcular la potencia máxima y mínima del objetivo y el aumento en cada caso.

**64.** Se trata de instalar el cine en un salón. La pantalla ha de tener 5,5 m de anchura y la distancia desde la cabina del aparato proyector hasta la pantalla es de 25 m. Sabemos también que cada una de las fotografías de la cinta cinematográfica mide 22 mm de anchura y 16 mm de altura. Se pide: 1) ¿Qué altura deberá tener la pantalla para que toda queda exactamente cubierta por la imagen? ¿Cuánto valdrá el aumento lateral? 2) ¿Cuál debe ser la distancia entre la película y el objetivo para que la imagen quede perfectamente enfocada, y cuál ha de ser la distancia focal del objetivo considerándolo como una simple lente delgada? (Se debe dar el valor de la distancia focal aproximado; un error de 1/2 mm en más o menos no tiene importancia). 3) Si este objetivo fuese una lente plano-convexa delgada, ¿cuánto valdría el radio de curvatura de la cara esférica? (Índice de refracción del vidrio: 1,5). 4) Si colocamos un cartón junto al objetivo, tapando la mitad inferior del haz de

rayos, ¿qué veremos en la pantalla: la mitad superior de la imagen, o bien la mitad inferior, o bien toda la imagen, aunque desigualmente iluminada? Razona la respuesta. 5) Si el objetivo no constase de una sola lente, como habíamos supuesto, sino de dos lentes delgadas iguales y yuxtapuestas, ¿de cuántas dioptrías tendría que ser cada una?

**65.** Una gota de rocío, de forma esférica y centro  $O$ , se apoya en un punto  $A$  sobre un plano horizontal. La observamos con un microscopio cuyo eje óptico coincide con la dirección  $AO$ , enfocado en  $A$  a través de la gota. Retiramos ésta y enfocamos el microscopio sobre  $A$ . Deducir el radio de la gota. DATOS: Índice de refracción del agua:  $n = 4/3$ . Desplazamiento del microscopio necesario para el segundo enfoque:  $h = 1,5$  mm.

**66.** Con dos lentes ( $50$  y  $20$  dp) se construye un microscopio, montándolas en los extremos de un tubo de  $15$  cm de longitud. ¿A qué distancia de la primera lente debe colocarse el objeto cuando mira por el microscopio un ojo normal, sin acomodación?

**67.** El ocular y el objetivo de un microscopio están separados  $22,6$  cm y tienen focales de  $2$  cm y  $6$  mm, respectivamente. Considerando las lentes como delgadas, determinar la potencia del sistema compuesto. ¿Cuál es el aumento visual del microscopio?

**68.** Un microscopio se compone de un objetivo  $O_1$  de convergencia  $\varphi'_1 = +100$  dp y de un ocular  $O_2$  de convergencia  $\varphi'_2 = +50$  dp. Estos dos sistemas los consideramos como lentes delgadas centradas sobre el mismo eje y cuyos centros ópticos están separados por una distancia de  $28$  cm. 1) ¿Cuáles son las distancias focales del objetivo y del ocular? 2) ¿A qué distancia del objetivo debemos colocar un objeto plano perpendicular al eje óptico para que la imagen de este objeto, dada por el microscopio, se forme en el infinito? 3) ¿Cuál es el aumento de este microscopio?

**69.** Dos lentes, una de  $3$  mm de distancia focal y otra de una convergencia de  $25$  dp, están montadas formando un microscopio: 1) ¿Cuál de esas dos lentes será el ocular? 2) Este microscopio lo utiliza una persona cuyo punto próximo está a  $13$  cm y acomodando al máximo. En estas condiciones la longitud del aparato es  $20$  cm. a) Calcular a qué distancia del ocular se formará la imagen que da el objetivo. b) Calcular la distancia que separará del objetivo al objeto en observación. 3) Calcular el aumento del aparato en las anteriores condiciones de observación.

**70.** Con dos lentes ( $10$  y  $1$  dp) se desea construir un anteojo astronómico por el que mire un ojo normal sin acomodación. ¿Cuál debe ser la longitud del anteojo?

**71.** Dos lentes delgadas convergentes de  $+2$  y  $+4$  dp tienen el eje común y la distancia entre ellas es  $75$  cm. Calcular: 1) La potencia o convergencia del sistema. 2) La posición de la imagen de la Luna observada a través del sistema y el aumento visual. 3) Posición de la imagen de un objeto situado  $50$  cm ante la lente de  $2$  dp. 4) Posición de la imagen de un objeto situado a  $1$  m ante la lente de  $2$  dp y el aumento transversal. ¿Es la imagen real o virtual? ¿Derecha o invertida con respecto al objeto?

**72.** Un objetivo de  $5$  dp se asocia con un ocular de  $-120$  dp para constituir un anteojo de Galileo. Un ojo normal, enfocado al infinito, observa a través de este anteojo un objeto situado a  $1500$  m de distancia y que tiene  $30$  m de alto. Se pide: 1) Hallar la distancia entre las dos lentes. 2) Calcular el ángulo, expresado en radianes, bajo el cual verá el observador al objeto. 3) Calcular cuál será la distancia entre las dos lentes si colocando detrás del anteojo y perpendicularmente a su eje, a una distancia de  $1$  m, una pantalla, se recoge sobre ella una imagen nítida y real del objeto.

# CAPÍTULO XXVI

## ÓPTICA FÍSICA

### XXVI – 1. Introducción histórica sobre la teoría ondulatoria de la luz hasta J. C. Maxwell

Como ya se dijo, fueron Grimaldi y Hooke los iniciadores de la «teoría ondulatoria» de la luz, consolidada por Huygens, contemporáneo de Newton, en cierta manera detractor de esta teoría. ¿Ondas?, ¿partículas?, en cualquier caso se estaba de acuerdo en que la *velocidad de propagación de la luz era finita* aunque excesivamente grande. Fue Olaf Römer (1644-1710) también contemporáneo de Newton, el primero que ideó un método de medida de la velocidad de propagación de la luz, estudiando los eclipses de los satélites de Júpiter. Estando Júpiter más alejado del Sol que la Tierra, tiene un año solar extraordinariamente más largo que el terrestre; así, mientras la Tierra pasa de  $T$  a  $T'$  (medio año) Júpiter se desplaza muy poco sobre su órbita. Cada 24 horas aproximadamente, se observa desde la Tierra un ocultamiento (eclipse) de uno de los satélites de Júpiter tras este planeta. Es por lo tanto muy sencillo predecir la hora exacta en que se debe verificar el eclipse, cuando la Tierra está en  $T'$  transcurrido medio año desde el instante en que estaba en  $T$ . La observación demuestra un retraso aproximado de 1 000 segundos, debido al mayor camino (de  $T$  a  $T'$ ) que la luz debe recorrer para llegar a la nueva posición de la Tierra. Siendo el eje mayor de la órbita terrestre unos 296 000 000 km, se obtiene para la velocidad de la luz:  $c \approx 296 \times 10^6 / 10^3 = 3 \times 10^5$  km/s. Los cálculos que hemos hecho, no son exactamente los que realizó Römer, fueron menos precisos, llegando en sus deducciones a un valor para  $c$  de  $2,14 \times 10^5$  km/s.

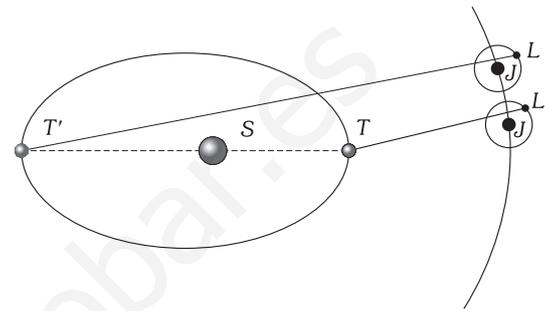


Fig. XXVI-1.– Método de Römer para la medida de la velocidad de propagación de la luz.

A pesar del peso de la opinión de Newton, el sabio matemático Leonhard Euler (1707-1789) publicó su «Teoría ondulatoria de la luz», y aunque no se le hizo mucho caso, volvió a proponer las teorías de Huygens; en este sentido, trabajó en la corrección de la *dispersión* de la luz (*aberraciones cromáticas*) en las lentes, apuntando la posibilidad de construcción de lentes con diferentes medios, que presentarían una dispersión anulada; esta sugerencia fue recogida por John Dolland (1706-1761), óptico londinense, que combinando el *vidrio crown* y el *flint*, logró construir una *lente acromática simple*.

Fue Thomas Young (1773-1829), científico inglés, el que hizo renacer la teoría ondulatoria, añadiendo a ella el llamado «principio de interferencia» y determinó los valores de la longitud de onda de diferentes colores. Agustín Jean Fresnell (1788-1827), sintetizó las teorías de Huygens con el principio de interferencia y fue con sus experiencias y trabajos teóricos el que llegó a explicar mediante la teoría ondulatoria todos los fenómenos que presentaba la luz. Dominique Arago (1786-1853) fue uno de los primeros en convencerse de la certeza de la teoría ondulatoria de Fresnell, y a pesar de la crítica de hombres tan brillantes como Pierre Simon de Laplace (1749-1827) y Jean Baptiste Biot (1774-1826), colaboró con Fresnell; sus experimentos relacionados con la *polarización de la luz*, conjuntamente con Etienne Malus (1775-1812), descubrieron que la polarización se hacía evidente en el fenómeno de la reflexión y, por tanto, no era exclusiva de la refracción en medios cristalinos. Estos trabajos fueron decisivos para establecer *el carácter transversal de las ondas luminosas*. Los descubrimientos de Young, Fresnell, Arago y Malus, provocan, que hacia 1825, sólo quedarán unos pocos partidarios tenaces de la teoría corpuscular. El golpe de muerte a la teoría corpuscular, lo dieron los investigadores franceses Jean Foucault (1819-1868) y Armand Fizeau (1819-1896), que idearon métodos terrestres de medida de velocidad de la luz aplicables a diversos medios y demostraron experimentalmente, que *la velocidad de la luz en el aire es mayor que en el agua*. Pero no iba a transcurrir mucho tiempo para que la teoría corpuscular resucitase con un vigor insospechado.

El método de Foucault (1862) es uno de los de más importancia y precisión de todos los empleados en medir la velocidad de la luz. En esencia, consiste en lo siguiente: un rayo de luz, procedente de un foco luminoso  $P$  (Fig. XXVI-2), atraviesa una lámina semiplataada y encuentra a un espejo  $E$  que lo desvía hacia otro  $E'$ ; incide sobre éste normalmente y retornando en sentido contrario, pero en la misma dirección, vuelve a reflejarse en  $E$  y en la lá-

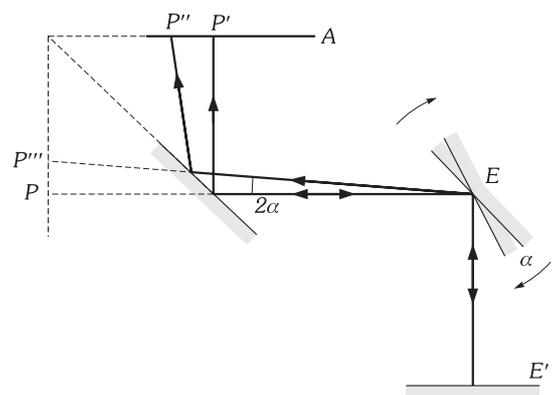


Fig. XXVI-2.– Método de Foucault para la medida de la velocidad de propagación de la luz.

mina, formando una imagen luminosa  $P'$ , sobre una pantalla  $A$ ;  $P'$  es simétrico de  $P$  con relación a la lámina semiplataada. Si el espejo  $E$  gira, alrededor de un eje perpendicular al plano del dibujo, un ángulo  $\alpha$  en el tiempo que tarda la luz en ir de  $E$  a  $E'$  y volver, el rayo se refleja, a partir de  $E$ , por un nuevo camino, habiéndose desviado un ángulo  $2\alpha$  con relación a su posición anterior. La imagen final se forma en  $P''$ , punto simétrico de  $P'''$ , obtenido prolongando el rayo reflejado. La medida de  $P'P''$  igual a  $PP'''$  y de la distancia  $PE$  conduce al conocimiento de  $2\alpha$  y por lo tanto de  $\alpha$ .

Por la pequeñez del ángulo se puede escribir:

$$2\alpha = \frac{PP'''}{PE} = \frac{P'P''}{PE} \Rightarrow \alpha = \frac{P'P''}{2PE} \tag{1}$$

Si  $\nu$  es la frecuencia de giro del espejo, se puede plantear la siguiente proporción:

$$\begin{array}{l} \text{En 1 s el espejo gira} \dots\dots\dots 2\pi\nu \text{ radianes} \\ \text{En } t \text{ s girará} \dots\dots\dots \alpha \text{ radianes} \end{array} \quad \Bigg| \Rightarrow t = \frac{\alpha}{2\pi\nu}$$

este tiempo es el mismo que ha invertido la luz en ir de  $E$  a  $E'$  y volver; si esta distancia  $EE'$  es  $l$ , y  $c$  la velocidad de la luz, el tiempo tendrá por valor:  $t = 2l/c$ , e igualando los dos anteriores:

$$\frac{\alpha}{2\pi\nu} = \frac{2l}{c} \Rightarrow c = \frac{4\pi\nu l}{\alpha}$$

y sustituyendo  $\alpha$  por su valor, dado por (1):

$$c = \frac{8\pi\nu l PE}{P'P''}$$

realizado el experimento, haciendo las medidas precisas, se obtiene para  $c$  un valor aproximadamente igual al que se conoce hoy en día.

El físico francés Fizeau, en 1849 construyó el aparato que esquemáticamente se presenta en la Fig. XXVI-3, para medir con él la velocidad de propagación de la luz. Un pulso de luz emitido por el foco puntual  $P$ , atraviesa la lente  $L_1$  y una lámina semiplataada para formar una imagen  $P'$  en la periferia de una rueda dentada  $R$ . La luz, en su camino, encuentra dos lentes,  $L_2$  y  $L_3$  y se forma la imagen  $P''$  sobre el espejo  $E$ . Los rayos retornan por el mismo camino (de  $P''$  a  $P'$ ) y al incidir sobre la lámina, en parte se reflejan y forman, una imagen  $P'''$ . Ajustando la velocidad de rotación de la rueda (conocida), se podría hacer que el pulso que volvía pasará o no por una abertura de la rueda dentada, viéndose la imagen de  $P$  en el caso en que no fuera la luz obstruida por un diente. Con este procedimiento Fizeau encontró un valor para la velocidad de la luz de 315 300 km/s.

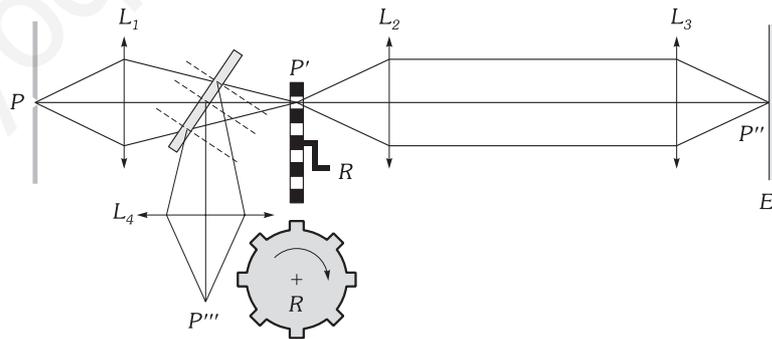


Fig. XXVI-3.- Método de Fizeau para la medida de la velocidad de propagación de la luz.

Para comprender mejor este experimento, resolvamos el siguiente ejercicio que supone el conocimiento de  $c$ ; supuesta  $P'P'' = 10$  km y la rueda con 150 dientes, calcular la frecuencia mínima de revolución de la rueda para que no se forme la imagen  $P'''$ .

El espacio recorrido por la luz de  $P'$  a  $P''$  y retornar a  $P'$  es 20 km y el tiempo empleado en tal recorrido,  $20/300\ 000 = 2/3 \times 10^{-4}$  s.

El número conjunto de dientes y huecos es 300 y, por tanto, el tiempo para sustituir un hueco por un diente es  $T/300 = 1/300\nu$  (siento  $T$  el período de revolución, inverso de la frecuencia  $\nu$ ):

$$\frac{2}{3} 10^{-4} = \frac{1}{300\nu} \Rightarrow \nu = 50 \text{ Hz}$$

La *espectroscopía*, que es una rama de la Óptica que trata del análisis de la luz, comienza su desarrollo en las observaciones de Newton. William Wollaston (1766-1828) hizo las primeras observaciones de las líneas oscuras del espectro solar; debido a la rendija de la abertura que se utili-

za en los *espectroscopios* para el análisis de los espectros de diversas sustancias, la salida consistía en bandas delgadas y coloreadas de luz, por lo que se les llamaron *líneas espectrales*. Independientemente, Joseph Fraunhofer (1787-1826), impulsó el estudio de las líneas espectrales, aplicando el principio de interferencia de Huygens-Fresnell; descubrió accidentalmente la línea doble del Sodio e hizo las primeras determinaciones de longitudes de onda usando «*redes de difracción*». Gustav Rober Kirchhoff (1824-1887) y Rober Wilhelm Bunsen (1811-1899) en sus trabajos conjuntos, establecen que *cada tipo de átomo tiene sus características líneas espectrales*. A partir de aquí, comienza otra historia, la de la Óptica Cuántica que relataremos más adelante.

Mientras ocurría todo esto en el campo de la óptica, el estudio de la electricidad y el magnetismo, a los que no se les consideraba relacionados con los fenómenos luminosos, avanzaban en este sentido; el físico experimental más grande que ha existido, Michael Faraday (1791-1867), en 1846 descubrió el efecto que lleva su nombre: *cuando un haz de luz polarizada se propaga en un campo magnético, el plano de polarización de la luz sufre una rotación*; de esta forma establece una interrelación entre el electromagnetismo y la luz.

Unos pocos años más tarde, estimulado por los trabajos de Faraday, James Clerk Maxwell (1831-1879), realizó un análisis empírico sobre las ondas electromagnéticas (Capítulo XXIII), llega a la conclusión de que la velocidad de propagación de un campo electromagnético es:  $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$  como el valor  $\epsilon$  (coeficiente dieléctrico del medio) es para el vacío:  $\epsilon_0 = 1/4\pi \times 10^9 \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$ , (en el sistema internacional) y el de  $\mu_0$  (permeabilidad magnética del vacío) es  $4\pi/10^7 \text{ N/A}^2$ , se obtiene para  $c$  el valor:

$$c = \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 9 \times 10^9 \times 10^7}} = \sqrt{9 \times 10^{16}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s} = 300\,000 \text{ km/s}$$

La coincidencia en los valores de las velocidades de propagación del campo electromagnético y de la luz, en el vacío, hacen afirmar a Maxwell que *las ondas luminosas son ondas electromagnéticas*. Maxwell murió a la edad de 48 años, antes de ver la confirmación experimental a sus teorías, las cuales, como ya se dijo en el capítulo XXIII, fueron verificadas por Heinrich Hertz (1857-1894).

Aunque Maxwell conservó en sus estudios el «*éter electromagnético*», Einstein hizo abandonar tal idea (capítulo XXVII) afirmando, también, que la velocidad de la luz en el vacío es una constante fundamental de la Naturaleza, la cual no varía cualquiera que sea la velocidad del observador.

Las teorías de Planck, Einstein y De Broglie, serán reseñadas en el capítulo XXVIII.

Los fenómenos luminosos que se describen a continuación, se estudian bajo el punto de vista de la teoría ondulatoria.

## A) DISPERSIÓN DE LA LUZ. ESPECTROSCOPIA

### XXVI – 2. Características de las ondas luminosas. Colores

La energía que transporta una onda luminosa impresiona nuestro ojo cuando su frecuencia está comprendida aproximadamente entre  $4 \times 10^{14} \text{ Hz}$  y  $8 \times 10^{14} \text{ Hz}$ , a las que le corresponden, también aproximadamente, las longitudes de onda en el vacío de 380 a 780 nm.

En colorimetría se suele emplear para los distintos valores de  $\lambda$  del espectro la unidad nm (*nanómetro*) o  $\mu\text{m}$  (*milimicra*) siendo ambas iguales a  $10^{-9} \text{ m}$ ; sin embargo es física atómica suele preferirse el *angstrom* ( $\text{\AA}$ ) para su medida, que equivale:  $1 \text{\AA} = 10^{-10} \text{ m}$ .

LUZ MONOCROMÁTICA es la formada por radiaciones de una sola longitud de onda; la LUZ BLANCA está integrada por luces monocromáticas de longitudes de onda comprendidas entre los límites de visibilidad sin solución de continuidad, es decir, por todas las longitudes de onda entre los límites citados.

La longitud de onda de una radiación visible caracteriza a la luz, impresionando de una forma especial nuestra retina y produciendo la sensación de color. De mayor a menor longitud de onda las tonalidades de los colores son: Rojo, anaranjado, amarillo, verde, azul, añil y violeta.

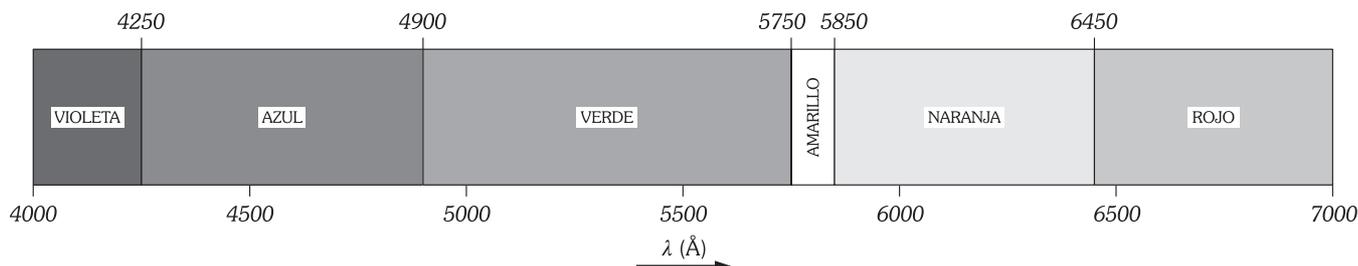


Fig. XXVI-4.– Intervalos aproximados de color en el espectro visible.

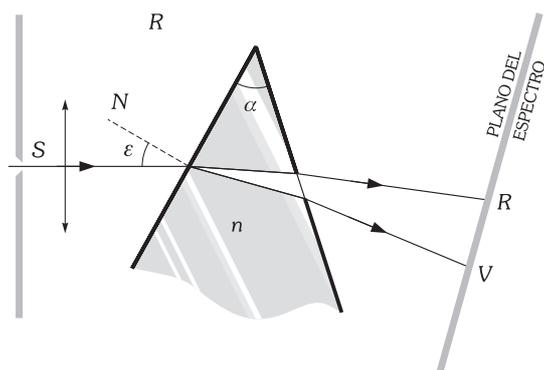


Fig. XXVI-5.- Descomposición de la luz por un prisma.

Los cuerpos productores de luz blanca no emiten únicamente esas radiaciones; producen al mismo tiempo otras que, rebasando los límites máximo y mínimo de visibilidad, no son capaces de impresionar nuestra retina. Los de longitud de onda mayor que los visibles se llaman INFRARROJOS ( $10^{-3}$  m – 780 nm). Las radiaciones de menor longitud de onda que las violetas son las ULTRAVIOLETAS (380 nm – 60 nm). Tanto unas como otras son capaces de impresionar determinadas placas fotográficas.

### XXVI – 3. Dispersión de la luz

«La luz sufre el fenómeno de DISPERSIÓN cuando se descompone en sus colores simples».

Si por medio de un prisma, se observa la imagen de una rendija S, lo suficientemente delgada, e iluminada con luz blanca (Fig. XXVI-5) se obtendrán tantas imágenes R, ..., V, como radiaciones monocromáticas existan en la luz (colores simples). El conjunto de estas imágenes fue llamado por Newton ESPECTRO DE LA LUZ utilizada. Si como hemos dicho, empleamos luz blanca, el espectro será continuo apareciendo todos los colores posibles; el más desviado (V en la Fig. XXVI-5) corresponde al violeta que tiene la menor longitud de onda, y al menos desviado, el rojo R, le corresponde la mayor longitud de onda. En consecuencia podemos enunciar:

«La luz de menor longitud de onda es la que más desviación experimenta en un prisma».

Puesto que la desviación (párrafo XXIV-10) es:  $d = f(\epsilon, n, \alpha)$  y siendo  $\epsilon$  (ángulo de incidencia) y  $\alpha$  (ángulo de refringencia del prisma) los mismos para todas las luces, obtenemos como consecuencia, que:

«El índice de refracción de una sustancia para una radiación, depende de la longitud de onda de ésta».

$$n = f(\lambda)$$

Esta función es decreciente para todas las sustancias transparentes, es decir, que conforme aumenta la longitud de onda disminuye el índice de refracción; de acuerdo con el hecho de que la luz violeta (menor longitud de onda) sufre una desviación mayor que la roja (mayor longitud de onda). En la Fig. XXVI-6 se representan las variaciones del índice de refracción para diferentes sustancias con las longitudes de onda del espectro. Hemos empleado una simbología para la determinación de las sustancias, su significado es: VSF vidrio silíceo flint, VBF vidrio al boro flint,  $\text{SiO}_2$  cuarzo, VSC vidrio silíceo crown,  $\text{SiO}_2$  (f) cuarzo fundido,  $\text{CaF}_2$  fluorita.

Téngase en cuenta, que en los estudios realizados hasta ahora de los fenómenos de refracción, y para que no se nos complicasen, hemos supuesto que la luz utilizada tenía solamente una longitud de onda; sin embargo, ocurre que la mayor parte de los haces reales de luz son complejos (policromáticos), adquiriendo gran importancia, en muchos casos, el fenómeno de la dispersión.

La forma de la función  $n = f(\lambda)$  depende de la constitución del medio, y experimentalmente se deduce que es:

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots$$

en la que A, B, C, ... son constantes características del medio y  $\lambda$  la longitud de onda en el vacío. Esta ecuación se puede emplear, con suficiente aproximación, para las necesidades de la óptica geométrica, y para intervalos pequeños del espectro visible, utilizando únicamente los dos primeros términos. El estudio teórico para la obtención de esta función, se aparta del contexto del presente libro.

La composición de las luces obtenidas por dispersión, interponiendo en su marcha un prisma en posición inversa al que produjo la descomposición, reproduce la luz original.

Si por un diafragma adecuado, seleccionamos un estrecho haz de la luz obtenida por dispersión y en su camino interponemos otro prisma en su marcha, no se producen nuevas descomposiciones, lo que nos demuestra la naturaleza monocromática de cada una de las radiaciones.

Al incidir la luz solar en las gotas de agua, experimenta el fenómeno de reflexión total y de dispersión, en la forma que indica la Fig. XXVI-7 y al llegar al ojo del observador impresiona su retina con diversos matices policromados (ARCO IRIS).

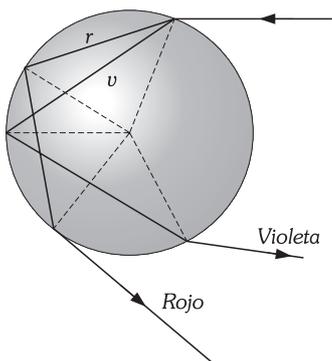


Fig. XXVI-7.- Dispersión de la luz en una gota de agua.

#### XXVI – 4. Poder dispersivo de una sustancia transparente

Para cuantificar la dispersión en una sustancia transparente, que será tanto mayor cuanto mayor sea la variación del índice de refracción con la longitud de onda, definimos el PODER DISPERSIVO o NÚMERO DE ABBE\* ( $\nu$ ), eligiendo arbitrariamente como referencia tres longitudes de onda, tomando una de ellas en la zona central del intervalo del espectro (región amarilla) y las otras dos en sus extremos (regiones azul y roja); suelen elegirse las correspondientes a las rayas de Fraunhofer  $D$ ,  $F$  y  $C$  (párrafo XXVI-7) respectivamente; y si son  $n_D$ ,  $n_F$  y  $n_C$  los correspondientes índices de refracción, entonces:

$$\nu = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1}$$

En el párrafo XXIV-13, se dedujo que para los prismas de pequeño ángulo y cuando la incidencia es casi normal, la desviación producida por éstos es:  $\delta = \alpha (n - 1)$ , luego para las luces de longitud de onda correspondientes a las líneas de Fraunhofer (Fig. XXVI-8)  $D$ ,  $F$  y  $C$  podremos escribir:

$$\left. \begin{aligned} \delta_F - \delta_C &= \alpha (n_F - 1) - \alpha (n_C - 1) = \alpha (n_F - n_C) \\ \delta_D &= \alpha (n_D - 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nu = \frac{\delta_F - \delta_C}{\delta_D}$$

EL PODER DISPERSIVO (o NÚMERO DE ABBE) es igual al cociente entre la DISPERSIÓN ( $\delta_F - \delta_C$ ) y la DESVIACIÓN MEDIA ( $\delta_D$ ), cuando la luz se dispersa al incidir casi normalmente sobre una de las caras de un prisma de pequeño ángulo.

«Cuanto mayor poder dispersivo tiene un cuerpo transparente, más separa las diversas radiaciones que sobre él inciden».

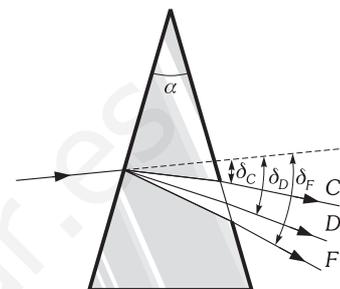


Fig. XXVI-8.- Ángulos de desviación de las rayas de Fraunhofer  $C$ ,  $D$  y  $F$ .

#### XXVI – 5. Aberración cromática

Al verificarse en las lentes el fenómeno de la dispersión se origina la ABERRACIÓN CROMÁTICA. Por ella, una lente tiene tantos focos como radiaciones simples inciden; en una lente convergente el foco correspondiente a la luz roja está más lejano del centro óptico, que cuando incide la luz violeta (Fig. XXVI-9).

Llamaremos ABERRACIÓN CROMÁTICA LONGITUDINAL a la distancia  $F_V F_R$ .

En los instrumentos de óptica es necesario suprimir, en lo posible, tal aberración, pues con ella las imágenes se ven irisadas de diversas coloraciones. La aberración cromática se elimina, para dos radiaciones, acoplando dos lentes, una convergente y otra divergente (Fig. XXVI-10) de distinto poder dispersivo ( $\nu_1, \nu_2$ ); debiendo cumplirse:

$$\frac{\nu_1}{f'_1} + \frac{\nu_2}{f'_2} = 0$$

«La lente de mayor poder dispersivo debe ser la de mayor distancia focal, es decir, la de menor convergencia». «La convergencia del conjunto es la suma de las convergencias».

Los vidrios que suelen usarse en la construcción de sistemas acromáticos son los llamados *flint* y *crown*; el poder dispersivo del primero es aproximadamente el doble del segundo.

**PROBLEMAS: 1 al 11.**

#### XXVI – 6. Espectroscopio de Prisma

«Un ESPECTROSCOPIO es un instrumento óptico analizador de las longitudes de onda presentes en un haz procedente de un manantial luminoso».

A los MANANTIALES LUMINOSOS empleados en espectroscopía podemos dividirlos en dos clases: aquéllos en los que la radiación es resultado de la alta temperatura y los que se basan en la descarga eléctrica a través de gases. En el primer tipo se encuentran el Sol, la lámpara de filamento de wolframio, los diversos arcos eléctricos y la llama. Entre los del segundo tipo citaremos las chispas de alto voltaje, las descargas luminosas en tubos de vacío a baja presión y ciertos arcos de baja presión como el de mercurio. La distinción entre ambos tipos no es totalmente rigurosa, pudiéndose pasar de una a otra de un modo continuo, por ejemplo, mediante la evacuación progresiva del aire que rodea a un arco voltaico.

El ESPECTROSCOPIO DE PRISMA consta (Fig. XXVI-11) de un tubo colimador ( $C$ ), un antejo ( $A$ ), un tubo escala ( $E$ ) y el órgano esencial del espectroscopio, que es el prisma óptico ( $P$ ).

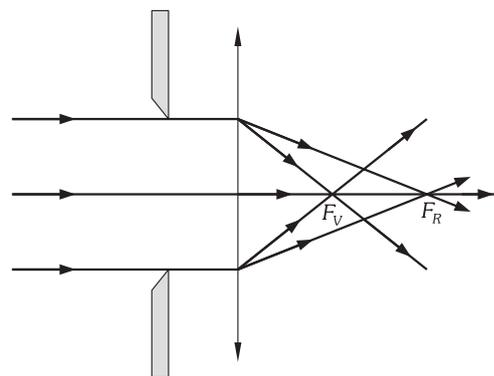


Fig. XXVI-9.- Diversos focos de una lente para distintas radiaciones.



Fig. XXVI-10.- Acoplamiento de dos lentes de distinto índice de refracción para corregir la aberración cromática.

\* Ernst Abbe (1840-1905).

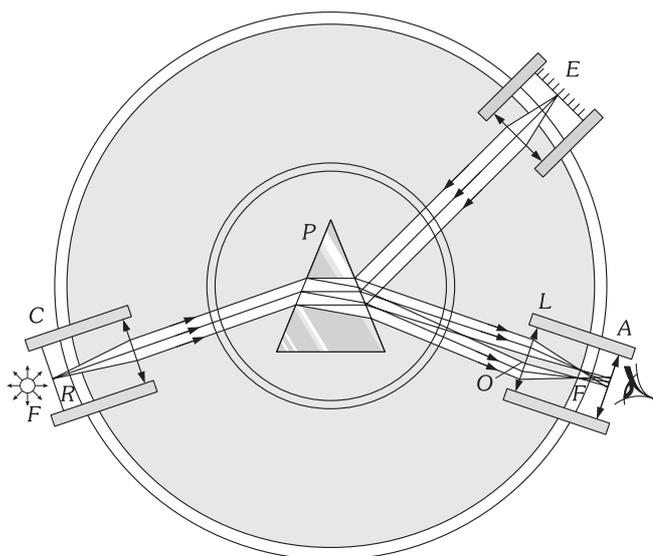


Fig. XXVI-11.- Espectroscopio de prisma.

El tubo colimador es un tubo con una rendija muy estrecha  $R$ , iluminada por la luz que se desea dispersar. La rendija está situada en el plano focal de una lente convergente y de esta forma, los rayos de luz procedentes de la rendija, salen paralelos entre sí después de atravesar la lente (colimados); incidiendo en el prisma sufren la dispersión, emergiendo de él en forma de haces de rayos paralelos de diversos colores.

Una lente  $L$  (instalada en el tubo anteojo) forma en su plano focal ( $F$ ) diversas imágenes de la rendija, reales y de distintos colores.

El tubo escala tiene por finalidad ver el espectro encuadrado en una escala para poder comparar las posiciones de las diversas líneas o bandas del espectro. Una escalita dibujada en una lámina de vidrio, iluminada por transparencia, está en el plano focal de una lente convergente. Los rayos que salen de ella y atraviesan la lente, llegan paralelos entre sí a la cara de emergencia del prisma y por reflexión penetran en el tubo anteojo, superponiéndose la imagen real de la escala a las de la rendija.

Se llama ESPECTRÓGRAFO a un espectroscopio en el que en vez de los mecanismos de visión directa, se fotografía el espectro producido por un manantial. El espectroscopio de prisma puede utilizarse como espectrógrafo colocando una placa fotográfica en el plano de la imagen dada por el objetivo del anteojo, en lugar de examinar ésta con el ocular del mismo. La ventaja del espectrógrafo es la posibilidad de comparación de longitudes de onda desconocidas con fotografías de un espectro de rayas de alguna sustancia conocida, además de la posibilidad de poder captar las radiaciones infrarrojas y ultravioletas del manantial, utilizando placas especiales.

### XXVI - 7. Clases de espectros. Análisis espectral

Hay dos clases de espectros que llamaremos ESPECTROS DE EMISIÓN y ESPECTROS DE ABSORCIÓN. Cada uno de ellos pueden ser CONTINUOS o DISCONTINUOS, y por último, los discontinuos comprenden los ESPECTROS DE RAYAS y los ESPECTROS DE BANDAS.

Los ESPECTROS DE EMISIÓN se producen en el espectroscopio, cuando la luz procede directamente de una fuente. Serán *espectros continuos de emisión*, cuando se obtenga una imagen de la fuente a través del espectroscopio formada por una sucesión de colores (que se corresponden con todas las frecuencias) sin límites claramente definidos entre cada color y con «intensidades» variables; los sólidos y los líquidos, salvo muy raras excepciones, dan lugar a este tipo de espectros. En los *espectros de emisión discontinuos de líneas o de bandas* aparecen en el espectroscopio en forma de rayas o bandas paralelas y aisladas; cada raya es la imagen de la rendija del espectroscopio desviada un ángulo que depende de la frecuencia de la luz que forma la imagen (difracción de una rendija; párrafo XXVI-35); los manantiales que producen este tipo de espectros son los gases a través de los cuales se produce una descarga eléctrica, o una llama en la que se ha introducido una sal volátil; los espectros de líneas son característicos de los átomos, los de bandas de las moléculas.

El espectro de rayas de un átomo fija la naturaleza de éste y siendo el espectro de una mezcla o combinación el conjunto de los espectros de los componentes, se pueden determinar éstos por la observación detenida del espectro, no necesitándose identificar todas las líneas de cada elemento ya que éstos tienen líneas características que pueden dar la certeza de su existencia (ANÁLISIS ESPECTRAL); en estos análisis es imprescindible la utilización del espectrógrafo. En la Fig. XXVI-12 representamos los espectros de rayas correspondientes a algunos elementos.

Los ESPECTROS DE ABSORCIÓN se producen en un espectroscopio, cuando entre una fuente emisora de luz blanca (todas las frecuencias) y el prisma se intercala una sustancia; se observa el espectro continuo característico de tal luz (del rojo al violeta) con una serie de rayas negras en los lugares en que deberían aparecer las líneas luminosas del espectro de emisión del cuerpo atravesado.

El fenómeno de la absorción viene regulado por la LEY DE KIRCHHOF: «*Todo cuerpo es capaz de absorber las radiaciones que emite a la misma temperatura*» (ver párrafo XXVI-11).

El espectro que corresponde a la luz que nos llega del Sol es continuo cruzado por una serie de rayas negras, éstas fueron observadas por primera vez por Joseph Fraunhofer (1787-1826). El espectro continuo del fondo corresponde a la luz emitida por el núcleo solar; las líneas de absorción corresponden a los gases en incandescencia que constituyen la atmósfera solar, que al ser atravesados por la luz del núcleo, verifican el fenómeno de absorción. Fraunhofer designó con las letras del alfabeto desde la A hasta la H las rayas más patentes; en la tabla adjunta designamos la longitud de onda que en el espectro corresponden a estas rayas y los elementos que las originan. Posteriores estudios del espectro de absorción del Sol, apreciaron muchas más rayas oscuras, que una

RAYA	LONGITUD ONDA EN EL VACÍO (en nm)	ELEMENTO QUE LA ORIGINA
A	761	O <sub>2</sub>
B	687	O <sub>2</sub>
C	656	H
D	589	Na
E	527	Fe
F	486	H
G	431	Ca
H	397	Ca <sup>+</sup>

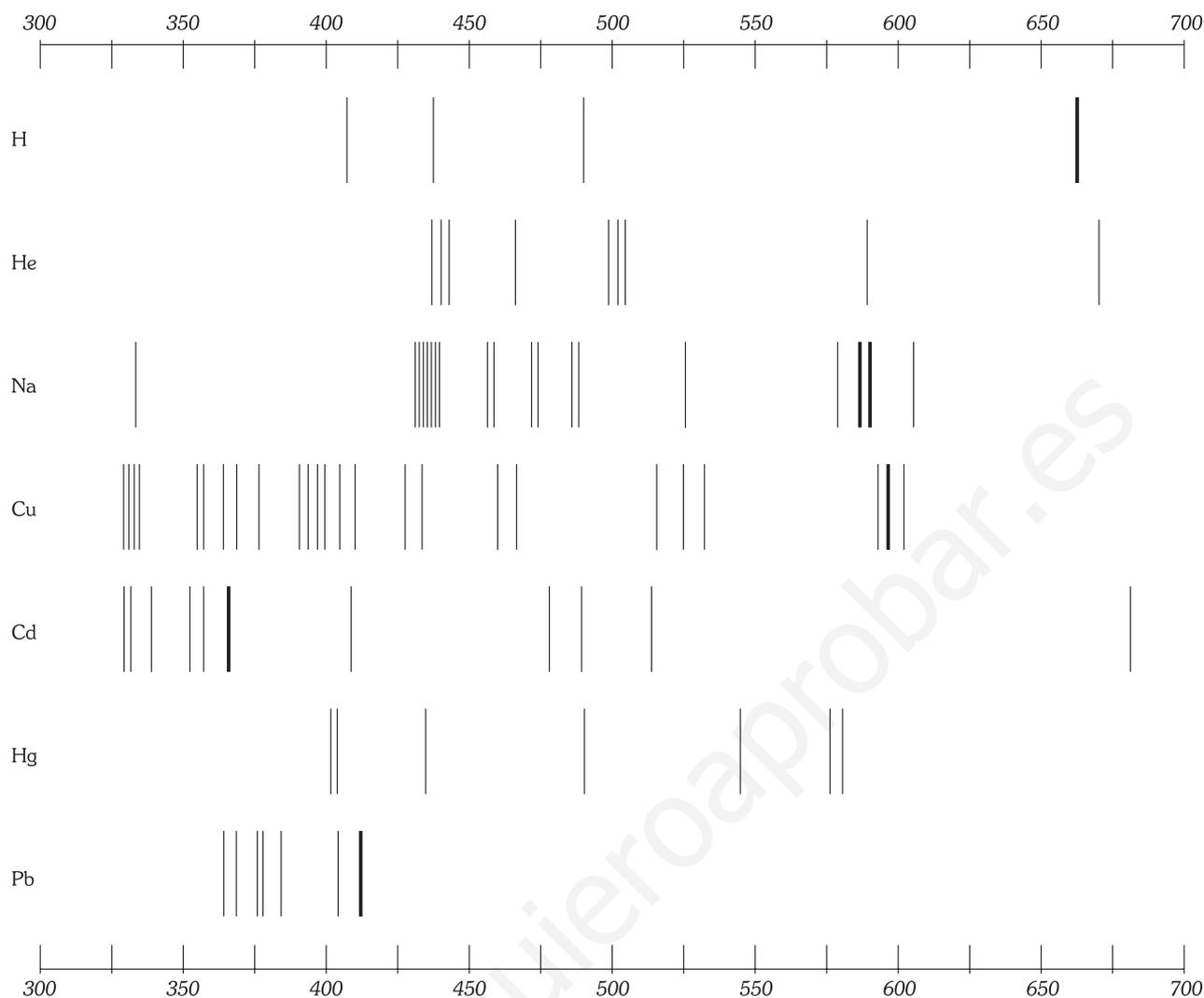


Fig. XXVI-12.- Longitud de onda en nm de algunas rayas espectrales.

vez separadas de las que corresponden a la atmósfera terrestre, permitieron localizar en la solar unos dos tercios de los elementos químicos conocidos, quedando además una serie de líneas que no se correspondían con ninguno de los elementos conocidos, y para cuya justificación se postuló la existencia, confirmada posteriormente, de un elemento al que se llamó Helio.

Como se ha dicho, los espectros de emisión o absorción de bandas son característicos de las moléculas; al analizar el espectro que producen los gases tales como el  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $CO_2$ ,  $CO$ , ..., etc. (no disociados), se observan un enorme número de rayas tan próximas entre sí que parecen formar bandas, de ahí su nombre.

Como se verá en el estudio del átomo, cada raya de su espectro es el resultado del paso de un electrón de un nivel de energía a otro; mientras que en el espectro de bandas, al ser en las moléculas los niveles energéticos mucho más numerosos que en los átomos, su espectro se complica en la forma antes dicha.

## B) RADIACIÓN TÉRMICA. CUERPO NEGRO

### XXVI - 8. Radiación térmica

Un cuerpo cualquiera emite constantemente energía en forma de ondas electromagnéticas de diversas longitudes de onda, la experiencia nos demuestra que esta radiación aumenta con la temperatura del cuerpo.

«Se llama RADIACIÓN TÉRMICA a la emisión de energía producida por la temperatura de los cuerpos».

Esta emisión de energía se produce a expensas de la energía interna del cuerpo emisor o a costa de la energía que este último recibe del exterior; en consecuencia, la radiación emitida por un cuerpo puede ser absorbida por otro, pudiendo transformarse en calor. Este intercambio depende de sus temperaturas, y si se encuentran aislados, sabemos que llegan al *equilibrio térmico*

(igual temperatura); no es que dejen de radiar ondas electromagnéticas, sino que la energía emitida por ellos es igual a la que absorben (*equilibrio dinámico*).

A bajas temperaturas, las frecuencias de las ondas electromagnéticas producidas por los cuerpos se sitúan generalmente en la región infrarroja del espectro (razón por la que no «brillan» los objetos a temperatura ambiente). Aumentando la temperatura de los cuerpos, llegará un momento en que comenzarán a brillar con tendencia al rojo; y a temperaturas suficientemente altas la emisión se desplaza al blanco (produce todas las frecuencias en distribución continua de la luz visible); si se aumenta aún más la temperatura, se abarcará la zona ultravioleta del espectro. Pudiéndose enunciar:

«Conforme aumenta la temperatura la radiación se enriquece en componentes de longitud de onda menor».

El Sol, que posee una temperatura superficial de 5 000 a 6 000 °C, es un ejemplo de excepción de proceso de radiación térmica, puesto que gracias a él subsisten todos los seres vivos que habitan la Tierra; y casi toda la energía de la que disponemos procede de él. Su espectro es continuo, emite ondas electromagnéticas abarcando desde el infrarrojo hasta la zona del ultravioleta, pasando naturalmente por la luz visible.

Desde el punto de vista de la Física Clásica, puesto que la radiación es una onda electromagnética, cabe esperar que cualquier manantial de ella se produce por la aceleración de cargas eléctricas; es sabido que las cargas eléctricas que intervienen en la producción de radiaciones ultravioletas y luz son los electrones de la corteza atómica; admitir que estas radiaciones son originadas por los movimientos vibratorios u orbitales de estos electrones, con lo que se consiguen explicar muchas de las características de los diversos manantiales luminosos, falla en aspectos muy importantes, puesto que en esta emisión también va implicada la naturaleza discreta o corpuscular de la luz, entrando en el terreno de la Física Cuántica, la cual no está regida por las mismas hipótesis que la Clásica. De momento destacamos solamente el hecho de que las radiaciones consisten en ondas electromagnéticas.

## XXVI – 9. Flujo radiante

FLUJO RADIANTE INTEGRAL ( $R$ ) de un cuerpo es la energía que pasa por unidad de tiempo a través de una superficie que lo contiene. Se mide en vatios.

La palabra *integral* se refiere a que contamos con todas las longitudes de onda que emite el cuerpo.

Si consideramos como positivo el flujo radiante saliente de la superficie que lo contiene (superficie del cuerpo), entonces la energía radiada por el cuerpo se hace a expensas de su energía interna. Si el flujo es negativo, es decir, entra por su superficie más energía radiante que la que sale, el cuerpo está absorbiendo más energía de la que radia. En el caso en que sea nulo, el flujo radiante hacia el cuerpo desde el exterior será igual al radiado por él, implicando que el cuerpo se encuentra a temperatura constante. Este último caso nos proporciona una forma de medida del flujo radiante a la temperatura con que emite, sin más que medir la cantidad de calor que recibe el cuerpo que la absorbe.

«Definimos FLUJO RADIANTE PARA UNA DETERMINADA LONGITUD DE ONDA ( $R_\lambda$ ) de un cuerpo como la energía que pasa por unidad de tiempo a través de una superficie que lo contiene debida solamente a tal longitud de onda».

En la práctica no tiene sentido referirse al flujo radiante correspondiente a una determinada longitud de onda, puesto que sólo en casos excepcionales (*láser*) la radiación está formada por longitudes de onda aproximadamente iguales; en la gran mayoría de los casos se trata de conjuntos de ondas de longitudes de onda muy diversas, correspondientes tanto a la zona de los rayos visibles como a la de los invisibles. Para dar una característica energética a cada tipo de luz (color, por ejemplo), será preciso indicar cómo está distribuida la energía entre las distintas longitudes de onda, para lo cual, separaremos del flujo radiante integral  $R$  el correspondiente a un determinado intervalo de longitudes de onda  $\Delta\lambda$ , en torno de una determinada  $\lambda$ ; la potencia  $\Delta R_\lambda$  correspondiente a este intervalo la podemos considerar como proporcional a él:  $\Delta R_\lambda = r_\lambda \Delta\lambda$ , en el límite, suponiendo a  $\Delta\lambda$  lo suficientemente pequeño, podemos poner:

$$dR_\lambda = r_\lambda d\lambda \quad (2)$$

la magnitud  $r_\lambda$  es el flujo radiante referido a un intervalo unidad de longitudes de onda próximo a la longitud de onda  $\lambda$  determinada; es función de la longitud de onda, que a su vez depende de la naturaleza del cuerpo radiante (a cada sustancia le corresponde un espectro) y de las condiciones en que se produce la emisión.

La Fig. XXVI-13 nos representa la función de distribución de la energía por unidad de tiempo de la radiación de un cuerpo que tiene un espectro continuo, frente a las longitudes de onda. La potencia correspondiente al intervalo finito comprendido entre  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , será:

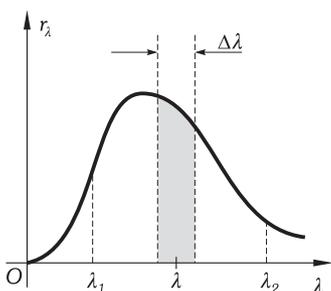


Fig. XXVI-13.– Distribución del flujo de radiación con las longitudes de onda para un cuerpo determinado.

$$R_{\lambda_1, \lambda_2} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} r_{\lambda} d\lambda$$

y será igual al área comprendida entre la curva, el eje de abscisas y limitado por  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . El flujo radiante integral (referido a todas las longitudes de onda) se expresará:

$$R = \int_0^{\infty} r_{\lambda} d\lambda$$

**XXVI – 10. Poder emisor. Poder absorbente**

«PODER EMISIVO INTEGRAL ( $E$ ) es la cantidad total de energía radiada en la unidad de tiempo y por unidad de superficie de un cuerpo».

$$E = \frac{dR}{dS}$$

Igual que se ha introducido la función  $r_{\lambda}$  en el párrafo anterior, podemos definir ahora el poder emisor para un determinado entorno de una longitud de onda dada  $\lambda$ ; considerando el flujo radiante  $dR_{\lambda}$ , referido a un entorno  $d\lambda$ , próximo a la longitud de onda  $\lambda$ , por unidad de superficie  $dS$  del cuerpo emisor, el PODER EMISIVO ( $e_{\lambda}$ ) verificará:

$$dR_{\lambda} = e_{\lambda} dS d\lambda \quad \Leftrightarrow \quad E = \int_0^{\infty} e_{\lambda} d\lambda$$

«El poder emisor de un cuerpo depende de lo bruñido o brillante de su superficie, siendo tanto menor cuanto más bruñido esté».

Para demostrar experimentalmente esta última afirmación podemos utilizar el llamado CUBO DE LESLIE. (Fig. XXVI-14), consistente en un recipiente cuyas paredes se han fabricado de distintos metales que han sido tratado diferentemente (hierro pintado de blanco, de negro, cobre mate, cobre bruñido); llenamos el recipiente de agua caliente, acercamos a cada pared una unión termoelectrica o un termómetro y observaremos una mayor temperatura (registraremos un poder emisor mayor) frente a la cara pintada de negro, y el mínimo de temperatura frente a la cara más bruñida; en consecuencia el cubo con agua caliente pierde más calor por la pared ennegrecida, como queríamos comprobar.

Al recibir un cuerpo energía de radiación térmica ( $I$ ), en parte la refleja ( $R$ ), en parte la difunde ( $D$ ), en parte la transmite a través de él ( $T$ ), y una parte la absorbe ( $A$ ). Así la energía luminosa incidente ( $I$ ), es igual a la suma de todas las demás (Fig. XXVI-15):

$$I = R + D + T + A$$

Hay cuerpos, como los metales y los espejos que reflejan casi toda la energía que reciben; otros como el papel blanco o el vidrio incoloro, que difunden o transmiten casi la totalidad de la energía radiante, absorbiendo, siempre, una fracción de la recibida.

Examinemos ahora la absorción de la luz; para cuantificar este fenómeno se define al que llamaremos PODER ABSORBENTE INTEGRAL como:

$$A = \frac{R_A}{R_I} \tag{3}$$

En la que  $R_A$  es la energía total absorbida por el cuerpo en la unidad de tiempo y  $R_I$  la energía total recibida en la unidad de tiempo. Así por ejemplo, un cuerpo cuyo poder absorbente es 0,5 nos indica que absorbe la mitad de la energía radiante que recibe, la otra mitad se refleja, difunde o transmite a su través.

Análogamente a lo expuesto anteriormente podemos definir poder absorbente para un entorno  $d\lambda$  próximo a la longitud de onda  $\lambda$  o simplemente PODER ABSORBENTE ( $a_{\lambda}$ ), como:

$$a_{\lambda} = \frac{dR_{A\lambda}}{dR_{I\lambda}}$$

dándonos la fracción de flujo incidente absorbido por el cuerpo en las proximidades de la longitud de onda  $\lambda$ .

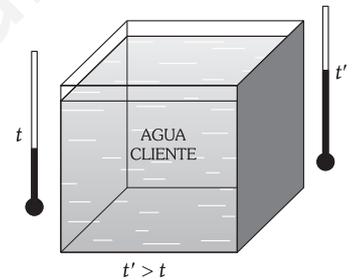


Fig. XXVI-14.- Cubo de Leslie con el que confirmamos que el poder emisor de los cuerpos depende de lo bruñido o brillante de su superficie.

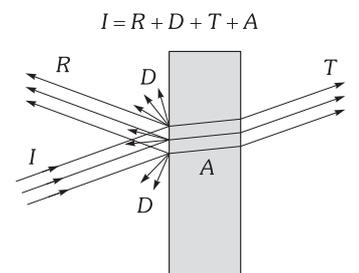


Fig. XXVI-15.- Separación de la energía incidente sobre una lámina.

Como en general todos los cuerpos absorben menor energía que reciben, el poder absorbente es menor que la unidad.

**XXVI – 11. Ley de Kirchhoff**

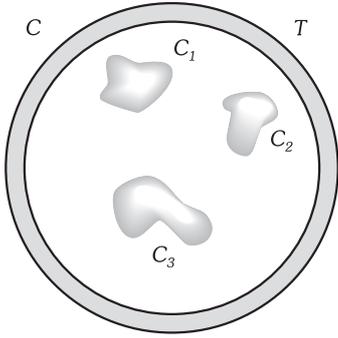


Fig. XXVI-16.- Cuerpos en el interior de uno hueco en equilibrio (dinámico) térmico.

Supongamos que dentro de un cuerpo hueco  $C$  existe el vacío y una serie de cuerpos  $C_1, C_2, C_3, \dots$  (Fig. XXVI-16) cuyos poderes emisivos son  $e_{\lambda 1}, e_{\lambda 2}, e_{\lambda 3}, \dots$  y absorbentes  $a_{\lambda 1}, a_{\lambda 2}, a_{\lambda 3}, \dots$ , para una determinada longitud de onda; de esta manera, sólo pueden intercambiar energía entre sí y con la envoltura mediante emisión o absorción de ondas electromagnéticas. La experiencia demuestra que transcurrido un tiempo se establece un *equilibrio térmico que es dinámico* y todas los cuerpos, incluido el que los envuelve, acaban teniendo la misma temperatura  $T$ ; con lo que si un cuerpo, por ejemplo el  $C_1$ , tiene un poder emisor ( $e_{\lambda 1}$ ) mayor que otro (cede más energía radiante por unidad de tiempo y superficie), por ejemplo el  $C_2$  ( $e_{\lambda 1} > e_{\lambda 2}$ ), para que la temperatura del sistema permanezca constante,  $C_1$  tendrá que ser también más absorbente que el segundo ( $a_{\lambda 1} > a_{\lambda 2}$ ); en consecuencia deducimos la necesidad de que exista una proporcionalidad entre los poderes emisivos y absorbentes de los cuerpos. Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) estableció que esta proporcionalidad debe cumplirse separadamente para cada intervalo de longitudes de onda, escribiendo que:

$$\frac{e_{\lambda 1}}{a_{\lambda 1}} = \frac{e_{\lambda 2}}{a_{\lambda 2}} = \frac{e_{\lambda 3}}{a_{\lambda 3}} = \dots = f(\lambda, T) \tag{4}$$

a esta expresión la llamamos LEY DE KIRCHHOFF que se enuncia:

«La relación entre el poder emisor y el absorbente es constante para todos los cuerpos, para la misma temperatura y longitud de onda de la radiación».

$$\frac{e_{\lambda}}{a_{\lambda}} = f(\lambda, T) \tag{5}$$

«Es decir, el cociente del poder emisor al absorbente depende, únicamente, de la longitud de onda y de la temperatura y es independiente de la naturaleza del cuerpo».

Así, considerando una temperatura y una longitud de onda determinada, al ser  $e_{\lambda}/a_{\lambda}$  el mismo para todos los cuerpos se ha de verificar:

«Si un cuerpo tiene mayor poder emisor que otro (para una determinada radiación y temperatura), tiene también, mayor poder absorbente».

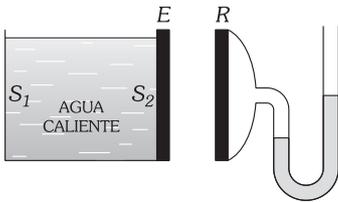


Fig. XXVI-17.- Para demostrar experimentalmente que si un cuerpo tiene mayor poder emisor que otro (para una  $\lambda$  y  $T$  determinadas), tiene también mayor poder absorbente.

Experimentalmente podemos demostrar estas afirmaciones de la siguiente manera: tomemos un cubo de Leslie  $E$  (Fig. XXVI-17) lleno de agua caliente en calidad de emisor de radiación, una de cuyas caras ( $S_1$ ) está hecha de un metal pulido, otra ( $S_2$ ) pintada de negro; mientras que la pared  $S_1$  refleja una gran parte de los rayos que sobre ella inciden y, por consiguiente, es poco absorbente, la  $S_2$ , por el contrario absorbe mucho. Por la ley de Kirchhoff, la superficie  $S_1$  deberá emitir menos que la  $S_2$ ; para hacer esta comprobación, tomemos un recipiente  $R$  como receptor de la radiación, consistente en una cámara cerrada unida a un manómetro, estando una de las paredes de  $R$  ennegrecida; si esta última se coloca enfrente de  $S_2$  (situación que representamos en la Fig. XXVI-17) el recipiente  $R$  comienza a calentarse sensiblemente a costa de la radiación absorbida, dilatándose el aire contenido en él, como nos indica el manómetro asociado; si colocamos  $R$  de forma que su superficie ennegrecida quede enfrente de  $S_1$ , se observa que la dilatación del aire se hace mucho menor; lo que nos demuestra que la superficie pulimentada  $S_1$ , a una misma temperatura, emite menos radiación que la superficie ennegrecida  $S_2$ .

**XXVI – 12. Cuerpo negro (radiador ideal). Ley de Stefan-Boltzmann**

«Llamaremos CUERPO NEGRO a aquel que para cualquier longitud de onda tiene un poder absorbente integral igual a la unidad ( $A_n = 1$ ); lo que quiere decir (3) que a cualquier temperatura absorbe totalmente la luz, cualquiera que sea su composición».

Los cuerpos que corrientemente llamamos «negros» no cumplen exactamente la definición anterior. Podemos materializar el cuerpo negro ideal, haciendo una cavidad esférica y ahumando su interior (Fig. XXVI-18); la energía radiante recibida es, en parte, reflejada en la primera incidencia; la parte no absorbida lo es, en otra parte considerable, en la segunda. Al cabo de varias reflexiones, se puede suponer totalmente absorbida la energía radiante que penetró por el «orificio».

«El cuerpo negro es el de mayor poder emisor ( $e_{\lambda n}$ ) para una misma longitud de onda y temperatura».

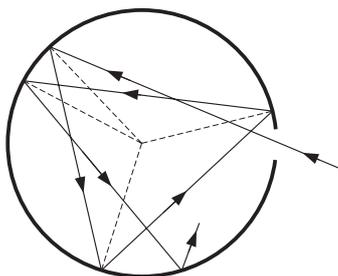


Fig. XXVI-18.- Realización del cuerpo negro.

En efecto: si  $e_{\lambda}$  y  $e_{\lambda n}$  son los poderes emisivos de un cuerpo cualquiera y de uno negro, y  $a_{\lambda}$  el absorbente del primero (el poder absorbente del cuerpo negro es la unidad), la aplicación de (4) nos da, suponiendo idénticas temperaturas y longitudes de onda:  $e_{\lambda}/a_{\lambda n} = e_{\lambda n}$ ; como el poder ab-

sorbente de todos los cuerpos –menos el negro perfecto– es menor que la unidad, obtenemos:

$$e_{\lambda} < e_{\lambda n}$$

En definitiva, el «cuerpo negro» es el «emisor ideal» de radiaciones. Ello nos extraña, ya que es precisamente, el que no vemos; es debido a que para bajas temperaturas, la energía que emite tiene una longitud de onda excesiva para impresionar nuestra retina (radiaciones infrarrojas). Si elevamos la temperatura y sobrepasamos los 500 °C el orificio de la cavidad descrita anteriormente se hará luminoso y visible, pasando del «rojo sombra» al «rojo blanco» y emitiendo ya, *más que ningún otro cuerpo* a la misma temperatura, energía radiante, capaz de impresionar nuestra retina.

Si para un cuerpo negro el poder absorbente es igual a la unidad, el poder emisor ( $e_{\lambda n}$ ) según la ley de Kirchoff (5) dependerá única y exclusivamente de la longitud de onda y de su temperatura, con lo que:

$$e_{\lambda n} = f(\lambda, T)$$

Josef Stefan (1835-1893) experimentalmente y Ludwig Boltzmann (1844-1906) basándose en razonamientos termodinámicos, y para el poder emisor integral ( $E_n$ ) del cuerpo negro, obtuvieron la forma de la función  $E_n = f(\lambda, T)$ , respondiendo a la ecuación:

$$E_n = \sigma T^4 \tag{6}$$

enunciándose la LEY DE STEFAN-BOLTZMANN de la forma:

«El poder emisor integral de un cuerpo negro, es proporcional a la cuarta potencia de su temperatura absoluta».

El valor de la constante es  $\sigma = 5,71 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ . Si no se trata de un cuerpo negro la ecuación (6) se escribirá:

$$E = A\sigma T^4$$

### XXVI – 13. Curvas de distribución del poder emisor del cuerpo negro en función de las longitudes de onda

La forma de la función del poder emisor de un cuerpo negro  $e_{\lambda n} = f(\lambda, T)$  en el espectro de radiación y para diferentes temperaturas, se obtuvo experimentalmente (Fig. XXVI-19), si a éste se le toma como patrón, podrán compararse con las de otro cualquiera.

La distribución de la energía en el espectro obedece a las siguientes leyes enunciadas por Wilhelm (Wily) Wién (1864-1928), como consecuencia de sus trabajos sobre la radiación térmica, por lo que mereció el Premio Nobel de Física en 1911:

- 1ª. Para cada temperatura existe una longitud de onda característica con la cual el cuerpo negro emite la máxima energía.
- 2ª. La temperatura de emisión y la longitud de onda de la radiación de máxima energía, vienen ligadas por:

$$\lambda_{\text{máx}} T = 28\,970\,000 \text{ \AA} \cdot \text{K} \tag{7}$$

La longitud de onda de la radiación de máxima energía de emisión es inversamente proporcional a la temperatura absoluta.

- 3ª. Al aumentar la temperatura de emisión, aumenta la energía de todas las radiaciones desplazándose los máximos de energía hacia las radiaciones de menor longitud de onda.

Los primeros intentos que se hicieron para explicar los resultados obtenidos en el gráfico de la Fig. XXVI-19, basados en las teorías clásicas, fracasaron. Uno de ellos de particular interés es el realizado por Rayleigh y Jeans a finales del siglo pasado, basándose en las exigencias de la Física estadística sobre la distribución de la energía por unidad de volumen o DENSIDAD CÚBICA DE ENERGÍA  $u_{\lambda}$  que se define como:

«La energía radiante referida a la unidad de tiempo existente en la unidad de volumen y para un determinado intervalo de longitudes de onda  $d\lambda$ ».

Se expresará, por ejemplo, en  $\text{mW/nm} \cdot \text{m}^3$ . Por su definición de densidad cúbica de energía, teniendo en

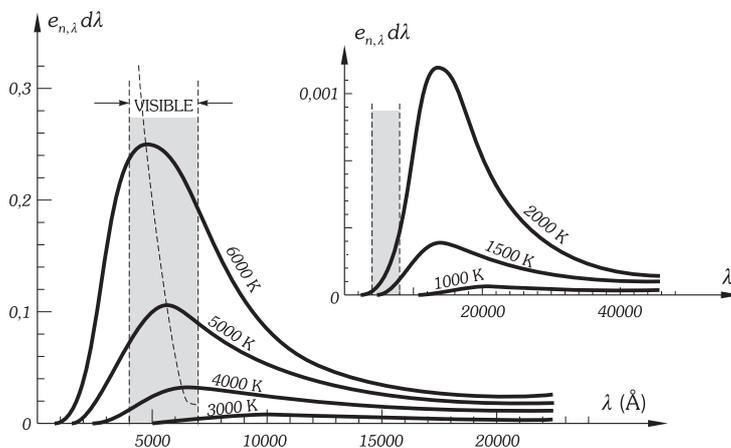


Fig. XXVI-19.– Curvas del poder emisor de la radiación de un cuerpo negro representadas a escala. Las longitudes de onda están representadas en Å y la energía en calorías por centímetro cuadrado y por segundo para cada intervalo de longitud de onda  $d\lambda$  de 1Å. La hipérbola que pasa a través de los puntos en los máximos corresponde a la Ley de Wien.

cuenta la ley de Kirchhoff, tendrá que ser de la forma:  $u_\lambda d\lambda = f(\lambda, T) d\lambda$ ; evidentemente la distribución de la densidad de energía de un cuerpo negro entre sus longitudes de onda, obedece a las mismas curvas experimentales que para  $e_{\lambda n} d\lambda$  (Fig. XXVI-19).

La ley de Rayleigh-Jeans, conclusión de los trabajos de ambos, y que llegaron a dar una forma de la función  $f(\lambda, T)$ , es:

$$u_\lambda d\lambda = \frac{8\pi kT}{\lambda^4} d\lambda$$

en la que  $k$  es la constante de Boltzmann. Para grandes longitudes de onda, este modelo concuerda razonablemente con los datos experimentales, existiendo gran discrepancia a medida que la longitud de onda se hace pequeña, puesto que según la ley de Rayleigh-Jeans para  $\lambda \rightarrow 0$ , da un aumento rápido y monótono para la energía radiante, siendo en realidad la curva en forma de campana.

En 1901, Max Planck (1858-1947), descubrió una fórmula para la radiación del cuerpo negro que concordaba totalmente con la curva experimental en todas las longitudes de onda. La ecuación que fue propuesta por Planck es:

$$u_\lambda d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda kT} - 1)} d\lambda \quad (8)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz,  $e$  es la base de los logaritmos neperianos,  $k$  es la constante de Boltzmann y  $h$  una nueva constante que lleva su nombre, igual a:

$$h = (6,6256 \pm 0,005) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

De la ecuación de Planck para longitudes de onda larga se deduce la expresión de Rayleigh-Jeans; así como las citadas leyes de Stefan-Boltzmann y Wien también se pueden obtener de ésta.

Para justificar la fórmula (8) Planck tuvo que establecer una hipótesis sobre los modos de vibración de un oscilador armónico que resultó de importancia trascendente en todo el desarrollo posterior de la Física, y que comentaremos en la primera cuestión del tema dedicado a la teoría de los «cuantos» (párrafo XXVII-1).

**PROBLEMAS: 12 al 15.**

### C) FOTOMETRÍA

#### XXVI – 14. Fotometría. Factor de eficiencia

«La parte de la Óptica que se ocupa de los focos luminosos, así como de las iluminaciones que producen es la FOTOMETRÍA».

Hasta ahora nos hemos ocupado del flujo radiante y todas las magnitudes relacionadas con él desde un punto de vista objetivo, midiéndolo en unidades de energía o potencia. Sin embargo, no podemos eludir que los fenómenos ópticos deban ser observados por nuestros ojos, y el flujo radiante no nos dice nada de la *sensación subjetiva* que produce dicho flujo. En el ojo humano no produce ninguna sensación un flujo radiante compuesto de radiaciones infrarrojas o ultravioletas aunque la energía que transportan sea bastante grande; y tampoco tiene la misma sensación para los rayos visibles de distintas longitudes de onda (distintos colores). Así por ejemplo, para que los rayos rojos produzcan la misma sensación de intensidad que los verdes su potencia tendrá que ser mucho mayor que los verdes. Desde este punto de vista adquiere más importancia la *percepción luminosa* que la *percepción energética*; para su estudio se hace necesario establecer el paso de las magnitudes energéticas a las características de la percepción luminosa, e introducir un sistema de unidades adaptado a las propiedades del ojo.

Para introducir una magnitud que caracterice el poder de sensación del flujo radiante, es necesario estudiar la sensibilidad que tiene el ojo para con las ondas luminosas de distinta longitud de onda; para lo cual, tomamos dos focos luminosos, emisores del mismo flujo energético, pero de radiaciones distintas –amarillo verdosa y roja– y con ellos iluminamos, independientemente, pero a la vez y a la misma distancia, a dos partes de una pantalla, la sensación de *luminosidad* para un ojo normal medio, es mayor en la región que recibe luz amarillo-verdosa; la cual, para el mismo flujo de energía, es siempre la que proporciona sensación de mayor luminosidad. Obtenemos la *sensación de luminosidad para un ojo normal medio*, como resultado del reconocimiento de un gran número de personas, sometiéndose a la experiencia de equilibrar la iluminación subjetiva en dos partes de una pantalla iluminada por dos haces de luz cuyas longitudes de onda se diferencian muy poco entre sí.

Cada radiación tiene su luminosidad relativa con respecto a la amarillo-verdosa de 555 nm de longitud de onda, para la cual el ojo normal medio tiene su máxima luminosidad relativa.

«Entendemos por LUMINOSIDAD RELATIVA o FACTOR DE EFICIENCIA ( $V_\lambda$ ) de una radiación, el cociente de los flujos energéticos de la luz de 555 nm, por el de la radiación, para que produzca en el ojo humano la misma sensación de luminosidad».

VALORES DE LA LUMINOSIDAD RELATIVA	
$\lambda$ , nm	$V_\lambda$
400	0,0004
410	0,0012
420	0,0040
430	0,0116
440	0,023
450	0,038
460	0,060
470	0,091
480	0,139
490	0,208
500	0,323
510	0,503
520	0,710
530	0,862
540	0,954
550	0,995
560	0,995
570	0,952
580	0,870
590	0,757
600	0,631
610	0,503
620	0,381
630	0,265
640	0,175
650	0,107
660	0,061
670	0,032
680	0,017
690	0,0082
700	0,0041
710	0,0021
720	0,00105
730	0,00052
740	0,00025
750	0,00012
760	0,00006

Así, por ejemplo, una radiación tiene una *luminosidad relativa* 0,5, cuando su flujo de energía tiene que ser *doble* que la correspondiente a la luz amarillo-verdosa (555 nm) para provocar la misma sensación de luminosidad en el ojo humano.

Basándose en numerosas mediciones y con gran número de observadores, se construyó la curva de sensibilidad relativa con la longitud de onda ( $V_\lambda$ ), que caracteriza al ojo normal medio; esta curva tiene su máximo, como ya se ha dicho, cuando  $\lambda = 555$  nm, condicionalmente tomado como unidad para  $V_\lambda$ . La curva representada en la Fig. XXVI-20 es tomada como patrón por la Comisión Internacional de Iluminación (CIE).

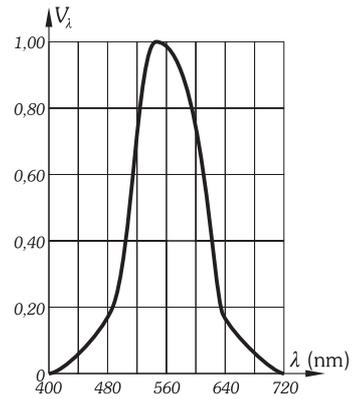


Fig. XXVI-20.- Curva de luminosidades relativas.

**XXVI - 15. Magnitudes fotométricas fundamentales. Unidades**

Para establecer una relación entre las unidades energéticas y las características subjetivas de la sensación que producen, definimos primeramente:

«FLUJO RADIANTE DE UN FOCO LUMINOSO PUNTUAL A TRAVÉS DE UNA SUPERFICIE ( $R$ ), como la energía que pasa a través de una superficie situada a una cierta distancia del foco, en la unidad de tiempo (Fig. XXVI-21)». Se mide en vatios.

Debido a que la energía radiante en un medio homogéneo se propagan en forma rectilínea, entonces al trazar desde el foco puntual  $F$  el conjunto de rayos que se apoyan sobre el contorno de la superficie  $dS$ , obtendremos un cono que limita el flujo que pasa a través de ella producido por  $F$ , si dentro del cono no hay absorción de energía. La sección del cono de superficie esférica con centro en  $F$  y radio unidad, da la medida del ángulo sólido ( $d\omega$ ) del cono; si  $dS$  forma un ángulo  $\varphi$  con el eje del cono y la distancia de  $F$  hasta la superficie es  $r$ , sabemos que:  $d\omega = dS \cos \varphi / r^2$ , correspondiéndole el mismo flujo radiante que para  $dS$ , siempre que no exista, como ya hemos dicho, absorción de energía por el medio.

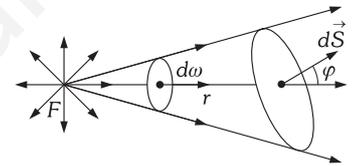


Fig. XXVI-21.- Para esclarecer el concepto de flujo radiante de un foco luminoso puntual a través de una superficie.

Visto lo anterior, valoramos las características subjetivas del flujo radiante, definiendo:

FLUJO LUMINOSO DE UN FOCO PUNTUAL dentro de un ángulo sólido determinado y para una longitud de onda dada, como su flujo energético referido a su capacidad de producción de luminosidad, y es igual al producto de su flujo energético por su luminosidad relativa o factor de eficiencia.

$$d\Phi_\lambda = V_\lambda dR_\lambda$$

y teniendo en cuenta (2) podremos poner:  $d\Phi_\lambda = V_\lambda e_\lambda d\lambda$

Si la luz es un complejo de radiaciones, el flujo luminoso es la suma de cada una de las radiaciones compuestas.

$$\Phi = \int_0^\infty V_\lambda e_\lambda d\lambda$$

la integral se toma entre 0 e  $\infty$ , puesto que para todas las longitudes de onda que se encuentran fuera del espectro visible  $V_\lambda = 0$ ; también puede definirse para la luminosidad la sensación visual subjetiva que produce una luz de potencia y composición espectral determinadas.

Otra magnitud de gran importancia en fotometría es la que definimos como:

«INTENSIDAD LUMINOSA DE UN FOCO PUNTUAL, es el flujo luminoso correspondiente a un ángulo sólido unidad (un estereorradián)».

$$I = \frac{d\Phi}{d\omega} \tag{9}$$

esta fórmula nos determina la intensidad en una dirección dada. Si la fuente es uniforme, es decir, su intensidad luminosa es la misma en todas las direcciones, entonces:  $I = \Phi/\omega$ ; de la que podemos obtener el flujo total de la fuente para todas las direcciones sin más que hacer  $\omega = 4\pi$  estereorradianes, quedándonos para éste:  $\Phi = 4\pi I$ .

De la fórmula (9) obtenemos:

$$d\Phi = I d\omega \Rightarrow \Phi = \int_0^{4\pi} I d\omega$$

considerando el flujo en todas las direcciones. Si  $I$  no es constante para todas las direcciones la igualdad de esta fórmula con la anterior nos da como valor de la *intensidad media esférica*:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} I d\omega$$

Para cuantificar las magnitudes fotométricas, se hace necesario tomar a una como magnitud fundamental, la elegida internacionalmente es la INTENSIDAD LUMINOSA. Como unidad fotométrica patrón adoptada por la CIE y para el SI, se toma:

La CANDELA (cd) es la intensidad luminosa en una dirección determinada de una abertura perpendicular a esta dirección, que tenga una superficie de 1/600 000 de metro cuadrado y radie como un radiador integral o cuerpo negro a la temperatura de fusión del platino (2 043 K = 1 770 °C), bajo la presión de 101 325 pascales.

La unidad de flujo luminoso, a la que llamamos LUMEN (lm) es por tanto, el flujo emitido por un foco luminoso uniforme y puntiforme de una candela en un ángulo sólido de un estereorradián: 1 lm = 1 cd · sr. El flujo total emitido por dicho foco es 4π lm.

Para un foco puntual que emite un vatio de flujo energético de máxima luminosidad relativa ( $V_\lambda = 1$  y  $\lambda = 555$  nm), le corresponde un flujo luminoso de 685 lúmenes; o lo que es lo mismo 1/685 W de radiación de 555 nm corresponden a 1 lm de flujo luminoso.

Si consideramos una luz de factor de eficiencia 0,2, un vatio de su energía radiante corresponden a 685 × 0,2 lm.

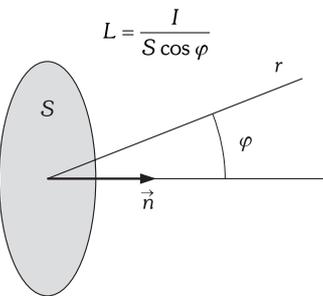
Se llama RENDIMIENTO FOTOMÉTRICO de una fuente al cociente entre el flujo luminoso y el flujo radiante; o lo que es lo mismo: al cociente de los lúmenes que produce la fuente a los que debería producir si toda la energía radiante fuese de luz de factor de eficiencia uno.

$$\eta = \frac{\Phi}{R}$$

**PROBLEMAS: 16 al 21.**

**XXVI – 16. Focos extensos. Luminancia**

Las lámparas fluorescentes, globos esmerilados, etc., son focos extensos (difusores) cuya característica como emisores de luz es su LUMINANCIA (también llamada BRILLO). Supongamos un foco extenso en el que tomamos un entorno, tan pequeño en comparación con la superficie S, que puede considerarse como foco puntual de intensidad I y consideremos la dirección r de emisión que forma un ángulo φ con la normal a la superficie emisora (Fig. XXVI-22); la LUMINANCIA del foco en tal dirección es:



$$L = \frac{I}{S \cos \varphi}$$

Fig. XXVI-22.– Foco extenso. Luminancia.

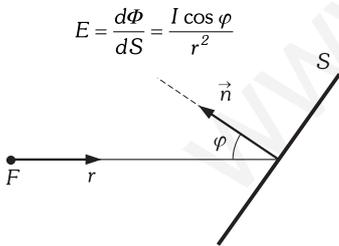
Haciendo  $I = 1$  candela,  $S = 1 \text{ m}^2$  ó  $1 \text{ cm}^2$  y  $\cos \varphi = 1$  (emisión en dirección normal) obtenemos las unidades de luminancia en el SI llamada NIT (nt) y en el CGS llamada STILB (sb):

$$1 \text{ nt} = \frac{1 \text{ cd}}{1 \text{ m}^2} = \frac{1 \text{ lm}}{1 \text{ m}^2 \cdot \text{sr}} \quad 1 \text{ sb} = \frac{1 \text{ cd}}{1 \text{ cm}^2} = \frac{1 \text{ lm}}{1 \text{ cm}^2 \cdot \text{sr}} = 10^4 \text{ nt}$$

El NIT es la luminancia o brillo de un manantial extenso de luz que tiene en la dirección considerada, dirección del ángulo sólido, la intensidad de una candela por metro cuadrado de área de superficie aparente ( $S \cos \varphi$ ), proyección de la superficie manantial de luz S sobre el plano perpendicular a la dirección considerada. La Luna llena tiene una luminancia de 2 500 nt y el Sol de  $1,6 \times 10^9$  nt, ambas medidas a través de la atmósfera.

**XXVI – 17. Iluminación de una superficie. Ley de Lambert**

«ILUMINACIÓN DE UNA SUPERFICIE es el flujo luminoso que recibe en cada unidad de área».

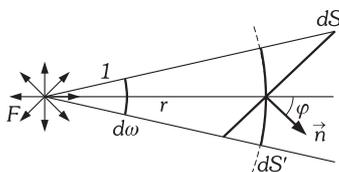


$$E = \frac{d\Phi}{dS}$$

Fig. XXVI-23.– Ley de Lambert.

Su unidad en el SI es el LUX (lx): iluminación de una superficie que recibe el flujo luminoso de un lumen en cada metro cuadrado:  $1 \text{ lx} = 1 \text{ lm/m}^2 = 1 \text{ cd} \cdot \text{sr/m}^2$ .

LEY DE Jean Henry LAMBERT (1728-1777): La iluminación producida por un foco puntual es directamente proporcional a la intensidad del foco, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco emisor, y directamente proporcional al coseno del ángulo formado por los rayos incidentes y la normal a la superficie (Fig. XXVI-23).



$$E = \frac{I \cos \varphi}{r^2}$$

Cuando los rayos inciden normalmente a la superficie ( $\varphi = 0$ ;  $\cos \varphi = 1$ ) la iluminación producida por un foco, a una determinada distancia, es máxima.

En efecto: en la Fig. XXVI-24, podemos observar que la superficie dS viene relacionada con la dS', trazada desde F como centro, por la fórmula:  $dS' = dS \cos \varphi$ , puesto que siendo infinitamente pequeñas dS y dS', está última se puede considerar como la proyección de la primera. El ángulo

Fig. XXVI-24.– Para determinar el valor de la iluminación (ley de Lambert).

lo  $\varphi$  que forman  $dS$  y  $dS'$  es igual al que forman la normal con  $r$  por tener el mismo complemento. Si  $d\omega$  es el ángulo sólido bajo el cual se ve  $dS$  desde  $F$ , aplicando que las superficies  $dS'$  y  $d\omega$  son directamente proporcionales a los cuadrados de los radios se obtiene:  $dS'/d\omega = r^2/I^2 \Rightarrow dS' = r^2 d\omega$ , y por sustitución en la anterior:  $dS' = dS \cos \varphi = d\omega r^2 \Rightarrow d\omega = dS \cos \varphi / r^2$ , el flujo luminoso que atraviesa a  $d\omega$  es totalmente recibido por  $dS$ :

$$d\Phi = I d\omega = \frac{I dS \cos \varphi}{r^2} \Rightarrow E = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{I \cos \varphi}{r^2} \quad \text{c.q.d.}$$

### XXVI – 18. Comparación de intensidades. Fotómetros

Para comparar intensidades de dos focos, se hace que éstos iluminen normalmente sendas superficies iguales; modificando la distancia de uno y otro foco, se consigue que las superficies tengan igualdad de iluminación:

$$E = E' \Rightarrow \frac{I}{r^2} = \frac{I'}{r'^2} \Rightarrow \boxed{\frac{I}{I'} = \frac{r^2}{r'^2}} \quad (10)$$

«A igualdad de iluminación, las intensidades de los focos está en razón directa al cuadrado de la distancia a la superficie que iluminan, siempre que los ángulos de incidencia sean iguales».

Medidas las distancias y conocida una de las intensidades, se puede determinar la otra intensidad; en esta propiedad se basan los FOTÓMETROS, aparatos destinados a comparar las intensidades de dos focos luminosos.

En el fotómetro de Lummer-Brodhun (Fig. XXVI-25), la pantalla  $S$  es una capa de yeso o de óxido magnésico, sobre la que se difunde la luz que procede de dos focos  $F$  y  $F'$ , ésta se refleja sobre los prismas de reflexión total  $A$  y  $B$  hacia un cubo  $C$  compuesto por dos prismas también de reflexión total, en los que se ha vaciado, en parte, las superficies de contacto entre ellos. De esta forma la luz que incide sobre la superficie en contacto es transmitida, de modo que el centro del campo visual sólo recibe luz reflejada del lado derecho de la pantalla  $S$ . El resto del campo recibe luz reflejada totalmente, en la parte vaciada y que procede del lado izquierdo de la pantalla. Se modifica convenientemente la distancia de los focos a  $S$ , hasta que el campo visual del observador aparezca con la misma iluminación. Medidas las distancias, la aplicación de (10) conduce al conocimiento de la intensidad luminosa de uno de los focos, si se conoce la del otro.

**PROBLEMAS: 22 al 25.**

## D) EL COLOR

### XXVI – 19. El color

Atribuimos al color la sensación que recibimos cuando nuestro sentido de la vista es excitado por una radiación luminosa no blanca, el cual existe en nuestra mente y no en la realidad material, siendo, por tanto, en gran parte una sensación subjetiva. Decimos que la luz blanca es incolora, no produce sensación de color, siendo nuestro órganos visuales incapaces de hacer un análisis espectral de ella.

El color de la luz emitida por un cuerpo en la oscuridad depende de la longitud de onda de la radiación que, a su vez, es una función de la temperatura (párrafo XXVI-12). Un cuerpo emite radiaciones de muy diversas longitudes de onda, pero para cada temperatura predomina una radiación de máxima energía (radiación por emisión).

Por otro lado, decimos que un objeto tiene un color cuando, con preferencia, refleja o transmite las radiaciones correspondientes a tal color. Un cuerpo es rojo por reflexión o por transparencia cuando absorbe en casi su totalidad, todas las radiaciones menos las rojas, las cuales refleja o se deja atravesar por ellas. Si tal cuerpo rojo, situado en la oscuridad, se ilumina con luz verde, da al ojo la sensación de ser negro.

En consecuencia podemos decir que en general, el color de los cuerpos no es una propiedad intrínseca de ellos, sino que va ligado con la naturaleza de la luz que reciben.

Objetivamente, podemos decir que un color es puro cuando la radiación que lo produce contiene una sola longitud de onda; diremos que es compuesto cuando la radiación que lo produce tiene un espectro de diversas longitudes de onda. Si distintas radiaciones luminosas heterocromáticas (tienen distinta composición espectral) producen la misma sensación de color, diremos que son cromáticamente equivalentes.

Las características que atribuimos al color son tres: la claridad, el matiz o tono y la pureza o grado de saturación. Las dos últimas en conjunto constituyen la cromaticidad de la luz.

La CLARIDAD se refiere a la cantidad de luz. Un mismo objeto puesto al sol o a la sombra en determinadas condiciones se diferencia por su claridad. Un disco blanco a la mitad del cual le da el sol y a la otra mitad la sombra, diremos al compararlas que una mitad es gris. El gris es el color de

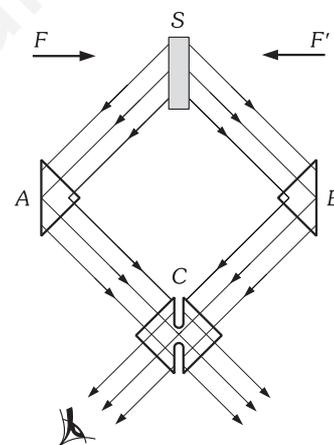


Fig. XXVI-25.– Fotómetro de Lummer-Brodhun.

los cuerpos que no presentan otro atributo que la claridad (son acromáticos). Físicamente, la claridad podemos asociarla con el flujo luminoso de la fuente de luz u otras magnitudes fotométricas ya estudiadas.

El MATIZ o TONO es el atributo por el cual podemos decir que se trata de un color verde, amarillo, ... Físicamente lo relacionamos con la longitud de onda de una luz (longitud de onda dominante). Las luces monocromáticas decimos que son COLORES ESPECTRALES PUROS

PUREZA o GRADO DE SATURACIÓN: supongamos que disponemos de un disco la mitad blanco y la otra mitad gris; enviamos sobre las dos «playas» el mismo flujo de energía de luz roja monocromática; las dos playas aparecerán rojas del mismo tono, pero una más clara que la otra. Disminuyendo el flujo de luz roja que enviamos sobre la playa que inicialmente era blanca (como veremos a continuación la playa blanca absorbe menos energía incidente que la gris), o sea la menos oscura, podemos llegar a igualar las claridad de las dos playas, en este caso también tendrán igual tono (rojo) y aún presentan un aspecto diferente. Esta diferencia es la que llamamos saturación, que es inversa a la proporción de blanco. Si se mezclan dos pinturas, la una gris y la otra de un color rojo espectral puro, obtenemos una serie de colores rojos que se diferencian en su saturación. Al color correspondiente a luces monocromáticas lo llamaremos SATURADO.

**XXVI – 20. Factor de reflexión. Cuerpos blancos y grises**

Para cuantificar el fenómeno de reflexión en los objetos definimos:

«FACTOR DE REFLEXIÓN ( $c_\lambda$ ) para una determinada longitud de onda, es el flujo luminoso reflejado, dividido por el incidente».

$$c_\lambda = \frac{d\Phi_{\lambda R}}{d\Phi_{\lambda I}}$$

el flujo luminoso total reflejado, es decir, para todas las longitudes de onda del espectro visible, será la suma (integral) de cada una de las radiaciones:

$$\Phi_\lambda = \int_0^\infty c_\lambda d\Phi_{\lambda I}$$

para las longitudes de onda fuera del espectro visible, esta integral es nula. Como ya se ha explicado anteriormente tanto  $c_\lambda$  como el flujo luminoso son funciones de  $\lambda$ .

«CUERPO BLANCO PERFECTO (DIFUSOR PERFECTO) es aquel que al recibir radiaciones visibles, las refleja en todas las direcciones, sin absorber energía radiante; su factor de reflexión es la unidad para todas las longitudes de onda del espectro visible».

Al igual que no existe el cuerpo negro perfecto, tampoco existe el blanco perfecto, siempre hay absorción de energía incidente por el cuerpo que la recibe.

Un CUERPO BLANCO REAL, será aquel que tiene el mismo factor de reflexión, muy cercano a la unidad, para todas las longitudes de onda visibles.

Por tanto, un cuerpo blanco refleja luz de la misma composición espectral que la que recibe, puesto que la energía ha disminuido en la misma proporción para todas las longitudes de onda.

Llamamos CUERPOS GRISES (acromáticos) a aquellos en los que el factor de reflexión no es cercano a la unidad. De la definición de cuerpo negro perfecto se deduce que su factor de reflexión es nulo.

Para un cuerpo cualquiera (ni blanco ni gris) el factor de reflexión varía para las diversas longitudes de onda. Las Fig. XXVI-26 y 27 aclaran las ideas expuestas.

En todo el estudio que se realiza a continuación, observaremos los colores de las distintas fuentes de luz sobre un pantalla blanca de reflexión difusa.

**XXVI – 21. Mezcla de colores. Colores primarios**

Proyectamos sobre una pantalla blanca tres haces luminosos monocromáticos de distinto color (Fig. XXVI-28), por variación del flujo radiante incidente podemos obtener una gama de colores diversos.

Fijemos tres haces luminosos monocromáticos de distinto color A, B y C, a los que llamaremos COLORES PRIMARIOS y que cumplen la condición de que cualquiera de ellos no puede ser obtenido por mezcla aditivo de los otros dos (son independientes entre sí); al difundirse en la pantalla blanca veremos los colores puros correspondientes a las radiaciones monocromáticas en las zonas únicamente iluminadas por cada uno de los haces. Pero además aparecen nuevos colores compuestos, mezcla de los anteriores, en las zonas iluminadas por más de un haz. Si llamamos P, al color resultante de A, B y C, podemos escribir simbólicamente  $P = A + B + C$ . Observando la

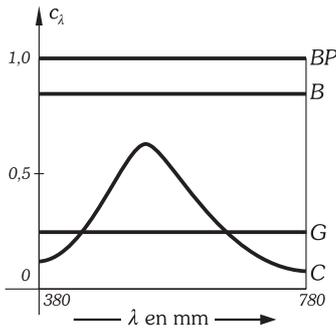


Fig. XXVI-26.- Curva de factores de reflexión para un cuerpo blanco perfecto (BP), para un cuerpo blanco real (B), para un cuerpo determinado (C) y para un cuerpo gris (G), en función de la longitud de onda del espectro visible.

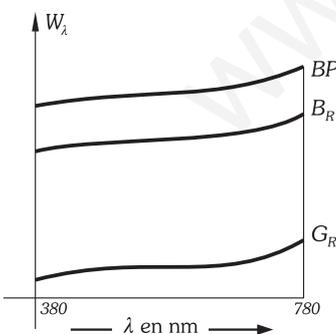
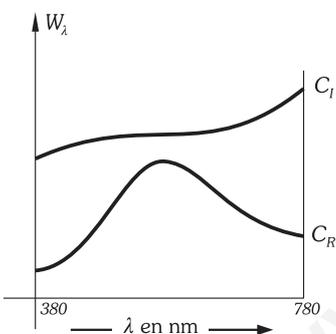


Fig. XXVI-27.- Curvas de energía recibida (subíndice I) y reflejada (subíndice R) para un cuerpo determinado ( $C_I$  y  $C_R$ ), para un cuerpo blanco perfecto para el cual son iguales (BP, para un cuerpo blanco ( $B_R$ ) y para un cuerpo gris ( $G_R$ ); para estos dos últimos sólo se ha dibujado la energía reflejada.

Fig. XXVI-28 obtenemos otros tres  $P'$ ,  $P''$ ,  $P'''$  que verificarán:  $P' = A + B$ ,  $P'' = A + C$  y  $P''' = B + C$ .

Si las iluminaciones que da la pantalla para cada uno de los haces incidentes son:  $L_a$ ,  $L_b$  y  $L_c$ , la luminancia  $L$  para el color  $P$  será:

$$L = L_a + L_b + L_c$$

y se dice que el color  $P$  se ha obtenido por mezcla aditiva de los primarios  $A$ ,  $B$  y  $C$ .

Nunca con tres colores determinados conseguiremos obtener todas las posibles coloraciones, pero sí podemos realizar lo siguiente: sea  $X$  un color, que no puede ser obtenido por la mezcla de los  $A$ ,  $B$  y  $C$  en diversos flujos; añadiendo a  $X$  una determinada «cantidad» de  $A$ , el resultado podrá ser reproducido por  $B$  y  $C$ :  $X + A = B + C$ ; o bien, añadiendo a  $X$  «cantidades» de  $A$  y  $B$  obtenemos el color  $C$ :  $X + A + B = C$ . Traduciendo a iluminancias nos dará que:  $L_x + L_a = L_b + L_c$  ó  $L_x + L_a + L_b = L_c$  respectivamente y para los casos mencionados.

Las cantidades de un color o dos colores que hay que añadir al dado ( $X$ ) para que su mezcla pueda ser reproducida por los demás, se consideran sustractivas. Con tal criterio el color ( $X$ ), podrá ser reproducido por los colores  $A$ ,  $B$  y  $C$  por adición o sustracción de unos u otros.

Generalmente los colores rojo, verde y azul, se suelen tomar como primarios, con ellos y solamente por adición se obtiene la gama más abundante de colores. En TV se toman los llamados  $R$ ,  $G$  y  $B$  cuyas respectivas longitudes de onda son:  $\lambda_R = 610$  nm,  $\lambda_G = 535$  nm y  $\lambda_B = 470$  nm, tomando las intensidades de los haces luminosos adecuadas para que el blanco tricromático (compuesto por los tres primarios) sea azulado, que es el más agradable al ojo.

En 1931 la CIE convino en adoptar tres colores primarios, con el objeto de no tener que utilizar luminancias negativas, que de ahora en adelante representaremos por  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ , definidos respecto a los  $R$ ,  $G$  y  $B$ , por las relaciones:

$$\begin{aligned} X &= 2,7689 R + 1,7519 G + 1,1303 B \\ Y &= R + 4,5909 G + 0,06012 B \\ Z &= 0,0565 G + 5,5944 B \end{aligned}$$

Es de observar que los colores «standard» de la CIE no son observables por el ojo humano, lo cual no tiene importancia, como se comprenderá en el estudio de los párrafos siguientes.

**XXVI - 22. Coeficientes tricromáticos: triángulo cromático.**

**Sensibilidad de los receptores del ojo: factores de conversión**

La suma  $X + Y + Z$  es el flujo de energía recibido por el ojo. Llamaremos COEFICIENTES TRICROMÁTICOS a los valores:

$$x = \frac{X}{X + Y + Z} \quad y = \frac{Y}{X + Y + Z} \quad z = \frac{Z}{X + Y + Z}$$

que nos indican la proporción relativa en que cada color primario de la CIE, contribuye a la sensación total.

Puesto que  $x + y + z = 1$ , se verifica que «el color, en relación con el ojo», queda determinado por dos cantidades independientes, ya que la tercera se puede calcular conocidas las otras dos. Si  $x = 0,5$  e  $y = 0,3$ , necesariamente  $z = 0,2$ , y la proporción en la mezcla de la cantidad de cada color es: 5:3:2.

Para representar un color ( $x = 0,5$ ,  $y = 0,3$ , y por tanto  $z = 0,2$ ) dibujaremos un triángulo rectángulo de catetos iguales a la unidad (Fig. XXVI-29). En uno de ellos (el horizontal en el dibujo) tomaremos a partir de un vértice la magnitud  $x$  ( $0,5$ ), e  $y$  ( $0,3$ ) en el otro; el punto  $P$  nos representa el color que estudiamos:  $z$  queda representado por la distancia en la horizontal, de  $P$  a la hipotenusa (ya que el triángulo  $KMX$  es isósceles y  $KM = MX = 0,3$  por tanto:  $ZM = 0,7$  y  $NM = 0,2 = z$ ).

El vértice  $X$ , representa el color  $X$  puro ( $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ); el  $Y$  a tal color ( $x = 0$ ,  $y = 1$ ,  $z = 0$ ) y lo mismo el  $Z$  ( $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 1$ ).

El baricentro del triángulo cromático  $x = y = z = 1/3$ , significa una excitación uniforme de los receptores del ojo, o sea, blanco.

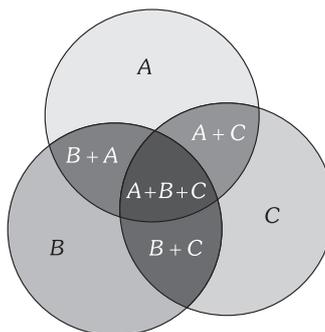


Fig. XXVI-28.- Representación de la proyección sobre una pantalla blanca de la luz emitida por tres focos de distinto color.

VALORES DE CONVERSIÓN			
$\lambda$	$\bar{X}_\lambda$	$\bar{Y}_\lambda = V_\lambda$	$\bar{Z}_\lambda$
380	0.0014	0.0000	0.0065
385	0.0022	0.0001	0.0105
390	0.0042	0.0001	0.0201
395	0.0076	0.0002	0.0362
400	0.0143	0.0004	0.0679
405	0.0232	0.0006	0.1102
410	0.0435	0.0012	0.2074
415	0.0776	0.0022	0.3713
420	0.1344	0.0040	0.6459
425	0.2148	0.0073	1.0391
430	0.2839	0.0116	1.3856
435	0.3285	0.0168	1.6230
440	0.3483	0.0230	1.7471
445	0.3481	0.0298	1.7826
450	0.3362	0.0380	1.7721
455	0.3187	0.0480	1.7441
460	0.2908	0.0600	1.6692
465	0.2511	0.0739	1.5281
470	0.1554	0.0910	1.2876
475	0.1421	0.1126	1.0419
480	0.0956	0.1390	0.8130
485	0.0580	0.1693	0.6162
490	0.0320	0.2080	0.4652
495	0.0147	0.2586	0.3533
500	0.0049	0.3230	0.2720
505	0.0024	0.4073	0.2123
510	0.0093	0.5030	0.1582
515	0.0291	0.6082	0.1117
520	0.0633	0.7100	0.0782
525	0.1096	0.7932	0.0573
530	0.1655	0.8620	0.0422
535	0.2257	0.9149	0.0298
540	0.2904	0.9540	0.0206
545	0.3597	0.9803	0.0134
550	0.4334	0.9950	0.0087
555	0.5121	1.0002	0.0057
560	0.5945	0.9950	0.0039
565	0.6784	0.9786	0.0027
570	0.7621	0.9520	0.0021
575	0.8425	0.9154	0.0018
580	0.9163	0.8700	0.0017
585	0.9786	0.8163	0.0014
590	1.0263	0.7570	0.0011
595	1.0567	0.6949	0.0010
600	1.0622	0.6310	0.0008
605	1.0456	0.5668	0.0006
610	1.0026	0.5030	0.0003
615	0.9384	0.4412	0.0002
620	0.8544	0.3810	0.0002
625	0.7514	0.3210	0.0001
630	0.6424	0.2650	0.0000
635	0.5419	0.2170	0.0000
640	0.4479	0.1750	0.0000
645	0.3608	0.1382	0.0000
650	0.2835	0.1070	0.0000
655	0.2187	0.0816	
660	0.1649	0.0610	
665	0.1212	0.0446	
670	0.0874	0.0320	
675	0.0636	0.0232	
680	0.0468	0.0170	
685	0.0329	0.0119	
690	0.0227	0.0082	
695	0.0158	0.0057	
700	0.0114	0.0041	
705	0.0081	0.0029	
710	0.0058	0.0021	
715	0.0041	0.0015	
720	0.0029	0.0010	
725	0.0020	0.0007	
730	0.0014	0.0005	
735	0.0010	0.0004	
740	0.0007	0.0003	
745	0.0005	0.0002	
750	0.0003	0.0001	
755	0.0002	0.0001	
760	0.0002	0.0001	
765	0.0001	0.0000	
770	0.0001	0.0000	
775	0.0000	0.0000	0,0000

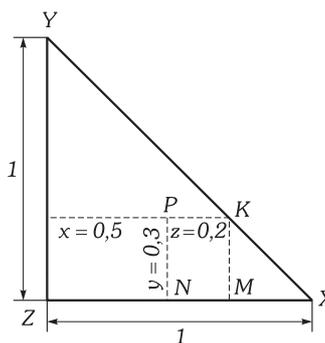


Fig. XXVI-29.- Triángulo cromático.

Los puntos de los lados XZ ( $y = 0$ ), YZ ( $x = 0$ ) y XY ( $z = 0$ ) representan los colores obtenidos por las mezclas en distintas proporciones de los componentes que las letras indican.

Todos los puntos de color están en el triángulo cromático, aunque, como estudiaremos más adelante, no todos los puntos del triángulo son puntos reales de color.

Vamos a repetir una experiencia parecida a la que se hizo en el párrafo 14 de este capítulo para la obtención de las sensibilidades relativas  $V_\lambda$  de las luces de longitud de onda del espectro visible para un ojo normal medio. Para lo cual proyectamos un flujo radiante unidad, de una longitud de onda determinada, sobre la mitad de una pantalla y sobre la otra mitad, se iguala por mezcla de los tres colores primarios X, Y y Z; las tres componentes determinadas con esta experiencia  $\bar{X}_\lambda$ ,  $\bar{Y}_\lambda$  y  $\bar{Z}_\lambda$ , se llaman VALORES DE CONVERSIÓN o VALORES TRIESTÍMULO de dicha luz. En la Fig. XXVI-30 representamos las curvas obtenidas por la CIE y se denominan *curvas de sensibilidad espectral del observador colorimétrico patrón*; los valores de sus ordenadas son los de la tabla adjunta. Así por ejemplo, para obtener una luz análoga a la de 650 nm, deben estar presentes los colores X e Y en la proporción que indica su ordenada (0,2 835 : 0,1 070 es decir 567 : 214); el gráfico nos indica la no intervención del color Z en tal luz de 650 nm.

Obsérvese que prácticamente, los valores de  $\bar{Y}_\lambda$  de la luz correspondiente al primario Y para el que el máximo de igualdad de color se hace prácticamente igual a la unidad para  $\lambda = 600$  nm, son iguales a los de las luminisidades relativas  $V_\lambda$  a la que el máximo de valor 1 le correspondía  $\lambda = 555$  nm.

**XXVI - 23. Diagrama cromático. Luces complementarias**

Para que un punto del lado horizontal del triángulo cromático sea de color, es necesario que  $\bar{Y}$  sea igual a cero y, por tanto, que todos los valores de conversión ( $\bar{Y}$ ) del receptor de tal color sean nulos; como esto no ocurre (en la XXVI-30 se observa que las curvas de los valores  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$  se extienden hasta el límite superior de longitud de onda visible, 720 nm prácticamente), ninguno de los puntos del eje horizontal es de color real; lo mismo ocurre con el eje vertical, ya que los valores  $\bar{X}$  de conversión nunca son nulos. Sin embargo los valores  $\bar{Z}$  de conversión son nulos para una gran parte del espectro (de unos 550 nm en adelante), por lo tanto una gran parte de la hipotenusa del triángulo cromático está constituida por puntos de color.

En la Fig. XXVI-31 la zona no sombreada contiene todos los puntos posibles de color. Los puntos correspondientes a las luces espectrales están localizados en los contornos de tal zona, excepto en su base recta. A tal curva se llama «LUGAR GEOMÉTRICO ESPECTRAL». (Los números que corresponden a los diversos puntos indican la longitud de onda en nm). La base recta de la «lengua» se llama LÍNEA PÚRPURA (VR).

Supongamos dos fuentes de luz cuyos colores están representados por los puntos  $P_1$  y  $P_2$ . El color resultante de su mezcla ( $P$ ), está en el segmento recto que une  $P_1$  con  $P_2$ . Cuanto más próximo esté a  $P_1$  más cantidad de luz de esta última fuente hará falta para reproducir  $P$ .

Las mezclas de colores espectrales están localizadas en el segmento que une sus puntos de color ( $Q_1Q_2$ ), dando como resultado el Q, por ejemplo, si las cantidades de los componentes están en las proporciones adecuadas.

Como ya se ha dicho, *el baricentro del triángulo cromático se llama PUNTO BLANCO (E) y resulta de componer los mismos flujos energéticos de las tres luces primarias de la CIE:  $x = y = z = 1/3 \Rightarrow X/(X + Y + Z) = Y/(X + Y + Z) = Z/(X + Y + Z) = 1/3$ .*

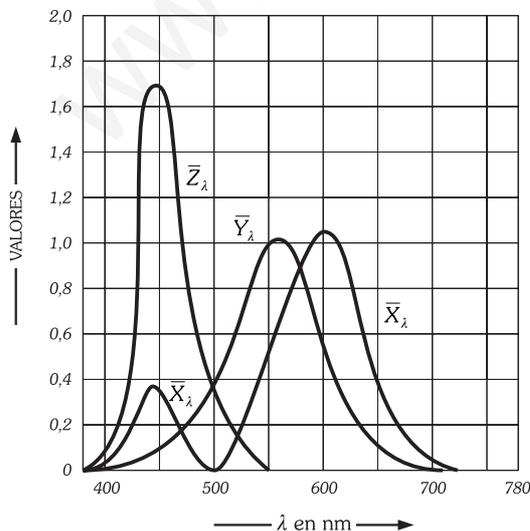


Fig. XXVI-30.- Curvas de sensibilidad espectral del observador colorimétrico patrón (CIE 1931).

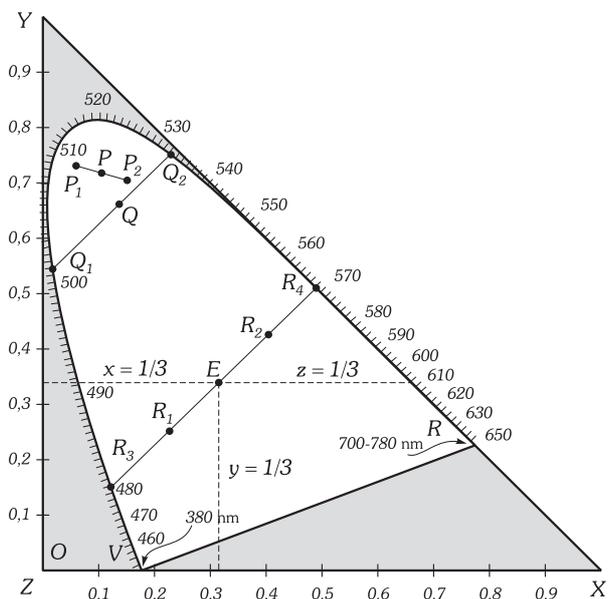


Fig. XXVI-31.- Lugar geométrico espectral.

LUCE COMPLEMENTARIAS son aquellas cuya mezcla tiene como punto de color al punto blanco. Existe un número infinito de parejas de luces complementarias, todas aquellas cuyos puntos de color están localizados en los extremos de un segmento que pasa por el punto  $E$  y está situado dentro del área del diagrama cromático; por ejemplo: las luces cuyos puntos de color son  $R_1$  y  $R_2$ .

Si los puntos extremos del segmento están situados en el «lugar geométrico espectral», éstos representan «luces complementarias espectrales» ( $R_3$  y  $R_4$ ).

Uniendo el punto de color  $V$  (violeta de mínima longitud de onda visible), con el punto blanco ( $E$ ) (Fig. XXVI-32), obtenemos el color espectral  $C_V$ , complementario de tal violeta. Así mismo uniendo el punto  $R$  (rojo de máxima longitud de onda visible) con el blanco ( $E$ ), obtenemos  $C_R$ , complementario de tal rojo.

Es imposible encontrar un color espectral complementario a los localizados en el segmento curvo  $C_R M' C_V$ , ya que el segmento que pasa por  $M'$  y  $E$ , no corta al lugar geométrico espectral, sino a la línea púrpura  $VR$ , en la cual no hay localizados colores espectrales.

**XXVI – 24. Longitud de onda dominante. Pureza y grado de saturación de un color. Colores púrpuras y magentas**

Consideremos el punto de color  $P$  (Fig. XXVI-32) y unámoslo con  $E$  (punto blanco). El color  $P$  puede ser reproducido por luz incolora ( $E$ ) y la espectral  $P_1$ , en proporciones adecuadas. La longitud de onda correspondiente a  $P_1$ , la llamamos *dominante del color  $P$* .

LONGITUD DE ONDA DOMINANTE de una fuente de luz, es la longitud de onda de la luz espectral que mezclada con la incolora nos reproduce la emitida por el foco.

Al cociente  $PE/P_1E$  se le llama PUREZA o GRADO DE SATURACIÓN del color  $P$ . Cuanto más cerca esté al punto de color del componente espectral que corresponde a la longitud de onda dominante, mayor es su pureza.

La pureza de  $P_1$  es la unidad; la del punto blanco ( $E$ ), cero; los demás puntos del segmento recto  $P_1E$  tienen purezas comprendidas entre uno y cero.

Las fuentes luminosas cuyos puntos de color están localizadas en el triángulo  $EVR$  (punto  $M$  de la Fig. XXVI-32) se llaman PÚRPURAS o MAGENTAS, las cuales no pueden ser reproducidas por luz blanca y una espectral). En tales colores se llama LONGITUD DE ONDA DOMINANTE, a la espectral ( $M'$ ) que indica el segmento que parte del punto púrpura y pasa por el blanco\*. Un color púrpura no puede ser reproducido por luz blanca y otra espectral ya que su punto representativo es exterior al segmento recto que une los puntos de tales luces.

PUREZA O GRADO DE SATURACIÓN DE UN COLOR PÚRPURA es el cociente  $ME/M''E$ .

La pureza de  $M''$  (en la línea púrpura) es la unidad, la del punto blanco, es cero; los demás puntos de color del segmento  $M''E$  tienen purezas comprendidas entre uno y cero.

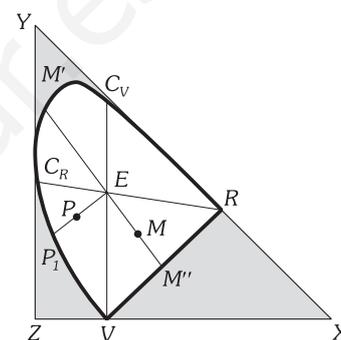


Fig. XXVI-32.- Lugar geométrico espectral.

**E) INTERFERENCIAS LUMINOSAS**

**XXVI – 25. Interferencias luminosas**

Lo estudiado en el capítulo XVII es totalmente válido para las ondas electromagnéticas; en particular analicemos, otra vez, la segunda condición de coherencia entre las ondas que producen figuras de interferencia estables en un determinado lugar (párrafo XVII-16); en óptica hemos de considerar que la luz se produce por un mecanismo interior del átomo, en el que se emite energía radiante con un constante cambio de fase. Pudiéramos darnos una idea del fenómeno considerando un foco puntual emisor  $F$  (Fig. XXVI-33), que en el instante 1, emite ondas 1; al instante 2, extraordinariamente próximo al anterior (del orden de  $10^{-15}$  s), emite ondas 2, etc. Otro foco productor de luz análoga emite ondas idénticas pero cuyos cambios de fase no concuerdan con los anteriores. En consecuencia, si los dos focos iluminan a un punto de una pantalla, en él se producirán, en ocasiones, máximos, en otras mínimos y en las más, iluminaciones intermedias, cualquiera que sea la diferencia de caminos recorridos por las luces; la persistencia de las imágenes en la retina hace que veamos todos los puntos de la pantalla con una luminosidad media. Es decir, dos focos independientes, por ejemplo dos lámparas eléctricas, no pueden servir para observar figuras de interferencia estables.

Los fenómenos de interferencia únicamente se podrán observar, si los focos son coherentes, es decir, que toda variación en la fase de emisión que experimenta uno de los focos, la experimenta idénticamente el segundo.

Teniendo en cuenta el carácter electromagnético de la luz, dos haces luminosos o trenes de onda producirán en un determinado lugar figuras de interferencia observables, a las que corresponden refuerzos (interferencia constructiva) o debilitaciones (interferencia destructiva) del campo

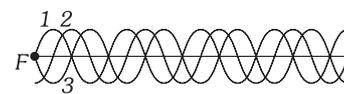


Fig. XXVI-33.- Foco emisor de luz.

\* Obsérvese la diferencia con la longitud de onda dominante en los demás colores, ya que el segmento que la determina, parte del punto blanco y pasa por el del color en estudio; en los púrpuras parte del punto de color y pasa por el blanco.

eléctrico y del campo magnético, cuando las condiciones de interferencia se verifiquen en uno cualquiera de ellos. Supongamos que si los campos eléctricos que corresponden a cada una de las dos ondas monocromáticas de la misma frecuencia corresponden en un punto  $P$  distante  $r_1$  y  $r_2$  de los focos emisores, a las ecuaciones:

$$E_1 = A_0 \text{ sen } (\omega t - kr_1 + \varphi_1) \quad E_2 = A_0 \text{ sen } (\omega t - kr_2 + \varphi_2)$$

en las que hemos puesto la misma amplitud por dos razones: la primera es que esta condición se comprende, si se desea que la figura de interferencias presente un buen contraste, pues, de no ser iguales, no existirá mínimo nulo para la intensidad; y la segunda es que todos los dispositivos experimentales que vamos a utilizar implican esta condición. Entonces, y siguiendo un procedimiento análogo al empleado en el párrafo XVII-17, obtenemos para la amplitud resultante el valor:

$$A = 2A_0 \cos \left( \pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right)$$

si  $\varphi_1 - \varphi_2 = \text{cte}$ , o como se consigue en los dispositivos experimentales que vamos a manejar,  $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ , es decir, los focos emisores son coherentes, entonces:

$$A_r = 2A_0 \cos \pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda}$$

El valor de la intensidad en estas condiciones será (párrafo XVII-20, con  $I_1 = I_2 = I_0$ ):

$$I_r = 2I_0 \left( 1 + \cos 2\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda} \right) \quad (11)$$

que se hará máxima (concordancia de fase) cuando:  $r_1 - r_2 = K\lambda$  y será mínima nula (oposición de fase), o lo que es lo mismo oscuridad, cuando:  $r_1 - r_2 = (2K + 1) \lambda/2$ , con  $K \in Z$ . En resumen:

Para que al superponerse dos ondas electromagnéticas produzcan figuras de interferencia estables, es necesario que se cumplan las siguientes condiciones: 1) Que tengan la misma frecuencia y amplitud. 2) Que sean coherentes. 3) Que los vectores campo eléctrico de ambas sean paralelos. 4) Que las dos ondas que se superponen tengan la misma longitud de onda (sean monocromáticas).

Esta última condición no implica que los haces de luz (trenes de onda) tengan que ser monocromáticos, puesto que en cualquier caso emiten ondas electromagnéticas comprendidas dentro de un determinado intervalo de longitudes de onda del espectro; lo que sí ocurre es que las ondas en interacción, tienen que tener la misma longitud de onda por parejas para producir el fenómeno de interferencias. Sin embargo diremos en adelante que empleamos fuentes monocromáticas para mayor sencillez en el estudio, aunque como se verá, la luz blanca también produce figuras de interferencia estables.

**XXVI - 26. Dispositivos clásicos para la producción de focos coherentes**

**ESPEJOS DE FRESNEL.**— dos espejos formando un ángulo muy próximo a  $180^\circ$ , son iluminados por un foco puntual  $F$  (Fig. XXVI-34), que forma en uno de ellos la imagen  $F_1$  y en el otro la  $F_2$ . Los focos  $F_1$  y  $F_2$  son coherentes, ya que son imágenes de un mismo foco.

En un punto  $P$  de una pantalla, iluminada a la vez por  $F_1$  y  $F_2$  (trayectorias reales de la luz  $FOP$  y  $FO'P$ ), se formarán máximo o mínimo según que:  $F_1P - F_2P = K\lambda$ , o que:  $F_1P - F_2P = (2K + 1) \lambda/2$ . En la pantalla aparecen las franjas de interferencia en forma de hipérbolas y si la pantalla está muy lejana, son rectas paralelas.

**DISPOSITIVO DE YOUNG.**— Iluminando con una luz monocromática un orificio pequeño practicado en una superficie opaca (Fig. XXVI-35), se transforma por difracción en un foco emisor de luz en todas las direcciones. Los rayos emitidos iluminan otros dos pequeños orificios que, funcionando como focos emisores  $F_1$  y  $F_2$ , producen interferencias luminosas en la parte común de sus conos de luz, obediendo la formación de máximos y mínimos a las fórmulas anteriores.

**BIPRISMA DE FRESNEL.**— Este dispositivo está formado por un biprisma como se indica en la Fig. XXVI-36; del foco  $F$  el biprisma forma dos imágenes virtuales  $F_1$  y  $F_2$  que pueden ser consideradas como focos coherentes y que en la zona común producen interferencias.

**BILENTE DE BILLET.**— Consiste en una lente delgada convergente, que se ha dividido en dos por su plano diametral, separándose ligeramente ambas mitades, rellenándose el espacio de separación con un material opaco; las dos semilentes forman del foco  $F$ , dos imágenes reales  $F_1$  y  $F_2$  (Fig. XXVI-37) que actúan de focos productores de haces coherentes produciendo interferencias en su zona común.

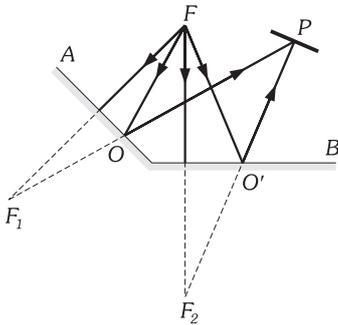


Fig. XXVI-34.— Espejos de Fresnel.

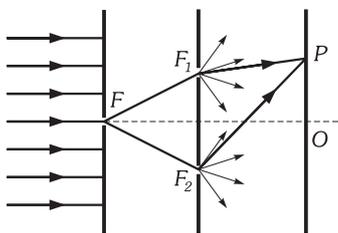


Fig. XXVI-35.— Rendijas de Young.

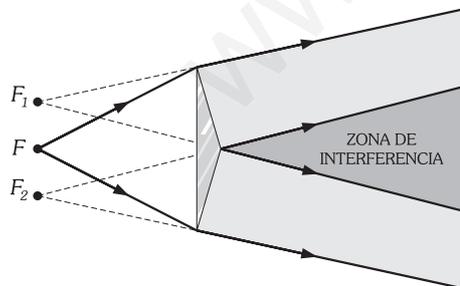


Fig. XXVI-36.— Biprisma de Fresnel.

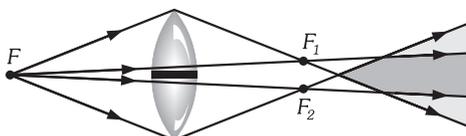


Fig. XXVI-37.— Bilenite de Billet.

**XXVI - 27. Distribución de las franjas de interferencias**

Si  $F_1$  y  $F_2$  (Fig. XXVI-38) son los dos focos coherentes que distan entre sí  $d$ , y la distancia entre el centro de  $F_1F_2$  a la pantalla es  $l$ , en el punto  $O$ , equidistante de los focos, se produce un máximo de luz. Un punto  $P$  de la pantalla, a distancia  $x$  del centro  $O$ , está iluminado por los rayos  $F_1P = r_1$  y  $F_2P = r_2$ , cuya diferencia de caminos ópticos (considerando la propagación en el aire), es  $F_1L$  ( $F_2L$  es el arco trazado desde  $P$  como centro, y  $F_2P$  como radio). Considerando  $F_1F_2L$  como un triángulo rectángulo se tiene:  $r_1 - r_2 = F_1L = d \sin \angle F_1F_2L$ , pero el ángulo  $\angle F_1F_2L$  es sensiblemente igual a  $\varphi$ , si se considera  $d$  muy pequeño en comparación con la distancia  $l$ , entonces:  $r_1 - r_2 = d \sin \varphi$ .

Confundiendo el seno con la tangente, por la pequeñez del ángulo  $\varphi$ , entonces:  $r_1 - r_2 = dx/l$ , y en el punto  $P$  se formará máximo o mínimo de intensidad según que:

$$d \frac{x}{l} = K\lambda \quad \text{ó} \quad d \frac{x}{l} = (2K + 1) \frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{\max} = K\lambda \frac{l}{d}} \quad \boxed{x_{\min} = (2K + 1) \frac{\lambda}{2} \frac{l}{d}}$$

La distancia entre dos máximos consecutivos es:  $(K + 1) \lambda \frac{l}{d} - K\lambda \frac{l}{d} = \lambda \frac{l}{d}$

La distancia entre dos mínimos consecutivos es:  $(2K + 1) \frac{\lambda}{2} \frac{l}{d} - (2K - 1) \frac{\lambda}{2} \frac{l}{d} = \lambda \frac{l}{d}$

La distancia entre máximo y mínimo consecutivo es:  $K\lambda \frac{l}{d} - (2K - 1) \frac{\lambda}{2} \frac{l}{d} = \frac{\lambda}{2} \frac{l}{d}$

Lo que prueba que los máximos son equidistantes; los mínimos son equidistantes; y los mínimos están intercalados en medio de los máximos.

Si en la expresión de la intensidad (11), hacemos  $r_1 - r_2 = dx/l$ , y tenemos en cuenta la relación trigonométrica  $\cos^2 \alpha = (1 + \cos 2\alpha)/2$ , obtenemos que el valor de la intensidad resultante  $I$ , en cualquier punto  $P$ , distante  $x$  de  $O$ , será:

$$I = 2I_0 \left( 1 + \cos 2\pi \frac{xd}{l\lambda} \right) = 4I_0 \cos^2 \frac{\pi xd}{l\lambda}$$

en los puntos para los que es máxima:  $I_{\max} = 4I_0$  en los puntos en los que hay oscuridad:  $I_{\min} = 0$ . La Fig. XXVI-38 es la representación gráfica de la expresión anterior.

Si el dispositivo utilizado en la producción de las figuras de interferencia es el de Young para crear haces de luz coherente, en el que en lugar de orificios se han utilizado rendijas estrechas paralelas entre sí, entonces las figuras obtenidas son las representadas en la Fig. XXVI-38 inferior.

**XXVI - 28. Interferencias con luz blanca**

Para una determinada longitud de onda, la distancia del centro de la pantalla a un máximo es:  $x_{\max} = K\lambda l/d$ . Si la luz no es monocromática, cada componente monocromática da un conjunto de franjas de interferencia; éstas se encuentran desplazadas, unas con relación a otras, proporcionalmente a las longitudes de onda. Solamente es común la franja central ( $K = 0$ ), teniendo ésta el color de luz incidente.

Si la luz empleada es blanca en cada franja de máximo, están más lejos del centro las radiaciones rojas que las violeta, puesto que:  $\lambda_{\text{roja}} > \lambda_{\text{violeta}}$ , produciéndose en la pantalla un espectro, y en el centro de ella una franja de luz blanca. Antes de finalizar un espectro, comienza el de orden siguiente, superponiéndose colores que producen iluminaciones compuestas.

**PROBLEMAS: 26 al 30.**

**XXVI - 29. Interferencias en láminas delgadas por incidencia normal**

Un rayo de luz  $I$  (Fig. XXVI-39) que ilumina normalmente a una lámina delgada, puede recorrer los siguientes trayectos:

- 1) Reflejarse en la primera cara. (Trayecto  $IAR_1$ ).
- 2) Penetrar por la primera cara y reflejarse en la segunda, atravesando en sentido inverso la primera cara. (Trayecto  $IABCR_2$ ).  
Los rayos emergentes  $AR_1$  y  $AR_2$  coinciden, ya que se ha supuesto la iluminación normal. (El dibujo se ha hecho con iluminación oblicua, para poder ver los rayos claramente). La diferencia geométrica de caminos entre los rayos emergentes es  $ABC$ , es decir  $2e$  ( $e$  = espesor de la lámina). La diferencia de caminos ópticos es  $2en$ .
- 3) Atravesar la primera y la segunda cara. (Trayecto  $IABT_1$ ).
- 4) Atravesar la primera, reflejarse en la segunda, y en la primera, y atravesar por último la segunda. (Trayecto  $IABCDT_2$ ).

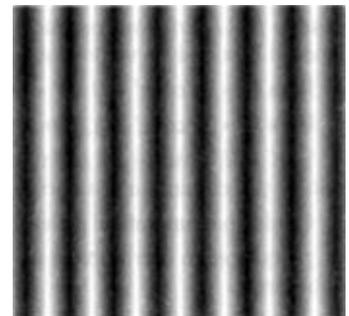
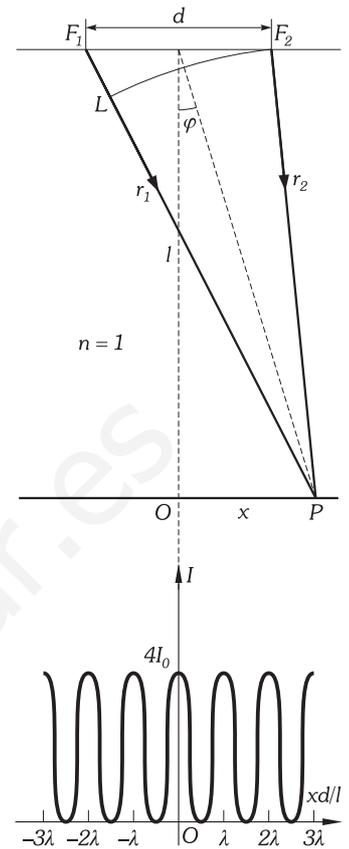


Fig. XXVI-38.- Distribución de las franjas de interferencia. Modelo de interferencia con las rendijas de Young.

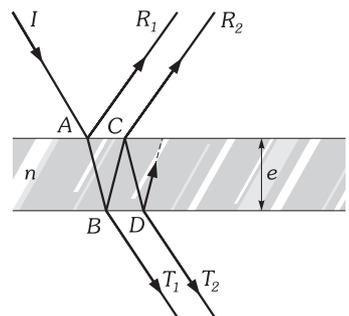


Fig. XXVI-39.- Hemos inclinado los rayos para facilitar la explicación, pero se supone incidencia normal.

La diferencia de caminos ópticos de los rayos emergentes por la segunda cara es, pues  $(ABC)n$ , es decir  $2en$ . Se forma máximo o mínimo entre estos últimos rayos si (interferencia observada por refracción):

$$2en = K\lambda \quad \text{ó} \quad 2en = (2K + 1) \frac{\lambda}{2}$$

Según vimos en el párrafo XVII-26, al incidir una onda plana en dirección normal a la superficie de separación de dos medios, si el segundo medio es más denso que el primero la onda reflejada está en oposición de fase con la incidente, sufre un desfase de  $\pi$  radianes. Para la luz enunciamos:

«La luz al reflejarse en un medio de más refringencia que aquél en que se propaga sufre un desfase de  $\pi$  radianes, o lo que es lo mismo pierde en su marcha  $\lambda/2$ ».

En consecuencia si la observación se hace por reflexión (rayo  $AR_1$  y  $CR_2$ ) las condiciones de máximo y mínimo, son las de mínimo y máximo por refracción.

Así el rayo  $IAR_1$  ha perdido  $\lambda/2$  (suponiendo el índice de refracción de la lámina mayor que el del medio exterior) pero en el  $IABCR_2$  no ha habido pérdida alguna, pues la única reflexión efectuada es en un medio menos refringente que el de la propagación.

Si se cumple la condición de máximo por reflexión, la lámina se verá iluminada por reflexión y oscura por transparencia.

Si la iluminación se hace con luz blanca, unos colores producirán máximo por reflexión y mínimo por refracción, otros inversamente, y otros no cumpliendo las condiciones establecidas, luminosidades intermedias. Las láminas se verán, por lo tanto, coloreadas. (Coloración de capas de aceite muy delgadas, pompas de jabón, etc.).

**PROBLEMAS: 31 al 37.**

**XXVI – 30. Colores en láminas en ángulo**

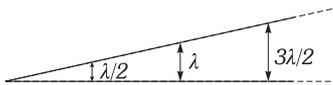


Fig. XXVI-40.- Láminas en ángulo.

Si iluminamos normalmente con luz monocromática dos láminas de vidrio que forman un pequeño ángulo (Fig. XXVI-40), por ejemplo, apoyadas por una arista y separadas en la opuesta por un papel intercalado entre ellas, se observan en los lugares en que  $e = K\lambda/2n$  máximos de refracción y mínimos de reflexión paralelos a la arista común, en la que se observa máximo por refracción y oscuridad por reflexión. Si la luz es blanca, los máximos por refracción de las radiaciones rojas se forman más alejados del vértice que los violetas, viéndose por lo tanto las láminas coloreadas (coloración de las alas de moscas, mosquitos, etc.).

**XXVI – 31. Anillos de Newton**

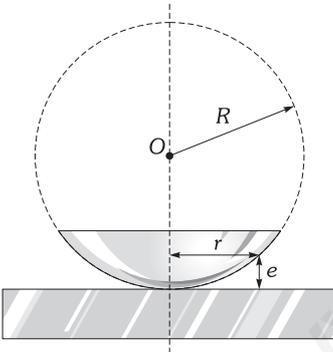


Fig. XXVI-41.- Lente planoconvexa apoyada en una placa de vidrio.

Apoyando en una placa de vidrio una lente plano convexa (Fig. XXVI-41) se forma una cuña de aire ( $n = 1$ ) de espesor variable. Las bandas de interferencia que se observan por reflexión o refracción son circunferencias cuyo centro común está en el eje de la lente, ya que en todos los puntos a distancia  $r$  del eje, y alrededor de éste, tiene la cuña de aire el mismo espesor.

El radio  $r$  de una circunferencia de máximo, observada por refracción, se calcula teniendo en cuenta que  $r$  es la altura sobre la hipotenusa ( $2R$ ) de un triángulo rectángulo:  $r^2 = e(2R - e)$  y siendo:  $e = K\lambda/2$ , obtenemos:

$$r^2 = K \frac{\lambda}{2} \left( 2R - K \frac{\lambda}{2} \right) = K \left( \lambda R - K \frac{\lambda^2}{4} \right) = K\lambda R$$

ya que el elevar al cuadrado a  $\lambda$ , se hace despreciable frente al minuendo del paréntesis.

**XXVI – 32. Interferencias en láminas por incidencia oblicua**

Supongamos una lámina plano-paralela  $ABCD$ , cuyo índice de refracción es  $n$ , para una luz monocromática que llega a ella con el ángulo de incidencia  $\varepsilon$ ; uno de los rayos en parte se refleja ( $S_1R$ ) y en parte se refracta ( $S_1S_2$ ) formando con la normal un ángulo  $\varepsilon'$ . Si el medio de donde viene la luz a la lámina es aire, se verificará:  $\text{sen } \varepsilon = n \text{ sen } \varepsilon'$ .

En la cara  $CD$ , el rayo que llega, en parte se refleja y en parte se refracta y así sucesivamente, obteniéndose por reflexiones y refracciones combinadas, una serie de rayos paralelos entre sí, como los indicados en la Fig. XXVI-43. Recibidos en una lente convergente  $L$ , se reúnen en un punto  $P'$  de su plano focal.

La diferencia de caminos ópticos entre los rayos emergentes ( $S_2T$  y  $S_2'T'$ ), la obtenemos considerando que en el punto  $S_2$ , es donde se ha dividido  $S_1S_2$  en dos rayos, uno de ellos recorre más que el otro el camino  $S_2S_1S_2' = 2S_1S_2'$  dentro de la lámina, y el  $S_2T$  recorre más que el otro en el aire el camino  $S_2E$ . La diferencia de caminos ópticos es:

$$d = n2S_1S_2' - S_2E = 2 \frac{ne}{\cos \varepsilon'} - S_2S_2' \text{ sen } \varepsilon = 2n \frac{e}{\cos \varepsilon'} - 2e \text{ tg } \varepsilon' n \text{ sen } \varepsilon' =$$



Fig. XXVI-42.- Anillos de Newton observados por reflexión.

$$= 2ne \left[ \frac{1}{\cos \varepsilon'} - \frac{\text{sen}^2 \varepsilon'}{\cos \varepsilon'} \right] = 2ne \frac{1 - \text{sen}^2 \varepsilon'}{\cos \varepsilon'} \Rightarrow d = 2ne \cos \varepsilon'$$

Si se verifica que:  $2ne \cos \varepsilon' = K\lambda$  ó  $2ne \cos \varepsilon' = (2K + 1) \frac{\lambda}{2}$

obtenemos en el punto  $P'$ , máximo o mínimo de intensidad luminosa.

Hay que hacer observar que si los rayos recogidos por la lente son los de la serie  $S_1R, S_1'R,$  etc., la condición primera es la de mínimo y la segunda la de máximo, debido al fenómeno ya descrito en el párrafo 29 de este capítulo.

Aunque llegasen a la lámina rayos con la misma inclinación procedentes de otro punto de un foco luminoso, el fenómeno sería el mismo ya que tales rayos, después de atravesar la lámina, se reúnen en el mismo punto  $P'$  del plano focal, y siendo las mismas condiciones de máximo y mínimo no harían más que reforzar aquél o colaborar a la oscuridad de éste.

Si nos imaginamos todos los rayos procedentes del punto  $P$  (Fig. XXVI-44) y que llegan con la inclinación adecuada [ $\cos \varepsilon' = K\lambda/2en$ ] para producir máximo, obtendremos en el plano focal de  $L$  una circunferencia luminosa. Dando a  $K$  sucesivos valores obtendremos diversas circunferencias luminosas en el plano focal.

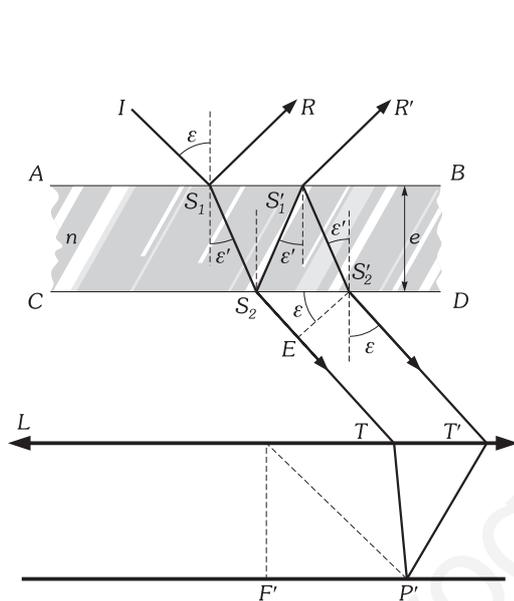


Fig. XXVI-43.- Interferencias en láminas con incidencia oblicua.

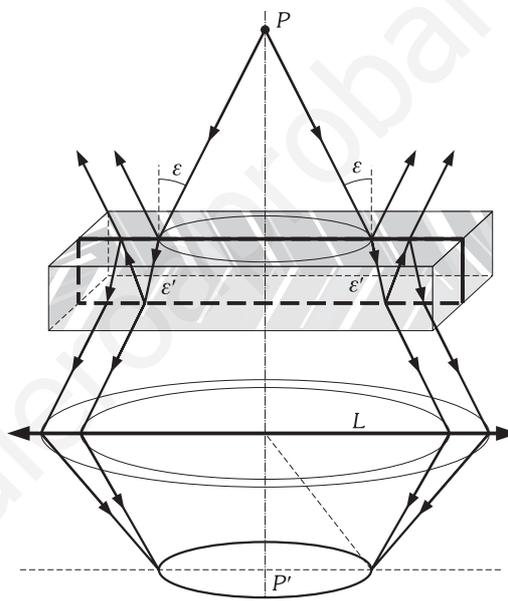


Fig. XXVI-44.- Anillos de interferencias en láminas.

Para  $K = 0, \cos \varepsilon' = 0 \Rightarrow \varepsilon' = 90^\circ$  y el máximo está localizado en el infinito.

Para  $K = 1, \cos \varepsilon' = \lambda/2en.$

Si  $K = 2, \cos \varepsilon' = 2\lambda/2en;$  al ser el coseno mayor que en el caso anterior el ángulo (siempre agudo) es menor, y la circunferencia correspondiente a  $K = 2$  es de menor radio que la producida al ser  $K = 1.$

Conforme aumenta el orden del máximo, el radio de su circunferencia disminuye.

¿A qué orden corresponde un punto luminoso producido en el foco de la lente? Al ser  $\varepsilon' = 0 \Rightarrow \cos \varepsilon' = 1,$  y por tanto:

$$K\lambda = 2en \Rightarrow K = \frac{2en}{\lambda}$$

$K$  nos representa el número de máximos producidos.

¿Cuánto deberíamos aumentar el espesor de la lámina para producir un máximo más?

$$K + 1 = \frac{2(e + \Delta e)n}{\lambda}$$

Por diferencia de las anteriores obtenemos:  $1 = \frac{2\Delta e n}{\lambda} \Rightarrow \Delta e = \frac{\lambda}{2n}$

En el caso de ser «una lámina de aire» ( $n = 1$ ) el incremento de su espesor para aumentar en uno el número de circunferencias de máximo, es:

$$\Delta e \approx \frac{\lambda}{2}$$

En estos resultados obtenidos se basa el interferómetro de Michelson, que se describe a continuación.

**XXVI – 33. Interferómetro de Michelson**

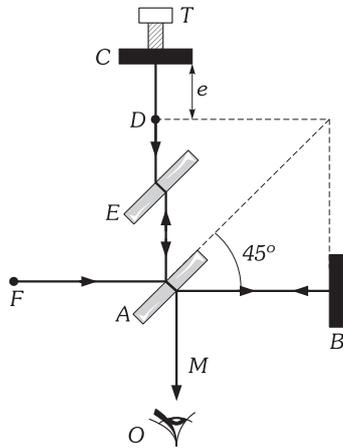


Fig. XXVI-45.- Interferómetro de Michelson.

Un foco *F*, prácticamente puntual (Fig. XXVI-45), emite luz monocromática, que incide sobre la cara *semiplataada* (*A*) de una lámina plano paralela que forma un ángulo de 45° con la luz incidente; aproximadamente la mitad del haz se refleja y la otra mitad se refracta, incidiendo ambos haces sobre los espejos planos *B* y *C*, colocados en la forma de la figura. Los rayos reflejados retornan por un camino inverso y forman un solo haz emergente *M* que percibe el observador *O*.

La «lámina compensadora» *E*, de igual espesor que la *A*, sirve para que los dos rayos recorran el mismo camino dentro del vidrio. Los haces *ACA* y *ABA* son capaces de interferir ya que proceden sus rayos del mismo foco puntual *F*.

El sistema descrito equivale a provocar interferencias en una lámina plano-paralela de aire de espesor  $CD = e$  y, por tanto observaremos las circunferencias descritas en el párrafo anterior. Un tornillo micrométrico *T* permite aumentar o disminuir el espesor de *e*; cuando el desplazamiento es  $\lambda/2$  surge o desaparece un brote luminoso por el centro de las circunferencias observadas. Si hemos hecho aparecer *N* brotes y el desplazamiento del espejo *C* es *l*, plantemos la siguiente proporción:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si a } N \text{ brotes corresponde un desplazamiento } l, \\ \text{a } 1 \text{ brote corresponde un desplazamiento } \frac{\lambda}{2} \end{array} \right| \Rightarrow \lambda = \frac{2l}{N}$$

con lo que queda determinada la longitud de onda de la luz. Si *e* es muy pequeño y las superficies *C* y *B* no son perfectamente perpendiculares, se observarán las franjas de interferencias correspondientes a láminas delgadas en ángulo.

**PROBLEMAS: 38 al 42.**

**F) DIFRACCIÓN DE LA LUZ**

**XXVI – 34. Difracción**

Como ya dijimos en el párrafo XVII-23, la característica principal de la DIFRACCIÓN es el cambio de dirección que experimenta una onda, en este caso la luz, cuando es obstruida de alguna manera. El análisis de este fenómeno se realiza aplicando el principio de Huygens-Fresnel.

Los fenómenos de difracción se estudian, generalmente, iluminando los orificios que los motivan con un haz de rayos paralelos entre sí. La pantalla de observación se encuentra muy alejada, o se coloca una lente convergente detrás de la rejilla para focalizar los rayos paralelos sobre la pantalla; a los modelos de difracción así obtenidos se les llama de FRAUNHOFER. Si el foco productor de luz, o el foco y su imagen se encuentran a distancias infinitas se originan los fenómenos de FRESNEL. Existe una pequeña diferencia o ninguna entre este fenómeno y el de interferencias, ambos son producidos por superposición de ondas coherentes.

**XXVI – 35. Difracción de Fraunhofer en una rendija y en un orificio circular**

Supongamos un haz de rayos paralelos procedentes de un foco puntual *F* y que llegan a una estrecha rendija de abertura *d* (Fig. XXVI-46). Al sufrir el fenómeno de difracción los rayos adquieren una diferencia de camino óptico, que entre *1'* y *2'* es:

$$\Delta = nMN \text{ sen } \varphi$$

siendo *n* el índice de refracción del medio existente tras la rendija. Si esta diferencia es  $\lambda/2$  ( $nMN \text{ sen } \varphi = \lambda/2$ ) los rayos *1'* y *2'* al reunirse en el punto *P* de la pantalla formarán un mínimo nulo de intensidad (oscuridad). Como cada rayo del haz *1'2'* encontrará en *P'* a su anulador del haz *2'3'*, el resultado de la interferencia en tales haces es la oscuridad. Lo mismo ocurrirá con los haces *3'4'* y *4'5'*, etc. Si *MN* está contenido un número par de veces en la anchura *d* de la rendija ( $d = 2KMN$ ) cada haz de anchura *MN* anula su intensidad al interferir con el que inmediatamente le sigue y en el punto *P* se producirá oscuridad. La condición de mínimo es, por tanto:

$$\Delta = \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow n \frac{d}{2K} \text{ sen } \varphi = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \boxed{n \text{ sen } \varphi = \frac{K\lambda}{d}} \quad K \in N$$

Si el medio existente tras la rendija es el vacío o el aire ( $n = 1$ ), la condición de mínimo se reduce a:  $\text{sen } \varphi = K\lambda/d$ .

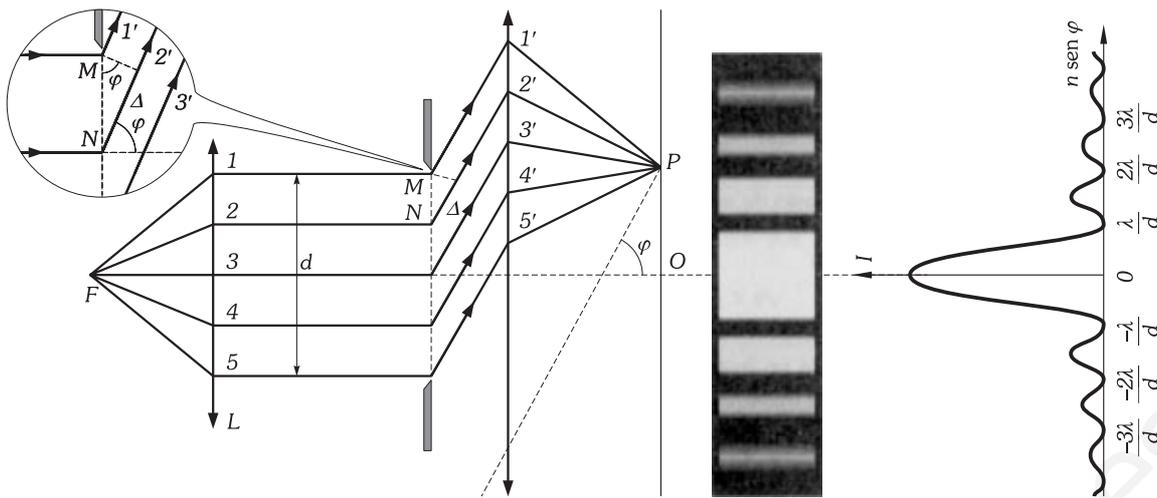


Fig. XXVI-46.- Difracción de una rendija, figura de difracción, modelo de difracción y gráfico de distribución de intensidades.

Los máximos y mínimos son paralelos a la rendija (Fig. XXVI-46). Para  $K = 0$ , se forma un máximo (no se cumple la ecuación anterior por no ser luz difractada, sino directa a través de la rendija). La distribución de la intensidad luminosa para los diversos ángulos queda expresada en la parte derecha de la Fig. XXVI-46.

Si la abertura es circular de diámetro  $D$ , los máximos y mínimos son circulares (Fig. XXVI-47); los valores de  $K$ , en este caso no son enteros; para el primer mínimo  $K = 1,22$ :

$$n \operatorname{sen} \varphi_1 = \frac{1,22 \lambda}{D} \quad (12)$$

Si la iluminación se verifica con luz policromática los mínimos de luz roja se forman más apartados del máximo central que los mínimos violetas ( $\lambda_r > \lambda_v$ ). Debido a la anchura de los máximos de luz, los espectros de diversos órdenes (sucesivos valores de  $K$ ), se superponen unos a otros.

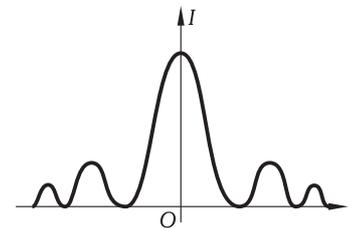
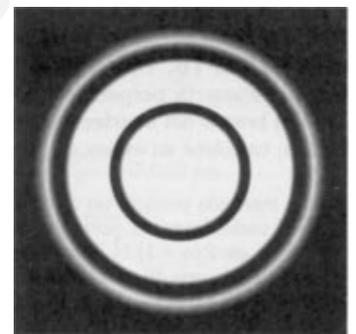


Fig. XXVI-47.- Modelo de difracción de Fraunhofer de un orificio circular. Gráfico de distribución de intensidades.

**XXVI - 36. Poder separador de un instrumento de óptica**

Los diafragmas o las monturas de las lentes en los instrumentos ópticos provocan fenómenos de difracción; la imagen de un punto no queda determinada por la intersección de los rayos que parten de él, sino por la figura de difracción formada en el plano imagen. Y, así, los máximos centrales correspondientes a dos puntos distintos pueden «montar» uno sobre otro y en la observación no distinguiremos la existencia de los dos puntos, ya que obtendremos un sólo máximo luminoso; se dice, entonces, que el instrumento «no separa» o «no resuelve».

El CRITERIO DE LORD RAYLEIGH para que exista separación entre las imágenes de dos puntos es que la distancia entre los máximos centrales sea igual o mayor que el radio del primer mínimo, es decir, que en la representación gráfica de intensidades se verifique el fenómeno expresado en la Fig. XXVI-48 (a); en la (b) se considera el plano imagen y se han representado las circunferencias correspondientes al primer mínimo, lo que nos indica que el máximo central está situado en la posición del primer mínimo del otro punto.

Según el criterio expuesto de acuerdo con la (12) del párrafo anterior, confundiendo el seno con el ángulo por la pequeñez de éste y suponiendo  $n = 1$ , obtendremos la condición para que dos puntos se vean separados:

$$\varphi \geq \frac{1,22 \lambda}{D}$$

El PODER SEPARADOR de un instrumento de óptica queda medido por la inversa del mínimo ángulo que han de formar entre sí los rayos que pasan por el centro óptico de la lente frontal (objetivo) y provienen de dos puntos, para que éstos se vean separadamente con el instrumento.

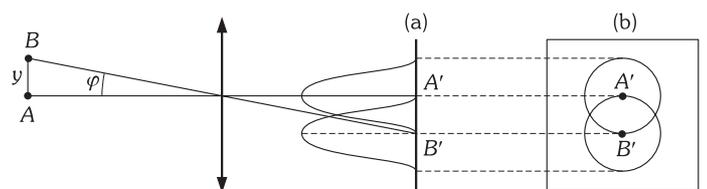


Fig. XXVI-48.- Criterio de Lord Rayleigh sobre el poder separador.

El poder separador tiene por valor de acuerdo con la anterior:

$$p = \frac{I}{\varphi} = \frac{D}{1,22 \lambda}$$

PROBLEMAS: 43 al 49.

**XXVI – 37. Poder separador del microscopio\*. Apertura numérica**

PODER SEPARADOR del microscopio es la inversa de la mínima distancia a que pueden estar dos puntos, para que formen imágenes que se vean separadas a través del microscopio.

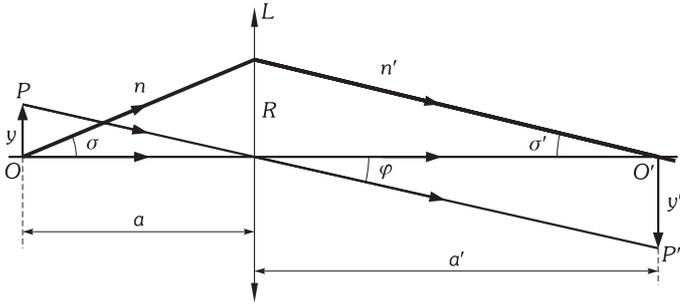


Fig. XXVI-49.- L es la lente frontal del microscopio que limita al haz de luz que penetra en él (diámetro  $D = 2R$ ).

Supongamos que L es la lente frontal del microscopio de diámetro D (objetivo) que limita al haz de luz que penetra en él (Fig. XXVI-49). La aplicación de la fórmula de Helmholtz conduce a:  $ny\sigma = n'y'\sigma'$ ; en la que y es la menor distancia posible entre los puntos P y O para que se vean separadamente; y por tanto, según la fórmula (12), en la que se confunde el seno con el ángulo,  $\sigma$  toma el valor:  $\sigma = 1,22\lambda/D$ . Teniendo en cuenta que  $n' = 1$  (el medio que hay dentro del tubo del microscopio es aire), y que si confundimos el ángulo con la tangente se verifica:  $y' = \varphi a' = 1,22\lambda a'/D$  y  $\sigma' = D/2a'$  (Fig. XXVI-49), obtenemos por sustitución en la fórmula de Helmholtz:

$$ny\sigma = \frac{1,22\lambda}{D} a' \frac{D}{2a'} = \frac{1,22\lambda}{2} = 0,61\lambda \Rightarrow y = \frac{0,61\lambda}{n\sigma}$$

y el poder separador:

$$p = \frac{1}{y} = \frac{n\sigma}{0,61\lambda}$$

Si no se trata de ángulos pequeños en los que el seno se pueda confundir con el ángulo, la fórmula del poder separador del microscopio es:

$$p = \frac{1}{y} = \frac{n \operatorname{sen} \sigma}{0,61\lambda} \tag{13}$$

siendo n el índice de refracción del medio interpuesto entre el objeto y el objetivo;  $\sigma$  el semiángulo formado por un punto del objeto situado en el eje y los bordes del objetivo (Fig. XXVI-49);  $\lambda$  es la longitud de onda de la luz que ilumina al objeto. Al producto «n sen  $\sigma$ » se le llama APERTURA NUMÉRICA.

«El poder separador es directamente proporcional a la apertura numérica e inversamente proporcional a la longitud de onda de la luz que ilumina».

Para la visión de los objetos con gran detalle se usan los OBJETIVOS DE INMERSIÓN; entre el objetivo y el objeto se interpone una gota de un líquido de gran índice de refracción (aceite de cedro:  $n = 1,55$ ) obteniéndose, para iguales aumentos, un mayor poder separador.

La iluminación con luz de pequeña longitud de onda (luz azul o violeta) proporciona también visiones detalladas; aún se consigue mayor poder separador por iluminación con luz ultravioleta; en este caso es necesario obtener microfotografías (por la invisibilidad de tales radiaciones) y emplear óptica de cuarzo, ya que el vidrio no es atravesado por los rayos ultravioleta.

**XXVI – 38. Ultramicroscopio**

Las micelas de las disoluciones coloidales (diámetro menor que  $0,1 \mu$ ) rebasan por su pequeñez el límite del poder separador de un microscopio. Pueden hacerse visibles sobre un fondo oscuro, empleando una iluminación lateral. Los rayos de luz, procedentes de un condensador especial, iluminan la preparación y no penetran, directamente, en el tubo del microscopio; los rayos que inciden en las micelas coloidales sufren en ella la difracción y alguno de los haces proyectados en todas las direcciones, penetra por el tubo del microscopio y vemos, sobre el fondo oscuro, un punto brillante que nos indica la existencia de una partícula. El fenómeno es análogo a la visión del polvillo atmosférico cuando un rayo de sol penetra por la rendija de una ventana sin incidir directamente en nuestros ojos.

Existen varios tipos de condensadores: el paraboloide de Wenhan, es una pieza de vidrio, cuyas paredes plateadas son parte de una paraboloide de revolución. Los rayos de luz paralelos entre sí, procedentes de una lente colimadora, inciden en sus caras y se reflejan pasando por su foco, donde se encuentra la preparación. Los rayos centrales son detenidos por una pieza opaca (Fig. XXVI-50).

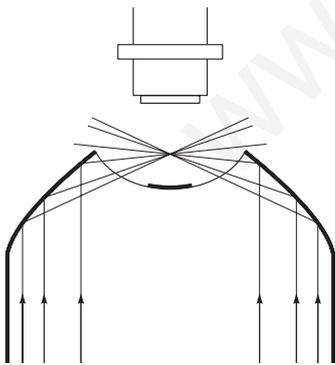


Fig. XXVI-50.- Ultramicroscopio.

**XXVI – 39. Redes de difracción**

Se llama RED DE DIFRACCIÓN a una placa de vidrio en la que se han trazado una gran cantidad de líneas paralelas, en cada milímetro.

\* El ángulo de agudeza visual se estudia en el párrafo XLVI-8.

La parte transparente, comprendida entre dos líneas, hace de rendija de difracción.

CONSTANTE DE LA RED ( $\delta$ ) es la distancia entre dos puntos homólogos de dos rendijas consecutivas; o la inversa del número de líneas que hay en la unidad de longitud ( $N$ ).

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si en } \delta \text{ mm} - \text{ hay 1 línea} \\ \text{en 1 mm} - \text{ hay } N \text{ líneas} \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{1}{N}}$$

Si iluminamos una red de difracción con rayos paralelos que parten de un mismo punto, para lo que basta colocar un foco puntual monocromático en el foco de una lente convergente  $L$  (Fig. XXVI-51), cada una de las rendijas emite rayos en todas las direcciones; los rayos directos forman una imagen  $O$  en el foco de otra lente convergente  $L'$ . Siendo nula la diferencia de caminos ópticos entre tales rayos, se forma en  $O$  un máximo de luz.

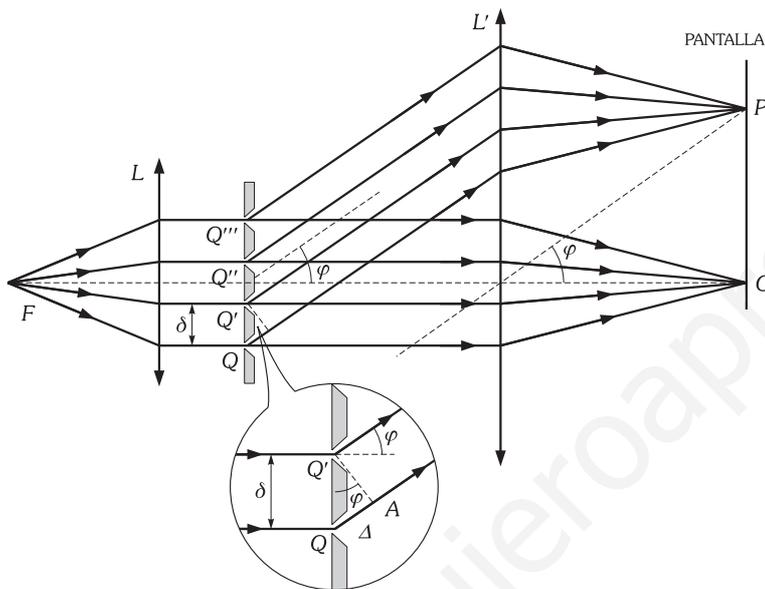


Fig. XXVI-51.- Difracción de una red.

Los rayos que emergen con un ángulo de difracción  $\varphi$  y que proceden de dos puntos homólogos de dos rendijas consecutivas tienen una diferencia de caminos:

$$\Delta = QA = QQ' \text{ sen } \widehat{QQ'A} = \delta \text{ sen } \varphi$$

Entonces las condiciones de máximo o mínimo en  $P$  serán:

$$\boxed{\delta \text{ sen } \varphi = K\lambda} \quad \boxed{\delta \text{ sen } \varphi = (2K + 1) \frac{\lambda}{2}} \quad (14)$$

$\lambda$  es la longitud de onda en el vacío de la luz emitida por  $F$ . Si el medio en que se propaga la luz no es el vacío o el aire, las fórmulas anteriores serán:

$$\boxed{n\delta \text{ sen } \varphi = K\lambda} \quad \boxed{n\delta \text{ sen } \varphi = (2K + 1) \frac{\lambda}{2}}$$

Todos los rayos emergentes de la rendija  $Q$ , con sus homólogos de  $Q'$ , verifican idéntico fenómeno, e igualmente los de  $Q''$  con  $Q'''$ , etc., existiendo, por lo tanto, en el plano focal de la segunda lente, máximos o mínimos de difracción (líneas perpendiculares al plano del dibujo) según se cumplan las condiciones indicadas.

Las redes de difracción, son muy útiles para mediciones muy exactas de longitudes de onda, puesto que conocida la constante de la red, el orden del espectro ( $K=0$  para el máximo central;  $K=1$  para el máximo más cercano al central;  $K=2$  para el siguiente, etcétera), y el ángulo de difracción, se obtiene:

$$\boxed{\lambda = \frac{\delta \text{ sen } \varphi}{K}}$$

**XXVI – 40. Dispersión de una red de difracción. Espectroscopio de red**

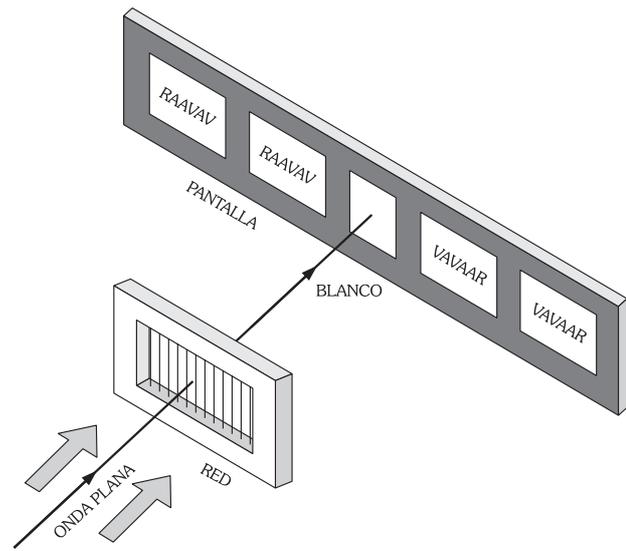


Fig. XXVI-52.- Bandas del espectro de la luz blanca obtenidas para una red de difracción (RAAVAV: rojo, anaranjado, amarillo, verde, azul y violeta).

Si la iluminación de una red se hace con luz policromática el máximo central ( $K = 0$ ) será el mismo color que el foco emisor (Fig. XXVI-52). Los máximos laterales ( $K = 1; K = 2$ , etcétera) se desdoblán en sucesivos colores (espectros de difracción) puesto que para dos longitudes de onda (roja y violeta) al ser:

$$\lambda_r > \lambda_v \Rightarrow \sin \varphi_r > \sin \varphi_v \Rightarrow \varphi_r > \varphi_v$$

«Cuanto mayor sea la longitud de onda, mayor es la desviación, para un determinado orden del espectro».

Se define la DISPERSIÓN DE UNA RED por:  $D = d\varphi/d\lambda$ ; derivando la ecuación (14) para la condición de máximo obtenemos:

$$\delta \cos \varphi \frac{d\varphi}{d\lambda} = K \Rightarrow D = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{K}{\delta \cos \varphi} = \frac{KN}{\cos \varphi}$$

lo que nos indica que *cuanto mayor es el número de rendijas de la red, mayor es su dispersión*.

Las redes de difracción empleadas para el análisis espectral, en lugar de utilizar prismas, tiene más ventajas que éstos; así por ejemplo en la red de difracción no hay dependencia de las propiedades dispersivas del material sino solamente de la constante de la red y de su geometría. El espectroscopio de red es idéntico que el de prisma sin más que sustituir éste por aquélla.

**XXVI – 41. Poder separador cromático de una red de difracción**

PODER SEPARADOR CROMÁTICO de una red para dos ondas planas que difieren ligeramente en sus longitudes de onda, cuando inciden en una red de difracción es:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

siendo  $\lambda$  la longitud de onda promedio entre las dos que tratamos de separar, e  $\Delta\lambda$  la mínima diferencia de las longitudes de onda en cuestión. Para su estudio utilizamos el criterio de Rayleigh, considerando que dos franjas son justamente resolubles cuando el máximo principal de una, coincide con el primer mínimo de la otra. Deduciendo el ancho angular de la intensidad máxima del pico central en el modelo de difracción de una ranura simple, y aplicando tal criterio, se deduce que:

$$R = KN$$

siendo  $K$  un número entero y  $N$  el número de rendijas de la red. En consecuencia, a mayor número de rendijas en la red y mayor orden del espectro, mayor será el poder separador de ésta.

**PROBLEMAS: 50 al 54.**

**XXVI – 42. Teoría de Abbe. Formación de imágenes microscópicas**

Si la iluminación en un microscopio se hace con rayos coherentes (rayos procedentes del mismo punto luminoso), actuando el objeto como red de difracción, verifica los fenómenos descritos en el párrafo 39.

Imaginemos tres detalles transparentes  $A, B$  y  $C$  del objeto. En cada uno de ellos se verifica el fenómeno de la difracción: los rayos directos  $A_2, B_2, C_2$  forman en el plano focal de la lente una imagen falsa, 2, ya que en tal imagen se han reunido los rayos procedentes de los tres puntos. Las imágenes 1 y 3, formadas por el primer máximo lateral ( $K = 1$ ) son igualmente falsas. Siguiendo la marcha de los rayos de luz se observa que los  $A_1, A_2, A_3$ , se reúnen en un punto  $A'$ , verdadera imagen de  $A$ , e igualmente los  $B_1, B_2, B_3$  y los  $C_1, C_2, C_3$ , que forman respectivamente las imágenes  $B'$  y  $C'$ . Este plano  $A'B'C'$  es el que se debe observar a través del ocular y no el 1-2-3, donde se perciben imágenes que no están de acuerdo con la forma del objeto.

Para la formación de las imágenes verdaderas es necesario que el objetivo capte el haz directo y el primer haz difractado, o sea, al menos, los representados en la figura; si captase exclusivamente el haz directo no habría rayos suficientes para la formación de imágenes.

Considerando  $AB = \delta$  (Fig. XXVI-53), como mínima distancia entre los puntos  $A$  y  $B$  para que se vean separadamente con el microscopio, la condición de máximo en el

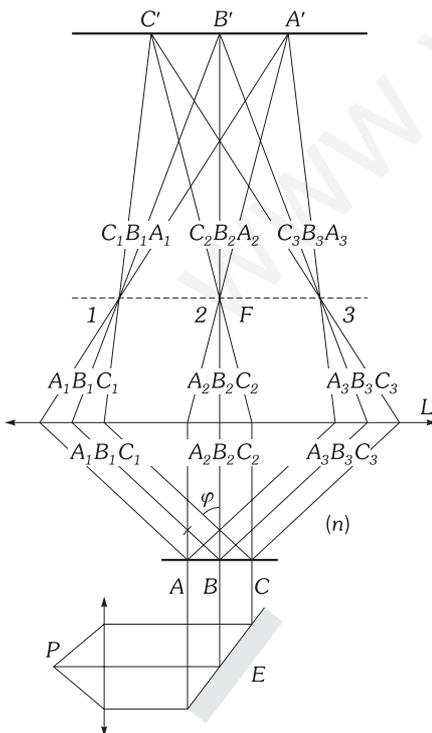


Fig. XXVI-53.- Teoría de Abbe.

primer haz difractado ( $K = 1$ ) cuando hay interpuesto entre objeto y objetivo un medio de índice de refracción  $n$ , es (fórmula 14):  $n\delta \sin \varphi = \lambda$ ; se ha multiplicado el camino geométrico ( $\delta \sin \varphi$ ) por  $n$  para obtener el camino óptico. La fórmula del poder separador es, por lo tanto:

$$p = \frac{1}{\delta} = \frac{n \sin \varphi}{\lambda}$$

análoga a la (13) salvo en el factor 0,61 del denominador.

Para evitar la formación de imágenes falsas, basta iluminar con foco extenso, es decir, que cada punto del objeto reciba luz de puntos luminosos distintos; ello se consigue con un «condensador» que forma una imagen del foco extenso sobre el propio objeto.

**XXVI - 43. Microscopio de contraste de fase\***

El microscopio de contraste (Zernike-1935), resuelve el problema de observar, a través de un microscopio, a corpúsculos transparentes que al no producir cambios en la intensidad y el color de la luz, no se hacen visibles por los métodos usuales de iluminación y preparación, requiriéndose, en las técnicas más comunes, el *teñido* de las preparaciones con el peligro de reacciones químicas y muerte de las células vivas.

La iluminación se realiza por el sistema de Köhler, recibiendo la preparación un haz de rayos paralelos, cuyas ondas están en fase; al ser el índice de refracción del corpúsculo algo mayor, por ejemplo, que el del medio, la luz que atraviesa aquél se *retrasa* en fase, con respecto a la luz que no lo atraviesa, originándose, además, a partir del corpúsculo una débil luz difractada en todas las direcciones. La Fig. XXVI-54 nos da una idea del fenómeno.

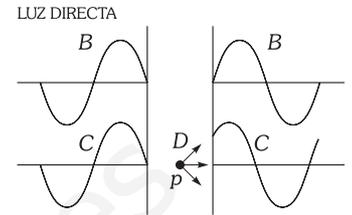


Fig. XXVI-54.- Iluminación por el sistema Köhler.

El retraso de fase queda representado en la Fig. XXVI-55, que en definitiva es como una fotografía de las ondas en un determinado instante. En abscisas se representa la distancia a un origen y en ordenadas la elongación,  $x$ .

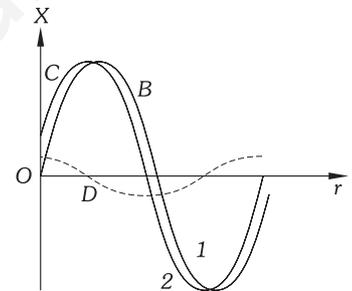


Fig. XXVI-55.- Representación del retraso de fase.

Observemos que la onda C, se puede obtener a partir de la B, sumando a sus elongaciones las de D, que nos representa la luz difractada, la cual está desfasada  $\pi/2$  con respecto a B.

Si  $A_1$  y  $A_2$  son respectivamente las amplitudes de luz directa y la difractada (Fig. XXVI-56-1ª), por estar desfasados en  $\pi/2$  la amplitud resultante es:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 = A_1^2$$

prácticamente igual a  $A_1^2$  (la luz difractada es de pequeña intensidad). La luz que atraviesa al corpúsculo tiene por tanto una intensidad prácticamente igual a la que no lo atraviesa y el corpúsculo no se hace visible por la falta de contraste.

Si por algún procedimiento conseguimos retrasar  $\pi/2$  ó  $3\pi/2$  a la luz directa se verifica (Fig. XXVI-56 2ª y 3ª):

$$A = A_1 + A_2 \quad A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2$$

o bien:  $A = A_1 - A_2 \quad A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2$

El término  $2A_1A_2$  ya no es despreciable frente a  $A_1^2$ ; y despreciando, como hicimos antes, a  $A_2^2$  obtenemos en definitiva:

$$A^2 = A_1^2 + 2A_1A_2$$

o bien:  $A^2 = A_1^2 - 2A_1A_2$

En el primer caso la intensidad luminosa de la luz que ha atravesado al corpúsculo es mayor que la de la zona que le rodea o menor en el segundo caso, estableciéndose el contraste y haciéndose visible la partícula.

Para realizar el retraso en fase de  $\pi/2$  ó  $3\pi/2$ , se emplean láminas cuyo espesor  $e$ , se relaciona con su índice de refracción y la longitud de onda de la luz, por las expresiones:

$$e(n - 1) = \lambda/4 \tag{15}$$

(lámina cuarto de onda); o bien:  $e(n - 1) = \frac{3\lambda}{4}$

En efecto: si el estado vibratorio de la radiación al llegar a un cierto punto es:  $x = A \sin \frac{2\pi}{T} t$

después de atravesar una capa  $e$  de aire es:  $x' = A \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{e}{\lambda} \right)$

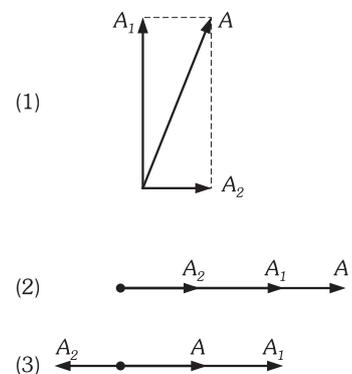


Fig. XXVI-56.-  $A_1$  y  $A_2$  son respectivamente las amplitudes de la luz directa y difractada.

\* Este párrafo es un extracto del trabajo *Métodos modernos de microscopía* del Dr. D. Justiniano Casas. (Arbor, núm. 99).

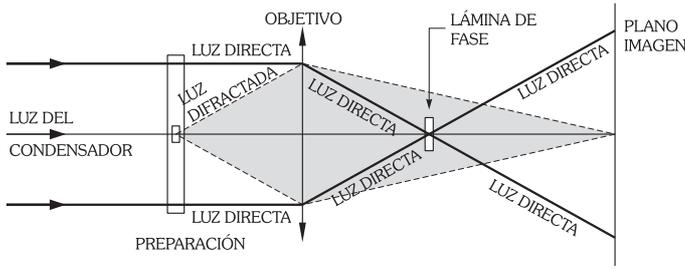


Fig. XXVI-57.- Esquema de la colocación de la lámina «cuarto de onda» para conseguir un desfase de  $\pi/2$ .

Si en vez de aire atraviesa a una lámina cuarto de onda de espesor  $e$ , el estado vibratorio es:

$$x'' = A \operatorname{sen} 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{en}{\lambda} \right)$$

pero siendo:  $en = e + \lambda/4$  (condición 15), obtenemos:

$$x'' = A \operatorname{sen} 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{e}{\lambda} - \frac{1}{4} \right) = A \operatorname{sen} \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{e}{\lambda} \right) - \frac{\pi}{2} \right]$$

habiéndose retrasado la onda correspondiente a  $x''$  en  $\pi/2$  con respecto a la representada por  $x'$ . (El mismo razonamiento hubiésemos hecho para la lámina «tres cuartos de onda»).

El dispositivo para conseguir los efectos descritos queda representado en la Fig. XXVI-57, en la que se observa que la lámina cuarto de onda afecta casi exclusivamente a la luz directa la cual sufre un retraso de fase de  $\pi/2$  o de  $3\pi/2$ ; el haz difractado se propaga casi por completo, sin atravesar tal lámina por lo que no altera su fase. De esta forma se establece, en el plano imagen, el contraste descrito. Para obtener un mayor contraste se emplean láminas absorbentes, las cuales son de vidrio ennegrecido.

### G) POLARIZACIÓN

#### XXVI - 44. Luz natural y luz polarizada

Como ya sabemos, las ondas electromagnéticas de las que forma parte la luz, son oscilaciones en el espacio y en el tiempo de campos eléctricos y magnéticos, los dos campos son perpendiculares entre sí, así como perpendiculares a la dirección de propagación de la onda, siendo por tanto ondas transversales. Según vimos en el capítulo XVII, apartado C, cuya lectura recomendamos antes de continuar este estudio, un fenómeno característico de este tipo de ondas transversales es la polarización. Definiremos como DIRECCIÓN DE POLARIZACIÓN DE UNA ONDA ELECTROMAGNÉTICA la dirección del campo eléctrico oscilante.

En la LUZ NATURAL (luz no polarizada) las oscilaciones del campo eléctrico se realizan en todas las direcciones perpendiculares a la dirección de propagación (Fig. XXVI-58a).

Llamaremos a una onda luminosa POLARIZADA LINEALMENTE o PLANO-POLARIZADA cuando el campo eléctrico oscila en un solo plano al que llamamos PLANO DE VIBRACIÓN ( $V$  en la Fig. XXVI-58b). El PLANO DE POLARIZACIÓN ( $P$ ) será el perpendicular al de vibración.

A un rayo de luz linealmente polarizada lo representaremos como en la Fig. XXVI-59 (a) si su plano de vibración es el del dibujo, la (b) es cuando el plano de vibración es perpendicular al plano del dibujo.

La luz natural se puede considerar formada por dos vibraciones situadas en dos planos perpendiculares, ya que el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  en cualquier instante, se puede descomponer en dos direcciones fijas  $\mathbf{E}_y$  y  $\mathbf{E}_z$  cuando éste se propaga en la dirección del eje  $OX$ . Representaremos, de acuerdo con esta idea, un rayo de luz natural como en la Fig. XXVI-59 indicando los trazos que cruzan al rayo, vibraciones en el plano del dibujo, y los puntos las vibraciones perpendiculares al plano del dibujo.

Se dice que la luz de una fuente está PARCIALMENTE POLARIZADA cuando es la suma de un rayo polarizado y un rayo no polarizado, es decir, cuando el campo eléctrico está reforzado en una determinada dirección.

La luz puede estar CIRCULARMENTE y ELÍPTICAMENTE POLARIZADA. En una onda circularmente polarizada el vector campo eléctrico  $\mathbf{E}$  mantiene su módulo constante, mientras que su dirección gira en el espacio con una frecuencia angular fija.

En la Fig. XXVI-60 representamos una onda circularmente polarizada, mostrándonos la dependencia temporal de  $\mathbf{E}$  en un punto determinado, y que se propaga en la dirección del eje  $X$ ; sus componentes  $\mathbf{E}_y$  y  $\mathbf{E}_z$  oscilan con la misma amplitud y tienen una diferencia de fase  $\pi/2$ . Si el sentido del vector campo es el de las agujas de un reloj decimos que la luz está circularmente polarizada dextrógirante, en caso contrario levógirante. Una onda elípticamente polarizada (Fig. XXVI-61) es similar a una onda circularmente polarizada salvo que, en cada punto, las componentes  $\mathbf{E}_y$  y  $\mathbf{E}_z$  tienen amplitudes diferentes, en este caso la punta del vector  $\mathbf{E}$  describe una elipse. De aquí en adelante, centraremos nuestra atención en la luz linealmente polarizada y cuando hablemos de luz polarizada sin calificarla como plana, circular o elípticamente, lo que queremos decir es luz linealmente polarizada.

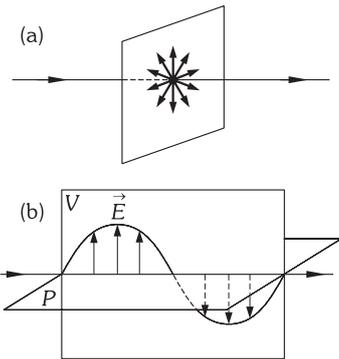


Fig. XXVI-58.- a) Luz natural o no polarizada. b) Luz polarizada linealmente;  $V$  es el plano de la vibración del campo eléctrico y  $P$  es el plano de polarización.

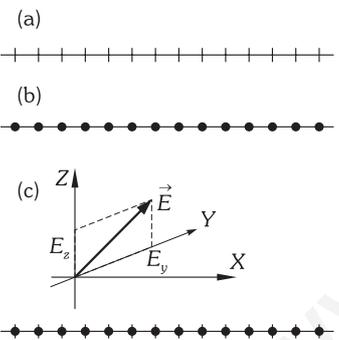


Fig. XXVI-59.- a) Luz linealmente polarizada vibrando en el plano del papel. b) Idem en el plano perpendicular al papel. c) Luz natural.

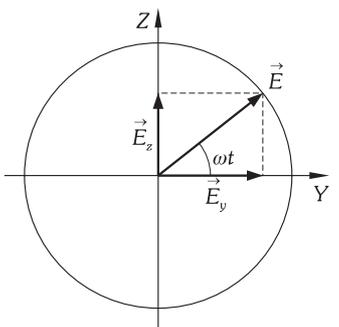


Fig. XXVI-60.- Luz circularmente polarizada.

**XXVI – 45. Ley de Malus. Análisis de la luz polarizada**

Un modelo mecánico simple e intuitivo que nos hará comprender la elaboración y análisis de una onda de luz polarizada, consiste en producir en un cordón de goma una onda transversal de tal forma que las oscilaciones cambien de dirección en el espacio; esta onda será semejante a la onda luminosa natural. Haciendo pasar el cordón a través de una caja estrecha como se indica en la Fig. XXVI-62a, de todas las oscilaciones posibles en cualquier dirección, la caja selecciona las oscilaciones en un solo plano, por lo que de ella sale una onda polarizada linealmente. Si la onda incidente está ya polarizada y colocamos una caja idéntica a la anterior y perpendicular a la dirección de polarización, las oscilaciones no pasarán de ella (Fig. XXVI-62b). Si, por último, la dirección de la onda polarizada incidente forma un ángulo  $\theta$  con la «rendija», la amplitud de la onda transmitida no es cero (Fig. XXVI-62c), pero es menor que la amplitud de la onda incidente; la amplitud de la onda transmitida ( $A$ ) es igual a la componente de la amplitud de la onda incidente ( $A_0$ ) a lo largo del eje que contiene a la rendija, es decir:  $A = A_0 \cos \theta$ .

A un dispositivo que transmite la luz sin atenuación, polarizada en una dirección y que absorbe totalmente la luz polarizada perpendicularmente a la anterior dirección, lo llamaremos **POLARIZADOR** y es el análogo electromagnético de la caja que hemos utilizado en la experiencia anterior.

Un material decimos que es **DICROICO** cuando transmite la luz que tiene su dirección de polarización paralela a una dirección característica del material, a la que llamaremos **EJE DE TRANSMISIÓN**, y absorbe fuertemente la luz que tiene su dirección de polarización perpendicular a este eje.

Los polarizadores más conocidos son los **CRISTALES POLAROID** que consisten en una fina capa de agujas cristalinas con la propiedad de **dicroísmo orientadas** todas ellas de la misma forma, colocadas, generalmente, en una sustancia plástica transparente, que hace de soporte. Los cristales son de sulfato de yodoquinina (herapatita). Se obtienen así, láminas polarizadoras de una gran superficie. Se emplean para la construcción de gafas para preservarse de los rayos solares, ya que al recibir tal luz, pasa por las láminas polaroides una de las componentes de ella, eliminando por absorción la otra componente. Eliminan, por tanto, un 50 por 100 de la luz natural recibida. Con las gafas polaroides (eje vertical, Fig. XXVI-63), se eliminan, en parte, los reflejos molestos para los automovilistas, que se producen en las carreteras después de una lluvia. La luz reflejada en el suelo está parcialmente polarizada (como se estudiará más adelante), vibrando en un plano horizontal (componente que «cae de plano» sobre la carretera). Si el eje óptico de las gafas es vertical, quedará eliminada tal luz para el portador de las gafas polaroides.

Interpongamos un polarizador a un rayo de luz no polarizada (Fig. XXVI-64), la luz transmitida (después de atravesar el polarizador) estará linealmente polarizada; si es  $E_1$  la amplitud del campo eléctrico de esta onda e  $I_1$  su intensidad, entonces al atravesar el segundo polarizador, al que vamos a llamar *analizador*, la componente de  $E_1$  en la dirección del eje de transmisión del analizador será la amplitud del campo eléctrico de la onda transmitida, es decir (Fig. XXVI-65):  $E_2 = E_1 \cos \theta$ , por consiguiente el valor de la intensidad finalmente transmitida toma el valor:  $I_2 = kE_2^2 = kE_1^2 \cos^2 \theta$ , siendo  $k$  la constante que relaciona a la intensidad con el cuadrado de la amplitud del campo eléctrico, que junto con que  $I_1 = kE_1^2$  nos conduce a:

$$I_2 = I_1 \cos^2 \theta \quad \text{(LEY DE MALUS)*}$$

Si hacemos  $\theta = 0$ , obtenemos  $I_1 = I_2$ , lo que nos indica que la intensidad transmitida por el analizador es máxima cuando su eje de transmisión es paralelo al eje de transmisión del polarizador. Cuando  $\theta = \pi/2$  rad entonces  $I_2 = 0$ , es decir, la intensidad transmitida por el analizador es

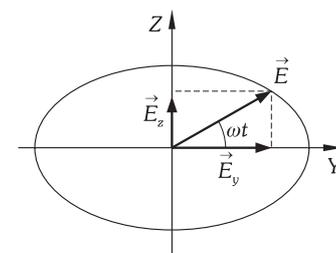


Fig. XXVI-61.– Luz polarizada elípticamente.

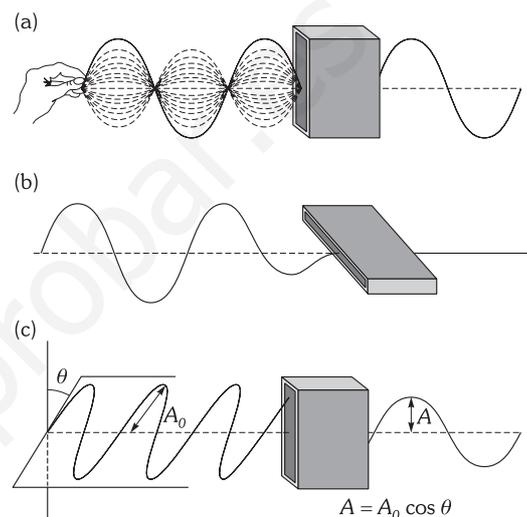


Fig. XXVI-62.– Modelo mecánico para la producción y análisis de una onda polarizada.

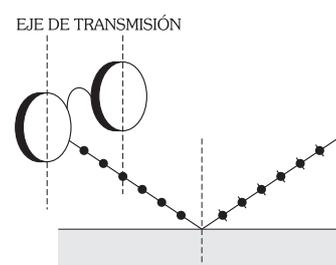


Fig. XXVI-63.– Gafas polaroid.

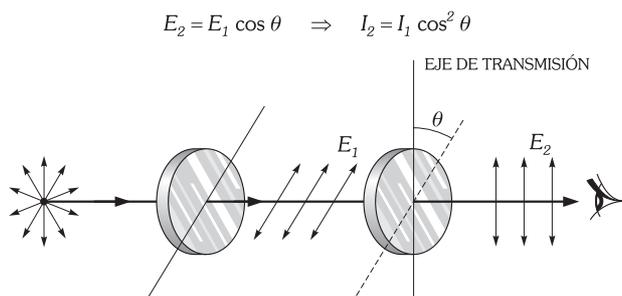


Fig. XXVI-64.– Ley de Malus.

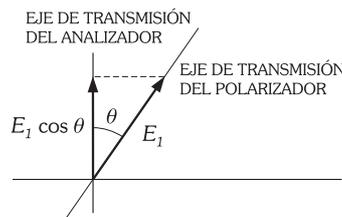


Fig. XXVI-65.– La proyección del campo  $E_1$ , transmitido por un polarizador sobre el eje de transmisión del analizador es  $E_1 \cos \theta$ .

\* Llamada así porque es debida a E. L. Malus (1775-1812).

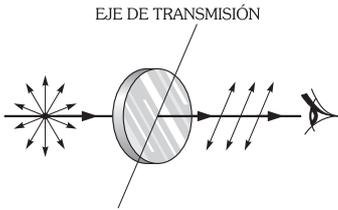


Fig. XXVI-66.- Un polarizador transmite la luz con el plano de vibración paralelo a su eje de transmisión.

mínima cuando su eje de transmisión es perpendicular al del polarizador. En el intervalo comprendido entre  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi/2$  rad,  $0 < I_2 < I_1$ , pudiéndose dar todos los valores posibles de la intensidad dentro de tal intervalo.

Para saber si la luz de una fuente está polarizada, parcialmente polarizada o no polarizada, interpondremos un analizador al rayo y lo haremos girar alrededor de su eje paralelo al rayo; si la luz está linealmente polarizada, la intensidad de la luz transmitida variará desde cero hasta un valor máximo, y conoceremos el plano de vibración (o dirección de polarización) que será perpendicular al eje de transmisión en la que se encuentra el cero de intensidad. Si la luz de la fuente solo está parcialmente polarizada, la intensidad transmitida por el analizador, variará con la rotación de éste, pero nunca será nula. Si la luz no está polarizada no se observará variación de la intensidad transmitida con el ángulo de orientación del analizador.

Una fuente de luz no polarizada emite trenes de onda con una mezcla de polarizaciones al azar, es decir está formada por ondas luminosas cuyas direcciones de polarización están distribuidas uniformemente en todos los ángulos, estos trenes de onda son pues incoherentes (son emitidos por átomos y moléculas independientes), y para calcular su intensidad, sumaremos las intensidades de cada uno de ellos (no sus amplitudes), esta suma es equivalente a promediar sobre la mezcla de polarizaciones al azar. Para calcular la intensidad transmitida por el polarizador (Fig. XXVI-66) emplearemos la ley de Malus, donde ahora  $\theta$  es el ángulo entre la dirección de polarización del tren de onda y el eje de transmisión del polarizador; y puesto que el valor promedio del  $\cos^2 \theta$  para los valores comprendidos entre cero y  $\pi/2$  rad, es  $1/2$  concluiremos diciendo que:

«La intensidad transmitida por un polarizador cuando llega a él un haz de luz natural, es la mitad de la intensidad incidente».

Debido al carácter aleatorio de las polarizaciones de los trenes de onda incidentes, la intensidad de la onda polarizada es independiente de la orientación del polarizador, como ya hemos visto en el análisis de la luz natural.

**XXVI – 46. Grado de polarización**

En lo anteriormente visto hemos supuesto que tanto el polarizador como el analizador transmitían luz polarizada paralela al eje de transmisión, y no se transmitía luz perpendicularmente a dicho eje; aunque existen polarizadores que prácticamente realizan esta función perfectamente, los que normalmente son utilizados en realidad no polarizan completamente la luz.

Para caracterizar la polarización de la luz se utiliza el GRADO DE POLARIZACIÓN ( $P$ ); para su cuantificación, supongamos que el polarizador de la Fig. XXVI-64 no es perfecto y si los es el analizador; sea  $I_a$  la intensidad de la luz transmitida por el analizador cuando los ejes de transmisión son paralelos ( $\theta = 0$ ) e  $I_p$  la intensidad cuando los ejes son perpendiculares ( $\theta = \pi/2$  rad); el grado de polarización de la luz transmitida por el polarizador se define como:

$$P = \frac{I_a - I_p}{I_a + I_p}$$

variando entre cero y uno ( $0 \leq P \leq 1$ ), puesto que si la luz incide sobre el analizador no está polarizada  $I_a = I_p \Rightarrow P = 0$  y cuando la luz que incide en el analizador está totalmente polarizada, entonces  $I_a = 0 \Rightarrow P = 1$ .

**XXVI – 47. Producción de luz polarizada por reflexión y refracción. Ley de Brewster**

Cuando un rayo de luz natural incide sobre cualquier medio refringente, se verifica una polarización de la luz. El rayo reflejado se enriquece en la componente cuyo plano de vibración es perpendicular al de incidencia (plano que forman el rayo incidente y la normal) y el rayo refractado se enriquece en la componente que vibra en el propio plano de incidencia (Fig. XXVI-67a).

Para fijar esta idea, observemos que se reflejan preferentemente las vibraciones que caen del plano sobre la superficie, de la misma forma que una piedra achatada rebota en la superficie del agua, al lanzarla de plano sobre ella.

Cuando el ángulo de incidencia tiene un valor determinado (ÁNGULO DE POLARIZACIÓN), el rayo reflejado está totalmente polarizado.

En 1812 Sir David Brewster (1781-1868) descubrió experimentalmente que cuando el ángulo de incidencia es el ángulo de polarización, el rayo reflejado y el refractado son complementarios (Fig. XXVI-67b); pudiéndose escribir la ley de Snell de la forma:

$$\frac{\text{sen } \varepsilon_1}{\text{sen } \varepsilon_2} = \frac{\text{sen } \varepsilon_1}{\cos \varepsilon_1} = \text{tg } \varepsilon_1 = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{(LEY DE BREWSTER)}$$

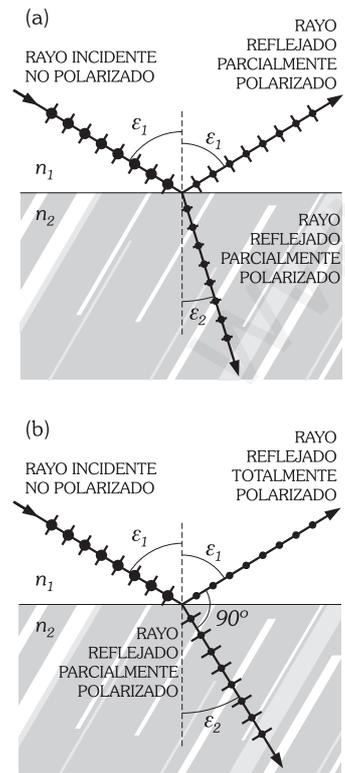


Fig. XXVI-67.- Polarización de la luz por la reflexión.

que será igual al índice de refracción de la sustancia cuando el primer medio sea aire.

«Un rayo de luz se polariza totalmente por reflexión, cuando la tangente del ángulo de incidencia es igual al índice de refracción».

Un procedimiento de análisis de luz polarizada basado en la ley de Brewster, consiste en polarizar con una lámina de vidrio negro un rayo de luz que incide bajo el ángulo de polarización (Fig. XXVI-68), se recibe en otra lámina idéntica (analizador), también bajo el ángulo de polarización y se hace girar a este último conservando el mismo ángulo de incidencia, el rayo reflejado produce una serie de impactos luminosos en una pantalla cilíndrica que rodea el espejo, situados en una circunferencia cuyo centro está en el eje de giro.

Estas luces reflejadas son de intensidad máxima en los puntos M (la luz polarizada se refleja totalmente) y de intensidad nula en N a 90° de aquéllos, decreciendo la intensidad de una a otra posición.

Si la polarización se efectúa por refracción, al girar el espejo analizador los máximos y mínimos invierten su posición, no siendo nulos estos últimos, lo que indica que la polarización por refracción es parcial.

En los fenómenos de la Fig. XXVI-68, considerando la reflexión en el espejo inferior, se observa: a) Plano de incidencia y plano de vibración son perpendiculares: intensidad máxima (M). b) Plano de incidencia y plano de vibración coinciden: intensidad cero (N).

Estas condiciones equivalen a: a) Plano de incidencia y plano de polarización coinciden: intensidad máxima. b) Plano de incidencia y plano de polarización son perpendiculares: intensidad cero: Esto está en perfecto acuerdo con la ley de Malus, que en este caso la podríamos enunciar: «La intensidad luminosa del rayo reflejado cuando la luz que incide es polarizada y lo hace bajo el ángulo de polarización, es directamente proporcional al cuadrado del coseno del ángulo que forman el plano de incidencia y el de polarización».

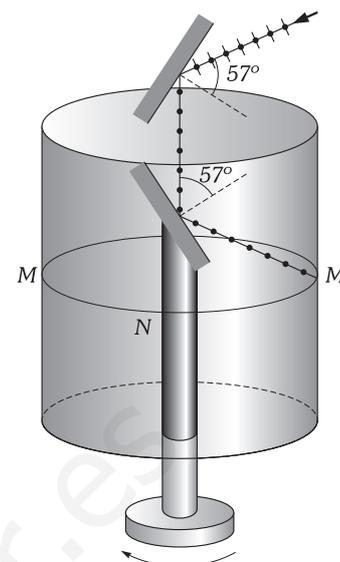


Fig. XXVI-68.- Análisis de la luz polarizada.

**XXVI - 48. Doble refracción o birrefringencia. Polarización por doble refracción. Nícoles**

Las leyes de la refracción utilizadas hasta ahora sólo son válidas en las superficies de separación de dos medios que son isotropos para la luz; en general estos medios son los líquidos, los cuerpos amorfos y los cristales del sistema regular; a estos cuerpos se les llama MONORREFRIGENTES, por corresponder a un rayo de luz natural incidente un solo rayo refractado.

Los cristales que no pertenecen al sistema regular verifican el fenómeno de DOBLE REFRACCIÓN o DOBLE BIRREFRINGENCIA, y un rayo de luz natural que penetra en ellos da lugar a dos rayos (a no ser que penetre en la dirección del eje óptico, como explicamos a continuación) que se propagan en el interior del cristal y que se llaman ORDINARIO y EXTRAORDINARIO.

EJE ÓPTICO es una dirección privilegiada en la que no se verifica el fenómeno de la doble refracción. Los cristales son UNIÁXICOS o BIÁXICOS según tengan uno o dos ejes ópticos.

Cualquiera que sea el ángulo de incidencia ( $\epsilon_1$ ), se verifica para el rayo ordinario la ley de Snell:  $\text{sen } \epsilon_1 / \text{sen } \epsilon_2 = \text{cte}$ , lo que no ocurre para el rayo extraordinario, dependiendo el valor del cociente del ángulo de incidencia. Ello es debido a que en los medios anisotropos la velocidad de propagación del rayo extraordinario es distinta en las diversas direcciones. En la dirección del eje óptico las velocidades de propagación del rayo ordinario y el extraordinario son iguales.

Aunque no se puede hablar de índice de refracción de una sustancia para el rayo extraordinario (ya que cada dirección tiene el suyo) se puede hacer una clasificación de los cristales birrefringentes en positivos y negativos según que el índice de refracción correspondiente al rayo ordinario sea menor o mayor que el del extraordinario en cada una de las direcciones, excepto en la del eje óptico en la que ambos son iguales. El espato de Islandia es un cristal negativo.

PLANO PRINCIPAL es un plano perpendicular a la cara de incidencia y que contiene al eje óptico (Fig. XXVI-69a).

En el fenómeno de la doble refracción también se verifica que tanto el rayo ordinario como el extraordinario están polarizados. El plano de vibración del rayo extraordinario es el plano principal y el del ordinario un plano perpendicular al principal (Fig. XXVI-69b).

Estos hechos pueden visualizarse haciendo incidir estos rayos en un analizador, y según sea el ángulo formado por la dirección de polarización y el eje de transmisión del analizador se observará la formación de máximos y mínimos nulos, que se suceden en giros del analizador de cero a  $\pi/2$  rad. Cuando el ordinario produce un máximo, el extraordinario un mínimo y a la inversa.

Para eliminar uno de los rayos (el ordinario) obteniendo únicamente como rayo emergente el extraordinario, se emplea el PRISMA DE NICOL. Es un romboedro de espato de Islandia, con ángulos determinados, que se ha cortado por un plano diagonal y se han pegado sus dos mitades con bálsamo de Canadá, que goza de la propiedad de tener un índice de refracción ( $n$ ) intermedio entre los del espato de Islandia para el rayo ordinario y el correspondiente al extraordinario en la dirección de su propagación:  $n_0 > n > n_e$ .

Si la sección del plano principal es la de la Fig. XXVI-70, un rayo de luz natural se divide, al penetrar en el nicol, en el rayo ordinario y el extraordinario.

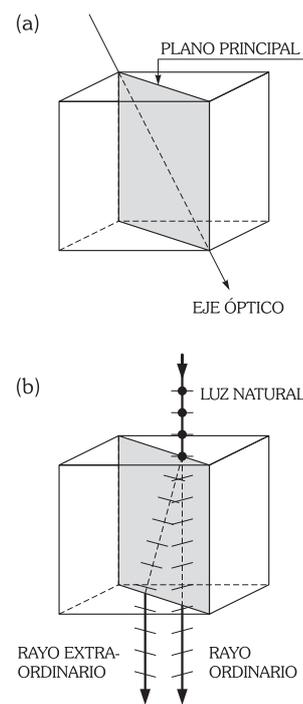


Fig. XXVI-69.- Eje y plano principal. Polarización por birrefringencia.

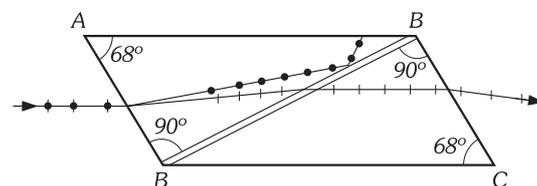


Fig. XXVI-70.- Prismas de Nicol.

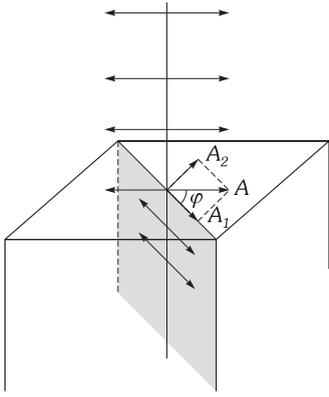


Fig. XXVI-71.- Ley de Malus para un nícol.

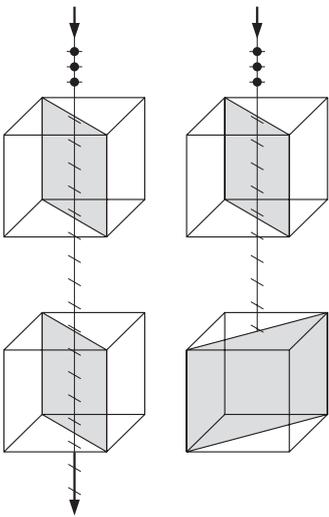


Fig. XXVI-72.- Análisis de la luz de un nícol.

rio, ambos polarizados en los planos ya conocidos. Siendo  $n_o > n_e$  el rayo ordinario se acerca más a la normal que el extraordinario; llega al bálsamo del Canadá con un ángulo mayor que el límite y por ello al ir de un medio más refringente hacia otro menos, verifica el fenómeno de la reflexión total. La cara AB, pintada de negro, absorbe este rayo ordinario. El rayo extraordinario atraviesa el bálsamo del Canadá y emerge polarizado por la cara BC.

**XXVI – 49. Análisis de la luz por un nícol. Turmalinas**

Un rayo de luz polarizada que llega a un nícol vibrando en su propio plano principal, lo atraviesa y emerge con la misma intensidad que incidió (salvo una pequeña absorción); si el rayo incidente vibra en un plano perpendicular al principal, penetra y, comportándose como rayo ordinario, se refleja en el bálsamo del Canadá y es absorbido por las caras laterales.

Un rayo de luz polarizada que vibra en un plano cualquiera, puede considerarse como la superposición de dos rayos, cuyas amplitudes son las obtenidas descomponiendo la amplitud del rayo incidente en la dirección del plano principal  $A_1$  y su perpendicular  $A_2$  atravesando el prisma la primera vibración y siendo absorbida la segunda. (Fig. XXVI-71)

Siendo  $A_1 = A \cos \varphi$ ; y la intensidad directamente proporcional al cuadrado de la amplitud, se cumple la ley de Malus en el fenómeno descrito; es decir: «Cuando en un nícol incide un rayo de luz polarizada, la intensidad luminosa del rayo emergente es directamente proporcional al coseno cuadrado del ángulo que forman el plano principal del nícol y el de vibración de la luz».

Al recibir un rayo de luz polarizada en un nícol (analizador), haciéndolo girar alrededor de un eje en la dirección del rayo, se observarán a su través máximos luminosos cuando el plano de vibración coincida con el principal y mínimos nulos, a  $\pi/2$  rad de los anteriores. La intensidad luminosa va decreciendo del máximo al mínimo, conforme se efectúa el giro.

Para observar este fenómeno, se puede polarizar la luz incidente por medio de otro nícol (polarizador). Cuando los planos principales estén cruzados se observa un mínimo nulo de luz; cuando son paralelos se observa el máximo luminoso (Fig. XXVI-72).

Un cristal de turmalina tallado paralelamente al eje óptico, divide en su interior a la luz natural en los dos rayos, ordinario y extraordinario, ambos polarizados, absorbiendo el cristal, para un determinado espesor, el rayo ordinario. Produce los mismos efectos que las láminas polaroid, es decir, son cristales dicroicos.

**XXVI – Polarización rotatoria. Polarimetría. Polarímetros**

POLARIZACIÓN ROTATORIA es el fenómeno de giro del plano de polarización de la luz al atravesar un rayo de luz polarizada a determinadas sustancias, llamadas ópticamente activas. Estas sustancias se dividen en dextrógiras o levógiras, según hagan girar el plano de polarización hacia la derecha o hacia la izquierda.

Supongamos dos nicoles cuyos planos principales son perpendiculares entre sí (Fig. XXVI-73). A través del nícol analizador no pasa la luz que emerge del polarizador, produciéndose, en consecuencia, oscuridad. Si entre los nicoles se interpone una lámina de cuarzo (tallada perpendicularmente a su eje) se observa una luminosidad a través del segundo nícol. Ello es debido a un giro del plano de vibración (y por lo tanto del de polarización) de la luz, al atravesar la lámina de cuarzo. La luz que incide en el analizador vibra en un plano que ya no es perpendicular a su plano principal y en consecuencia se ve luz a su través.

Para restablecer la oscuridad hay que hacer girar al nícol analizador un ángulo igual al girado por el plano de vibración, midiendo este ángulo el PODER ROTATORIO.

LEYES DE BIOT. «El poder rotatorio  $\alpha$  de los cuerpos sólidos es directamente proporcional al espesor de las sustancias atravesadas por la luz polarizada y a su densidad».

$$\alpha = [\alpha] \rho l$$

$[\alpha]$  se llama poder rotatorio específico, cuyo valor es constante para cada sustancia.

«El PODER ROTATORIO de las disoluciones es directamente proporcional al espesor de la capa líquida y a la concentración».

Siendo  $l$  la longitud de un tubo lleno de líquido y atravesado por la luz polarizada, las leyes de Biot se expresan:

$$\alpha = [\alpha] l c$$

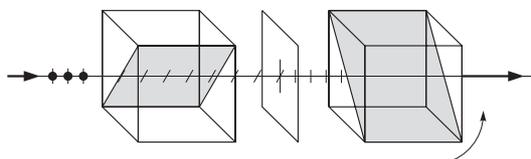


Fig. XXVI-73.- Polarización rotatoria.

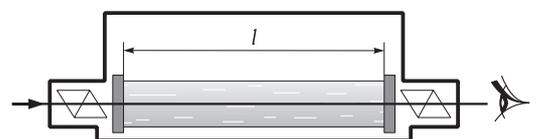


Fig. XXVI-74.- Polarímetro de Mitscherlich

EL PODER ROTATORIO ESPECÍFICO de una disolución es:  $[\alpha] = \alpha/lc$ , o sea: *el giro del plano de polarización producido por una disolución de concentración unidad haciendo la observación a través de un tubo de la unidad de longitud.*

Conocidos  $[\alpha]$  y  $l$  y determinado  $\alpha$  experimentalmente, se puede calcular la concentración de la disolución. A esta operación se conoce con el nombre de «ANÁLISIS POLARIMÉTRICO», se efectúa principalmente para la determinación de sacarosa en los jugos azucarados, de glucosa en la orina, etc.

El polarímetro de Mitscherlich (Fig. XXVI-74), consta de dos nicoles (polarizador y analizador) entre los que se interpone el tubo que contiene la disolución a analizar. El giro del analizador viene indicado en un limbo graduado.

Para realizar una polarimetría se ilumina el polarizador con luz monocromática y, estando el tubo sin la sustancia, se hace girar el analizador hasta que, a través de él, se observe oscuridad. Se llena el tubo del líquido cuyo poder rotatorio se quiere determinar, y se hace girar al analizador hasta restablecer, de nuevo, la oscuridad. Este giro, medido en el limbo graduado, nos indica el poder rotatorio de la sustancia.

**PROBLEMAS: 55 al 60.**

### PROBLEMAS

#### A) NATURALEZA ONDULATORIA DE LA LUZ. DISPERSION

1. Las longitudes de onda de las luces «visibles» en el vacío están comprendidas entre 7800 Å (rojo) y 3800 Å (violeta). Calcular, en Hz, las frecuencias de estas radiaciones extremas.

2. Determinar la longitud de onda y la velocidad de propagación de la luz amarillo-verdosa de frecuencia  $5,4 \times 10^{14}$  Hz cuando se propaga en un vidrio de índice de refracción 1,5.

3. El espectro visible de las luces en el aire está comprendido entre las longitudes de onda de la luz violeta, de 380 nm, y la luz roja, de 780 nm. Calcular entre qué longitudes de onda está comprendido el espectro visible en el agua, cuyo índice de refracción es  $4/3$ .

4. Demostrarla homogeneidad de la fórmula:  $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ , que nos da la velocidad de propagación de la luz en un medio.

5. La constante de la ley de Coulomb para el vacío vale:  $K_0 = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$  y la permeabilidad del vacío es:  $\mu_0 = 4\pi/10^7 \text{ N/A}^2$ ; determínese con estos datos la velocidad de la luz en el vacío.

6. A un prisma de vidrio flint de ángulo de refringencia  $30^\circ$ , llega un rayo de luz blanca, de forma que un rayo de luz roja de una determinada longitud de onda, y para el que el índice de refracción es de 1,60, sale normalmente a la segunda cara del prisma. Calcular la desviación que sufre un rayo de luz violeta para el que el índice de refracción vale 1,64.

7. Los índices de refracción de la luz roja y violeta de unas determinadas longitudes de onda, para un prisma de vidrio flint cuyo ángulo de refringencia es  $53^\circ$ , son  $n_R = 1,60$  y  $n_V = 1,64$ . Determinar las desviaciones que experimentan los rayos rojo y violeta cuando sobre el prisma incide un rayo de luz blanca con un ángulo de  $40^\circ 30'$ .

8. Se envía luz blanca sobre un prisma de vidrio crown cuyo ángulo de refringencia es  $60^\circ$ . Si el índice de refracción para unas determinadas longitudes de onda de la luz roja y violeta son respectivamente  $n_R = 1,524$  y  $n_V = 1,543$  y esa luz violeta experimenta la mínima desviación, determinar el ángulo formado por los rayos emergentes de dichos colores.

9. Los índices de refracción de un vidrio síliceo flint para las longitudes de onda de las líneas de Fraunhofer F, D y C son respectivamente 1,632, 1,620 y 1,613; mientras que los de un vidrio síliceo crown son para las mismas líneas son 1,513, 1,508 y 1,504. Calcular: 1) El poder dispersivo de ambos vidrios. 2) La dispersión y la desviación media producidas a las luces correspondientes a las longitudes de onda de las líneas citadas, cuando inciden casi normalmente sobre una de las caras de un prisma de ángulo de refringencia  $7^\circ$  fabricado con vidrio flint. 3) Lo mismo que el apartado anterior pero con el vidrio crown.

10. Un sistema acromático de distancia local imagen 50 cm, consta de una lente biconvexa de vidrio síliceo crown acoplada a una planocóncava de vidrio síliceo flint, cuyo radio  $r_2$  coincide con uno de los radios de la lente biconvexa. Determinar los radios  $r_1$  y  $r_2$  de la lente biconvexa. Tomar los datos necesarios del problema anterior.

11. A una lente plano convexa, de 7,5 cm de radio de curvatura, de vidrio síliceo flint que tiene para la luz roja en el límite del espectro visible un índice de refracción  $n_R = 1,607$  y para la límite del violeta

$n_V = 1,665$ , llega un haz cilíndrico de luz blanca de 10 cm de diámetro, paralelo al eje principal de la lente y coaxial con él. Calcular: 1) El valor de la aberración cromática longitudinal. 2) El diámetro que tendrán el círculo rojo y el violeta en una pantalla colocada en el punto medio de la posición de la aberración cromática longitudinal.

#### B) RADIACIÓN TÉRMICA

12. Una esfera metálica de 3 mm de diámetro se encuentra a una temperatura de 2000 °C; si el poder absorbente de su superficie lo suponemos independiente de la longitud de onda de la radiación y toma el valor 0,75, determinar la potencia total radiada por dicha esfera. ( $\sigma = 5,71 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ ).

13. Hállense las temperaturas para las cuales un cuerpo negro radia más energía para las longitudes de onda correspondientes a los límites de visibilidad (380 nm – 780 nm).

14. Suponiendo al Sol como un cuerpo negro en incandescencia, y sabiendo que emite con mayor intensidad las radiaciones amarillas de unos 4700 Å, determinar su temperatura de emisión.

15. Suponiendo al Sol como un cuerpo negro a la temperatura de 6000 K. Determinar: 1) El poder emisivo total (potencia por metro cuadrado irradiada por el astro). 2) La potencia total irradiada. 3) La frecuencia de la luz más abundante de su espectro. (DATOS: Radio solar =  $6,9 \times 10^5$  km;  $\sigma = 5,71 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ ;  $c = 300\,000$  km/s).

#### C) FOTOMETRÍA

16. ¿Cuántos lm le corresponden a 1 W de flujo radiante de una luz de factor de eficiencia 0,3?

17. Teniendo en cuenta la definición de lumen, calcular el número de W de flujo radiante necesarios para que el flujo luminoso de la luz de 600 nm, cuyo factor de eficiencia es 0,6, sea 1 lm. ¿Cuál es el flujo luminoso producido por 1 W de flujo radiante de esa luz?

18. Calcular el factor de eficiencia de una luz de una determinada longitud de onda, sabiendo que 7 W de flujo radiante producen 1918 lm.

19. Una fuente luminosa proporciona un flujo radiante compuesto por  $R_1 = 30$  W de luz monocromática de factor de eficiencia  $V_1 = 0,6$ ,  $R_2 = 50$  W de luz de  $V_2 = 0,8$  y  $R_3 = 10$  W de luz de  $V_3 = 0,3$ . Calcular: 1) Flujo luminoso de la fuente. 2) Rendimiento fotométrico de la fuente.

20. Una fuente luminosa puntual de 40 W proporciona una intensidad media esférica (intensidad media en todas las direcciones) de 250 cd. Calcular: 1) El flujo luminoso total radiado por la fuente. 2) La eficiencia de la fuente.

21. Una superficie circular de 10 cm de radio recibe un flujo luminoso de 0,2 lm de un foco puntual a una distancia de 5 m de su centro y emite uniformemente en todas las direcciones luz monocromática de 600 nm, que tiene un factor de eficiencia 0,6. La línea que une el foco con el centro de la superficie es perpendicular a la superficie. Calcular: 1) La intensidad del manantial en la dirección de la superficie. 2) El flu-

jo luminoso total emitido por el foco. 3) El flujo radiante total emitido por el foco.

**22.** La iluminación que la luz solar produce, cuando incide normalmente a una superficie situada en la Tierra, es de  $100\,000\text{ lx}$ . Calcular el número de arcos voltaicos de  $4\,000\text{ cd}$  de intensidad luminosa que producen la misma iluminación que el Sol, situándolos a  $2\text{ m}$  de la superficie, en iluminación normal.

**23.** Calcular la distancia necesaria para que  $2\,500$  arcos voltaicos de  $4\,000\text{ cd}$  de intensidad produzcan la misma iluminación que la luz solar, suponiendo que los rayos, en uno y otro caso, inciden normalmente a la superficie iluminada. (La iluminación de la luz solar cuando incide normalmente sobre la Tierra es de  $100\,000\text{ lx}$ .)

**24.** Una bombilla de  $100\text{ cd}$  de intensidad luminosa está a  $2\text{ m}$  de altura sobre el suelo. Calcular la iluminación que produce en un punto de éste, situado en el pie de la vertical que pasa por el centro de la bombilla y en otro punto del suelo distante del primero  $2\text{ m}$ .

**25.** Determinar a qué altura del centro de una mesa redonda de radio  $1\text{ m}$  debe colocarse un foco puntual para que la iluminación en los bordes sea máxima.

**D) INTERFERENCIAS**

**26.** Dos fuentes coherentes de rendija doble (Rendijas de Young) se encuentran separadas entre sí  $0,04\text{ mm}$  y distan de una pantalla  $1\text{ m}$ . Si la franja brillante de segundo orden ( $K=2$ ) se encuentra separada del máximo central  $3\text{ cm}$ , y la luz que se emplea es monocromática, determinar: 1) La longitud de onda de la luz empleada. 2) La distancia entre dos franjas brillantes consecutivas.

**27.** Iluminamos con luz monocromática de  $700\text{ nm}$  una rendija muy delgada practicada en una superficie opaca (ver figura), transformándose por difracción en un foco emisor de luz en todas las direcciones. Los rayos emitidos iluminan dos pequeñas rendijas que están separadas  $0,1\text{ mm}$  y que funcionarán como focos coherentes productores de interferencias en una pantalla que se encuentra a  $40\text{ cm}$  de ellas. Determinése: 1) La posición del primer mínimo contado a partir del centro de la pantalla (punto  $O$  en la Fig.). 2) Posición del décimo máximo (sin contar el central) respecto al mismo punto. 3) Distancia entre dos máximos consecutivos.

**28.** Medimos las posiciones de dos franjas consecutivas de máxima y mínima interferencia producidas por un dispositivo de Young utilizando luz monocromática, obteniéndose los siguientes valores:  $x_{\text{máx}} = 1,50\text{ cm}$ ,  $x_{\text{mín}} = 1,25\text{ cm}$ ; si la distancia entre las rendijas es de  $2 \times 10^{-2}\text{ cm}$  y de ellas a la pantalla es  $2\text{ m}$ , determinar: 1) La longitud de onda de la luz utilizada. 2) El orden de interferencia de cada una de las franjas.

**29.** Iluminamos, con un foco que emite luz compuesta de  $400$  y  $600\text{ nm}$  de longitud de onda, una rendija muy delgada practicada en una superficie opaca, transformándose por difracción en foco emisor de luz en todas las direcciones. Los rayos emitidos iluminan dos rendijas muy estrechas (Rendijas de Young) separadas entre sí  $0,04\text{ mm}$  y que funcionan como focos coherentes productores de interferencias en una pantalla que se encuentra a  $1\text{ m}$  de ellas (ver figura). Encontrar la separación entre las franjas brillantes de cuarto orden ( $K=4$ ) correspondientes a estas longitudes de onda.

**30.** En uno de los focos coherentes de luz correspondiente a la línea roja de Fraunhofer ( $\lambda_0 = 656,281\,6\text{ nm}$ ) de las rendijas de Young, se coloca una celdilla con ventanas de vidrio de espesor  $e = 25\text{ mm}$  y se llena de aire de índice de refracción  $n_a = 1,000\,276$  para la citada luz. Hacemos el vacío en la celdilla e introducimos otro gas en su lugar. Al comparar el sistema de franjas correspondientes al producido por la luz cuando atraviesa la celdilla con el aire, con el que produce cuando contiene el gas, se encuentra un desplazamiento de  $21$  franjas brillantes hacia el lado que contiene la celdilla. Determinése el índice de refracción del gas.

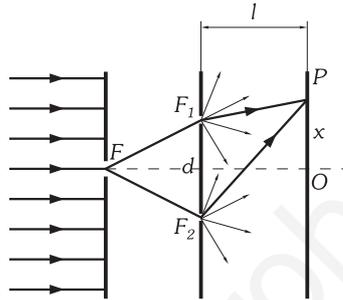
**31.** Determinar el espesor de una pompa de jabón de índice de refracción  $4/3$  para que se produzca interferencia constructiva por reflexión, si está iluminada con luz monocromática de  $650\text{ nm}$ , medida ésta en el vacío.

**32.** Se ilumina normalmente, con luz blanca, una lámina de vidrio de  $1\text{ }\mu\text{m}$  de espesor. Determinar la longitud de onda de las radiaciones que atraviesan la lámina con máxima intensidad. La luz visible tiene longitudes de onda comprendidas entre  $3\,800$  y  $7\,700\text{ Å}$ ; el índice de refracción del vidrio es  $1,5$ .

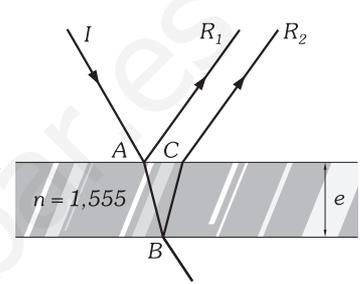
**33.** Sobre una lámina de agua jabonosa de índice de refracción  $4/3$  y  $10^{-3}\text{ mm}$  de espesor incide luz blanca. Determinése las longitudes de onda de las radiaciones luminosas que faltarán en la luz reflejada en dicha lámina.

**34.** Sabiendo que la longitud de onda de una luz roja es de  $667\text{ nm}$  y que su color complementario (amarillo) es de  $500\text{ nm}$ , determinar el espesor de una pompa de jabón, de índice de refracción  $4/3$ , para que iluminada con luz natural se vea roja, cuando se mira en la dirección normal a su superficie.

**35.** Un haz de luz de  $\lambda = 487,99\text{ nm}$ , incide perpendicularmente sobre una lámina delgada de espesor  $e = 1,648 \times 10^{-6}\text{ m}$  que tiene un índice de refracción  $n = 1,555$  y se encuentra rodeada de aire. El haz se parte como se indica en la figura. Calcular la diferencia de fase entre las dos ondas de luz  $AR_1$  y  $CR_2$ .

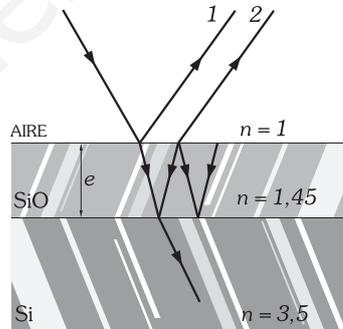


Problema XXVI-27 y 29.

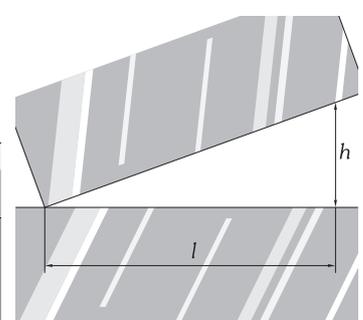


Problema XXVI-35.

**36.** Las celdas solares de silicio tienen un índice de refracción de  $3,5$  y se recubren con una delgada película de monóxido de silicio de índice de refracción  $1,45$ , para reducir al máximo las pérdidas por reflexión (LÁMINAS ANTIRREFLECTANTES. Ver figura). Determinar el espesor mínimo de la película para que no se produzca reflexión de la luz de  $550\text{ nm}$ , perteneciente al centro del espectro visible.



Problema XXVI-36.



Problema XXVI-38.

**37.** La superficie exterior del vidrio de  $1,50$  de índice de refracción que forma el objetivo de una cámara fotográfica se recubre de una película de  $85\text{ nm}$  de espesor de una determinada sustancia transparente, de tal forma que no refleja la radiación azul de  $480\text{ nm}$  de longitud de onda, en incidencia normal de la luz solar. Calcular el índice de refracción de la PELÍCULA ANTIRREFLECTANTE para la radiación indicada, si el espesor dado es el mínimo posible.

**38.** Se introduce, entre los bordes de dos láminas de vidrio superpuestas, otra lámina, de manera que quede formada una cuña de aire. Suponiendo la separación máxima de las láminas  $h = 5 \times 10^{-3}\text{ cm}$  y la longitud  $l = 4\text{ cm}$  (ver figura). Calcular el número de franjas de interferencias que se producirán por refracción en cada  $\text{cm}$  iluminando el sistema normalmente con luz de  $6\,250\text{ Å}$ .

**39.** Una lente plano-convexa de  $1\text{ dp}$  (índice de refracción del vidrio:  $1,5$ ) se coloca sobre una placa de vidrio plana, apoyándola por su cara convexa. Al sistema se le ilumina desde lo alto con una luz de  $5\,000\text{ Å}$ . Calcular el radio de la novena circunferencia del máximo de interferencias, haciendo la observación por reflexión.

**40.** Desplazamos el espejo móvil de un interferómetro de Michelson, dispuesto para que nos produzca franjas de interferencia circulares, una distancia de  $10^{-4}\text{ m}$ ; si brotan  $400$  círculos brillantes y supone-

mos que la iluminación se hace con luz monocromática, determinar la longitud de onda de la luz utilizada.

41. Una lámina delgada de una sustancia transparente de índice de refracción  $n$ , se inserta perpendicularmente al eje de un haz de luz de longitud de onda  $\lambda$  en uno de los brazos del interferómetro de Michelson; si se producen  $N$  brotes al intercalar dicha lámina, calcúlese su espesor.

42. Se inserta una celdilla hueca de 2,5 cm de espesor, con ventanas de vidrio y en la que se ha hecho el vacío, en uno de los brazos de un interferómetro de Michelson iluminado con luz monocromática de  $5892,9 \text{ \AA}$ , ajustándose los espejos hasta obtener un círculo brillante en el centro de la Figura de interferencia. Poco a poco se va introduciendo aire hasta que tiene 1 atm de presión, produciéndose 24,8 brotes. Determinar el índice de refracción del aire.

**E) DIFRACCIÓN**

43. Sobre una rendija de 0,2 mm de anchura incide luz monocromática colimada de 600 nm de longitud de onda. Si la pantalla de observación de la figura de difracción se encuentra en el plano focal de una lente convergente de 0,5 dioptrías, a la que llega la luz después de atravesar la rendija, determinar: 1) La posición de las dos primeras franjas oscuras respecto al punto medio de la franja brillante central. 2) La anchura de la franja brillante central.

44. Una lente se encuentra diafragmada y presenta una abertura de 1 cm de diámetro; su distancia focal es de 50 cm y está iluminada con luz monocromática de 600 nm de longitud de onda. Hallar el radio del disco central del patrón de difracción observado en una pantalla situada en el plano focal de la lente.

45. Determinar el ángulo límite de resolución y el poder separador del telescopio Hale de Monte Palomar para una longitud de onda de 555 nm, sabiendo que su diámetro es de 5,08 m.

46. El radiotelescopio más grande del mundo está en Arecibo (Puerto Rico); ¿cuál es su poder separador para la detección de ondas de radio de 5,2 cm de longitud de onda, sabiendo que su diámetro son 1 000 pies? (1 pie = 0,304 8 m).

47. Si las ondas de un radar tienen una longitud de onda de 3,0 cm, ¿a qué distancia del radar puede separar entre sí dos objetos separados 25 m, si su plato parabólico tiene un diámetro de 4 m?

48. Dos estrellas de igual brillo subtenden un ángulo de un segundo. Suponiendo una longitud de onda media de 555 nm, determinar el diámetro mínimo de la lente de un objetivo de un telescopio para poder resolver estas estrellas.

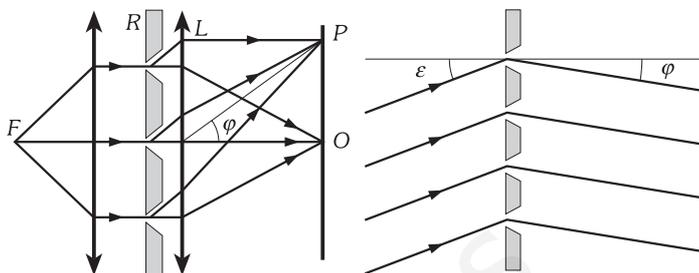
49. Suponiendo que la pupila del ojo tiene un diámetro  $D = 2 \text{ mm}$  y que el índice de refracción del ojo es  $n = 4/3$ , determinar (sin tener en cuenta las características fisiológicas de la retina) para una luz de longitud de onda 555 nm: 1) La agudeza visual del ojo para tal luz. 2) La distancia mínima entre dos puntos situados a 10 m del observador para que su ojo lo resuelva.

50. 1) El foco  $F$  de la figura produce una luz monocromática de 416 nm que, una vez colimada (onda plana), se hace incidir sobre una red de difracción  $R$  y una vez focalizada vemos el primer máximo de interferencia a 21,3 cm del centro  $O$  de la pantalla; si la lente focalizadora  $L$  tiene 1 dioptría, calcular el número de trazos por mm que tiene la red. 2) Iluminamos la red con una luz de longitud de onda desconocida y observamos la formación del primer máximo a 24,9 cm de  $O$ . Calcular la longitud de onda de la luz.

51. Determinar la anchura angular de la figura del espectro visible para el primero y segundo orden, que produce una red de difracción de

500 líneas por milímetro. Las longitudes de onda del espectro las supondremos comprendidas entre 370 nm y 770 nm.

52. Determinar las condiciones de máximo y mínimo cuando el ángulo de incidencia de la luz colimada (ondas planas) monocromática que incide sobre una red de difracción es  $\epsilon \neq 0$ , como se indica en la figura.



Problema XXVI-50 y 51.

Problema XXVI-52.

53. Determinar la separación angular entre dos líneas intensas del espectro del sodio de primer orden, correspondientes a las radiaciones 589,592 nm y 588,995 nm de longitud de onda, producido por una red de difracción que tiene 20 000 líneas en una longitud de 4 cm, incidendo la luz normalmente a la red.

54. Calcular el número de líneas que tiene que tener una red de difracción para que resuelva las dos líneas amarillas del espectro de primer orden del sodio, sabiendo que sus longitudes de onda son 589,592 nm y 588,995 nm, siendo la incidencia normal.

**F) POLARIZACIÓN DE LA LUZ**

55. Calcular el ángulo de incidencia con que debe llegar un rayo de luz natural para polarizarse totalmente por reflexión, en un cristal de índice de refracción 1,5.

56. Determinése la altura del Sol sobre el horizonte para que al reflejarse sus rayos sobre una piscina con agua (índice de refracción: 4/3) estén totalmente polarizados.

57. Las direcciones de polarización de dos láminas polarizantes son paralelas, de forma que para una determinada posición de ambas se obtiene intensidad máxima. Determinése el ángulo que tenemos que girar una de las láminas para que la intensidad se reduzca a la cuarta parte.

58. Se observa con un polarímetro una disolución de sacarosa; su poder rotatorio es de  $5^\circ$ . La longitud del tubo es de 1 dm. El poder rotatorio específico de la sacarosa es  $66,5 \text{ cm}^3/\text{g} \cdot \text{dm}$ . Calcular la concentración en g/l.

59. Se disuelven 10 g de una mezcla de sacarosa y maltosa hasta obtener  $50 \text{ cm}^3$  de disolución. El poder rotatorio de la disolución es  $16,9^\circ$ . Calcular la proporción de los dos componentes en la mezcla. Poderes rotatorios específicos de la sacarosa y maltosa:  $66,5$  y  $138 \text{ cm}^3/\text{g} \cdot \text{dm}$ , respectivamente. La longitud del tubo es 1 dm.

60. Explicar la teoría del cinematógrafo en relieve, sabiendo las siguientes cuestiones: 1) El tomavistas toma dos películas de la escena, estando situados los dos objetivos en tubos paralelos a la distancia de los ojos humanos. 2) Las dos fotografías se proyectan superpuestas en la pantalla, pasando los haces luminosos por láminas polaroides con sus ejes formando ángulos de  $+45^\circ$  y  $-45^\circ$  con la vertical. 3) El espectador ve la escena proyectada a través de gafas polaroides con sus ejes formando ángulos con la vertical de  $+45^\circ$  (una lámina) y  $-45^\circ$  (la otra).

# CAPÍTULO XXVII

## CINEMÁTICA Y DINÁMICA RELATIVISTAS

### A) CINEMÁTICA RELATIVISTA

#### XXVII – 1. El éter como soporte y transmisor de la luz

Se ha visto, a propósito del movimiento relativo, que las leyes de la Mecánica son invariantes en una transformación de Galileo, entre sistemas inerciales. Sin embargo, no hemos sido capaces de determinar un primer sistema inercial fijo al que referir en última instancia cualquier movimiento.

Los físicos del siglo XIX creyeron encontrar tal *sistema absoluto* en lo que se denominó «éter lumínico» o simplemente «éter». Todos los movimientos ondulatorios estudiados hasta esa época (olas en el agua, sonido,...) necesitaban de un soporte material para propagarse, así que, cuando los trabajos de Huygens, Young y Fresnel asentaron el carácter ondulatorio de la luz, no se dudó en definir el éter como el medio en el que se transmiten las ondas luminosas. Más tarde el papel del éter se extendió a fenómenos gravitatorios y electromagnéticos; de hecho, la luz visible no es más que una parte del espectro de las ondas electromagnéticas, que incluyen a las ondas de radio, las luces infrarroja y ultravioleta o los rayos X y gama.

El ÉTER se definió como una sustancia inmaterial, fija, que se extiende por todo el Universo y que puede fluir libremente a través de todos los cuerpos materiales que se mueven en su seno.

Al interpretar las ondas luminosas como oscilaciones del éter, se concluyó que su velocidad con respecto a éste es constante, dependiente únicamente de las propiedades del éter e independiente de la velocidad de la fuente emisora. Esta independencia, como veremos, es de gran importancia en todos los trabajos que se realizaron tendentes a encontrar un sistema de referencia absoluto; por ello, de las muchas justificaciones que se le hicieron a finales del siglo XIX y principios del XX, comentamos brevemente una significativa.

Supongamos que observamos un sistema de dos estrellas de las que, por simplificar, consideraremos una de gran masa, fija, y la otra mucho menor girando en torno a la primera, en trayectoria circular, con velocidad  $V$  como se indica en la Fig. XXVII-1. Si la velocidad de la luz se sumase a la de la fuente, la luz enviada hacia nosotros desde la posición A viajaría con velocidad  $c - V$ , y la enviada posteriormente desde B con  $c + V$ . Suponiendo suficiente nuestra distancia a ese sistema doble, el rayo de luz emitido desde B puede adelantar al emitido desde A, e incluso a los emitidos desde A en revoluciones anteriores de la estrella pequeña. Según esto, observando un sistema lo bastante alejado, podríamos ver al mismo tiempo varias posiciones distintas de una misma estrella. El que nunca se haya observado este fenómeno nos confirma la independencia de la velocidad de propagación de la luz respecto de la velocidad de la fuente emisora. Dicha velocidad, medida por distintos procedimientos resulta ser de aproximadamente 300 000 km/s, más concretamente, de  $(2,997925 \pm 0,000003) \times 10^{10}$  cm/s.

La constancia de la velocidad de la luz respecto del éter debería proporcionar un método para medir movimientos absolutos. En efecto, el éter está en reposo y llena todo el Universo, por otro lado la luz es una vibración de ese éter, así que la medida de la velocidad de la luz que haga un observador en movimiento respecto del éter dependerá de su propio movimiento.

En 1875, Maxwell propuso una experiencia para medir el movimiento absoluto de la Tierra. Puesto que ésta gira en torno al Sol a una velocidad aproximada de 30 km/s, aun en el supuesto de que el Sol estuviera fijo respecto del éter, la Tierra ha de encontrarse con lo que se dio en llamar un «viento de éter», de dicha velocidad y en sentido contrario, que hará que un observador en su superficie obtenga distintos valores para la velocidad de la luz si la mide en distintas direcciones respecto del viento de éter.

Por supuesto que podría ocurrir que en una medida hecha en un instante dado, fuese precisamente la Tierra la que estuviera en reposo respecto del éter y no se detectase su viento; pues bien, la misma medida al cabo de un tiempo, en una posición distinta del planeta, debería ponerlo de manifiesto.

#### XXVII – 2. Experiencia de Michelson y Morley

En 1881, Albert Abraham Michelson, que sería en 1907 el primer físico americano en recibir el premio Nobel, realizó por primera vez un experimento para detectar el viento de éter fracasando en el intento. Sin embargo, debido a lo rudimentario de su primer equipo experimental, tenía razones para pensar que con instrumentación más sensible podría corregir su primer «fracaso». En 1887, en colaboración con Edward Williams Morley, lo intentaron de nuevo.

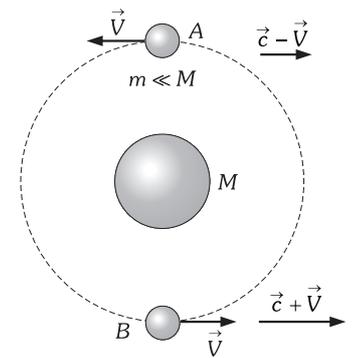


Fig. XXVII-1.— Sistemas de dos estrellas, una que suponemos fija de gran masa  $M$  y la otra de masa  $m \ll M$  girando en torno a la primera.

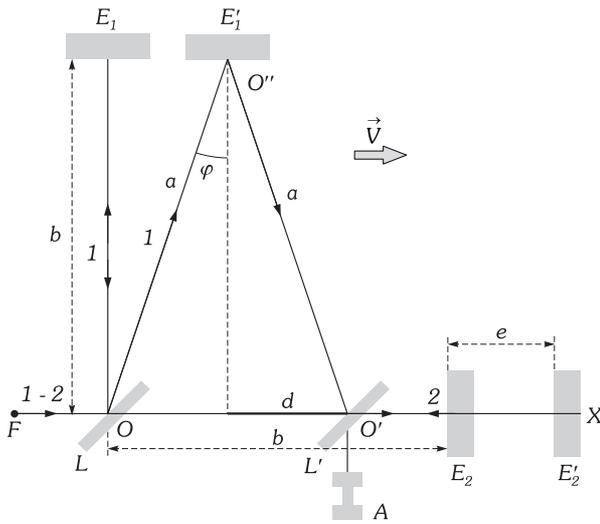


Fig. XXVII-2.- Experiencia de Michelson y Morley.

No se trataba de hacer una medida directa de la velocidad de la luz, sino de superponer dos rayos procedentes de una misma fuente y que han viajado en direcciones distintas, para obtener una figura de interferencias, consistente en franjas iluminadas y oscuras alternadas (ver párrafo XXVI-33). Si, una vez establecida una figura de interferencias, se hace girar el aparato cambiando su orientación respecto del viento de éter, cualquier cambio en la velocidad relativa de los rayos deberá traducirse en un desplazamiento de las franjas de interferencia.

El aparato empleado en la experiencia se esquematiza en la figura. XXVII-2 en la que  $F$  es un foco luminoso que emite radiación en la dirección  $FX$  alineada con la de traslación de la Tierra;  $L$  es una placa semiplataada, y los espejos  $E_1$  y  $E_2$  están colocados a igual distancia de  $L$ . Un rayo de luz (1-2) al llegar a ella en parte se refleja (rayo 1) y en parte se refracta (rayo 2). Por el anteojo  $A$  se observarán franjas de interferencia al estar los rayos 1 y 2 ligeramente fuera de fase.

Si el aparato, está en reposo en el «éter», los tiempos que emplea en ir la luz de  $O$  a  $E_1$  y vuelta, y el que emplea en ir de  $O$  a  $E_2$  y vuelta deberán ser exactamente iguales, pero moviéndose hacia la derecha con velocidad  $V$  deberá de haber una diferencia de tiempos, puesto que las trayectorias de los rayos son diferentes. Estudiemos estas diferencias.

**Trayectoria del rayo 1:** del punto de incidencia  $O$  va al espejo  $E'_1$  reflejándose en él y alcanzando a la lámina semiplataada, que mientras tanto ha avanzado con la Tierra de  $O$  a  $O'$ ; atraviesa a tal lámina ( $L'$ ) y llega al anteojo  $A$ .

El tiempo empleado por la luz en el trayecto:  $OO''O' = 2a = s_1$ , es el mismo que el transcurrido en el movimiento de la Tierra de  $O$  a  $O'$ :  $OO' = 2d$ , por tanto, si  $c$  es la velocidad de la luz y  $V$  la de traslación de la Tierra se verifica:

$$\frac{s_1 = 2a = ct}{2d = Vt} \Rightarrow \frac{a}{d} = \frac{c}{V}$$

y si  $\varphi$ , es el ángulo que forman  $a$  y  $b$  obtenemos:  $\text{sen } \varphi = \frac{d}{a} = \frac{V}{c} \wedge \text{cos } \varphi = \frac{b}{a}$

$$\text{luego: } s_1 = 2a = \frac{2b}{\text{cos } \varphi} = \frac{2b}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 \varphi}} = \frac{2b}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{2b}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

a  $V/c$ , velocidad de un cuerpo o sistema, dividido por la velocidad de la luz, lo representaremos siempre por  $\beta$ .

**Trayectoria del rayo 2:** del punto de incidencia  $O$  va al espejo  $E_2$  ( $OE_2$  es igual a la altura del triángulo  $OO''O'$  a la que hemos llamado  $b$ ) que se ha trasladado, mientras la luz avanza hasta  $E'_2$  acompañando a la Tierra en su movimiento. Igualando los tiempos empleados por la luz y la Tierra en su avance obtenemos:

$$\frac{b + e}{c} = \frac{e}{V} \Rightarrow e = (b + e)\beta$$

y sumando  $b$  a los dos miembros de esta igualdad:

$$b + e = (b + e)\beta + b \Rightarrow b + e = \frac{b}{1 - \beta} \tag{1}$$

El rayo retorna de  $E'_2$  a  $O'$  (nueva posición de la lámina) para reflejarse en ella y penetrar en el anteojo  $A$ . El tiempo total empleado en el trayecto  $s_2 = OE'_2O'$ , es el mismo que el transcurrido en el desplazamiento  $OO'$  de la lámina:

$$\frac{(b + e) + (b + e - 2d)}{c} = \frac{2d}{V} \Rightarrow d = \frac{b + e}{V + c} V$$

y utilizando el valor de  $b + e$  calculado en (1) obtenemos:  $d = \frac{b\beta}{(1 - \beta)(1 + \beta)}$  (2)

El trayecto total  $s_2$  de ida y vuelta de la luz es:  $s_2 = (b + e) + (e + b - 2d) = 2(b + e) - 2d$  y sustituyendo los valores obtenidos en (1) y (2) nos queda:

$$s_2 = \frac{2b}{1 - \beta} \left[ 1 - \frac{\beta}{1 + \beta} \right] = \frac{2b}{(1 - \beta)(1 + \beta)} = \frac{2b}{1 - \beta^2}$$

El cociente entre los caminos  $s_2$  y  $s_1$  es:  $\frac{s_2}{s_1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

y al ser:  $\beta < 1 \Rightarrow 1 > \sqrt{1 - \beta^2}$

entonces se tendrá que verificar:  $s_2 > s_1$

y en consecuencia el tiempo empleado en el trayecto  $s_2$  debería ser mayor que en el  $s_1$ .

Si se gira ahora el aparato  $90^\circ$  de forma que el trayecto  $LE_1$  coincida con la dirección de  $V$ , el rayo influenciado por la traslación de la Tierra es el 1 y no el 2, y el tiempo invertido por el rayo 1 debería, en consecuencia, ser mayor que el tiempo empleado por el 2. Por tanto durante el giro debería poderse apreciar cómo las franjas luminosas iniciales se desplazan para construir una nueva figura de interferencias.

Cuando, en 1887, Michelson y Morley realizaron el experimento, no pudieron observar ningún cambio en las franjas de interferencia. Girasen el aparato  $90^\circ$  ó  $180^\circ$  en un sentido u otro, el interferómetro no registraba ningún cambio significativo, es decir, «no se apreciaba ningún efecto del viento de éter», y el tiempo empleado por la luz era el mismo en el recorrido largo y en el corto.

La sorpresa ante este resultado fue tan grande entre los físicos, que se pusieron inmediatamente a buscar explicaciones que justificasen la no aparición del viento de éter.

### XXVII – 3. Interpretación de Lorentz y Fitzgerald del resultado de la experiencia

La primera interpretación que el propio Michelson hizo de sus resultado fue que un cuerpo tan pesado como la Tierra podría arrastrar consigo una capa de éter, con lo que el observador situado en la superficie terrestre no notaría el viento de éter. Experimentos posteriores, incluso del propio Michelson, hicieron desestimar esta idea.

Por su parte, un físico irlandés, Fitzgerald, y uno holandés, Lorentz, propusieron independientemente otra explicación, que se conoce como la «CONTRACCIÓN DE LORENTZ-FITZGERALD», suponiendo que: «*Todo cuerpo que se mueve con relación a un sistema a velocidad  $V$  experimenta una contracción de longitud en la dirección de su velocidad*»; su longitud en tal dirección observada desde el sistema fijo es:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

$l_0$  es la longitud del cuerpo medida en el sistema a la velocidad  $V$ .

Si en la experiencia anterior el trayecto  $s_2$  (recorrido en la dirección de traslación de la Tierra) fuese realmente:

$$s_2 = s_{02} \sqrt{1 - \beta^2}$$

el cociente  $s_2/s_1$ , tomaría el valor:  $\frac{s_2}{s_1} = \frac{2b}{1 - \beta^2} \sqrt{1 - \beta^2} : \frac{2b}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1$

lo que daría tiempos de recorrido iguales para ambos rayos.

La explicación de Fitzgerald, expresada matemáticamente por Lorentz, es que el viento de éter ejerce una presión sobre los objetos haciendo que se contraigan en un factor  $\sqrt{1 - \beta^2}$  en la dirección del movimiento. Para verificar esto se construyó un nuevo dispositivo, pero con los trayectos 1 y 2 muy diferentes. La diferencia de tiempos de recorrido debería, de acuerdo con la teoría de la contracción, modificarse al girar el aparato. Una vez más no se pudieron observar dichos cambios.

Sin embargo Lorentz ya había previsto que este tipo de comprobaciones dieran ese resultado y había introducido en su teoría un hecho importante, supuso que el viento de éter, además de contraer los cuerpos, también atrasa los relojes. Con esto concluyó que cualquier experimento realizado para medir la influencia del viento de éter en la velocidad de la luz dará siempre resultados negativos.

Estuvo encaminado hacia la formulación de la Relatividad Especial, de hecho introdujo los conceptos de contracción de la longitud, retraso de los relojes, tiempo local, masa variable... pero se quedó a medio camino, intentando una interpretación física de sus cálculos matemáticos que, «de acuerdo con el sentido común», requería de un viento de éter que alterase la «longitud absoluta» de un objeto o el «tiempo absoluto» común a todo el Universo.

En este punto no se debe pasar por alto la contribución de otros científicos al desarrollo de lo que será la teoría de la Relatividad Restringida (o Relatividad Especial) de Einstein. Como ejemplo citaremos a Henri Poincaré que en 1904, en un «Congreso Internacional de las Artes y las Ciencias» celebrado con motivo de la Exposición Internacional de St. Louis, y haciendo una síntesis del estado de la Física en esos días, decía frases como las siguientes.

«... De estos resultados, si llegan a confirmarse, surgiría una mecánica completamente nueva, que, ante todo, vendría caracterizada por el siguiente hecho: ninguna velocidad podría sobrepasar la de la luz, igual que ninguna temperatura puede sobrepasar el cero absoluto, porque los cuerpos opondrían una inercia creciente a las causas que tendiesen a acelerar su movimiento, y esta inercia se haría infinita al aproximarse a la velocidad de la luz.

Pero tampoco en el caso de un observador que se viera transportado en una traslación sin él sospecharlo podría haber velocidades aparentes superiores a la velocidad de la luz; pues entonces

habría una contradicción, si recordamos que este observador no utilizaría los mismos relojes que un observador fijo, sino, de hecho, relojes que marcan el tiempo local...

... Quizás debamos construir toda una nueva mecánica que hasta ahora sólo hemos logrado entrever y en la que, al aumentar la inercia con la velocidad, la velocidad de la luz se convertiría en un límite infranqueable.

La mecánica ordinaria, más simple, persistiría en calidad de primera aproximación, pues seguiría siendo cierta para velocidades no demasiado grandes, de suerte que bajo la nueva dinámica seguiríamos encontrando la antigua».

#### XXVII – 4. Postulaciones de la Relatividad Restringida

En 1905, Albert Einstein publicó tres artículos, en la revista *Annalen der Physik*, que hicieron historia en la Física. Por uno de ellos sobre la interpretación cuántica del efecto fotoeléctrico se le otorgó, en 1921, el Premio Nobel de Física. En el titulado «Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento» sentó las bases de la Teoría Especial de la Relatividad.

La interpretación, a la luz de dicha teoría, del resultado de la experiencia de Michelson y Morley fue más radical que las antes expuestas: *en la experiencia no se detectaron efectos del viento de éter porque, sencillamente, no existe tal viento de éter*. En realidad, Einstein no negó la existencia del éter pero consideró que, caso de que exista, es inutilizable como sistema de referencia para la medida de movimientos uniformes\*.

Para Einstein la interpretación de los resultados requiere un cambio en los conceptos clásicos de espacio y tiempo; un cambio que atenta contra nuestro caparazón de sentido común desarrollado sobre experiencias cotidianas de velocidades inmensamente pequeñas comparadas con la de la luz, y sobre la consideración de un «ahora» común para todo el Universo.

*La clave de la relatividad especial es que no tiene sentido hablar de longitud o de tiempo absolutos*. La longitud de un objeto y el tiempo entre dos sucesos son simplemente el resultado de una medida, y la medida varía con la velocidad relativa del observador y del objeto.

Hay que hacer notar que en realidad Einstein estaba poco relacionado con las experiencias de Michelson y Morley. Su preocupación era que las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo, sobradamente probadas, no eran invariantes ante una transformación de Galileo, no eran consistentes con la física clásica.

Los cambios necesarios para resolver las contradicciones aparecidas en distintos experimentos, los basó Einstein en los dos postulados fundamentales de su teoría, el principio de relatividad y la constancia de la velocidad de la luz:

1. *«Todas las leyes físicas son iguales en todos los sistemas inerciales de coordenadas».*
2. *«La velocidad de la luz en el vacío es constante para todos los sistemas inerciales de referencia».*

Se le llama a esta teoría «DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL O RESTRINGIDA» porque, en 1915, desarrolló una *«teoría generalizada de la relatividad»* que considera también los sistemas de referencia no inerciales y los campos gravitatorios.

El primer postulado extiende el principio de relatividad de Galileo de las leyes de la mecánica a todas las leyes físicas, e implica que *no es posible, mediante ningún experimento realizado en un sistema, distinguir un sistema inercial de otro, ninguno tiene propiedades especiales; o bien que «es imposible conocer el movimiento rectilíneo y uniforme de un sistema por cualquier clase de experiencias realizadas en su interior».*

El segundo postulado explica el resultado negativo de la experiencia de Michelson y Morley, puesto que *la velocidad de la luz es la misma en todas las direcciones*, cualquiera que sea el movimiento de traslación de la Tierra.

Por otro lado, la constancia de  $c$  contradice la regla de suma de velocidades de la mecánica newtoniana; si un observador se acerca a un foco luminoso a  $200\,000$  km/s y mide la velocidad de la luz que recibe de él, no encuentra como resultado  $300\,000 + 200\,000 = 500\,000$  km/s, sino  $300\,000$  km/s, y si se aleja del foco a la misma velocidad no mide para la luz que le adelanta  $100\,000$  km/s sino los mismos  $300\,000$  km/s.

Einstein atribuyó estas contradicciones a la interpretación clásica del espacio y el tiempo, había que buscar ecuaciones de transformación entre sistemas inerciales, distintas de las de Galileo, bajo las cuales la velocidad de la luz fuera invariante.

El problema matemático ya había sido resuelto unos años antes por Lorentz, aunque, como hemos visto, él mismo no fuera capaz de darle una interpretación física correcta a sus fórmulas.

\* En 1965, Robert Dicke y sus colaboradores de la Universidad de Princeton, detectaron una radiación de microondas, con una temperatura de unos  $3^\circ$  K, que constituye los restos enfriados de parte de la radiación que se produjo en el Big Bang originador del Universo. Es completamente isotrópica, lo cual puede permitir, midiendo el corrimiento hacia el rojo en distintas direcciones, definir el movimiento de la Tierra respecto de ella. Actualmente se están haciendo experiencias a este respecto, pero no nos consta que haya ningún resultado determinante. Hay que resaltar que la medida de la velocidad de la Tierra respecto del Universo no supone invalidación de la Teoría de la Relatividad, las expresiones relativistas son las mismas si es el Universo entero el que se mueve respecto de una Tierra fija.

**XXVII – 5. Las ecuaciones de transformación de Lorentz**

Si la transformación de Galileo:

$$\begin{aligned} x &= x' + Vt \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned}$$

no es la correcta ¿cómo tiene que ser la transformación? Estudiemos la solución matemática al problema sometiéndole a las condiciones físicas relativistas.

1.º Supongamos que en dos sistemas inerciales S (O X Y Z) y S' (O' X' Y' Z'), en los que t y t' son los tiempos correspondientes, en el instante inicial es: t = t' y los orígenes O y O' coinciden.

2.º A las ecuaciones de transformación tenemos que exigirles que sean lineales (no cuadráticas por ejemplo) ya que a un acontecimiento en S le tiene que corresponder un solo acontecimiento en S' (y no dos como ocurriría si fueran cuadráticas). Teniendo en cuenta lo anterior las ecuaciones de transformación deben escribirse:

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{14}t' \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{24}t' \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + a_{34}t' \\ t &= a_{41}x' + a_{42}y' + a_{43}z' + a_{44}t' \end{aligned} \tag{3}$$

3.º Supongamos que el sistema S' está animado de un movimiento de traslación uniforme con velocidad V según el eje OX con relación a S (Fig. XXVII-3), teniendo en cuenta que cualesquiera que sean x', z' y t' se tendrá que verificar: y = 0 ⇒ y' = 0

y que cualesquiera que sean x' y' y t', tendrá que verificarse: z = 0 ⇒ z' = 0

obtenemos:  $a_{21} = a_{23} = a_{24} = a_{31} = a_{32} = a_{34} = 0$

Por otra parte las ecuaciones en x y t tienen que ser independientes de y' y z' puesto que todos los puntos de un plano perpendicular a OX son equivalentes, con lo que:  $a_{12} = a_{13} = a_{42} = a_{43} = 0$  con estas condiciones las ecuaciones (3) quedan:

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{14}t' \\ y &= a_{22}y' \\ z &= a_{33}z' \\ t &= a_{41}x' + a_{44}t' \end{aligned} \tag{4}$$

4.º Las relaciones entre y e y' así como entre z y z' tienen que ser independientes de la velocidad; con lo que si se invierten los papeles de los sistemas de referencia, (principio de relatividad), deben seguir siendo las mismas por razón de simetría, es decir:  $y' = a_{22}y$   $z' = a_{33}z$

luego al compararlas con la 2ª y 3ª de las (4) nos queda:  $a_{22} = a_{33} = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = y' \\ z = z' \end{cases}$

5.º Un suceso que se realiza en S y en el plano YZ, es decir, en un punto en que x = 0, y en cualquier instante, con respecto a S' se estará realizando en:  $x' = -Vt'$  sustituyendo en la 1ª de las (4) nos quedará:  $0 = -a_{11}Vt' + a_{14}t' \Rightarrow a_{14} = Va_{11}$

luego:  $x = a_{11}(x' + Vt')$  (5)

Invertiendo el papel de los sistemas y puesto que la velocidad del sistema S con relación a S' es -V en la dirección OX; se ha de cumplir:

$$x' = a_{11}(x - Vt) \tag{6}$$

6.º Pongamos ahora la condición de que una onda luminosa esférica abandona el origen común en el tiempo inicial común t = t' = 0; aplicando el principio de la invariancia de la velocidad de la luz c respecto de los sistemas de referencia y para cualquier instante posterior exige que se cumpla:

$$c = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{t} = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{t'}$$

o lo que es lo mismo:  $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$  (7)

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c'^2 t'^2 \tag{8}$$

que nos indican que la ecuación del frente de onda es la misma en ambos sistemas; en particular en OX y OX' se tendrá:

$$x = ct \quad x' = ct'$$

sustituyendo en (5) y (6) nos quedan:  $ct = a_{11}(ct' + Vt')$

$$ct' = a_{11}(ct - Vt) = a_{11}t(c - V)$$

multiplicándolas miembro a miembro y simplificando:

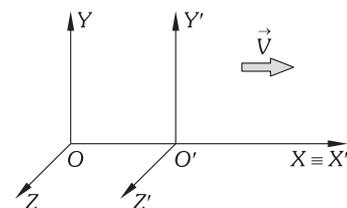


Fig. XXVII-3.- El sistema S' (X' Y' Z') está animado de un movimiento de traslación uniforme con velocidad V en la dirección del eje OX con relación a S (X Y Z).

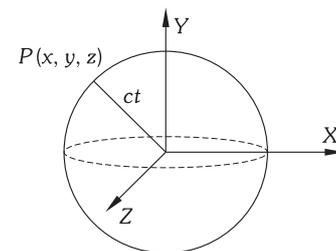


Fig. XXVII-4.- Onda esférica abandonando el origen común en el tiempo inicial t = t' = 0.

$$c^2 = a_{11}^2 (c^2 - V^2) \Rightarrow a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (9)$$

que sustituida en (5) conduce a:

$$x = \frac{x' + V t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (10)$$

y si sustituimos la (9) y (10) en la (6):

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left[ \frac{x' + V t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} - V t \right] \Rightarrow t = \frac{t' + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

luego las fórmulas de la transformación de Lorentz son:

$$\begin{cases} x = \frac{x' + V t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \gamma (x' + V t') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma \left( t' + \frac{V}{c^2} x' \right) \end{cases} \quad (11)$$

con:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Para tener las transformaciones inversas basta sustituir  $V$  por  $-V$  y  $x', y', z', t'$  por  $x, y, z, t$ , obteniéndose:

$$\begin{cases} x' = \frac{x - V t}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{V}{c^2} x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \gamma (x - V t) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma \left( t - \frac{V}{c^2} x \right) \end{cases} \quad (12)$$

Estas ecuaciones de transformación de coordenadas entre dos sistemas inerciales\* constituyen la formulación matemática de los principios de relatividad; podemos enunciar pues:

«Las leyes físicas son invariantes bajo una transformación de Lorentz».

Si una formulación matemática de un fenómeno no es invariante al aplicarle la transformación de Lorentz podemos asegurar que básicamente es errónea; en el mejor de los casos constituirá una aproximación válida en determinadas condiciones. Tal es el caso de la transformación de Galileo, que coincide con la de Lorentz cuando el cociente  $V^2/c^2$  se aproxima a cero, o, lo que es lo mismo, cuando  $1 - V^2/c^2$  es prácticamente igual a 1. Por lo tanto, podremos usar aquella siempre que nuestros instrumentos de medida sean incapaces de distinguir entre  $1 - V^2/c^2$  y 1.

«Si la velocidad del sistema móvil es muy pequeña comparada con la de la luz, los cocientes  $V/c^2$  y  $V^2/c^2$  son prácticamente nulos, y, eliminándolos de las ecuaciones de Lorentz, volvemos a encontrar las transformaciones de Galileo».

Analizaremos a continuación algunas consecuencias de las ecuaciones de transformación de Lorentz.

### XXVII - 6. Contracción de Lorentz-Fitzgerald

Consideremos una regla colocada en la dirección  $O'X'$  del sistema  $S'$ , respecto del que está en reposo. En este sistema mide  $l_0$  unidades de longitud, teniendo sus extremos en  $x'_1$  y  $x'_2$ , es decir:  $l_0 = x'_2 - x'_1$ .

Si deseamos medir la longitud de esta regla desde el sistema  $S$ , tendremos que determinar las abscisas  $x_1$  y  $x_2$  de los extremos de la regla en un mismo instante  $t$ . El observador de  $S$ , dirá que:  $l = x_2 - x_1$ . De (12) obtenemos:

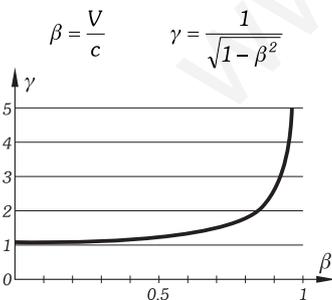


Fig. XXVII-5.- Representación gráfica de  $\gamma$  en función de  $\beta$  que nos indica que cuando  $\beta$  tiende a cero el valor de  $\gamma$  tiende a uno.

\* Dejamos para el lector la comprobación de que aplicando (11) a la ecuación (7) se obtendrá (8), comprobando de ésta forma que la ecuación que describe el frente de ondas es invariante para todos los sistemas inerciales.

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

de donde, para el observador del sistema S la longitud  $l$  de la regla en movimiento será:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2} \tag{13}$$

y como:  $\sqrt{1 - \beta^2} < 1 \Rightarrow l < l_0$

«La distancia entre dos puntos fijos en un sistema móvil ( $S'$ ), estando situados tales puntos en la dirección de la velocidad con que tal sistema se desplaza en relación a otro ( $S$ ), es menor observada desde el sistema ( $S$ ) que observada desde el sistema ( $S'$ )».

Si repetimos el razonamiento desde el punto de vista del observador  $S'$ , considerado en reposo, obtendremos que medirá, para una regla solidaria a  $S$ , menor longitud que el propio observador  $S$ .

La variación en la medida de longitudes, dependiente del sistema desde el que realicemos la medida, constituye la negación de la longitud como magnitud absoluta.

**XXVII – 7. Dilatación de los intervalos temporales.**

Supongamos un fenómeno que se produce en un punto  $P$  de un sistema  $S'$  y entre dos instantes  $t'_1$  y  $t'_2$ . El observador ligado a  $S'$  mide un intervalo de tiempo  $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ .

Un observador  $S$ , respecto del que  $S'$  se mueve con velocidad  $V$  según el eje  $OX$ , medirá un intervalo  $\Delta t = t_2 - t_1$ . En virtud de la transformación de Lorentz, tendremos:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + \frac{V}{c_2} x'_p}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{t'_1 + \frac{V}{c_2} x_p}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{14}$$

Por ser  $\sqrt{1 - \beta^2} < 1$  se tiene:  $\Delta t > \Delta t'$ . El observador  $S$  mide como duración del fenómeno un intervalo de tiempo mayor que el medido por el observador  $S'$  ligado al fenómeno. Si cambiamos el experimento de sistema, será el observador  $S'$  el que mide un intervalo de tiempo mayor.

«La duración de un fenómeno depende del estado de movimiento relativo del lugar en que se produce respecto del observador».

Como una explicación a estos hechos, supongamos que un observador desde  $S$  ve a otro que se mueve con el sistema  $S'$ ; las acciones del hombre en  $S'$  son contempladas por el observador en  $S$  como si se tratase de una película en «cámara lenta», mientras que para el hombre en  $S'$  todo ocurre normalmente.

Tales fenómenos constituyen la negación de la idea del tiempo como magnitud absoluta.

Si el fenómeno ocurre en un punto fijo de un sistema, el tiempo medido por el observador ligado al sistema se le llama TIEMPO PROPIO de ese punto.

La dependencia de la medida de los intervalos de tiempo es una consecuencia directa del postulado de la constancia de la velocidad de la luz. Lo podemos comprobar con la experiencia ideal de la Fig. XXVII-7. Desde los puntos  $y = y'$  de ambos sistemas se emiten sendos rayos luminosos hacia abajo, en los instantes  $t = t' = 0$  en que los orígenes de ambos sistemas coinciden. Ambos rayos se reflejan en espejos situados en el origen del sistema y vuelven al punto de partida. Para el observador  $S$ , su rayo recorre una trayectoria de bajada y subida, y del otro sistema una trayec-

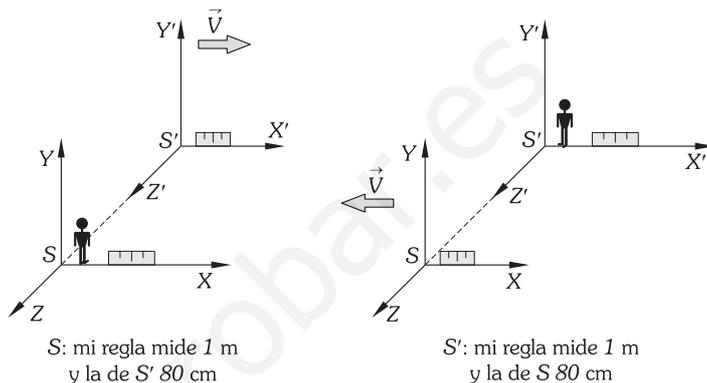


Fig. XXVII-6.- Las dos afirmaciones son ciertas.

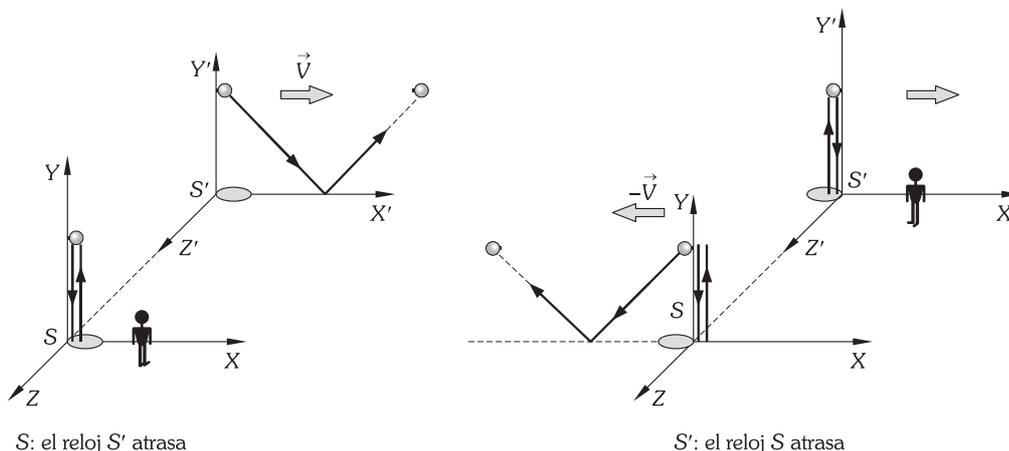


Fig. XXVII-7.- Las dos afirmaciones son ciertas.

toria en forma de  $V$ . Puesto que mide la misma velocidad de propagación para ambos rayos, cuando el suyo vuelva arriba verá que el del otro sistema aún no habrá completado la trayectoria. Si llamamos a este dispositivo «un reloj»,  $S$  dirá que el reloj de  $S'$  se retrasa.

**XXVII – 8. Carácter relativo de la simultaneidad.**

Dos sucesos que para un observador son simultáneos no lo son para otros que se mueven respecto de él, e incluso, si entre los sucesos no hay una relación de causa a efecto, el orden en que ocurren puede ser distinto para dos observadores.

La formulación matemática del carácter relativo de la simultaneidad, la podemos obtener de la transformación de Lorentz. En efecto: sean dos sucesos que ocurren en  $x_1$  y  $x_2$ , en el instante  $t$  para un observador  $S$ . Para el observador  $S'$  ocurren en  $x'_1$  y  $x'_2$  y en instantes  $t'_1$  y  $t'_2$  tales que:

$$t'_2 = \frac{t - \frac{V}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad t'_1 = \frac{t - \frac{V}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

el intervalo de tiempo medido por  $S'$  es: 
$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{\frac{V}{c^2} (x_1 - x_2)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

es decir, sólo serán también simultáneos para él si ocurren en el mismo punto  $x_1 = x_2$ ; ahora bien, si  $x_1 \neq x_2$  ambos sucesos están separados en el tiempo para  $S'$ , pudiendo preceder uno a otro según que sea  $x_1 > x_2$  o  $x_2 > x_1$ , y que  $V$  vaya en el sentido positivo de  $OX$  o en el negativo.

**XXVII – 9. Relación causa-efecto**

Al hecho de que dos sucesos puedan ser observados en distinto orden en el tiempo, debemos imponerle una restricción si entre ellos existe una relación de causalidad. No podemos pensar que haya un sistema de referencia en que un proyectil primero explote y luego sea disparado. Como vamos a ver, la restricción adecuada para que siempre la causa preceda al efecto, o como mucho sean simultáneos, está relacionada con la velocidad de transmisión de la información.

Supongamos que en el sistema  $S$ , en reposo, se produce un suceso en el punto  $x_1$  y en el instante  $t_1$ . Este suceso ocasiona otro, que se verifica en  $x_2$  y en el instante posterior  $t_2$ ;  $t_2 > t_1$ . Llamamos  $u$  a la velocidad de transmisión de la información desde  $x_1$  a  $x_2$ , una velocidad que suponemos constante.

Para el observador  $S'$  la causa tendrá lugar en  $x'_1$  y  $t'_1$ , y el efecto en  $x'_2$  y  $t'_2$ . Entre ambos hechos habrá un intervalo temporal:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - \frac{V}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{t_1 - \frac{V}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{V}{c^2} (x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Por otra parte, para  $S$  se verifica:

$$x_2 - x_1 = u (t_2 - t_1) \Rightarrow \Delta t' = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{V}{c^2} u (t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left( 1 - \frac{uV}{c^2} \right)$$

Si queremos que  $\Delta t'$  sea positivo o nulo, hemos de imponer  $uV/c^2 \leq 1$ , con lo que incluso si  $V$  se aproxima a la velocidad de la luz, tendremos siempre:

$$u \leq c$$

«La velocidad de la luz es un límite superior para la velocidad de transmisión de información desde una fuente a un receptor».

**XXVII – 10. Intervalo entre dos sucesos**

En la transformación de Lorentz es evidente que las coordenadas espaciales dependen del tiempo, y éste de aquellas. El espacio y el tiempo no existen independiente uno de otro, sino que son aspectos parciales de la estructura tetradimensional de un objeto. Para manejar matemáticamente esa estructura como un todo, se define, además de las tres coordenadas espaciales, una cuarta coordenada dependiente de  $t$ , de la forma  $x_4 = ict$  (donde  $i = \sqrt{-1}$ ). A un conjunto de valores de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y  $t$  se le llama un «SUCESO». Así pues, un suceso se representa por un punto en un espacio tetradimensional, que se llama de MINKOWSKI.

Un espacio de cuatro dimensiones, una de las cuales, además, tiene valores imaginarios, es algo de lo que no podemos construirnos una imagen. Tenemos que conformarnos con símiles,

como el siguiente: si de una regla (tres dimensiones), proyectamos su sombra sobre una pared (dos dimensiones), al «gírala», sin modificar evidentemente su forma tridimensional, iremos viendo distintas formas de la sombra.

Cuando observamos un objeto podemos ver distintas proyecciones según nuestro movimiento respecto de él. La forma tetradimensional del objeto es invariante, pero si «gira», sus proyecciones, tridimensional en el espacio y monodimensional en el tiempo, varían.

En este espacio de Minkowski, la distancia entre dos puntos tiene un valor determinado fijo, o lo que es lo mismo, «el INTERVALO entre dos sucesos es invariante bajo una transformación de Lorentz». En la Fig. XXVII-8,  $r$  y  $r'$  representan las coordenadas espaciales en los sistemas de referencia  $S$  y  $S'$ ,  $ict$  e  $ict'$  las correspondientes coordenadas temporales, y  $s$  el intervalo entre dos sucesos. Supongamos dos sucesos que se verifican en unos lugares y tiempos que designaremos  $x_1, y_1, z_1, t_1$  para uno y  $x_2, y_2, z_2, t_2$  para el otro. El «intervalo»,  $s$ , entre ellos es una cantidad cuyo cuadrado viene dado por la expresión:

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2 (t_2 - t_1)^2$$

Si aplicamos las ecuaciones de transformación de Lorentz tendremos:

$$x_2 - x_1 = \frac{x'_2 + V t'_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{x'_1 + V t'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{(x'_2 - x'_1) + V (t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$y_2 - y_1 = y'_2 - y'_1$$

$$z_2 - z_1 = z'_2 - z'_1$$

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + \frac{V}{c^2} x'_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{t'_1 + \frac{V}{c^2} x'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{(t'_2 - t'_1) + \frac{\beta^2}{V} (x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

que substituidos en la expresión anterior conducen a:

$$s^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - c^2 (t'_2 - t'_1)^2 = s'^2$$

Es decir, el intervalo es un invariante relativista.

Esta invariancia aclara la elección hecha del valor de la cuarta componente. En efecto, si hacemos, por simplificar, que el suceso 1 sea tal que  $x_1 = y_1 = z_1 = 0$  y  $t_1 = 0$ , entonces  $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ , donde  $x, y, z, t$  son las coordenadas del suceso 2. Podemos poner el cuadrado del intervalo como el cuadrado del módulo de un vector de cuatro componentes, es decir, como la suma de los cuadrados de sus componentes,  $s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ ; para ello basta hacer  $x_4^2 = -c^2 t^2$  o bien  $x_4 = ct \sqrt{-1} = ict$ . En resumen:

*Dos observadores en movimiento uniforme relativo, medirán distinta separación espacial y temporal para dos sucesos, pero el mismo intervalo en el espacio tetradimensional.*

**PROBLEMAS: 1 al 17.**

### XXVII – 11. Transformación de velocidades

Se ha visto que la constancia de la velocidad de la luz invalida las expresiones de Galileo para la suma de velocidades. Teniendo en cuenta las fórmulas de la transformación de Lorentz tratamos de dar solución al siguiente problema: supongamos que el sistema  $S'$  se mueve con velocidad  $V$  en la dirección positiva del eje  $OX$  respecto al sistema  $S$ . Una partícula se mueve con velocidad constante de componentes  $v'_x, v'_y$  y  $v'_z$  respecto al sistema  $S'$ . ¿cuáles son las componentes de la velocidad respecto al sistema  $S$ ?

Sabemos que:  $v_x = dx/dt, v_y = dy/dt, v_z = dz/dt$ , y como las expresiones diferenciales de las ecuaciones (11) son:

$$dx = \frac{dx' + V dt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad dy = dy' \quad dz = dz' \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

obtenemos:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V dt'}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'} \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'} \sqrt{1 - \beta^2} \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'} \sqrt{1 - \beta^2}$$

y como:  $v'_x = dx'/dt', v'_y = dy'/dt', v'_z = dz'/dt'$  resulta:

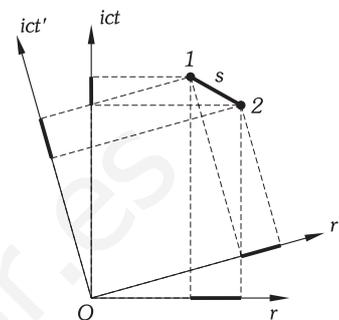


Fig. XXVII-8.- Una transformación de Lorentz equivale a un giro en el espacio de Minkowski.

$$\begin{aligned}
 v_x &= \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x} \\
 v_y &= \frac{v'_y}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x} \sqrt{1 - \beta^2} \\
 v_z &= \frac{v'_z}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x} \sqrt{1 - \beta^2}
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Las transformaciones inversas serán:

$$\begin{aligned}
 v'_x &= \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_x} \\
 v'_y &= \frac{v_y}{1 - \frac{V}{c^2} v_x} \sqrt{1 - \beta^2} \\
 v'_z &= \frac{v_z}{1 - \frac{V}{c^2} v_x} \sqrt{1 - \beta^2}
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Recordemos ahora la situación, planteada al final del párrafo XXVII-4, de un observador que se acerca a un foco luminoso a la velocidad de 200 000 km/s, y generalicemos al caso de una velocidad  $V$  cualquiera (positiva o negativa). Para el observador fijo  $S$  respecto del cual el anterior viaja a velocidad  $V$ , la luz se le acerca con una velocidad  $v_x = -c$ . Para  $S'$  la velocidad de acercamiento de la luz será:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_x} = \frac{-c - V}{1 + \frac{Vc}{c^2}} = -c$$

en consecuencia: *cualquiera que sea la velocidad  $V$  del observador, la luz viaja respecto de él a velocidad  $c$* ; como era de esperar ya que el postulado  $c = cte$  ha servido de base para la obtención de las fórmulas empleadas.

Supongamos ahora que el observador  $S'$  se aleja de  $S$ , con  $V = c/2$ , y mide para un objeto una velocidad  $v'_x = c/2$ . Este objeto no se moverá respecto de  $S$  a  $c/2 + c/2 = c$ , sino a una velocidad  $v_x$  dada por:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x} = \frac{\frac{c}{2} + \frac{c}{2}}{1 + \frac{c \cdot c}{2 \times 2c^2}} = \frac{4}{5} c$$

vemos pues que en esta teoría no se cumple la composición de velocidades como en Mecánica Clásica; puesto que según ésta «un medio» más «un medio» es «uno» y hemos encontrado que no es «uno», sino «cuatro quintos».

No siempre se estudian movimientos de objetos en la misma dirección que la de traslación relativa de los dos sistemas inerciales, pero en todos los casos se aplican las fórmulas anteriores con los mismos criterios. Por ejemplo, si las componentes de la velocidad de un móvil respecto de  $S'$  son  $v'_x = v'_y = 0, v'_z \neq 0$  (Fig. XXVII-9), las componentes de su velocidad respecto de  $S$  serán:

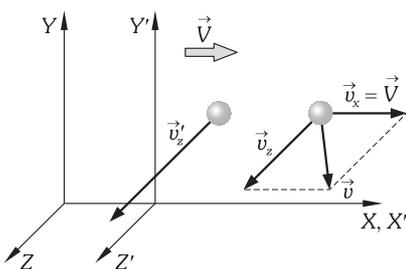


Fig. XXVII-9.

$$\begin{aligned}
 v_x &= \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x} = \frac{0 + V}{1 + 0} = V \\
 v_y &= \frac{v'_y}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x} \sqrt{1 - \beta^2} = 0 \\
 v_z &= \frac{v'_z}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x} \sqrt{1 - \beta^2} = v'_z \sqrt{1 - \beta^2}
 \end{aligned}$$

PROBLEMAS: 18 al 22.

**B) DINÁMICA RELATIVISTA**

Las leyes de la mecánica de Newton eran invariantes ante las transformaciones de Galileo. En los casos en que intervienen velocidades que no son despreciables frente a la de la luz en el vacío, esas ecuaciones de transformación han sido sustituidas por las de Lorentz. Tenemos pues que formular en este caso las leyes dinámicas de forma que sean invariantes respecto de estas últimas ecuaciones de transformación.

**XXVII – 12. Estudio de una colisión elástica. Carácter relativista de la masa**

Hay dos formas de medir la masa de un cuerpo. Una de ellas consiste en pesarlo dentro de un campo gravitatorio: el valor así obtenido se denomina «masa gravitatoria» del objeto. El segundo método consiste en relacionar la fuerza que se aplica al cuerpo y la aceleración que se le produce; el resultado de medidas de este tipo se denomina «masa inercial». Ahora bien, para medir una aceleración hay que hacer medidas de longitudes y de tiempos, luego si éstas, como sabemos, dependen de la velocidad relativa entre objetos y observador, es inmediato que el valor obtenido para la masa inercial dependerá de dicha velocidad.

Llamaremos  $m_0$  a la «MASA PROPIA» o «MASA EN REPOSO» de una partícula, es decir, la masa medida en el sistema de referencia de la partícula.

Como se verá a continuación, para mantener invariante en una transformación de Lorentz la ley de conservación del momento lineal, se puede definir éste mediante la expresión  $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$ , en la que  $m$  se entiende como cantidad de materia, invariante en un cambio entre sistemas inerciales. Se prescinde así del concepto de masa en reposo; la masa de un cuerpo tiene un único valor para todos los sistemas inerciales.

Sin embargo, si entendemos la masa de un cuerpo no como su cantidad de materia, sino como una medida de su inercia, podemos emplear para el momento lineal la expresión  $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$ , dándole a la masa inercial una dependencia con la velocidad mediante la expresión:

$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{18}$$

y al momento:  $\mathbf{p} = m \mathbf{v} = \gamma m_0 \mathbf{v}$ . Las dos formas de tratar el momento lineal conducen a idénticos resultados. En lo que sigue adoptaremos la segunda de las formas mencionadas.

Una primera consecuencia de la expresión (18) es la imposibilidad para cualquier partícula con  $m_0 \neq 0$ , de ser acelerada hasta alcanzar la velocidad de la luz respecto del observador. Cuando  $v$  tiende a  $c$ , la masa inercial tiende a infinito; para conseguir  $v = c$ , habría que ejercer sobre la partícula una fuerza infinita. En la actualidad se consigue acelerar electrones hasta velocidades del orden de  $c - 10^{-9} c$ , sin embargo  $c$  es inalcanzable.

Vamos ahora a demostrar que el carácter invariante de la conservación del momento lineal exige la verificación de la expresión (18).

Supongamos dos partículas, de la misma masa en reposo, que sufren una colisión elástica. Elegimos como sistema de referencia  $S'$  uno, como el de la Fig. XXVII-10, en que la simetría respecto del punto de impacto es total. Designando con tilde las magnitudes medidas desde este sistema, se verifica que  $m'_1 = m'_2, p'_{0x} = p'_{fx}, p'_{0y} = p'_{fy}$ , las componentes  $X'$  de las velocidades son iguales y permanecen inalteradas y las componentes  $Y'$ , también iguales, cambian de sentido en la colisión. Para evitar problemas con la medida «simultánea» de los momentos lineales, consideramos que todas las magnitudes citadas son medidas durante el impacto y que las partículas no interaccionan a distancia.

Tomamos como sistema  $S$  uno respecto del cual  $S'$  se desplaza a velocidad  $V = v'_{2x}$ , en la dirección común de los ejes  $X$  y  $X'$ , como en la Fig. XXVII-11. En este sistema:

$$v_{1x} = \frac{-v'_{1x} + V}{1 + \frac{V}{c^2}(-v'_{1x})} = 0$$

por ser:  $V = v'_{2x} = |-v'_{1x}|$ ; luego la partícula 1 se mueve perpendicularmente al eje  $X$ .

Para la partícula 2, podemos comprobar mediante las relaciones de transformación de velocidades, que  $v_{2y} < v'_{2y}$ , por tanto, el observador  $S$  ve la trayectoria de 2 más achatada hacia el eje  $X$  de lo que la ve  $S'$  respecto de  $X'$ .

La conservación del momento lineal en el eje  $X$  es evidente. En el eje  $Y$  existen las siguientes variaciones de  $\mathbf{p}$ :

$$\Delta p_1 = -m_1 v_{1y} - (m_1 v_{1y}) = -2 m_1 v_{1y}$$

$$\Delta p_2 = m_2 v_{2y} - (-m_2 v_{2y}) = 2 m_2 v_{2y}$$

La conservación de  $p_y$  implica:  $m_1 v_{1y} = m_2 v_{2y}$ , o bien  $m_2/m_1 = v_{1y}/v_{2y}$ . Como vamos a ver, esas dos velocidades son distintas, por lo tanto a las dos partículas se les debe medir distinta masa en

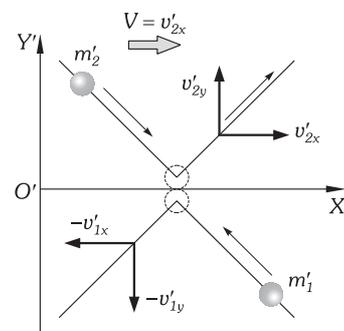


Fig. XXVII-10.- Colisión en  $S'$ .

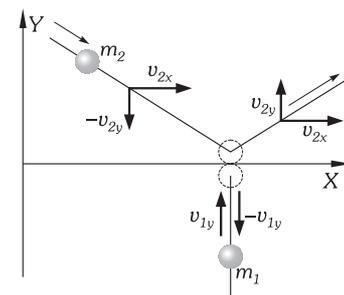


Fig. XXVII-11.- Colisión en  $S$ .

S, a pesar de tener la misma masa en reposo. Usando las expresiones para la transformación de velocidades, podemos poner:

$$v_{1y} = \frac{v'_{1y}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad v_{2y} = v'_{2y} \frac{1 - \frac{v_{2x} v'_{2x}}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

y por ser  $v'_{1y} = v'_{2y}$ , en valor absoluto, tenemos: (19)

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{1 - \frac{v_{2x} v'_{2x}}{c^2}}$$

Por otra parte:

$$v'_{2x} = V = \frac{v_{2x} - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_{2x}} \quad \Rightarrow \quad V - \frac{V^2 v_{2x}}{c^2} = v_{2x} - V$$

o bien: 
$$v_{2x} = 2V - V^2 v_{2x}/c^2$$

Si en esta expresión multiplicamos ambos miembros por  $v_{2x}$ , los dividimos por  $c^2$  y los restamos de la unidad, resulta:

$$1 - \frac{v_{2x}^2}{c^2} = 1 - \frac{2V v_{2x}^2}{c^2} + \frac{V^2 v_{2x}^2}{c^4} = \left(1 - \frac{V v_{2x}}{c^2}\right)^2$$

que por ser  $V = v'_{2x}$  se puede escribir de la forma: 
$$1 - \frac{v'_{2x} v_{2x}}{c^2} = \sqrt{1 - \frac{v_{2x}^2}{c^2}}$$

Con eso, la expresión (19) queda: 
$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{2x}^2}{c^2}}}$$

Ahora bien, esta expresión se verifica para cualquier valor de  $v_{1y}$ , en particular para  $v_{1y} = 0$ , pero ello supone  $v_{2y} = 0$ . Así que, en este caso tenemos  $m_1 = m_{01} = m_{02} = m_0$ ,  $v_{2y} = 0$  y  $v_2 = v_{2x}$ ; la partícula 2 se mueve paralela al eje X y para ella la expresión anterior es:

$$m_2 = \frac{m_{02}}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}$$

y prescindiendo de subíndices: 
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

que coincide con la propuesta al principio de la cuestión.

Esta expresión permite obtener la fórmula de transformación de la masa relativista entre dos sistemas inerciales. Si es  $m_0$  la masa en reposo de una partícula,  $v$  su velocidad en el sistema S y  $v'$  en el sistema S', de:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad m' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}$$

y de las relaciones de transformación de velocidades, se obtiene:

$$m' = m \frac{1 - \frac{v_x V}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (20)$$

**XXVII – 13. Fuerzas y aceleración**

En mecánica relativista se sigue considerando la fuerza que actúa sobre una partícula como la medida de la variación de su momento lineal respecto del tiempo:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \quad (21)$$

Sin embargo, la dependencia de  $m$  con la velocidad introduce cambios sustanciales en su relación con la aceleración, respecto de la expresión clásica  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ . Desarrollando la expresión anterior, podemos poner:

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \frac{dm}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \frac{dm}{dv} \frac{dv}{dt}$$

y, operando, resulta:

$$\mathbf{F} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{m_0 \mathbf{v}}{c^2 (1-\beta^2)^{3/2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} \quad (22)$$

Si se verifica  $\beta \ll 1$ , el segundo sumando es despreciable frente al primero, y esta expresión se transforma en:

$$\mathbf{F} = m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m_0 \mathbf{a}_0$$

A velocidades relativistas, la fuerza ya no es, en general, paralela a la aceleración, sino que tiene, según (22), una componente en la dirección de  $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{a}$  y otra en la de  $\mathbf{v}$ . Solamente si  $\mathbf{a}$  es paralelo o perpendicular a  $\mathbf{v}$ , la fuerza será proporcional a la aceleración. Lo vemos en los dos casos particulares de movimiento siguientes:

(I). La partícula posee un movimiento circular uniforme. En este caso se verifica  $dv/dt = 0$  y la expresión (22) queda:

$$\mathbf{F} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \mathbf{a}_n$$

La fuerza y la aceleración son paralelas, pero recordemos que la condición ha sido que  $v = |\mathbf{v}|$  sea constante, o bien, que  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{v}$  sean perpendiculares.

Si el movimiento circular no es uniforme no se verifica lo dicho, Fig (XXVII-12).

(II). Partícula con movimiento rectilíneo acelerado. Por ser rectilíneo podemos prescindir en la expresión (22) de la notación vectorial, y poner:

$$F = m \frac{dv}{dt} + \frac{mv}{c^2 (1-\beta^2)} \frac{dv}{dt} v = m \frac{dv}{dt} \frac{1}{1-\beta^2}$$

y por ser  $dv/dt$  el módulo de la aceleración tangencial:  $F = \frac{m a_t}{1-\beta^2}$

En este caso, la fuerza necesaria para comunicarle a un cuerpo una aceleración  $a_t$  es mayor que el valor  $ma_t$ , y ello es debido a que, además de aumentar el módulo de la velocidad, aumenta también la masa inercial. Como veremos en la cuestión 15, ese aumento de masa inercial está íntimamente relacionado con el trabajo realizado por la fuerza y con la energía del cuerpo.

**XXVII – 14. Ecuaciones de transformación de la fuerza**

Vamos a desarrollar las ecuaciones que permiten relacionar las componentes de la fuerza que actúa sobre una partícula, medidas desde dos sistemas inerciales, S y S', el segundo de los cuales se desplaza respecto del primero a velocidad V en el sentido positivo de la dirección común X y X'. El principio de relatividad establece que ambas deben tener la misma formulación, así:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \quad \text{y} \quad \mathbf{F}' = \frac{d\mathbf{p}'}{dt'} = \frac{d(m'\mathbf{v}')}{dt'}$$

donde  $\mathbf{v}$  es la velocidad de la partícula medida desde S y  $\mathbf{v}'$  medida desde S'.

Calculamos las componentes  $F'_x, F'_y, F'_z$  de  $\mathbf{F}'$ . De la expresión (20), las relaciones de transformación de velocidades, y recordando que hemos llamado  $\beta = V/c$  y  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$  podemos poner:

$$F'_x = \frac{d}{dt'} (m' v'_x) = \frac{d}{dt} \left[ \gamma \left( 1 - \frac{V v_x}{c^2} \right) m \frac{v_x - V}{1 - \frac{V v_x}{c^2}} \right] \frac{dt}{dt'} = \frac{d}{dt} [\gamma (v_x - V) m] \frac{dt}{dt'} = \gamma \left[ \frac{d(m v_x)}{dt} - V \frac{dm}{dt} \right] \frac{dt}{dt'}$$

así que, por ahora:  $F'_x = \gamma \left( F_x - V \frac{dm}{dt} \right) \frac{dt}{dt'} \quad (23)$

En las ecuaciones de Lorentz:  $t' = \gamma (t - Vx/c^2)$ , por tanto:

$$dt' = \gamma \left( dt - \frac{V dx}{c^2} \right) \Rightarrow \frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\gamma \left( 1 - \frac{V v_x}{c^2} \right)} \quad (24)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que  $d(v^2) = d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$ , tendremos:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{c^2 (1-\beta^2)^{3/2}} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{v}}{c^2 (1-\beta^2)} \cdot \left( m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = \frac{\mathbf{v}}{c^2 - v^2} \cdot \left[ \frac{d\mathbf{p}}{dt} - \mathbf{v} \frac{dm}{dt} \right] = \frac{\mathbf{v}}{c^2 - v^2} \cdot \left[ \mathbf{F} - \mathbf{v} \frac{dm}{dt} \right] \Rightarrow$$

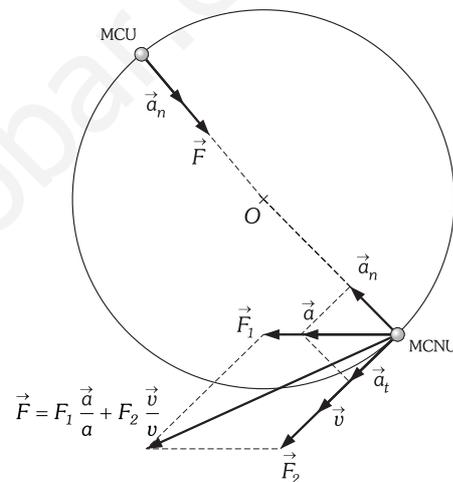


Fig. XXVII-12.- Movimientos circulares uniforme (MCU) y no uniforme (MCNU).

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{c^2 - v^2} - \frac{v^2}{c^2 - v^2} \frac{dm}{dt} \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{c^2} = \frac{v_x F_x + v_y F_y + v_z F_z}{c^2} \quad (25)$$

sustituyendo (24) y (25) en (23):

$$F'_x = \gamma \frac{1}{\left(1 - \frac{V v_x}{c^2}\right)} \left[ F_x - V \frac{v_x F_x + v_y F_y + v_z F_z}{c^2} \right]$$

es decir:

$$F'_x = F_x - \frac{V v_y / c^2}{1 - \frac{V v_x}{c^2}} F_y - \frac{V v_z / c^2}{1 - \frac{V v_x}{c^2}} F_z$$

Para la componente  $F'_y$ :

$$F'_y = \frac{d(m' v'_y)}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt} \left[ \gamma \left(1 - \frac{V v_x}{c^2}\right) m \frac{v_y}{1 - \frac{V v_x}{c^2}} \sqrt{1 - \beta^2} \right] = \frac{dt}{dt'} \frac{d(m v_y)}{dt} \Rightarrow F'_y = \frac{F_y}{\gamma \left(1 - \frac{V v_x}{c^2}\right)}$$

y de forma análoga:

$$F'_z = \frac{F_z}{\gamma \left(1 - \frac{V v_x}{c^2}\right)}$$

Un caso de aplicación de estas expresiones, de especial interés, es el siguiente. Un observador en reposo respecto de un sistema de cargas eléctricas, sólo mide efectos electrostáticos, que puede describir mediante la ley de Coulomb. Si otro observador se mueve respecto del primero, verá cargas en movimiento, es decir, corrientes eléctricas, y apreciará por tanto la existencia de fuerzas magnéticas. Estas últimas son «una corrección relativista a la ley de Coulomb».

### XXVII – 15. Energía cinética. Relación masa-energía

Definimos la ENERGÍA CINÉTICA de un cuerpo como el trabajo que hay que realizar para pasarlo del reposo a su estado actual de movimiento.

El trabajo realizado por la fuerza neta  $\mathbf{F}$  que actúa sobre un cuerpo, cuando éste se desplaza una distancia  $d\mathbf{r}$ , es:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \mathbf{v} \cdot d(m\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dm + \mathbf{v} \cdot m d\mathbf{v} = v^2 dm + m \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$$

Por otra parte:

$$m \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Rightarrow dm = \frac{m \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}}{c^2 (1 - \beta^2)}$$

con lo que

$$dW = dm \left[ v^2 + c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \right] = c^2 dm$$

y por ser  $c = cte$ :  $dW = d(m c^2)$

El trabajo realizado en una trayectoria finita para pasar del reposo con  $v = 0$  y masa  $m_0$ , a velocidad final  $v$  y masa  $m$ , es la energía cinética  $T$  en la situación final:

$$T = \int_{m_0}^m dW = \int_{m_0}^m d(m c^2) \quad \boxed{T = m c^2 - m_0 c^2} \Leftrightarrow \boxed{T = c^2 \Delta m} \quad (26)$$

Una primera conclusión de (26): la energía cinética relativista no se expresa como  $1/2 m v^2$ , sin embargo, se reduce a la expresión clásica cuando ésta es aplicable. En efecto:

$$T = m c^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right] = m_0 c^2 \left[ (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right]$$

y desarrollando el paréntesis mediante el binomio de Newton:

$$T = m_0 c^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \frac{3}{8} \beta^4 + \dots - 1 \right) = \frac{1}{2} m_0 v^2 \left( 1 + \frac{3}{4} \beta^2 + \dots \right)$$

con lo que, si  $v$  es mucho menor que  $c$ , podemos poner  $T = 1/2 m_0 v^2$ .

La expresión (26) indica la interpretación de la energía cinética como función de  $c$  y del incremento de masa, y, por ser  $c$  una constante universal, deducimos que en general:

«Toda masa corresponde a la existencia de una cierta energía».

Podemos considerar que incluso la masa en reposo  $m_0$  se debe a una cantidad de energía interna igual a  $m_0 c^2$ , llamada ENERGÍA EN REPOSO, que el cuerpo posee independientemente de la existencia de campos de fuerza externos. Así, por ejemplo, la masa en reposo de un sistema de partículas es un reflejo, no sólo de la masa en reposo de las partículas, sino de su estado de agitación y de su energía potencial de interacción. Podemos aumentar la masa en reposo de una barra metálica calentándola o estirándola.

Si  $m_0 c^2$  es la energía en reposo del cuerpo, su «ENERGÍA TOTAL»  $E$ , será la suma de las energías en reposo y cinética, es decir:

$$E = T + m_0 c^2 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{E = mc^2} \quad (27)$$

Esta conocida «ECUACIÓN DE EINSTEIN» constituye uno de los resultados más importantes de la Teoría de la relatividad especial. A pesar de que en procesos cotidianos como las reacciones químicas, las cantidades de energía que se manifiestan son pequeñas, lo que hace que las variaciones de masa sean inapreciables con los instrumentos de medida habituales, hay multitud de fenómenos que certifican la validez de la anterior expresión, que, además, permite la explicación de hechos tales como la fisión y fusión nucleares o la emisión de energía de las estrellas.

En la naturaleza, la energía se transforma continuamente de un tipo en otro. También cambia la forma en que se manifiesta la masa; por ejemplo, si colisionan un electrón y un positrón, cuyas masas en reposo no son nulas, se transforman en radiación gamma, con masa en reposo cero pero con masa inercial no nula. La ecuación de Einstein establece la relación entre ambas magnitudes cualquiera que sea el cambio, y permite reducir a un solo principio, el de «CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA TOTAL» o «DE LA MASA-ENERGÍA», dos principios válidos en mecánica clásica, el de conservación de la masa y el de conservación de la energía, que ahora pierden su validez individual.

La masa ha perdido su carácter estático, ya no es algo que exista para siempre. Podemos pensar en ella como algo dinámico, como una forma extraordinariamente densa de acumular energía.

## XXVII – 16. Relación energía-momento

De la ecuación de Einstein (27) se obtiene una expresión que relaciona la energía total y el momento lineal. Elevándola al cuadrado, tenemos:

$$E^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Leftrightarrow E^2 - E^2 \frac{v^2}{c^2} = m_0^2 c^4 \Rightarrow E^2 = m_0^2 c^4 + (mc^2)^2 \frac{v^2}{c^2} = m_0^2 c^4 + (mv)^2 c^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2} \quad (28)$$

que también se puede expresar:  $E = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$ \*

Esta expresión ha de ser invariante bajo una transformación de Lorentz, de acuerdo con el principio de relatividad. De hecho, podemos escribirla de la forma:

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2$$

donde el segundo miembro es independiente de la velocidad del observador. Para dos observadores  $S$  y  $S'$  con velocidad relativa  $v$ , se verificará:

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \frac{E^2}{c^2} = p_x'^2 + p_y'^2 + p_z'^2 - \frac{E'^2}{c^2}$$

Esta expresión es similar a la (17) que relaciona las coordenadas espaciales y el tiempo en la definición del intervalo, de forma que el momento lineal y la energía constituyen otra «estructura tetradimensional», un vector en el espacio de cuatro dimensiones de Minkowski.

Haciendo la correspondencia entre  $(x, y, z, ict)$  y  $(p_x, p_y, p_z, iE/c)$  encontramos las ecuaciones de transformación aplicables por los dos observadores inerciales:

$$p_x = \frac{p_x' + \frac{V}{c^2} E'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad p_y = p_y' \quad p_z = p_z'$$

$$E = \frac{E' + V p_x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

\* En realidad la relación debería escribirse  $E = \pm c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$ . Considerando los valores negativos de la energía, Dirac propuso la existencia, después confirmada, del positrón y de la antimateria en general.

Con estas ecuaciones se conserva la forma de las expresiones del momento y de la energía. En efecto: supongamos una partícula en reposo respecto de  $S'$ , en ese sistema  $p'_x = p'_y = p'_z = 0$  y  $E' = m_0 c^2$ . Para el sistema  $S$ :

$$p_x = \frac{0 + \frac{V}{c^2} m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = mV \quad p_y = 0_y \quad p_z = 0_z$$

$$E = \frac{m_0 c^2 + 0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = mc^2$$

Veamos, por último, un caso interesante de aplicación de la ecuación (28). Si una partícula tiene masa en reposo nula,  $m_0 = 0$ , dicha ecuación se transforma en  $E^2 = p^2 c^2$ , o bien  $E = pc$ . Por otra parte, de  $E = mc^2$  y  $p = mv$ , podemos poner  $E = c^2 p/v$ , con lo que para nuestra partícula se tiene  $pc = c^2 p/v$ , con lo que  $v = c$ . En consecuencia, una partícula con  $m_0 = 0$  sólo puede existir moviéndose a la velocidad de la luz, y no hay un sistema inercial desde el que observarla de otra forma.

Como se verá en el capítulo siguiente, un «cuanto» de radiación electromagnética, un «fotón», es una partícula de estas características. Tiene energía  $E = h\nu$ , donde  $h$  es la constante de Planck y  $\nu$  la frecuencia del fotón, con lo que su masa inerte es  $m = E/c^2 = h\nu/c^2$ , y su energía,  $E = T$ , es sólo cinética.

Al lector interesado en la aplicación de estas últimas cuestiones a las COLISIONES RELATIVISTAS, se le recomienda la lectura del libro «Problemas de Física General», de los mismos autores, donde, encontrará desarrollados casos de: desintegraciones, energía umbral de reacción, masa en reposo de un gas ideal, colisiones inelásticas, absorción y emisión de fotones por átomos ó colisiones Compton.

**PROBLEMAS: 23 al 43.**

**XXVII – 17. Principio de equivalencia de la relatividad general**

Como ya se ha dicho en capítulos anteriores, podemos determinar la masa de un cuerpo midiendo la aceleración que le produce una fuerza conocida, obtenemos así su *masa inerte*; si la determinamos midiendo la fuerza gravitatoria que ejerce sobre él otro cuerpo, la Tierra por ejemplo, obtendremos su *masa gravitatoria*. Se han realizado gran cantidad de medidas experimentales (Galileo, Eötvös, Dicke) para comparar ambas, y hasta la fecha dentro de la precisión que permite los instrumentos, han resultado siempre exactamente iguales. Esta propiedad del campo gravitatorio no es compartida por el campo eléctrico. Un mismo campo eléctrico produce dos aceleraciones distintas a dos partículas de distinta carga, sin embargo un campo gravitatorio produce siempre la misma aceleración a todos los cuerpos cualquiera que sea su masa.

La igualdad de las masas gravitatoria e inerte permite hacer uso de la inercia para crear o eliminar campos gravitatorios. Einstein lo ilustró con un experimento ideal.

Si consideramos en el espacio, fuera de toda influencia, a un vehículo que se mueve con una aceleración de  $9,8 \text{ m/s}^2$  (Fig. XXVII-13), la fuerza de inercia actuará sobre los cuerpos del interior en sentido contrario a la aceleración. El valor de tal fuerza será:  $F = (m \times 9,8) \text{ N}$  si la masa se expresa en kg. Los cuerpos del interior del vehículo estarán sometidos a fuerzas idénticas a las de gravedad terrestre y un viajero, localizado en el interior del sistema, podrá creer que se encuentra en el campo gravitatorio de la Tierra. Por otra parte, si el vehículo se encuentra en caída libre, la aceleración hacia abajo elimina los efectos de la gravedad; la ingravidez experimentada por los astronautas se debe a este hecho.

La interpretación de la citada igualdad de masa y de las consecuencias que origina, la hizo Einstein de la forma más drástica y sencilla: *si la gravedad y la inercia producen los mismos efectos es porque son lo mismo*; si no se pueden distinguir experimentalmente, físicamente no tiene sentido distinguirlas. Esta afirmación constituye el llamado PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA:

«Una pequeña región de un campo gravitatorio de intensidad  $g$  es equivalente a un sistema que se mueve con movimiento uniformemente acelerado de aceleración  $-g$  respecto de otro inercial».

En la relatividad especial un cuerpo libre de fuerzas se mueve con movimiento uniforme, y en un campo gravitatorio lo hace con movimiento variado. En la relatividad general hay que olvidar esa distinción porque si nos trasladamos a un sistema acelerado, el anterior movimiento uniforme lo veremos como variado de las mismas características que el producido por el campo gravitatorio. Es decir:

«Por experiencias realizadas en un sistema es imposible discernir si éste posee un movimiento acelerado o se encuentra en un campo gravitatorio».

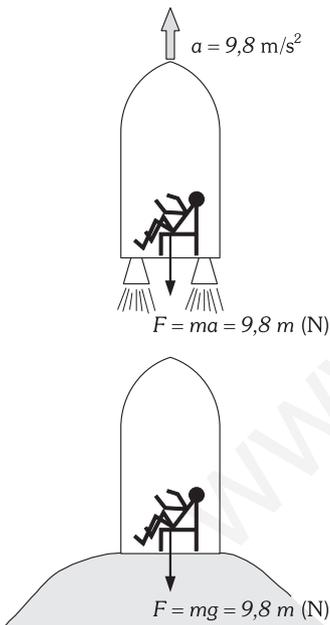


Fig. XXVII-13.- El astronauta no puede distinguir entre aceleración y reposo en campo gravitatorio.

Este enunciado constituye una generalización del principio de relatividad especial a los sistemas no inerciales y niega la posibilidad de distinguir desde ningún sistema el estado de movimiento o de reposo. Es equivalente a decir:

«Las leyes físicas adoptan la misma forma en cualquier sistema de referencia».

Por ahora volvamos al vehículo espacial ya citado para hacer una precisión. Si el viajero suelta dos cuerpos a distinta altura dentro de una zona «extensa» del vehículo acelerado, en su movimiento ambos mantienen la misma distancia, lo que no sucede si la fuerza que los mueve es gravitatoria porque el cuerpo más bajo está más cerca del centro de la Tierra y es más acelerado. Sin embargo esto no quiere decir que se pueda distinguir entre gravedad e inercia, lo que se distinguen son dos campos con distinta geometría en una zona extensa, «localmente» son imposibles de identificar como afirma el enunciado del principio de equivalencia, que por otra parte impone una geometría no euclídeana.

La teoría de la relatividad general ha sido confirmada experimentalmente en muchas ocasiones. La más espectacular de las primeras que se hicieron se basó en la predicción de que los campos gravitatorios curvan la trayectoria de los rayos de luz (lo cual no es más que una forma tridimensional de hablar; en el espacio-tiempo tetradimensional la luz se mueve siempre a lo largo de geodésicas por el camino más «recto» posible).

Si en el sistema que se mueve aceleradamente penetra un rayo de luz en dirección perpendicular a la del movimiento (Fig. XXVII-14), mientras la luz recorre el trayecto  $AB = x = ct$  el sistema habrá avanzado un camino  $BC = y = at^2/2$  (suponiendo al sistema partiendo del reposo y a su movimiento uniformemente acelerado). Para un observador interior la luz habrá recorrido una trayectoria parabólica ya que:

$$y = \frac{1}{2} a \frac{x^2}{c^2}$$

El mismo efecto se produce al propagarse la luz en el seno de un campo gravitatorio de intensidad  $a$ ; la parábola sería idéntica a la descrita si la dirección de  $a$  es perpendicular a la de propagación de la luz, y su sentido contrario al de la aceleración del movimiento representado en la figura. De hecho, la ecuación de Einstein  $\Delta m_i = \Delta E/c^2$  permite afirmar que la luz posee masa inerte, y por tanto gravitatoria.

Como consecuencia de lo anterior, los rayos de luz que pasan por las proximidades de un astro se deben curvar, hecho que se comprobó en 1919 al tomar, durante un eclipse de Sol, fotografías de las estrellas que se ven en los alrededores próximos del Sol, es decir, cuyos rayos al llegar a la Tierra, han pasado por las proximidades del astro.

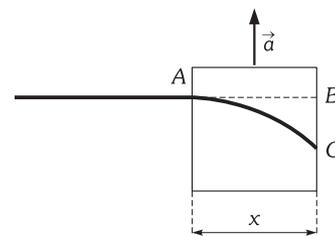


Fig. XXVII-14.- Un rayo de luz que penetra perpendicularmente a la aceleración describe una trayectoria parabólica.

## PROBLEMAS

### A) CINEMÁTICA RELATIVISTA

1. Dos avionetas realizan el viaje de ida y vuelta desde Madrid a Valencia y a Bilbao, respectivamente, con trayectorias que podemos suponer perpendiculares. Ambas desarrollan una velocidad de 200 km/h respecto del aire, y completan 550 Km cada una. En ausencia de viento ambas vuelven al punto de partida simultáneamente. 1) Si durante el viaje sopla un viento de 50 km/h en la dirección y sentido de Valencia hacia Madrid, ¿qué diferencia de tiempo habrá entre ambos recorridos? 2) El operador de la torre de control de Madrid, ha hecho los cálculos anteriores y observa, sorprendido, que, a pesar de la existencia del viento, las dos avionetas regresan a la vez. ¿Qué interpretación dará a este hecho?

2. Dos naves espaciales que, según sus pilotos, tiene 200 m de longitud, se cruzan en trayectorias paralelas. El tripulante de una nave mide el tiempo que tarda la otra en pasar a su altura y obtiene  $t = 5 \mu s$ . ¿Cuál es la velocidad relativa de ambas?

3. Dos observadores, S y S', se alejan con una velocidad relativa constante de  $0,8c$ . Cuando se han cruzado han sincronizado sus relojes en  $t = t' = 0$ . En el instante en que el reloj de S marca 2 horas, éste emite un destello luminoso que se refleja en S' y vuelve a S. 1) Calcular el instante, medido por S', en que es alcanzado por el destello. 2) ¿En qué instante T del reloj de S recibe éste la señal reflejada?

4. 1) Determinar la velocidad relativa de una regla que para un observador ligado a ella mide 1 m y para nosotros (observadores que nos consideramos fijos) la medida es de 99 cm. 2) El observador ligado al sistema móvil lleva consigo un péndulo que «bate» segundos. ¿Cuál es el período de tal péndulo observado desde el sistema fijo? 3) En un ins-

tante determinado (por ejemplo: en el instante en que el sistema móvil inicia su movimiento a la velocidad determinada en 1) se sincronizan dos relojes en las 12; cuando el reloj de] observador fijo marca de nuevo las 12, ¿qué hora marcará el reloj del sistema móvil?

5. Un avión, que según su piloto tiene exactamente 100 m de longitud, viaja a 1 500 km/h respecto del suelo. 1) ¿Qué longitud medirá del avión un observador en tierra? 2) ¿Durante cuánto tiempo tiene que viajar el piloto para que su reloj haya retrasado un segundo respecto de otro, sincronizado inicialmente con él, que permanece en tierra?

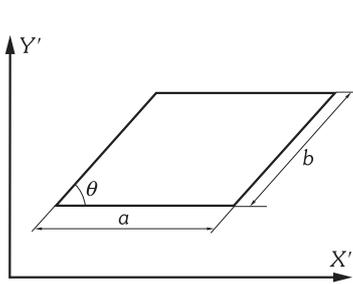
6. Desde un sistema de referencia que consideramos fijo, se observa que un cierto fenómeno se produce el instante  $t = 1,00$  ms y en  $x = 10,00$  km. ¿En qué instante se produce el fenómeno para un observador que se desplaza paralelo al eje X del anterior, si para él ocurre en  $x' = 95,50$  km?

7. El paralelogramo de la figura está en el plano X'Y' de un sistema que se mueve con velocidad V respecto de otro, que consideramos fijo. 1) Calcular sus dimensiones y ángulo en el sistema fijo. 2) Comparar la superficie del paralelogramo medida por observadores ligados a ambos sistemas. 3) ¿A qué valor tiende el área medida por el observador fijo cuando V tiende a c?

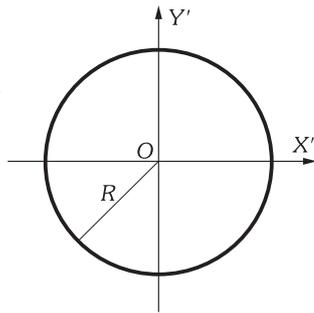
8. La circunferencia de la figura está en el plano X'Y' y centrada en el origen de un sistema de referencia S', que se mueve con velocidad V respecto de otro, S que consideramos fijo. 1) Encontrar la ecuación de la curva observada desde S. 2) Hallar su excentricidad.

9. Un destello luminoso se produce en el punto medido por un observador fijo:  $x = 100$  km,  $y = 5$  km,  $z = 0$ , y en el instante  $t = 2$  ms. ¿Cuáles son las coordenadas del mismo suceso respecto de un observa-

por que se desplaza respecto del primero a la velocidad de  $-0,7c$  en la dirección común  $XX'$ ?



Problema XXVII-7.



Problema XXVII-8.

**10.** En un sistema  $S$  dos sucesos ocurren en  $x_1, t_1$  y en  $x_2, t_2$ , respectivamente. Para un sistema  $S'$ , que se mueve respecto de  $S$  a velocidad  $V$  en la dirección del eje  $OX$ , los dos sucesos son simultáneos. Calcular la velocidad  $V$  en función de las coordenadas de los sucesos en  $S$ .

**11.** En un sistema de referencia  $S$ , un suceso tiene lugar en el punto  $P_1(x_1, y_1, z_1, t_1) = (-l, 0, 0, l/c)$ . Otro suceso simultáneo ocurre en  $P_2(x_2, y_2, z_2, t_2) = (l, 0, 0, l/c)$ . Si el sistema  $S'$  se desplaza respecto de  $S$  con  $V = 0,8c$  en la dirección del eje común  $XX'$ : 1) Calcular las coordenadas de ambos sucesos medida desde  $S'$ . 2) Calcular en ambos sistemas el intervalo entre ambos sucesos.

**12.** Un sistema de referencia  $S'$  se desplaza con velocidad  $V$  constante, respecto de otro  $S$ , en la dirección común  $XX'$ . Un observador ligado a  $S$  describe el movimiento de dos partículas mediante los vectores de posición:  $\mathbf{r}_1 = (y_0 + ut)\mathbf{j}$  y  $\mathbf{r}_2 = x_0\mathbf{i} + (y_0 + ut)\mathbf{j}$ . 1) Obtener las ecuaciones de movimiento y la de la trayectoria de ambas partículas medidas desde  $S'$ . 2) ¿En qué instantes atravesarán las partículas el plano  $y = 2y_0$ , según ambos observadores?

**13.** Un foco luminoso ligado a un sistema de referencia  $S$ , emite un rayo de luz en una dirección del plano  $XY$  que forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $OX$ . 1) Deducir la expresión del seno y del coseno del ángulo  $\theta'$  que medirá un observador que se desplaza con velocidad  $V$ , en la dirección  $OX = O'X'$ , respecto de  $S$ . 2) En el caso particular de  $\theta = \pi/3$  y  $V = 0,5c$ , escribir la ecuación de la trayectoria del rayo en  $S'$  y verificar que, efectivamente, la luz se aleja de  $O'$  a velocidad  $c$ .

**14.** Una fuente luminosa emite un haz de luz monocromática de frecuencia  $\nu$ . Calcular la frecuencia  $\nu'$  medida por un observador que se desplaza respecto de la fuente con velocidad  $V$  en la dirección del haz. (Efecto Doppler).

**15.** Una nave espacial viaja en una trayectoria recta que pasa por las proximidades de la Tierra. Emite un señal que cuando se acerca se percibe a 100 MHz, y cuando ha pasado y se aleja se recibe a 50 MHz. Calcular: 1) La frecuencia de la emisión medida en la nave. 2) La velocidad de ésta respecto de la Tierra.

**16.** Un astrónomo mide en un espectrómetro la longitud de onda de una de las rayas del espectro de emisión del hidrógeno, y encuentra que la que proviene de una estrella está desplazada hacia el rojo un 10 % respecto de la que obtiene de una fuente en el laboratorio. Calcular la velocidad de la estrella respecto de la Tierra. (Efecto Doppler).

**17.** Un haz de luz monocromática de frecuencia  $\nu_0$ , se refleja en un espejo que viaja a velocidad  $V$  en la dirección del haz. Calcular la frecuencia  $\nu_f$  del haz reflejado. ¿En qué condiciones es ésta mayor, menor o igual que la incidente? (Efecto Doppler).

**18.** Calcular la velocidad relativa de dos cuerpos que se mueven en direcciones paralelas con velocidades  $v_1$  y  $v_2$  respecto de un sistema que consideremos fijo, en los dos casos siguientes: 1)  $v_1 = 2 \times 10^3$  km/s,  $v_2 = -2 \times 10^3$  km/s 2)  $v_1 = 2 \times 10^5$  km/s,  $v_2 = -2 \times 10^5$  km/s 3) ¿Para qué valores de  $v_1$  y  $v_2$ , con  $|v_1| = |v_2|$ , la suma de velocidades difiere en un 1% del cálculo relativista?

**19.** Tres naves interestelares viajan en el mismo sentido de direcciones paralelas. Las tres llevan pintadas las siglas UE en tamaño de  $2 \times 2$  m cada letra, vistas desde el propio vehículo. Uno de ellos, el A, es adelantado por los otros, por el B con velocidad  $v_B = 0,3c$  y por el C con velocidad,  $v_C = 0,6c$ , ambas respecto de A. Calcular la anchura que medirá cada piloto de las letras de las otras naves.

**20.** Desde un sistema  $S'$  que se desplaza a velocidad  $V$  respecto de otro  $S$ , se emite un rayo de luz en dirección perpendicular a la del movi-

miento relativo. Calcular el valor de la velocidad  $V$  de  $S'$  respecto de  $S$  si éste ve el rayo: 1) Inclinado  $45^\circ$  respecto de la dirección del movimiento. 2) Paralelo a dicha dirección.

**21.** Dos cohetes espaciales se cruzan en un punto  $P$ . Sus velocidades respecto de un observador exterior a ambos en  $P$ , son  $v_1 = ac$  y  $v_2 = -bc$ . Un tiempo  $T$  después en el reloj del primer cohete, y desde dos puntos de éste distantes  $L$  metros, se emiten dos señales luminosas simultáneas, calcular: 1) Las indicaciones de un reloj en  $P$ , sincronizado con los de los cohetes al cruzarse, cuando recibe cada señal. 2) Las indicaciones respectivas del reloj del segundo cohete. Aplicación:  $a = b = 0,75$ ,  $T = 60$  s,  $L = 150$  m.

**22.** Obtener la relación de transformación de la componente de la aceleración en la dirección del movimiento relativo de los sistemas de referencia inerciales,  $S$  y  $S'$ , que se mueven con velocidad relativa  $V$ .

**B) DINÁMICA RELATIVISTA**

**23.** El poder calorífico del coque metalúrgico es de 29,1 MJ/kg. Comparar la energía calorífica producida en la combustión de un gramo de ese carbón, con su energía en reposo.

**24.** En la madrugada del 17 de enero de 1991, los EEUU de Norteamérica lanzaron sobre Iraq y Kuwait, en la operación llamada «tormenta del desierto», 18 000 toneladas de explosivos. Si un kilogramo de TNT libera al explotar aproximadamente 4 millones de julios, calcular la masa que debería convertirse en energía para producir el mismo número de julios.

**25.** Calcular la velocidad de un sistema, con respecto a nosotros, para que la masa de los cuerpos situados en él se nos duplique. ¿Qué longitud adquirirán los cuerpos medida desde nuestro sistema en la dirección del movimiento? ¿Qué fenómeno se presentaría en la medida tiempo?

**26.** La masa de un electrón en reposo es  $m_0 = 9,109 \times 10^{-28}$  g, calcular: 1) La masa del electrón a 210 000 km/s. 2) Su energía total. 3) La energía debida a su masa. 4) Su energía cinética.

**27.** Calcular la velocidad hasta la que se debe acelerar una partícula para que su energía cinética sea el 10 % de su energía en reposo.

**28.** ¿En qué porcentaje aumenta la masa del agua al calentarla de  $0^\circ C$  a  $100^\circ C$ ? Calor específico = 1 cal/g · K.

**29.** Un acelerador electrostático es un aparato en el que se aceleran partículas de carga  $q$ , mediante una diferencia de potencial  $V$ , comunicándoles una energía cinética dada por el producto  $qV$ . En uno de tales aparatos, un electrón parte del reposo y es acelerado por una diferencia de potencial de  $3 \times 10^6$  voltios. Calcular, clásica y relativistamente, su velocidad final. Para el electrón:  $m_0 = 9,1 \times 10^{-31}$  kg,  $|q| = 1,602 \times 10^{-19}$  C.

**30.** En el acelerador del problema anterior se introducen partículas alfa y protones. La carga de una partícula alfa es el doble de la del protón, y su masa en reposo la consideraremos como cuatro veces la del protón. Acelerando ambas partículas se puede variar la proporción 4:1 de sus masas. 1) ¿Entre qué valores puede variarse esa proporción? 2) ¿Qué potencial es necesario para reducir la relación entre masas a 7:2? Para el protón:  $m_0 = 1,67 \times 10^{-27}$  kg,  $|q| = 1,602 \times 10^{-19}$  C.

**31.** Un sincrotrón es un acelerador de partículas en el que éstas describen círculos de radio constante. En uno de ellos, cuando los protones tienen una energía de 10 GeV, la fuerza centrípeta, proporcionada por un campo magnético, necesaria para mantenerlos en trayectoria circular es de  $5 \times 10^{-11}$  N. Siendo la masa en reposo del protón de  $1,67 \times 10^{-27}$  kg, calcular el radio de la trayectoria de los protones.

**32.** Una partícula de masa en reposo  $m_0$  penetra, con momento  $\mathbf{p}_0$ , en un campo uniforme que le produce una fuerza  $\mathbf{F}$  constante y perpendicular a  $\mathbf{p}_0$ . Calcular la ecuación de la trayectoria que describe y comprobar que dicha trayectoria se reduce a una parábola cuando  $v$  es mucho menor que  $c$ .

**33.** Una partícula en reposo se DESINTEGRA en un pión, de masa en reposo  $2,5 \times 10^{-28}$  kg, y un protón, cuya masa en reposo es  $1,7 \times 10^{-27}$  kg y que sale con una energía cinética de  $3,2 \times 10^{-13}$  J. Calcular la masa de la partícula original.

**34.** Un pión positivo en reposo se DESINTEGRA en un muón positivo y un neutrino:  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$ . Siendo las energías en reposo del pión y muón de 140 MeV y de 106 MeV, respectivamente, calcular, para el muón resultante, su energía total, velocidad y energía cinética.

**35.** Se tiene un sistema de dos partículas idénticas, de masa en reposo  $m_0$ . En el sistema de referencia  $S$  la primera posee una velocidad  $u$  en el sentido  $OX$  positivo, y la segunda está en reposo. 1) Calcular la

velocidad  $V$ , paralela al eje  $OX$ , que debe tener el sistema  $S'$  respecto de  $S$  para que en él el momento lineal total sea nulo. ( $S' =$  SISTEMA DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO NULA). 2) Obtener la expresión de la energía total  $E'$ , en  $S'$ , en función de la velocidad  $u$  de la primera partícula en  $S$ .

**36.** Las dos partículas del problema anterior, cuyas masas en reposo llamaremos ahora  $m_A$ , chocan. La reacción consiguiente produce tres partículas de masas en reposo  $m_A$ ,  $m_B$  y  $m_C$ . Calcular la energía cinética mínima, (ENERGÍA UMBRAL), que debe tener la primera de las partículas para que sea posible la reacción citada:  $A + A \rightarrow A + B + C$ .

**37.** En un GAS IDEAL las partículas chocan elásticamente. Consideremos como sistema de referencia  $S'$  el de la cantidad de movimiento total nula. Obtener la expresión de la masa en reposo del gas, como sistema de partículas, medida desde un sistema de referencia  $S$ , respecto del cual  $S'$  se traslada con velocidad  $V$  en la dirección  $OX$ . ¿Es igual a la suma de las masas en reposo de cada partícula?

**38.** Un ÁTOMO de sodio, de masa en reposo  $m_0 = 3,82 \times 10^{-26}$  kg, ABSORBE UN FOTÓN de frecuencia  $\nu = 5,2 \times 10^{14}$  Hz. ¿Con qué velocidad retrocede el átomo? Recordar que un fotón de frecuencia  $\nu$  es un cuanto de radiación electromagnética de energía  $E = h\nu$  y masa en reposo nula, y que la constante de Planck,  $h$ , vale  $6,62 \times 10^{-34}$  J · s.

**39.** Un ÁTOMO excitado se encuentra en reposo respecto de un sistema de referencia. Al desexcitarse pasa a un estado con  $E$  unidades de energía menos. EMITE UN FOTÓN de frecuencia  $\nu$  y el resto del átomo retrocede. Teniendo en cuenta este retroceso, obtener la expresión de  $\nu$  en función de  $E$  y de la masa en reposo inicial.

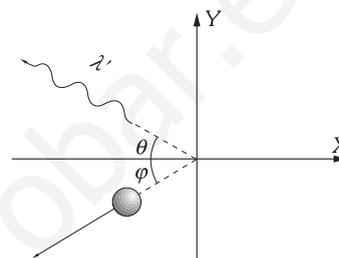
**40.** Expresar el momento lineal de una partícula de masa en reposo  $m_0$ , en función de su energía cinética.

**41.** Una partícula de masa en reposo  $m_0$ , que se mueve con una energía cinética  $T = m_0 c^2$ , CHOCA con otra partícula quieta de masa en reposo  $2m_0$ . Durante la colisión reaccionan y originan una nueva partí-

cula única. Calcular la masa en reposo y la energía cinética de la nueva partícula.

**42.** En una COLISION COMPTON un fotón, de longitud de onda  $\lambda$ , choca elásticamente con un electrón libre de masa en reposo  $m_0$ . Después del choque, el fotón, con longitud de onda  $\lambda'$ , se propaga en una dirección que forma un ángulo  $\theta$  con la de incidencia. Por su parte, el electrón retrocede con una velocidad  $v$  y bajo un ángulo  $\varphi$  con la dirección inicial del fotón. Calcular, en función de  $\theta$ : 1) El aumento,  $\lambda' - \lambda$ , de la longitud de onda del fotón. 2) La energía del fotón dispersado. 3) El ángulo  $\varphi$ . 4) La energía cinética de retroceso del electrón.

**43.** Un fotón, de longitud de onda  $\lambda$ , que viaja en la dirección  $OX$  en sentido positivo, colisiona con un electrón, de masa en reposo  $m_0$  y energía cinética  $T$ , que viaja en la misma dirección pero en sentido contrario. Después de la colisión ambos se mueven en las direcciones indicadas en la figura, calcular: 1) La longitud de onda del fotón emergente. 2) La variación de energía cinética del electrón. Aplicación:  $T = m_0 c^2$ ;  $\lambda = 0,28 \text{ \AA}$ ;  $h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ;  $m_0 = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ;  $\theta = 30^\circ$ .



Problema XXVII-43.

Gran parte del conocimiento actual de la estructura del átomo procede de experiencias relacionadas con las ondas electromagnéticas, y en particular con la luz visible. La naturaleza ondulatoria de la luz está fuertemente avalada por fenómenos que se producen en su propagación, como las interferencias y la difracción. Hay, sin embargo, otros fenómenos relacionados con la interacción de la luz con la materia que no son explicables ondulatoriamente, y de los que tratamos a continuación.

### A) TEORÍA DE LOS CUANTOS

#### XXVIII – 1. El cuerpo negro y los cuantos de energía de Planck

A finales del siglo XIX persistía planteado el problema de encontrar una expresión adecuada para la distribución espectral de la energía radiada por un cuerpo negro (párrafo XXVI-12). La fracción de densidad de energía emitida en un intervalo  $d\lambda$  en torno a una longitud de onda  $\lambda$  determinada, es función de  $\lambda$  y de la temperatura absoluta:  $f(\lambda, T) d\lambda$ .

Wien por un lado y Rayleigh y Jeans por otro, encontraron expresiones para la función  $f(\lambda, T) d\lambda$  que se acomodaban a la curva experimental para longitudes de onda cortas el primero y largas los segundos (párrafo XXVI-13), pero ninguna concordaba completamente con la experiencia.

En 1901, Max K. Planck (1858-1947), propuso una fórmula empírica (fórmula 8 capítulo XXVI) que contenía una constante,  $h$ , cuyo valor se ajustó para acomodar la expresión a los datos experimentales. Para la explicación de la emisión de radiación térmica se basó en la teoría de Maxwell, según la cual una carga acelerada emite radiación electromagnética. Afirmó que la superficie del cuerpo emisor contiene electrones, ligados a una posición de equilibrio por fuerzas atractivas proporcionales a la distancia; debido a su agitación térmica, estas cargas realizan movimientos armónicos y, en consecuencia, emiten radiación electromagnética de la misma frecuencia que la de su oscilación. De esta forma, las propiedades de la radiación dependen de las del oscilador que las produce.

Sobre esta base, y para poner de acuerdo la teoría con las medidas experimentales, adoptó la siguiente hipótesis:

*La energía de un oscilador armónico es discreta, solamente puede tener valores que sean múltiplos enteros de una cantidad mínima o «cuanto» de energía, de valor*

$$E = h \nu \quad (1)$$

donde  $\nu$  es la frecuencia de la oscilación y  $h$  es la constante de Planck, cuyas dimensiones son las de una «acción» (trabajo  $\times$  tiempo), por lo que se llama CUANTO DE ACCIÓN DE PLANCK, y cuyo valor, como ya se ha dicho, es:  $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ . Así pues, en un oscilador armónico cuya frecuencia de vibración es  $\nu$ , la energía sólo puede tener uno de los valores  $h\nu$ ,  $2 h\nu$ ,  $3 h\nu$ , ...

La hipótesis de Planck de la CUANTIFICACIÓN DE LA ENERGÍA es uno de los puntos básicos sobre los que se ha desarrollado toda la Física del átomo. La teoría de los cuantos explica satisfactoriamente las anomalías que existían en la teoría clásica de calores específicos (Ley de Dulong y Petit) y fue aplicada por Albert Einstein (1879-1955) a la explicación teórica del efecto fotoeléctrico, con una apoteosis triunfal en 1915, al confirmar Robert A. Millikan (1868-1953) experimentalmente las teorías expuestas por Einstein.

**PROBLEMAS: 1 al 5.**

#### XXVIII – 2. Efecto fotoeléctrico. Fotones

*Es la emisión de electrones por determinados metales, cuando sobre ellos incide luz u otra radiación electromagnética de pequeña longitud de onda.*

En el esquema experimental de la Fig. XXVIII-1, cuando la luz incide sobre el metal C (cátodo) éste emite electrones (fotoelectrones) que son recogidos por el ánodo P, estableciéndose una corriente que se mide con el amperímetro A. Aumentando la tensión que proporciona la fuente F, se llega a una intensidad de corriente máxima por A cuando el ánodo recibe todos los electrones emitidos por el metal. Cambiando la polaridad de la fuente se puede anular la corriente que circula por A, lo que se conseguirá para una diferencia de potencial entre C y P de valor  $V$  tal que la

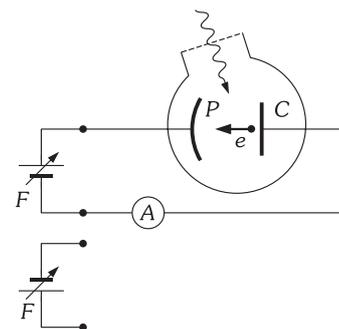


Fig. XXVIII-1.- Esquema de montaje experimental para el estudio del efecto foto-eléctrico.

energía cinética con que son emitidos los electrones sea igual a la diferencia de energía potencial del electrón entre ambos electrodos,  $eV$ .

Según la teoría electrodinámica clásica se podrían esperar entre otras las siguientes observaciones: 1) La energía cinética de los fotoelectrones debe aumentar con la intensidad de la luz. 2) Si la intensidad se hace lo suficientemente pequeña pasará un tiempo apreciable hasta que el electrón almacene la energía suficiente para saltar del cátodo. 3) Si la intensidad es lo suficientemente grande se deben encontrar electrones con velocidad tan alta como se quiera.

Ninguna de estas previsiones se cumple realmente, la teoría ondulatoria de la luz no tiene justificación para el efecto fotoeléctrico.

En 1905, Einstein demostró que los resultados experimentales disponibles hasta entonces sobre este efecto, eran explicables aceptando como un hecho el que:

*La radiación electromagnética se emite y absorbe en forma de cuantos de energía  $h\nu$ , o fotones, y no de forma continua.*

En el efecto fotoeléctrico un fotón es asimilado íntegro por un electrón, invirtiéndose su energía en parte en trabajo de extracción para salir del metal, y el resto en energía cinética.

Al ser la energía del fotón proporcional a la frecuencia de la radiación, se comprende que el efecto fotoeléctrico sea provocado, únicamente, por las radiaciones de gran frecuencia; esta energía del fotón se emplea, como hemos dicho, en la energía necesaria para arrancar el electrón del átomo ( $W_0$ ), más la energía cinética que adquiere el electrón ( $1/2 m v^2$ ).

$$h\nu = W_0 + \frac{1}{2} m v^2 \quad (2)$$

Los resultados experimentales de Millikan, obtenidos diez años después de que Einstein explicase el fenómeno, se resumen en la Fig. XXVIII-2, en la que la pendiente de la recta es  $h$  y que nos permite medir por extrapolación el valor  $W_0$  para el metal empleado.

La teoría de Einstein explica claramente los siguientes hechos experimentales.

1. Es necesaria una «frecuencia umbral» o mínima, para la producción de fotoelectrones, que es característica del metal; (el valor de tal frecuencia lo obtenemos de la ecuación de Einstein haciendo  $m v^2/2 = 0$ ;  $\nu_0 = W_0/h$ ).
2. La energía de los electrones emitidos es una función de la frecuencia de la radiación e independiente de su intensidad [ $m v^2/2 = h(\nu - \nu_0)$ ].
3. El número de electrones emitidos por segundo es una función lineal de la intensidad de la radiación que provoca la emisión.
4. La emisión de electrones comienza y cesa, en los instantes en que la radiación comienza y cesa de incidir sobre el metal.

**PROBLEMAS: 6 al 15.**

**XXVIII – 3. Efecto Compton**

Un gran número de experimentos y observaciones han confirmado la teoría de los fotones. Una de ellas fue el descubrimiento, hecho en 1923 por Arthur Holly Compton (1892-1962), de que: cuando un haz de rayos X incide sobre determinadas sustancias (parafina fue la usada por Compton) se difunde en una dirección distinta a la de incidencia y disminuyendo su frecuencia (aumentando la longitud de onda); al mismo tiempo surgen del cuerpo electrones en movimiento.

En el efecto fotoeléctrico, toda la energía del fotón se transmite a los electrones, realizando un trabajo de extracción y comunicándoles energía cinética.

En el EFECTO COMPTON parte de la energía del fotón, ( $h\nu_0$ ) se transmite a un electrón comunicándole energía cinética; la energía radiante no empleada en tal finalidad ( $h\nu$ ) es la que corresponde a la radiación secundaria. La figura XXVIII-3 nos da idea del fenómeno.

Vamos a calcular la variación de la longitud de onda del fotón en la dispersión. Para ello supondremos que colisiona elásticamente con un electrón libre y en reposo, cuya masa designaremos con  $m_0$ ; por efecto de la colisión el electrón adquiere una velocidad  $v$  que puede no ser despreciable frente a la de la luz en el vacío, con lo que deberemos aplicar fórmulas relativistas.

Si llamamos  $p_e$  al momento lineal del electrón, como en la figura, sus energías totales antes y después de la colisión serán respectivamente:  $m_0 c^2$  y  $\sqrt{m_0^2 c^4 + p_e^2 c^2}$ . Por tener el fotón masa en reposo nula (se mueve a velocidad  $c$ ) su momento lineal es:  $p = E/c = h \nu/c$ .

La conservación del momento lineal en ambos ejes se expresa:

$$\frac{h \nu_0}{c} = \frac{h \nu}{c} \cos \theta + p_e \cos \varphi \quad 0 = \frac{h \nu}{c} \sin \theta - p_e \sin \varphi$$

La conservación de la energía total implica:  $h \nu_0 + m_0 c^2 = h \nu + \sqrt{p_e^2 c^2 + m_0^2 c^4}$

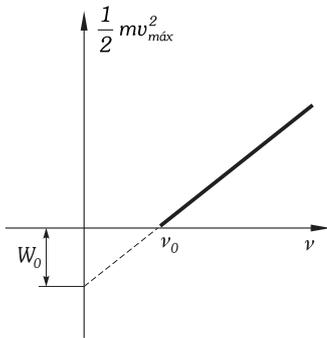


Fig. XXVIII-2.- Relación entre la energía cinética de los fotoelectrones y la frecuencia de la radiación.

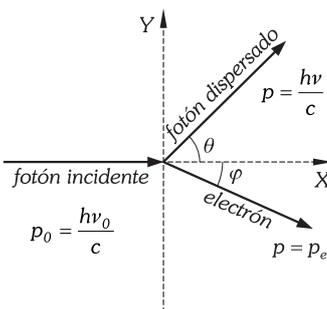


Fig. XXVIII-3.- Efecto Compton.

Elevando al cuadrado las dos primeras para despejar  $p_e$ , tenemos:

$$p_e^2 = \frac{h^2 \nu_0^2}{c^2} + \frac{h^2 \nu^2}{c^2} - 2 \frac{h^2 \nu_0 \nu}{c^2} \cos \theta$$

Despejando de la tercera se obtiene:  $p_e^2 = \frac{h^2 \nu_0^2}{c^2} + \frac{h^2 \nu^2}{c^2} - 2 \frac{h^2 \nu_0 \nu}{c^2} + 2 h m_0 (\nu_0 - \nu)$

igualando estas dos últimas y despejando la diferencia  $\nu_0 - \nu$ :  $\nu_0 - \nu = \frac{h \nu_0 \nu}{m_0 c^2} (1 - \cos \theta)$

que dividiendo por  $\nu_0 \nu$  se transforma en:  $\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu_0} = \frac{h}{m_0 c^2} (1 - \cos \theta)$

y por fin, de la relación  $\nu = c/\lambda$  queda:

$$\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) \Rightarrow \boxed{\Delta \lambda = \lambda_C (1 - \cos \theta)}$$

donde  $\lambda_c = h/m_0 c$  se denomina LONGITUD DE ONDA COMPTON DEL ELECTRÓN. (Para el electrón  $\lambda_c = 2,4 \times 10^{-12}$  m).

De esta expresión se deduce que la longitud de onda del fotón dispersado es siempre mayor que la del incidente cuando el electrón está inicialmente en reposo. Además la diferencia de longitud de onda de ambos fotones no depende de la naturaleza del material dispersor, sino solamente del ángulo  $\theta$  de dispersión.

**PROBLEMAS: 16 al 19.**

#### XXVIII – 4. Dualidad onda-corpúsculo de la radiación electromagnética

Como se ha visto en capítulos anteriores, la radiación electromagnética (la luz en particular) puede producir fenómenos de interferencia, difracción o polarización. Todos ellos se refieren a efectos que se producen en su propagación y cuya explicación debe hacerse desde el punto de vista ondulatorio; la luz, por tanto, se propaga como una onda electromagnética.

Por otra parte, acabamos de ver algunos fenómenos (efectos fotoeléctrico y Compton) en los que la luz es emitida o absorbida en paquetes enteros e indivisibles, los fotones, que nos hacen pensar en ella como constituida por partículas. Se nos presentan, pues, dos aspectos de la naturaleza de la luz aparentemente irreconciliables, con carácter de continuidad uno y discontinuo el otro, pero ambos con un soporte experimental firme. A este doble carácter se le denomina DUALIDAD ONDA-CORPÚSCULO DE LA LUZ y constituye un hecho que, desde el punto de vista de la Física clásica, hay que aceptar como «una de esas cosas de la Naturaleza». Bajo este prisma, la pregunta *¿qué es la luz?* no tiene respuesta. Hay sin embargo otra cuestión no menos importante: *¿cómo se comporta?*, a ella podemos responder que en su propagación se comporta como una onda y en su interacción con la materia lo hace como una partícula.

Ambos aspectos están relacionados en la ecuación de Einstein  $E = m c^2$ . Para un fotón, la longitud de onda (carácter ondulatorio) y la masa (carácter corpuscular) pueden ponerse en función una de otra:

$$\begin{array}{l} E = m c^2 \\ E = h \nu = h c / \lambda \end{array} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m = \frac{h}{c \lambda}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\lambda = \frac{h}{m c}}$$

Como veremos más adelante, esta dualidad no es exclusiva de la radiación, Louis De Broglie (1892-1967) en 1924 la hizo extensible a objetos considerados hasta entonces como partículas materiales exclusivamente, abriendo con ello la vía para el desarrollo de la *Mecánica Cuántica*.

El tener que recurrir unas veces a la teoría ondulatoria y otras a la corpuscular produce cierta intranquilidad porque parece que no tiene mucho sentido. Una situación análoga se nos planteó en el tema de relatividad, cuyas conclusiones no eran de «sentido común». El problema es intentar buscarle explicación a un hecho trabajando con modelos elaborados sobre observaciones que obedecen las leyes de la mecánica clásica. Los cuerpos que se mueven a velocidades comparables a la de la luz o las partículas a escala atómica no obedecen esas leyes. Para este último caso se ha elaborado la Mecánica Cuántica que combina las teorías ondulatoria y corpuscular y que hace posible explicar todos los fenómenos desde un único punto de vista.

#### B) MODELO ATÓMICO DE BOHR

#### XXVIII – 5. Primeros modelos atómicos

Varios filósofos de la antigua Grecia (Demócrito entre ellos), observando fenómenos naturales, llegaron a la conclusión de que la materia es discontinua, teniendo, por tanto, un límite de divisibi-

lidad. Si a un «cuerpo simple», por ejemplo la plata, pudiéramos dividirlo indefinidamente en porciones cada vez más pequeñas, llegaríamos a un grado de división tal que las partículas que obtuviésemos dejarían de tener las propiedades que caracterizan al «cuerpo simple o elemento químico plata».

*Las partículas más pequeñas que mantienen las propiedades del cuerpo simple, son los ÁTOMOS (ατομοζ – indivisible).*

La teoría cinética de los gases o el movimiento browniano son pruebas de su existencia. De la unión de varios átomos resultan las moléculas que forman los compuestos químicos.

La evolución de los distintos modelos de átomo que se han ido elaborando, ha venido forzada por las necesidades de dar explicación a diferentes hechos experimentales. El primer modelo atómico se debe a JOHN N. DALTON (1766-1844), que en 1800, los imaginaba como esferas compactas y homogéneas, sin estructura interna, siendo de igual tamaño y masa todos los del mismo elemento y distintos los de elementos diferentes. Pudo con ello explicar las leyes de Lavoisier, de la conservación de la masa en las reacciones químicas, y de Proust, de las proporciones múltiples.

La observación en los tubos de gases de la separación de átomos y moléculas en partículas con distinta carga, hizo abandonar el modelo anterior y sustituirlo en 1897 por el de SIR JOSEPH J. THOMSON (1856-1940), según el cuál, el átomo está constituido por una esfera de carga positiva que lleva uniformemente distribuidos los electrones necesarios para hacer neutro el conjunto. Aparecen las dos primeras partículas subatómicas, el electrón y el protón, cuyas características son medidas mediante electrólisis y desviación en campos eléctricos y magnéticos.

*Electrón:* carga elemental negativa igual a  $1,602 \times 10^{-19}$  C, masa igual a  $9,108 \times 10^{-31}$  kg.

*Protón:* carga positiva igual a la del electrón y masa de  $1,673 \times 10^{-27}$  kg, es decir, aproximadamente 1 840 veces mayor que la del electrón.

Posteriormente, en 1932, Sir James Chadwick (1891-1974), físico inglés discípulo de Lord Ernest Rutherford (1871-1937) identificó el *neutrón* en una reacción nuclear (capítulo XXX). Esta partícula tiene masa aproximadamente igual a la del protón y carga nula.

El descubrimiento de la radiactividad permitió a RUTHERFORD diseñar una experiencia de dispersión de partículas  $\alpha$ , que son átomos de helio doblemente ionizados. Las hizo atravesar láminas metálicas muy delgadas y observó que la inmensa mayoría traspasaban capas de miles de átomos sin desviarse, pero algunas pocas eran desviadas incluso con ángulos muy grandes. A partir de sus medidas elaboró en 1911 el primer modelo nuclear: el átomo está constituido por una zona central muy densa, el *núcleo*, en la que se acumulan los protones y prácticamente toda la masa del átomo, con un diámetro del orden de  $10^{-14}$  m y en torno a la cual giran en órbitas circulares los electrones, cubriendo una zona llamada *corteza* y que tiene un diámetro del orden de  $10^{-10}$  m. Los electrones se mantienen en su órbita por compensación de la fuerza centrífuga y la atracción coulombiana del núcleo.

El hecho de que la acumulación de protones en el núcleo fuese estable hizo suponer en principio que contenía un cierto número de electrones, sin embargo, esta idea se demostró pronto incompatible con los cálculos de la energía que tales electrones deberían tener. El propio Rutherford realizó en 1919 la primera transmutación nuclear en un experimento de bombardeo de nitrógeno con partículas  $\alpha$  naturales, en la que identificó los protones de largo alcance producidos. El estudio de las reacciones entre partículas rápidas y átomos condujo a Chadwick al descubrimiento del neutrón como producto del bombardeo de berilio con partículas  $\alpha$ .

El modelo atómico de Rutherford presentaba dos serias dificultades que fueron solventadas por Niels Bohr (1885-1962). En primer lugar, la teoría electromagnética asegura que una carga acelerada emite ondas electromagnéticas, así, los electrones en movimiento circular deben radiar energía y caer paulatinamente al núcleo. En segundo lugar, al poder tener el radio de la órbita, y por tanto la energía, del electrón cualquier valor, en su caída hacia el núcleo el electrón perdería energía de forma continua, lo cual entraba en contradicción con los datos espectroscópicos de los átomos, ya conocidos desde la segunda mitad del siglo XIX.

## XXVIII – 6. Espectros atómicos. Series espectrales

En la segunda mitad del siglo XIX se conocía que los gases a baja presión emiten luz cuando se les eleva lo suficiente la temperatura o se les somete a diferencias de potencial grandes en un tubo de gases; la luz emitida muestra un espectro discreto de frecuencias que depende del gas que hay en el tubo pero que es característica de cada uno de ellos. Si el gas está a presión muy baja es de suponer que la emisión de luz por cada átomo se verifica sin influencias de los restantes, por lo tanto el espectro de emisión es una característica intrínseca del átomo y cualquier modelo atómico debe dar cuenta de él.

En la gran cantidad de datos espectroscópicos acumulados se observó que las rayas de los espectros atómicos no se encuentran en desorden sino que en muchos casos forman SERIES ESPECTRALES, constituidas por rayas que al aumentar la frecuencia van disminuyendo de intensidad y aproximándose entre sí, tendiendo hacia una frecuencia máxima. La serie más estudiada es la del

espectro visible del hidrógeno, de la que en 1885, Joham J. Balmer (1825-1898) encontró una sistematización que se refleja en la expresión:

$$\bar{\nu} = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (2)$$

donde  $\bar{\nu}$  es la FRECUENCIA ESPECTROSCÓPICA igual al inverso de la longitud de onda ( $\bar{\nu} = \nu/c = 1/\lambda$ ),  $n$  es un número entero que para las cuatro rayas visibles toma los valores 3, 4, 5 y 6, y  $R$  es una constante, denominada CONSTANTE DE RYDBERG, cuyo valor para el hidrógeno es  $R = 109\,677,58 \text{ cm}^{-1}$ . Posteriormente se localizaron rayas en el ultravioleta que corresponden a mayores valores de  $n$  y que se esquematizan en la Fig. XXVIII-4.

Además de la serie de Balmer, el espectro del hidrógeno contiene cuatro series más que llevan los nombres de sus respectivos descubridores:

$$\begin{aligned} \bar{\nu} &= R \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) & n = 2, 3, 4, \dots \text{ serie de Lyman (ultravioleta)} \\ \bar{\nu} &= R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) & n = 3, 4, 5, \dots \text{ serie de Balmer (visible y ultravioleta)} \\ \bar{\nu} &= R \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right) & n = 4, 5, 6, \dots \text{ serie de Paschen (infrarrojo)} \\ \bar{\nu} &= R \left( \frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right) & n = 5, 6, 7, \dots \text{ serie de Brackett (infrarrojo)} \\ \bar{\nu} &= R \left( \frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right) & n = 6, 7, 8, \dots \text{ serie de Pfund (infrarrojo)} \end{aligned}$$

todas ellas concuerdan perfectamente con los valores experimentales.

Posteriormente Jhoanes R. Rydberg (1854-1919), analizando las series espectrales de otros elementos, encontró que la frecuencia de las rayas se puede representar como la diferencia de dos funciones de números enteros, de la forma:

$$\bar{\nu} = T_1(n_1) - T_2(n_2) \quad (3)$$

donde las funciones  $T(n)$  se llaman TÉRMINOS ESPECTRALES y son tales que, dentro de cada serie,  $T_1(n_1)$  tiene un valor fijo y  $T_2(n_2)$  variable. Para acomodar esta expresión a la (2) de la serie de Balmer del hidrógeno, propuso para los términos espectrales la expresión:

$$T(n) = \frac{R}{(n + \alpha)^2}$$

en la que  $\alpha$  es una constante de corrección que tiene el mismo valor para todas las rayas de una misma serie.

En los metales alcalinos describió tres series distintas que denominó principal, difusa y definida. Posteriormente Bergmann descubrió una cuarta serie. En cada una de ellas la corrección  $\alpha$  del término variable se designa con una letra distinta: s, p, d, f,...

Las expresiones de las cuatro series son:

$$\begin{aligned} \text{Principal:} & \quad \bar{\nu} = \frac{R}{(1+s)^2} - \frac{R}{(n+p)^2} & n = 2, 3, 4, \dots \\ \text{Definida:} & \quad \bar{\nu} = \frac{R}{(2+p)^2} - \frac{R}{(n+s)^2} & n = 2, 3, 4, \dots \\ \text{Difusa:} & \quad \bar{\nu} = \frac{R}{(2+p)^2} - \frac{R}{(n+d)^2} & n = 3, 4, 5, \dots \\ \text{Bergmann:} & \quad \bar{\nu} = \frac{R}{(3+d)^2} - \frac{R}{(n+f)^2} & n = 4, 5, 6, \dots \end{aligned}$$

La notación espectroscópica simplifica las expresiones anteriores. Si al término  $R/(n + \alpha)^2$  lo denotamos  $nA$ , tendremos para las cuatro series citadas, y en el mismo orden:

$$\bar{\nu} = 1S - nP \quad ; \quad \bar{\nu} = 2P - nS \quad ; \quad \bar{\nu} = 2P - nD \quad ; \quad \bar{\nu} = 3D - nF$$

con los valores de  $n$  ya indicados.

En definitiva, para caracterizar el espectro de cualquier elemento basta utilizar diferencias de términos espectrales del tipo  $1S, 2P, 3D, \dots$  que son funciones sencillas de números enteros. Lo

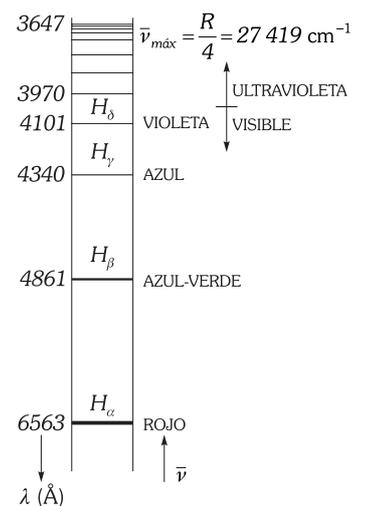


Fig. XXVIII-4.- Serie espectral de Balmer.

compacto de esta formulación y la gran cantidad de datos experimentales a los que se ajusta, hace de los espectros la prueba inexcusable a la que se ha de someter cualquier modelo del átomo.

### XXVIII – 7. Modelo de Bohr

Hemos visto las dificultades que presentaba el modelo de Rutherford referentes a la estabilidad de la órbita del electrón y a la explicación de los espectros.

Niels Bohr, que había sido alumno de Rutherford durante 1912, pensaba que el modelo nuclear daría buenos resultados si se le incorporaba la teoría cuántica de la radiación desarrollada por Planck y Einstein, de forma que los electrones en el átomo perdieran o ganaran energía por cuantos. Para hacer compatible esta idea con el modelo atómico hubo de emitir dos postulados:

1<sup>er</sup> POSTULADO: *El electrón puede moverse sin radiar energía en ciertas órbitas (que llamó estados estacionarios); la radiación se produce, cuando cambia de uno a otro, como resultado de la diferencia de energía que posee en cada uno de ellos.*

La frecuencia del fotón emitido es: 
$$\nu = \frac{E_i - E_f}{h} \quad (4)$$

donde  $E_i$  y  $E_f$  son las energías del electrón en los estados inicial y final, respectivamente. Si el electrón «salta» de un NIVEL de mayor energía a otro de menor, el resultado es la emisión de un fotón de la frecuencia reseñada. Si por el contrario el fotón es absorbido por el electrón, éste se promociona a un nivel de mayor energía.

Un electrón en órbita circular de radio  $r$  tiene una energía  $E$ , que se puede calcular considerando sometido a la atracción coulombiana del núcleo. Supongamos un átomo hidrogenoide consistente en un núcleo con  $Z$  protones y un único electrón cortical, la energía total  $E$  del electrón es suma de la potencial  $U$  y la cinética  $T$ :

$$U = -\frac{K_0 Z e^2}{r} \quad \text{con} \quad K_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

e igualando la atracción del núcleo al producto de la masa por la aceleración centrípeta:

$$\frac{K_0 Z e^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad (5)$$

llegamos a: 
$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{K_0 Z e^2}{r} \quad \wedge \quad E = T + U = -\frac{1}{2} \frac{K_0 Z e^2}{r} \quad (6)$$

Introduciendo esta expresión en (4), tenemos: 
$$\nu = \frac{K_0 Z e^2}{2h} \left( \frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right) \quad (7)$$

en la que  $r_i$  y  $r_f$  son, respectivamente, el radio de la órbita inicial y el de la final, y que se puede escribir de la forma:

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{c} = \frac{K_0 Z e^2}{2hc} \left( \frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right) \quad (8)$$

Al comparar esta expresión con la (2) de Balmer, le resultó evidente a Bohr que los radios de las órbitas debían ser proporcionales a los cuadrados de números enteros. La condición que le aseguraba este resultado la enunció como un nuevo postulado:

2<sup>o</sup> POSTULADO: *En una órbita estable, el momento cinético del electrón es un número entero de veces la constante de Plank dividida por  $2\pi$ .*

$$mvr = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

donde  $\hbar = h/2\pi$ . El número  $n$  es el llamado NUMERÓ CUÁNTICO PRINCIPAL, que determina la cuantificación de los radios de las órbitas y por tanto de la energía del electrón.

Resolviendo el sistema formado por (5) y (9) se obtiene para el radio de la  $n$ -ésima órbita:

$$r_n = \frac{\hbar^2}{K_0 Z e^2 m} n^2 \quad (10)$$

y de (6), tenemos para la energía correspondiente la expresión:

$$E_n = - \frac{mK_0^2 Z^2 e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2} \quad (11)$$

el signo negativo de la energía se debe a haber elegido, para expresar  $U$ , el nivel de energía potencial cero a distancia infinita del núcleo. Según la expresión anterior los valores permitidos de la energía del electrón se distribuyen en forma de NIVELES DE ENERGÍA discretos.

De los dos postulados de Bohr resulta un modelo atómico del tipo planetario, con órbitas circulares que se denominan CAPAS ELECTRÓNICAS, y que se designan con las letras:  $K$  ( $n=1$ ),  $L$  ( $n=2$ ),  $M$  ( $n=3$ ),  $N$  ( $n=4$ ), ..., estando cada una de ellas separada de las contiguas por ZONAS PROHIBIDAS al electrón.

Hay que hacer notar que en la deducción de las anteriores expresiones se ha considerado el núcleo como si fuese fijo; en realidad tanto el núcleo como el electrón se mueven en torno al centro de masas, y las fórmulas resultan más correctas si se sustituye la masa  $m$  del electrón por la masa reducida  $\mu$  del sistema. En el átomo de hidrógeno, en el que más influencia tiene este hecho, la corrección es del 0,05% que, aunque pequeña, es de considerar debido a la elevada precisión con que se realizan las medidas espectroscópicas.

**XXVIII – 8. Modelo de Bohr del átomo de hidrógeno.**

El átomo más sencillo es el del hidrógeno, con un protón como núcleo y un sólo electrón cortical. Para obtener los radios de las órbitas permitidas al electrón basta hacer  $Z = 1$  en (10):

$$r_n = \frac{\hbar^2}{K_0 e^2 m} n^2 \Rightarrow \boxed{r_n = n^2 r_0} \quad (12)$$

en donde  $r_0$  se denomina *radio de Bohr*, de valor  $r_0 = \hbar^2/K_0 me^2 = 0,529 \times 10^{-10}$  m. Como se observa en (12), los radios de las órbitas aumentan con  $n^2$ , con lo que los valores posibles son (Fig. XXVIII-5):

$$r_1 = r_0 = 0,529 \times 10^{-10} \text{ m}; \quad r_2 = 4r_1; \quad r_3 = 9r_1; \dots$$

La energía del electrón en cada órbita se puede obtener de la expresión (11)

$$E_n = - \frac{mK_0^2 e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \boxed{E_n = - \frac{E_0}{n^2}} \quad (13)$$

con  $E_0 = mK_0^2 e^4/2\hbar^2 = 2,183 \times 10^{-18} \text{ J} = 13,6 \text{ eV}$ .

La energía de cada órbita aumenta con  $n^2$  conforme se consideran radios cada vez mayores. Las sucesivas energías son:

$$E_1 = - E_0 = - 13,6 \text{ eV} \quad E_2 = - \frac{E_0}{4} = - 3,4 \text{ eV} \quad E_3 = - \frac{E_0}{9} = - 1,5 \text{ eV}, \dots$$

puesto que son negativas, la menor de ellas es la de mayor valor absoluto. Si el electrón se encuentra en su estado de más baja energía ( $n=1$ ) se dice que el átomo está en su *estado fundamental*; pero ese electrón puede adquirir energía de un campo exterior, de una colisión con otro electrón, de un fotón,... y pasar a un nivel superior, en cuyo caso se dice que el átomo se encuentra en un *estado excitado*.

El paso de un estado excitado a otro de menor energía supone la emisión de un fotón de frecuencia  $\nu$  dada por (4):

$$\nu = \frac{1}{h} (E_i - E_f) = \frac{E_0}{h} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (14)$$

Si se trata de un fotón absorbido, la frecuencia es  $\nu = (E_f - E_i)/h$ .

La Fig. XXVIII-6 es una representación (no hecha a escala) de las posiciones relativas de los niveles de energía en el átomo de hidrógeno; todas las energías son negativas, si el electrón tiene energía nula o positiva no está ligado al núcleo, con lo que el átomo está ionizado (el valor experimental de la energía de ionización del hidrógeno es precisamente 13,6 eV, lo que constituye un dato importante en favor de este modelo). Las flechas indican los saltos entre niveles que originan las distintas rayas de cada serie espectral.

La expresión (14) se puede poner en la forma:

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{c} = \frac{E_0}{hc} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (15)$$

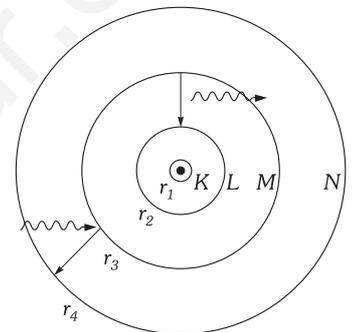


Fig. XXVIII-5.- Órbitas permitidas en el hidrógeno según el modelo de Bohr. Un fotón puede elevar el electrón a una órbita de más energía. Si el electrón emite un fotón pasa a una órbita más interior.

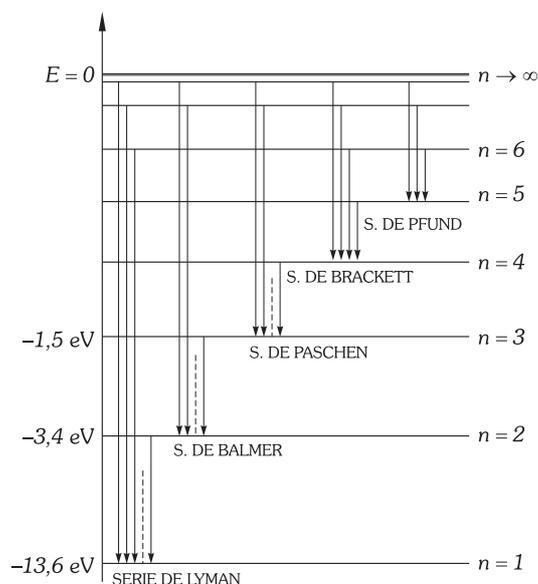


Fig. XXVIII-6.- Diagrama de niveles de energía y series espectrales del hidrógeno.

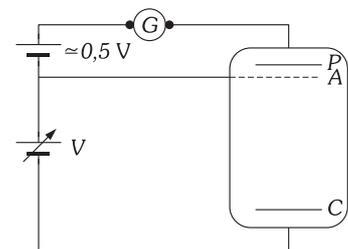


Fig. XXVIII-7.- Experimento de Franck-Hertz para calcular intercambios de energía en choques entre electrones.

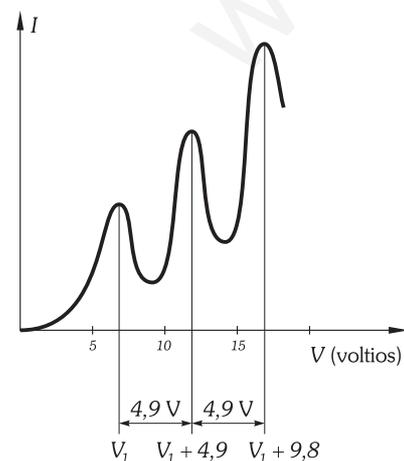


Fig. XXVIII-8.- Intensidad de corriente en el experimento de Franck y Hertz.

que comparada con las (2) y (3) nos aclara el significado físico de los términos espectrales de Rydberg, cada uno de ellos corresponde a  $1/hc$  veces el valor de una de las energías posibles del electrón; en ella el coeficiente del paréntesis es:

$$\frac{E_0}{hc} = \frac{mZ^2K_0^2e^4}{4\pi\hbar^3c} = 109894,9 \text{ cm}^{-1} \quad (Z=1 \text{ para el hidrógeno})$$

en el que cada una de las constantes puede ser calculada independientemente:  $e$  y  $m$  en tubos de gases y en electrólisis,  $h$  o  $\hbar$  en el efecto fotoeléctrico,  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío. La analogía de las expresiones (15) y (2), y la coincidencia del valor numérico anterior con el de la constante de Rydberg para el hidrógeno (salvo un error del 0,2%, perfectamente admisible en medidas experimentales) constituyen una prueba fortísima a favor del modelo atómico de Bohr, que a pesar de haber sido elaborado a base de postulados «ad hoc», cuenta con méritos como introducir la cuantificación en el átomo, explicar por qué los átomos producen espectros de rayas de emisión y absorción, o el de ajustarse a los datos experimentales referentes al hidrógeno.

### XXVIII - 9. Experimento de Franck y Hertz.

La existencia de niveles de energía que se deduce de los postulados de Bohr se justifica porque permiten explicar los espectros atómicos, sin embargo, también puede comprobarse con experimentos directos. Franck y Hertz realizaron en 1914 uno en que los electrones reciben energía del choque con otros electrones, en lugar de hacerlo de un fotón como en los espectros de absorción.

El dispositivo experimental (Fig. XXVIII-7) consta de una ampolla en la que después de hacer un alto vacío, se produce una pequeña presión de vapor de mercurio; dentro de ella están el cátodo caliente  $C$ , la rejilla que hace de ánodo, y la placa  $P$ , que va conectada al galvanómetro  $G$ . Entre la placa y rejilla se establece un campo débil, contrario al de  $V$ , mediante una pequeña diferencia de potencial de aproximadamente 0,5 voltios. Si desde  $V=0$  se aumenta la tensión de la fuente regulable, la intensidad de corriente a través de  $G$  (Fig. XXVIII-8) aumenta hasta un valor máximo para la tensión  $V_1$ . A partir de este valor desciende bruscamente para volver a aumentar y producir nuevos picos. Estos resultan a incrementos fijos de  $V$  de 4,9 voltios.

Los electrones que emite el cátodo se aceleran entre  $C$  y  $A$ , una parte de ellos atraviesa la rejilla y produce paso de corriente por el galvanómetro. Cuando la energía de los electrones es suficiente, en  $V=V_1$ , los choques entre ellos y los electrones del mercurio promociona a éstos a un nivel excitado, dejando a los primeros sin energía suficiente para superar la tensión entre  $A$  y  $P$ . Un aumento de la tensión hace de nuevo posible que los electrones cedan energía en dos choques consecutivos, dando en la gráfica el segundo pico en  $V=V_1+4,9$  voltios. El primer pico está desplazado hacia la derecha debido al trabajo de extracción de electrones del cátodo.

En consecuencia: mientras los electrones catódicos tienen una energía cinética menor de 4,9 eV sus choques con el mercurio son elásticos, para energías superiores ceden precisamente esa cantidad a los electrones corticales, por tanto 4,9 eV debe ser la diferencia de energía entre dos niveles en el átomo de mercurio.

El valor del potencial  $V$  correspondiente a esa energía se denomina *potencial crítico*. La raya del espectro y el potencial asociado se llaman *de resonancia*.

**PROBLEMAS: 20 al 29.**

### C) CORRECCIONES AL MODELO DE BOHR. NÚMEROS CUÁNTICOS

#### XXVIII - 10. Insuficiencia del modelo atómico de Bohr

A pesar de sus indiscutibles méritos, el modelo atómico de Bohr cuenta también con importantes limitaciones.

Conforme se perfeccionaron los espectrómetros dotándolos de mayor poder de resolución se fue comprobando que las rayas de los espectros de emisión de los átomos no eran simples sino que se desdoblaban en dos o más muy juntas (ESTRUCTURA FINA). Otro dato espectroscópico sin resolver es el hecho de que unas rayas sean más brillantes que otras. Tampoco puede este modelo explicar lo que sucede durante el paso del electrón de una órbita a otra por una zona que le está prohibida.

Se hicieron intentos, como las correcciones de Sommerfeld, de adaptarlo a átomos con más de un electrón, pero los resultados no fueron completamente satisfactorios.

Estaba claro que se necesitaba una teoría nueva que diera respuesta a tantos interrogantes. Esa nueva teoría es la MECÁNICA CUÁNTICA, desarrollada por Erwin Schrödinger (1887-1961) a partir de la generalización de la dualidad onda - corpúsculo a las partículas hecha por De Broglie, y por Werner Heisenberg (1901-1976) a partir de la ya antigua teoría de los cuantos. Su primera implicación es el abandono de la imagen del electrón

como bolita dando vueltas en torno al núcleo. En la mecánica cuántica el electrón se describe mediante una función matemática que se denomina función de onda y que no tiene significado físico directo (no es observable como lo son las ondas clásicas) pero cuyo cuadrado nos mide, como se verá más adelante, la probabilidad de que el electrón se encuentre en un punto e instante determinados. En lugar de hablar de partículas y de trayectorias se habla de probabilidad. Y eso es así, no porque la nueva teoría sea incompleta sino porque la Naturaleza a escala microscópica no es determinista.

En el primer cuarto de este siglo las teorías relativista y cuántica supusieron dos auténticas revoluciones frente a la mecánica clásica; con todo no la invalidan sino que la engloban, extendiéndose a unos campos en que ésta no es aplicable y coincidiendo con ella en otros. Hay que señalar que las dos primeras fueron conjugadas por Paul A. M. Dirac (1902-1984) en la Mecánica Cuántica Relativista.

A pesar de todo lo dicho, pensamos que el aparato matemático que supone el formalismo cuántico no está al alcance de un estudiante de Física general. Por esta razón continuaremos por ahora con la mezcla de conceptos clásicos y cuánticos que supone el modelo de Bohr (el electrón vuelve a ser una bolita), para esbozar en la última parte del capítulo los conceptos cuánticos básicos.

### XXVIII - 11. Modificación de Sommerfeld

Observando ciertas rayas del espectro del hidrógeno con aparatos de gran resolución se ve que aparecen formadas por grupos de líneas muy juntas, y algunas se desdoblán en varias componentes cuando se aplica un campo magnético. La separación de una línea en varias indica que los niveles de energía están en realidad constituidos por subniveles con energía muy parecida.

En 1916, Arnold Sommerfeld (1868-1951) sugirió que las órbitas electrónicas pueden ser elípticas, con el núcleo en un foco de la elipse, de forma que para un nivel  $n$  existe además de la órbita circular la posibilidad de distintas órbitas con distinta excentricidad cuyos ejes mayores tienen las mismas dimensiones que el diámetro de la órbita circular (Fig. XXVIII-9).

En las órbitas keplerianas la energía de la partícula es función del semieje mayor, pero no de la excentricidad (cuestión XI-14), con lo que en nuestro caso en todas ellas tendría el electrón la misma energía, se dice entonces que EL NIVEL ESTÁ DEGENERADO. Para evitar esto y explicar el desdoblamiento espectral, Sommerfeld aplicó la teoría relativista al electrón y demostró que, por tener distintas velocidades en distintos puntos de la trayectoria y variar por tanto su masa a lo largo de la órbita, la trayectoria no es una elipse perfecta sino que se convierte en una *roseta* (Fig. XXVIII-10), que puede considerarse como una elipse cuyo eje mayor verifica una precesión en torno a un eje perpendicular al plano de la trayectoria por el foco. La energía correspondiente a cada órbita depende así también de su semieje menor, y a través de él, del momento angular orbital del electrón.

Puesto que en este modelo seguimos con la imagen, ya superada, del electrón como partícula puntual clásica, evitaremos el desarrollo de los cálculos realizados por Sommerfeld; basta decir que conducen a la aparición de un segundo número cuántico  $k$  que puede tomar los valores enteros  $1, 2, \dots, n$ . La mecánica cuántica demuestra que el momento angular orbital  $L$  está cuantificado y los únicos valores posibles para los diferentes estados vienen dados por

$$|L| = \hbar \sqrt{l(l+1)} \quad (16)$$

donde  $l$  es el NÚMERO CUÁNTICO ORBITAL o SECUNDARIO, que para cada nivel  $n$  puede valer  $l=0, 1, 2, \dots, (n-1)$ . Este número  $l$  puede identificarse con  $k-1$  de Sommerfeld, se designa con las letras  $s$  ( $l=0$ ),  $p$  ( $l=1$ ),  $d$  ( $l=2$ ),  $f$  ( $l=3$ ), ..., con notación tomada de la espectroscopía, y corresponde a subniveles de mayor energía para mayor  $l$ .

Al comparar las predicciones de Sommerfeld con los resultados experimentales de las series del hidrógeno y algunas de las del  $\text{He}^+$  (átomo de helio ionizado, con un electrón) se observó que la teoría permitía mayor número de rayas de las que en realidad aparecían, lo cual se salvó con la introducción de una *regla de selección* que limita el número de transiciones a las que verifican  $\Delta k = \pm 1$  (Fig. XXVIII-11).

De nuevo hemos de apuntar que la teoría cuántica también predice este resultado y obtiene además que las líneas más intensas son las que verifican las siguientes REGLAS DE SELECCIÓN:

$$\Delta l = \pm 1 \quad \text{ó} \quad \Delta m_l = \pm 1 \quad (17)$$

donde  $m_l$  es un tercer número cuántico que se introducirá a continuación.

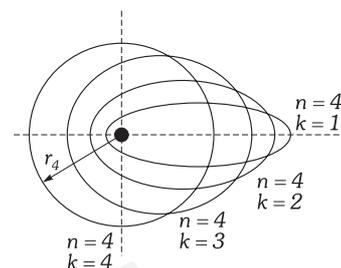


Fig. XXVIII-9.- Órbitas electrónicas ( $n=4$ ;  $k=1, 2, 3, 4$ ) del modelo de Sommerfeld. Los semiejes mayores de las elípticas son iguales que el radio de la circular.

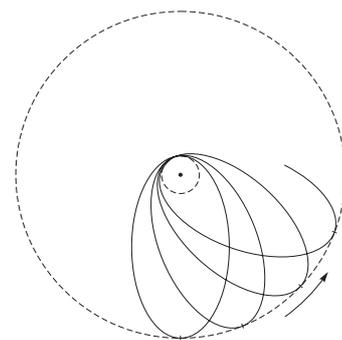


Fig. XXVIII-10.- El tratamiento relativista pone de manifiesto una precesión de la elipse en torno a un eje perpendicular a su plano por un foco.

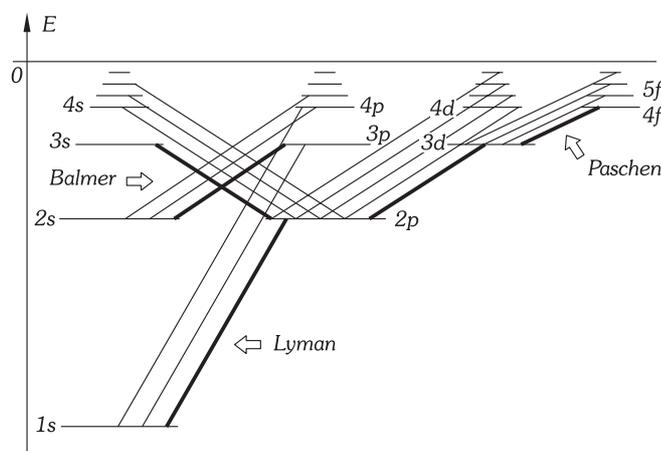


Fig. XXVIII-11.- Las líneas indicadas son las importantes de las series de Lyman, Balmer y Paschen. Los saltos no se producen entre dos órbitas cualesquiera; una regla de selección es  $\Delta l = \pm 1$ . La notación indica  $n$  con números y  $l$  con letras.

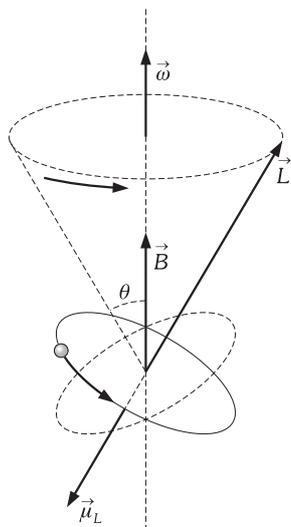


Fig. XXVIII-12.- El momento angular  $\vec{L}$  y el momento magnético  $\vec{\mu}_L$  son de sentidos opuestos; ambos realizan una precesión en torno a  $\vec{B}$  con la frecuencia Larmor  $\vec{\omega}$  independiente de  $\theta$ .

## XXVIII - 12. El átomo en un campo magnético. Efecto Zeeman normal. Número cuántico magnético

En 1896 el físico holandés Pieter Zeeman (1865-1943) analizó espectros de emisión sometiendo átomos con un sólo electrón a un campo magnético intenso; observó que cada una de las líneas se desdobra en tres muy juntas (*tripletes*) al aplicar el campo, una central que coincidía en longitud de onda con la inicial, y dos laterales con la misma diferencia de longitud de onda respecto de la primera. Este efecto, que se conoce como EFECTO ZEEMAN NORMAL, se verifica además para todas las líneas de todos los átomos.

Podemos analizarlo considerando la trayectoria del electrón como una espira de corriente dentro de un campo magnético. El electrón recorre su trayectoria con una frecuencia  $\nu = v/\pi r$ , lo que equivale a una intensidad de corriente  $I = e\nu = v e/2\pi r$ . El momento magnético de la espira es (sección XXI-7):

$$\mu_L = I A = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{evr}{2} \quad \wedge \quad L = mvr \quad \Rightarrow \quad \mu_L = \frac{eL}{2m}$$

Si el electrón recorre la trayectoria como en la figura XXVIII-12, al producir una intensidad de corriente que se define de sentido contrario al de su movimiento, su momento magnético es de sentido opuesto al momento angular, es decir:

$$\mu_L = -\frac{e}{2m} \mathbf{L} = -\gamma_L \mathbf{L} \quad (18)$$

donde a  $\gamma_L$  se le llama RAZÓN GIROMAGNÉTICA O MAGNETOMECÁNICA (relaciona magnitudes de ambos tipos). Es más corriente escribir esta expresión de la forma:

$$\mu_L = -\frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{L} \quad (19)$$

donde  $\mu_B = e\hbar/2m = 9,282 \times 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ , es el llamado MAGNETÓN DE BOHR.

La interacción de  $\mu_L$  con  $\mathbf{B}$  tiene dos aspectos que nos interesan, la orientación de  $\mu_L$  respecto de  $\mathbf{B}$  y la energía potencial del electrón debida a dicha interacción.

La espira de corriente a que hemos asimilado la trayectoria del electrón experimenta un momento que tiende a alinear  $\mu_L$  con  $\mathbf{B}$ , dicho momento es (fórmula 4 del capítulo XXI):

$$\mathbf{N} = \mu_L \times \mathbf{B} = -\frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{L} \times \mathbf{B} \quad (20)$$

lo que hace que  $\mu_L$  y  $\mathbf{L}$  precesen en torno a la dirección de  $\mathbf{B}$  (Fig. XXI-12), con una velocidad angular,  $\omega$  que podemos calcular a partir del teorema del momento angular:  $\mathbf{N} = d\mathbf{L}/dt$ . En efecto: por tener  $\mathbf{L}$  el origen fijo en el foco de la trayectoria (en el núcleo),  $d\mathbf{L}/dt$  es la velocidad del extremo de  $\mathbf{L}$ , es decir:  $d\mathbf{L}/dt = \omega \times \mathbf{L}$ , lo que junto con (20) conduce a:

$$\omega \times \mathbf{L} = -\frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{L} \times \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L} \times \left( \frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{B} - \omega \right) = 0$$

y por ser  $\mathbf{L}$  no nulo:

$$\omega = \frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{B}$$

que se conoce como FRECUENCIA DE LARMOR, y es independiente del ángulo  $\theta$  entre  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{B}$ . Este fenómeno, conocido como precesión de Larmor, hace que el plano de la órbita cambie, como se muestra en la Fig. XXVIII-12.

La presencia de  $\mathbf{B}$  supone para el electrón una energía adicional dada por:  $U = -\mu_L \cdot \mathbf{B}$ . Si llamamos eje Z a la dirección de  $\mathbf{B}$  tendremos:

$$U = -\frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{L} \cdot \mathbf{B} = -\frac{\mu_B}{\hbar} L B \cos \theta = -\frac{\mu_B}{\hbar} B L_z \quad (21)$$

Clásicamente, para un  $\mathbf{L}$  dado,  $L_z$  puede adquirir cualquier valor de cero a  $L$ , y la energía del electrón podría ser cualquiera de la banda  $E_0 \pm \mu_B L B/\hbar$  donde  $E_0$  es su energía en ausencia de campo magnético. El efecto Zeeman pone de manifiesto que esto no se verifica. El desdoblamiento de las líneas en tripletes sólo se explica admitiendo que la componente de  $\mathbf{L}$  en la dirección de  $\mathbf{B}$ ,  $L_z$ , sólo puede tener valores discretos cuya expresión nos la proporciona de nuevo la mecánica cuántica:

$$L_z = m_l \hbar \quad (22)$$

donde  $m_l$ , el NÚMERO CUÁNTICO MAGNÉTICO, adopta los  $2l + 1$  valores:

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm l$$

La Fig. XXVIII-13 representa esta situación para  $l=2$ . Podemos afirmar que el campo magnético cuantifica la orientación del momento angular.

$$\text{De (21) y (22) obtenemos: } U = - \frac{\mu_B}{\hbar} B m_l \hbar = - \mu_B B m_l$$

y la energía total del electrón es:  $E = E_0 + U$ . En consecuencia, cada nivel de energía caracterizado por  $n$  y  $l$  dados se desdobra en  $2l + 1$  niveles, con uno igual al existente inicialmente en ausencia de  $B$  ( $m_l = 0 \Rightarrow E = E_0$ ) y, de los restantes, la mitad con  $E > E_0$  y la mitad con  $E < E_0$ , separados cada dos de ellos por la misma cantidad de energía,  $\mu_B B$ , proporcional a la intensidad de campo magnético exterior.

Como se representa en la figura XXVIII-14:

si  $l=0$      $2l+1=1$     no hay desdoblamiento para estados s  
 $l=1$      $2l+1=3$     tres niveles para estados p  
 $l=2$      $2l+1=5$     cinco niveles para estados d

Por ser la separación entre los nuevos niveles constante, dos transiciones que correspondan al mismo valor  $\Delta m_l$  producirán dos fotones iguales; ésta es en primer lugar la razón por la que las nueve transiciones  $d-p$  de la Fig. XXVIII-14 fueron observadas por Zeeman como tres líneas en el espectro, y en segundo lugar la verificación de la regla de selección enunciada en la expresión (17).

El efecto Zeeman comentado en esta cuestión es el EFECTO ZEEMAN NORMAL, y al introducirlo hemos dicho que se observó al someter a los átomos a un campo magnético intenso. Pues bien, si el campo no es tan intenso sino débil, se produce el EFECTO ZEEMAN ANÓMALO en el que el desdoblamiento de las líneas espectrales no es en tripletes sino que aparecen grupos de cuatro, cinco, seis, ... y la distribución de intensidades en estos MULTIPLETES resulta sumamente compleja. Su explicación no puede hacerse sin introducir el concepto de spin.

**XXVIII - 13. Spin del electrón. Experiencia de Sten - Gerlach**

Una característica común de todas las líneas de los espectros de emisión o absorción es que, si se observan con espectroscopios de gran poder de resolución, aparecen desdobladas en dos líneas. Este desdoblamiento en dobletes hace pensar en el que ocurre en el efecto Zeeman normal en tripletes; sin embargo aquél se observa incluso en ausencia de campo magnético externo.

Samuel A. Goudsmit (1902-1978) y George E. Uhlenbeck (1900-1988) supusieron que la aparición de los dobletes podría deberse a un efecto Zeeman interno, para lo cual debería existir un momento magnético dentro del átomo. Para introducirlo partieron de la imagen del electrón como una esfera cargada girando en torno a un diámetro; el giro lleva asociados un momento angular intrínseco  $S$  respecto de su centro de masas, que se denomina MOMENTO ANGULAR DE SPIN y, por tener carga, un MOMENTO MAGNÉTICO DE SPIN  $\mu_s$ . La relación entre ambos, por analogía con (18), viene dada por:

$$\mu_s = - g_s \frac{e}{2m} S = - \gamma_s S$$

donde  $g_s$  es el COEFICIENTE GIROMAGNÉTICO cuyo valor experimental es aproximadamente igual a 2.

El campo magnético interno lo proporciona el núcleo, que desde el sistema de referencia del electrón gira en torno a él con una carga  $+Ze$  ( $Z$  es el número de protones del núcleo). En la posición del electrón (Fig. XXVIII-15) el campo vale:

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2r} = \frac{\mu_0}{2r} \frac{Zev}{2\pi r} = \frac{\mu_0 Zev}{4\pi r^3}$$

que con  $L = mvr$ , y por ser  $B_0$  y  $L$  paralelos, podemos poner de la forma:

$$B_0 = \frac{\mu_0 Ze}{4\pi m r^2} L \tag{23}$$

Para verificar la existencia del momento magnético debido al spin, Otto Stern (1888-1969) y Walther Gerlach (1889-1979) realizaron el experimento que se esquematiza en la Fig. XXVIII-16, en la que hay representados una fuente que por calentamiento libera átomos, dos rendijas que coliman el haz de átomos, un electroimán que proporciona un campo magnético no homogéneo y una pantalla que registra los impactos, todo ello encerrado en una cámara de vacío. Utilizaron como proyectiles átomos de plata, litio, sodio, potasio y otros que tienen la característica común de constar de capas electrónicas completas salvo la última en la que tienen un electrón con  $l=0$ ; esto supone, como se comprenderá más adelante, que el momento angular total  $L$  del átomo es nulo, de forma que si hay acción de un campo externo sobre la trayectoria del átomo se deberá a la existencia de  $\mu_s$  en el electrón del último nivel, cuya interacción con el campo  $B$  aporta al

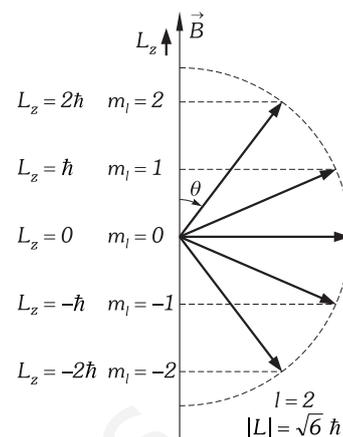


Fig. XXVIII-13.- Valores posibles de  $L_z$  para  $l=2$ .  $L = \sqrt{l(l+1)} \hbar = \sqrt{6} \hbar$ .

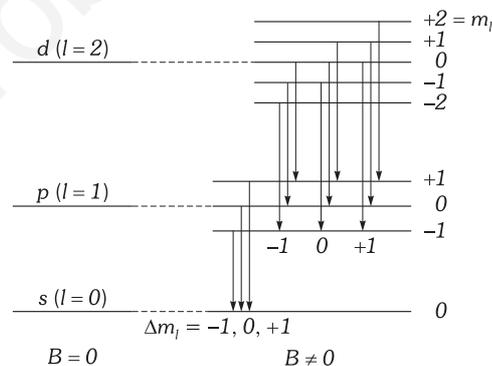


Fig. XXVIII-14.- En presencia de un campo magnético  $B$  exterior, los niveles se desdoblán  $2l+1$  veces. Cada línea del espectro se convierte en tres equidistantes (triplete). Se verifica la regla de selección:  $\Delta m_l = 0$ ,

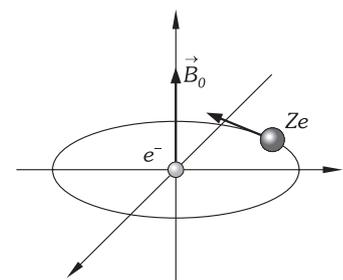


Fig. XXVIII-15.- Desde un sistema de referencia ligado al electrón, el giro del núcleo produce un campo magnético.

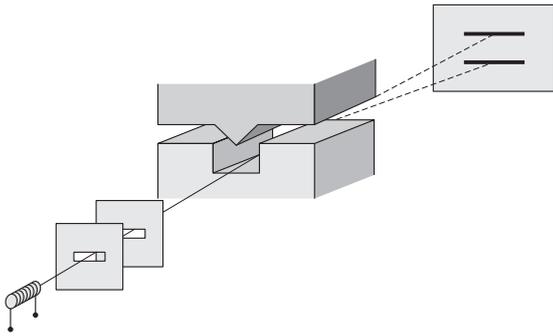


Fig. XXVIII-16.- Experimento de Stern-Gerlach sobre desviación de átomos de plata neutros en un campo magnético no homogéneo.

electrón una energía potencial  $U = -\mu_s \cdot B = -\gamma_s \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$ . Si  $\mathbf{B}$  es variable en una dirección,  $Z$  por ejemplo, el electrón y el átomo experimentarán una fuerza  $F_z = -\partial U / \partial z$  que desviará su trayectoria rectilínea.

Realizado el experimento se comprobó que el haz se desdoblaba en dos ramas en las que se acumulaban los impactos con la forma indicada en la Fig. XXVIII-16, sin impactos en la zona intermedia. La conclusión es que el electrón tiene un momento magnético  $\mu_s$  debido a su giro, y que el momento angular de spin  $\mathbf{S}$  sólo puede tener dos orientaciones respecto del campo magnético. Tanto  $\mathbf{S}$  como su componente  $S_z$  en la dirección de  $\mathbf{B}$  están cuantificados; por analogía con el momento angular orbital podemos poner:

$$S = \sqrt{s(s+1)} \hbar \quad S_z = m_s \hbar$$

donde  $s$  y  $m_s$  son dos nuevos números cuánticos. Por la misma analogía, el número de orientaciones de  $\mathbf{S}$  es  $2s+1$  ( $2l+1$  para  $\mathbf{L}$ ), y por ser este número igual a 2, como acabamos de ver, se obtiene para el NÚMERO CUÁNTICO DE SPIN  $s = 1/2$ , y por comparación con  $m_l$ , para el NÚMERO CUÁNTICO MAGNÉTICO DE SPIN  $m_s = \pm 1/2$ , como se ilustra en la Fig. XXVIII-17.

La energía potencial adicional del electrón por la existencia del spin es  $U_{L,S} = \mu_s \cdot B$ . No es necesario un campo exterior para que exista esta energía, basta con el campo interno; en este caso, usando la relación (23):

$$\mu_{L,s} = -\mu_s \cdot B_0 = g_s \frac{e}{2m} \mathbf{S} \cdot \frac{\mu_0 Z e}{4\pi m r^3} \mathbf{L}$$

en definitiva:

$$U_{L,S} = K \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$$

expresión que justifica el uso para esta interacción interna del nombre de INTERACCIÓN SPIN-ÓRBITA. Otra forma de expresar dicha energía es:

$$U_{L,S} = g_s \frac{e}{2m} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}_0 = g_s \frac{e}{2m} S_z B_0 = g_s \mu_B B_0 m_s$$

de la que concluimos que por tener  $m_s$  dos valores, cada nivel energético electrónico está desdoblado en dos, salvo los que tienen  $l = 0$ , ya que en ellos  $L = 0$  y  $U_{L,S} = 0$

**XXVIII - 14. Momento angular total. Efecto Zeeman anómalo**

Si el átomo no está sometido a un campo magnético externo o lo está a uno débil, la interacción magnética spin-órbita es significativa, es decir, los momentos  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{S}$  interaccionan entre sí ejerciéndose pares de fuerzas y dando un MOMENTO ANGULAR TOTAL  $\mathbf{J}$  de valor:  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ .

Estas tres magnitudes,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{J}$ , y sus componentes en la dirección de un campo externo están cuantificadas; así, por ejemplo, para el momento total se verifica:

$$J = \sqrt{j(j+1)} \hbar \quad J_z = m_j \hbar$$

con  $j = l + s$ ,  $m_j = m_l + m_s$  y  $m_j = -j, -j+1, \dots, j$  ( $2j+1$  valores posibles).

Si no existe campo magnético externo, el momento angular total permanece constante y los pares de fuerzas originan la precesión de  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{S}$  en torno a  $\mathbf{J}$ , como en la figura XXVIII-18.

Si el átomo se encuentra en un campo externo  $\mathbf{B}$  débil, es  $\mathbf{J}$  el que realiza la precesión en torno a  $\mathbf{B}$  (Fig. XXVIII-19), mientras  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{S}$  también lo hacen en torno a  $\mathbf{J}$ . Es este caso la energía potencial de interacción se expresa:

$$U = -\mu_j \cdot B = \frac{e}{2m} \mathbf{J} \cdot B$$

y como hemos llamado eje  $Z$  a la dirección de  $\mathbf{B}$ :  $U = \frac{e}{2m} B J_z = \frac{\mu_B}{\hbar} B m_j$

La combinación de valores de  $m_l$  y  $m_s$  proporciona la variedad de valores de  $m_j$ , que se pone de manifiesto espectroscópicamente en la variedad de líneas que aparecen en el EFECTO ZEEMAN ANÓMALO.

El paso del efecto Zeeman anómalo al normal es el EFECTO PASCHEN-BACK: al aumentar la intensidad del campo magnético crece la separación entre líneas, las componentes de los multipletes de rayas vecinas empiezan a confundirse unas con otras hasta que finalmente quedan solamente las correspondientes al espectro Zeeman normal. El campo externo fuerte destruye el acoplamiento spin - órbita, deja de tener significado la suma  $\mathbf{L} + \mathbf{S}$ , y los vectores  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{S}$  realizan su precesión en torno a  $\mathbf{B}$  independientemente uno del otro.

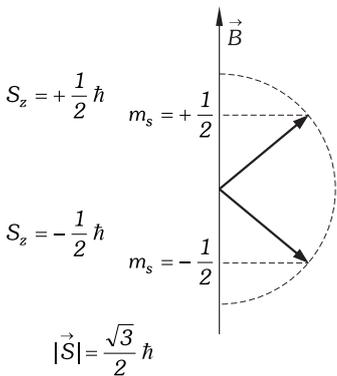


Fig. XXVIII-17.- Cuantificación espacial del momento angular de spin  $\vec{S}$ .

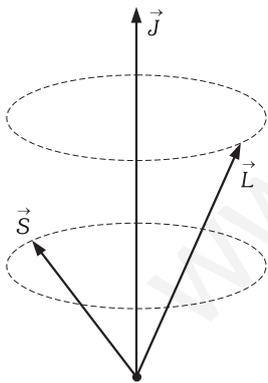


Fig. XXVIII-18.- En ausencia de campo magnético externo  $\vec{L}$  y  $\vec{S}$  realizan una precesión en torno a  $\vec{J}$ , que permanece constante.

**XXVIII – 15. Los números cuánticos**

Como hemos ido viendo a lo largo del capítulo, para caracterizar los distintos valores posibles de la energía de un electrón se han introducido sucesivas cuantificaciones de distintas magnitudes físicas. Recordemos que una magnitud cuantificada solamente puede adoptar una serie de valores discretos separados por valores intermedios que le están prohibidos. Estos valores discretos son siempre múltiplos de la constante de Planck y se caracterizan mediante el número cuántico correspondiente. De esto, y del hecho de que a cada valor de una magnitud cuantificada le corresponde un valor distinto de la energía del electrón, concluimos que:

*La energía de un electrón en un átomo queda unívocamente determinada por los números cuánticos.*

Para cada electrón basta con cuatro números cuánticos que son:

- 1)  $n, l, j, m_j$  si el acoplamiento spin-órbita es significativo.
- 2)  $n, l, m_l, m_s$  si dicho acoplamiento es débil.

El significado de cada número cuántico en el modelo semiclásico de Bohr-Sommerfeld es el que se indica a continuación:

- $n$ : cuantifica el tamaño de la órbita del electrón, es decir, el diámetro de las circulares y el eje mayor de las elípticas. Cada valor de  $n$  corresponde a una *capa* de electrones.
- $l$ : cuantifica el módulo del momento angular orbital  $L$ , que está relacionado con la excentricidad de la órbita. Separa cada capa en  $n$  *subcapas* o *subniveles*. Cada subnivel está caracterizado por un par  $n, l$ .
- $m_l$ : cuantifica la orientación espacial de  $L$  y, por consiguiente, la orientación de la órbita. Separa cada subnivel en  $2l + 1$  orbitales. Un orbital está caracterizado por una terna  $n, l, m_l$ .
- $s$ : cuantifica el módulo del momento angular intrínseco  $S$  del electrón debido a su giro (spin) en torno al centro de masas.
- $m_s$ : cuantifica la orientación espacial de  $S$ , o sea, la dirección del eje de giro del electrón.
- $j$ : cuantifica el módulo del momento angular total cuando existe interacción spin – órbita.
- $m_j$ : cuantifica la orientación espacial del momento angular total  $J$ .

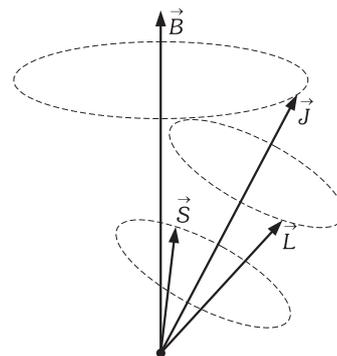


Fig. XXVIII-19.- Con campo exterior  $\vec{B}$  débil  $\vec{L}$  y  $\vec{S}$  efectúan una precesión en torno a  $\vec{J}$  que a su vez lo hace en torno a  $\vec{B}$ .

**D) ÁTOMOS CON MÁS DE UN ELECTRÓN**

**XXVIII – 16. Principio de exclusión de Pauli. Configuración electrónica**

*«En un mismo átomo no pueden existir dos electrones con la misma energía», o bien, «en un átomo no pueden existir dos electrones que tengan los cuatro números cuánticos iguales».*

Este principio, establecido en 1925 por el físico austriaco Wolfrang Pauli (1900-1958) (Premio Nobel en 1945) de forma empírica tras el análisis de distintos espectros de emisión, nos permite conocer el número de electrones de un átomo que hay en cada nivel, subnivel u orbital; dicho de otra forma, nos permite conocer la CONFIGURACIÓN ELECTRÓNICA de un átomo.

El profesor Banesh Hoffman del Queens College, New York, hace este comentario, que creemos que aclara el «Principio de Exclusión»:

«Es como si el átomo de Bohr fuera una gran ciudad donde vivieran los electrones en apartamentos distintos. Cada apartamento tiene sus señas diferentes.

Un número cuántico indica la calle, otro la casa, otro el piso y el cuarto número, el apartamento.

Estos cuatro números cuánticos son la dirección completa de cada electrón y el Principio de Pauli es un reglamento para evitar el hacinamiento. Cada electrón vive en su apartamento. A cualquier otro le está prohibida la entrada hasta que salga el primero. (La peregrina historia del Quantum. Editorial Aguilar. Profesor Banesh Hoffman).»

El cuadro de la página siguiente especifica las combinaciones posibles de los cuatro números cuánticos para  $n = 1, 2, 3$  y  $4$ .

En este cuadro se observa que:

a) El número máximo de electrones de cada capa (o sea los que corresponden a cada número cuántico principal) es  $2n^2$  ( $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ ) Así:

$$\begin{aligned} \text{Capa } K &= 2n^2 = 2 \times 1^2 = 2 \\ L &= \text{ " } = 2 \times 2^2 = 8 \\ M &= \text{ " } = 2 \times 3^2 = 18 \\ N &= \text{ " } = 2 \times 4^2 = 32, \text{ etc.} \end{aligned}$$

b) Los electrones de un mismo nivel energético principal, están divididos en subniveles,  $l = 0$  (s),  $l = 1$  (p),  $l = 2$  (d) ... hasta  $l = n - 1$ .

SUBNIVEL s:  $l = 0$   $m_l = 0$ . Número de electrones posibles: 2.

$$\begin{aligned} l = 0; m_l = 0; m_s = + 1/2 & \quad (n, 0, 0, + 1/2) \\ l = 0; m_l = 0; m_s = - 1/2 & \quad (n, 0, 0, - 1/2) \end{aligned}$$

$$\text{SUBNIVEL } p: l = 1 \quad \left| \begin{array}{l} m_l = +1 \\ m_l = 0 \\ m_l = -1 \end{array} \right. \quad \text{Número de electrones posibles: 6}$$

$$\begin{array}{l} l = 1; m_l = +1; m_s = +1/2 \quad (n, 1, 1, +1/2) \\ l = 1; m_l = +1; m_s = -1/2 \quad (n, 1, 1, -1/2) \\ l = 1; m_l = 0; m_s = +1/2 \quad (n, 1, 0, +1/2) \\ l = 1; m_l = 0; m_s = -1/2 \quad (n, 1, 0, -1/2) \\ l = 1; m_l = -1; m_s = +1/2 \quad (n, 1, -1, +1/2) \\ l = 1; m_l = -1; m_s = -1/2 \quad (n, 1, -1, -1/2) \end{array}$$

SUBNIVEL  $d: l = 2 \quad m_l = 2, 1, 0, -1, -2$ . Para cada valor de  $m_l$  corresponden 2 electrones ( $m_s = +1/2; -1/2$ ). Número de electrones posibles: 10.

SUBNIVEL  $f: l = 3; m_l = 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$ . Para cada valor de  $m_l$  corresponden 2 electrones ( $m_s = +1/2; -1/2$ ). Número de electrones posibles: 14.

En la notación se escribe el valor de  $n$  seguido de la letra ( $s, p, d, f$ ) que indica el subnivel y un número (a manera de exponente, no siéndolo) que indica el número de electrones del subnivel.

Así, el subnivel  $d$  del nivel  $N$  ( $n = 4$ ) se escribe:  $4d^{10}$ , si este subnivel está completo; si en él existen únicamente 7 electrones (es decir, el subnivel  $d$  no está completo) se escribirá:  $4d^7$ .

La notación simbólica para representar las configuraciones electrónicas del átomo es la siguiente:

Tomemos como ejemplo el cloro que tiene de número atómico 17. Los electrones corticales estarán distribuidos en tres niveles principales (2, 8 y 7) dividido cada uno en sus subniveles correspondientes. Notación:  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$ .

Ocurre a veces, que al irse ocupando los niveles energéticos, el último subnivel de una capa tenga más energía que el primero de la siguiente (que es lo que ocurre en el potasio y en otros elementos) y entonces ese electrón se sitúa en la de menor energía.

Para poder realizar la distribución de los electrones en los distintos niveles de energía, dio Bohr las siguientes reglas prácticas basándose en sus postulados.

- 1.º El número de electrones en la capa más externa (que es la de máxima energía) no puede «exceder» de ocho, (siendo este número precisamente el que tienen los gases nobles, excepto el helio que tiene dos).
- 2.º El número de electrones de la penúltima capa, no puede «ser superior» a 18.
- 3.º Si la antepenúltima capa no está completa, la última (o de máxima energía), no puede tener más de DOS electrones y la penúltima más de NUEVE.

Existe una cuarta regla empírica, debida a Hund, que especifica el orden de llenado de orbitales en cada subnivel.

- 4.º Para  $n$  y  $l$  dados el estado de más baja energía es el que corresponde a la máxima multiplicidad de spin.

Esta regla supone que dentro de un subnivel los orbitales se semioocupan primero con electrones de spin *paralelo* y el llenado de orbitales se verifica cuando ya todos están con un electrón. Con spin *paralelo* se quiere significar que dos electrones tienen el mismo valor de  $m_s$ ; en la representación gráfica de orbitales se designa con una flecha hacia arriba ( $\uparrow$ ) a un electrón con  $m_s = +1/2$ , y con una hacia abajo ( $\downarrow$ ) a un electrón con  $m_s = -1/2$ .

El orden de llenado de los subniveles corresponde, con raras excepciones, al señalado en la Fig. XXVIII-20.

Con estas normas podemos escribir la configuración electrónica de un elemento cualquiera.

K	L	M	N	O	P	Q
2	8	18	7			
2	8	18	18	9	2	
2	8	18	24	9	2	
2	8	18	32	21	9	2

EJEMPLOS:

El bromo de número atómico  $Z = 35$ ; configuración:  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^5$

El lantano tiene  $Z = 57$  (Regla 3.º, pues la antepenúltima no puede estar completa ya que necesitaría 32 electrones y entonces el número total sería  $2 + 8 + 18 + 32 = 60 > 57$ ).

Europio:  $Z = 63$  (3ª Regla).

Uranio:  $Z = 92$  (3ª Regla).

ELECTRONES POSIBLES EN CADA CAPA Y SUBNIVEL

n	Capa	l	Subnivel	$m_l$	$m_s$	Nº de electrones	Notación	Total electrones por capa
1	K	0	s	0	+ 1/2 - 1/2	2	1 s <sup>2</sup>	2
2	L	0	s	0	+ 1/2 - 1/2	2	2 s <sup>2</sup>	8
		1	p	+1 0 -1	+ 1/2 - 1/2	6	6 p <sup>6</sup>	
3	M	0	s	0	+ 1/2 - 1/2	2	3 s <sup>2</sup>	18
		1	p	+1 0 -1	+ 1/2 - 1/2	6	3 p <sup>6</sup>	
		2	d	+2 +1 0 -1 -2	+ 1/2 - 1/2	10	3 d <sup>10</sup>	
4	N	0	s	0	+ 1/2 - 1/2	2	4 s <sup>2</sup>	32
		1	p	+1 0 -1	+ 1/2 - 1/2	6	4 p <sup>6</sup>	
		2	d	+2 +1 0 -1 -2	+ 1/2 - 1/2	10	4 d <sup>10</sup>	
		3	f	+3 +2 +1 0 -1 -2 -3	+ 1/2 - 1/2	14	4 f <sup>14</sup>	

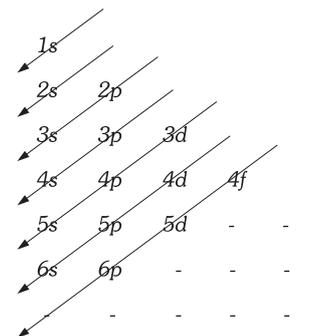


Fig. XXVIII-20.- Orden de llenado de subniveles.

MUESTRA PARA EXAMEN. PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN. COPYRIGHT EDITORIAL TÉBAR

2	Helio: Z = 2			
2 8	Neón: Z = 10			2 8
2 8 8	Argón: Z = 18			2 8 8
2 8 18 8	Kriptón: Z = 36	GASES NOBLES		2 8 18 8
2 8 18 18 8	Xenón: Z = 54			2 8 18 18 8
2 8 18 32 18 8	Radón: Z = 86			2 8 18 32 18 8

**XXVIII - 17. Sistema periódico**

La observación de semejanzas en las propiedades físicas y químicas entre grupos de elementos indujo a la búsqueda de una clasificación que pusiera de manifiesto las analogías existentes. La búsqueda se plasmó en la Tabla Periódica adjunta, en la que los elementos se colocan en orden de número atómico creciente.

El primer período consta de los elementos hidrógeno y helio, cuyas configuraciones respectivas son 1s<sup>1</sup> y 1s<sup>2</sup>.

En los períodos 2 y 3 (períodos cortos) se completan respectivamente las capas 2 y 3; ambos constan de ocho elementos y terminan con la estructura ns<sup>2</sup> np<sup>6</sup> que es común a todos los gases nobles, excepto el helio, que confiere a estos elementos gran estabilidad por tratarse de una distribución electrónica con simetría esférica.

En los períodos cuarto y quinto se completan los subniveles 4s, 3d, 4p y 5s, 4d, 5p respectivamente. Ambos tienen 18 elementos y en los 10 elementos de transición rellenan subniveles de la capa n - 1 teniendo dos electrones en la capa n.

El período sexto está formado por 32 elementos con electrones en los subniveles 6s, 4f, 5d y 6p. Los 14 elementos del cerio al lutecio son los lantánidos, llamados de transición interna por ad-



mitir electrones en la capa  $n - 2$  teniendo ya dos en la  $n$ . Hay también en este período 10 elementos de transición.

El período séptimo empieza con el francio y el radio, de estructuras externas  $7s^1$  y  $7s^2$ ; continúa con el actinio y los actínidos, del torio al laurencio, que son de transición interna, y concluye por el momento con el meitnerio de número atómico 109.

El sistema periódico constituye una base fundamental para el estudio de las propiedades de los elementos; la periodicidad de las propiedades químicas se basa en que los elementos de una misma columna tienen la misma configuración electrónica externa.

**PROBLEMAS: 30 al 36.**

**XXVIII – 18. Propiedades magnéticas de los átomos**

Como se ha visto en el capítulo XXI, al aplicar un campo magnético a una sustancia se produce en ella un campo que se superpone al exterior. Este campo inducido se caracteriza con el vector imanación o magnetización  $M$ , relacionado con el campo exterior a través de la susceptibilidad magnética:  $M = \chi H$ . Los valores negativos o positivos de la susceptibilidad caracterizan las propiedades diamagnéticas, paramagnéticas o ferromagnéticas de un material. Podemos enunciar ahora que estas propiedades se deben a los momentos orbitales de los electrones y a su spin.

Si, como hemos venido haciendo hasta ahora, consideramos la órbita electrónica como un pequeño lazo de corriente, la ley de Lenz nos permite afirmar que al aplicar a un material un campo magnético exterior, la fuerza electromotriz inducida en cada órbita se opone al campo exterior, de forma que el campo neto en un punto del interior del material debería ser menor que en el mismo punto en ausencia de material, la susceptibilidad resultaría negativa. Este comportamiento, a pesar de ser general para todo tipo de sustancias, se manifiesta solamente en algunos materiales, llamados DIAMAGNÉTICOS, por ejemplo: los gases nobles y algunos metales como cinc o mercurio. En ellos los subniveles electrónicos están completos con lo que los momentos magnéticos orbitales y de spin están compensados y el átomo presenta un momento magnético nulo; el único efecto del campo exterior es el ya comentado.

En algunos materiales el diamagnetismo es enmascarado por un efecto mayor y de signo opuesto, el PARAMAGNETISMO, para el que la susceptibilidad resulta positiva. El comportamiento paramagnético lo presentan materiales cuyos átomos tienen momento magnético  $\mu$  no nulo, por ejemplo algunos átomos con un número impar de electrones, como el aluminio. Si el spin resultante no es cero el átomo se comporta como un pequeño imán; en ausencia de campo magnético exterior los momentos individuales están orientados completamente al azar por efecto de la agitación térmica (Fig. XXVIII-21-1), pero la aplicación de un campo  $B$  produce una alineación parcial de los momentos que da como resultado un campo interior mayor que el aplicado (Fig. XXVIII-21-2). Si el campo  $B$  se hace cada vez más intenso o se disminuye la temperatura para aminorar la agitación de los átomos, se llega a la total alineación de los momentos con el campo exterior, alcanzándose la condición de saturación, a partir de la cual un posterior aumento de  $B$  no incrementa la imanación del material (Fig. XXVIII-21-3).

Las sustancias en las que el campo interno es mucho mayor (centenares o millares de veces) que el campo externo que lo provoca, se denominan FERROMAGNÉTICAS. El ferromagnetismo es una propiedad colectiva de la red cristalina de algunos sólidos, y no de los átomos o moléculas individuales; no obstante solo pueden ser ferromagnéticas sustancias compuestas en todo o en parte por átomos paramagnéticos. Las interacciones entre momentos magnéticos dan lugar a efectos colectivos que producen orientaciones comunes de un conjunto de momentos, incluso en campos débiles. La interpretación del ferromagnetismo en función de los DOMINIOS MAGNÉTICOS puede leerse en la cuestión XXI-41. A temperatura ordinaria son ferromagnéticos el hierro, cobalto y níquel que tienen el subnivel  $3d$  incompleto, el gadolinio con el subnivel  $4f$  sin llenar, algunas aleaciones especiales, tales como la de Heusler, de cobre, manganeso y aluminio, y las ferritas, que son del tipo  $MO + Fe_2 O_3$ , donde  $M$  es un metal bivalente.

Si los momentos magnéticos de átomos contiguos en la red cristalina son iguales y en ausencia de campo exterior se encuentran orientados en sentido opuesto (Fig. XXVIII-22), la imanación total es nula y el cuerpo se llama ANTIFERROMAGNÉTICO; por ejemplo:  $FeO$ ,  $Mn Fe_2$ . En este caso la red cristalina se puede considerar compuesta de dos subredes de imanación opuesta.

Cuando la imanación de ambas subredes es diferente, por constar de átomos muy distintos o de distinto número de ellos, existe una magnetización espontánea del cristal y la sustancia se denomina FERRIMAGNÉTICA. Las ferritas son compuestos de este tipo, y entre ellas la magnetita  $FeO - Fe_2 O_3$ , que fue el primer ferromagnético conocido.

El comportamiento ferromagnético se manifiesta solamente por debajo de una temperatura característica de cada sustancia (*temperatura de Curie* para los ferromagnéticos y *de Néel* para los antiferromagnéticos); por encima de ella prevalece la agitación térmica sobre la alineación de momentos magnéticos y el cuerpo presenta comportamiento paramagnético.

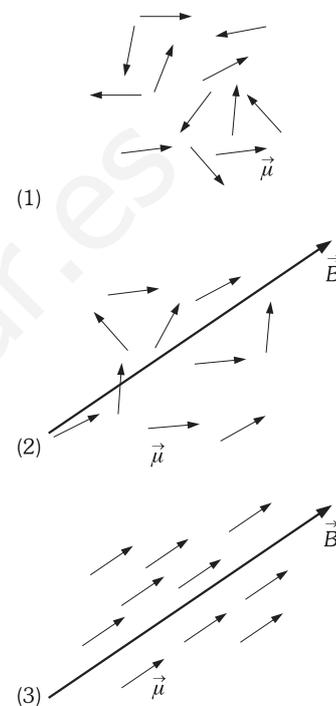


Fig. XXVIII-21.- 1. En ausencia de  $B$  exterior la imanación total es cero debido a la agitación térmica. 2. El campo  $B$  tiende a alinear los momentos magnéticos. 3 Para  $B$  intenso y temperaturas bajas se llega a la saturación.

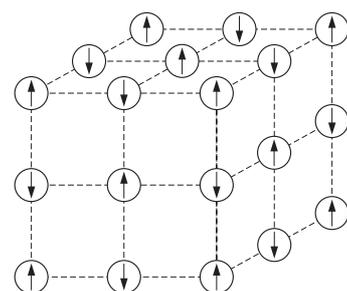


Fig. XXVIII-22.- En un antiferromagnético los momentos opuestos dan imanación total nula.

## XXVIII – 19. Desimananación adiabática

Los mecanismos de imanación y desimanación de las sustancias paramagnéticas van acompañados de orientación o desorden de los momentos magnéticos, y por tanto de fenómenos térmicos asociados con variaciones de entropía de la sustancia.

El segundo principio de Termodinámica se ha expresado en forma diferencial (capítulo XXXIII):  $dS \geq dQ/T$ . Supongamos un cuerpo paramagnético imanado y en equilibrio térmico con el medio; si se anula el campo exterior la desimanación produce la desorientación de los momentos magnéticos, lo que lleva consigo un aumento de la entropía, que es una medida del desorden del sistema. Si se quiere mantener constante la temperatura del cuerpo habrá que comunicarle calor.

Cuando la desimanación se produce sin intercambio de calor con el medio exterior ( $dQ = 0$ ), es decir, si es adiabática, la entropía necesaria para la desorientación de los momentos magnéticos se consigue a costa de los otros grados de libertad de la sustancia, con lo que ésta se enfría.

Hay varias causas por las que este efecto es muy débil a temperatura ordinaria; por un lado si el calor específico de la sustancia cristalina es grande, a la variación de entropía de la red le corresponde una variación pequeña de la temperatura, y por otro, el que la susceptibilidad magnética de los cuerpos paramagnéticos sea pequeña a temperatura normal indica que la aplicación de un campo magnético produce una variación relativa de entropía pequeña.

Sin embargo a temperaturas muy bajas la acción desorientadora de la agitación térmica es débil, la susceptibilidad paramagnética es elevada y la variación de entropía en la desimanación adiabática tiene un efecto apreciable en la temperatura. Este fenómeno permite estudiar las propiedades magnéticas a temperaturas del orden de  $10^{-6}$  K.

Otro procedimiento de conseguir temperaturas de este orden se comenta en la cuestión 24 de este capítulo.

## E) LÁSER Y MÁSER

## XXVIII – 20. Emisión estimulada de radiación. Láser y Maser

En la interacción de la radiación electromagnética con la materia se producen esencialmente tres procesos: absorción, emisión espontánea y emisión estimulada.

La ABSORCIÓN se verifica cuando un electrón asimila la energía de un fotón pasando a un estado de mayor energía que el inicial; el electrón, y el átomo a que pertenece, se encuentran entonces en un estado excitado. Dicha excitación, que es esencial en el fenómeno láser que vamos a comentar, no se realiza exclusivamente por absorción de fotones sino que puede provocarse también mediante la colisión del átomo con electrones en descargas producidas en un gas enrarecido (como en la experiencia de Franck y Hertz).

El segundo proceso es el de EMISIÓN ESPONTÁNEA: el estado excitado del átomo es inestable, de forma que después de absorber el fotón y tras un corto espacio de tiempo, pasa al estado inicial emitiendo espontáneamente un fotón de la misma frecuencia que el absorbido, pero en una dirección y con una fase aleatorias.

El tercer proceso, la EMISIÓN ESTIMULADA, fue desarrollado teóricamente por Einstein en 1916. Después de muchos cálculos llego a la conclusión de que si un fotón de frecuencia  $\nu$  incide sobre un electrón, que ha sido previamente excitado con una cantidad  $h\nu$  de energía, estimulará la desexcitación, de forma que el resultado será la existencia de dos fotones de la misma frecuencia viajando en fase en la misma dirección. Si en su marcha se encuentran con electrones excitados de la misma forma, el proceso se repetirá añadiendo cada vez más fotones al original.

Normalmente los estados excitados están menos densamente poblados de electrones que los de menor energía, por tanto un haz de fotones provocará más fenómenos de absorción que de emisión estimulada y la materia absorberá luz calentándose. Ahora bien, si por algún método se consigue producir una INVERSIÓN DE POBLACIÓN, es decir, se consigue poblar más un estado de energía superior  $E_2$  que otro de energía inferior  $E_1$  (Fig. XXVIII-23), entonces una radiación de frecuencia  $\nu = (E_2 - E_1)/h$  puede verse reforzada por emisión estimulada, como se esquematiza en la Fig. XXVIII-24.

En este efecto se basan el LÁSER y el MÁSER, palabras formadas por las iniciales de los vocablos ingleses «Light (Microwaves) amplification by stimulated emission of radiation», es decir, «Amplificación de luz (microondas) por emisión estimulada de radiación».

En el caso del máser la materia empleada es casi siempre un gas que se introduce en una *cavidad resonante*, o sea, en un recipiente metálico en el que se puede establecer una onda estacionaria de la frecuencia adecuada. El inicio de la oscilación máser es provocado por transiciones  $E_2 \rightarrow E_1$ , espontáneas o por microondas de la frecuencia máser introducidas desde el exterior.

En el láser óptico la materia se coloca entre dos espejos uno de los cuales posee un pequeño coeficiente de transmisión, y que confinan los fotones láser en el sistema du-



Fig. XXVIII-23.- Si hay inversión de población, el nivel de más energía está más ocupado que el de energía menor.  $N$  es el número de electrones en el nivel.

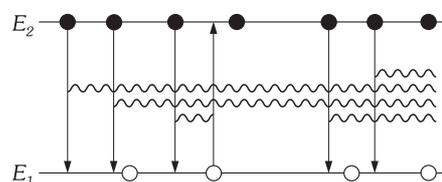


Fig. XXVIII-24.- Ampliación de una onda por emisión estimulada.

rante un mínimo de tiempo. Estos, antes de salir por el espejo semitransparente se han reflejado algunas veces en los espejos provocando en su camino la emisión en avalancha de otros fotones.

**XXVIII – 21. Máser de gas.**

En el primer máser construido se utilizó el gas amoníaco, cuya molécula es piramidal (Fig. XXVIII-25) con los tres hidrógenos en los vértices de la base y el nitrógeno en el de la pirámide. Se aprovecha la oscilación del nitrógeno respecto del plano de los tres átomos de hidrógeno: la energía de vibración se desdobra en dos estados contiguos  $E_1$  y  $E_2$ . Un separador (Fig. XXVIII-26) que produce un campo eléctrico no homogéneo proyecta las moléculas de mayor energía,  $E_2$ , dentro de una cavidad resonante, después de separarlas de las de energía menor,  $E_1$ . Una vez en la cavidad una microonda de frecuencia  $\nu = (E_2 - E_1)/h$  provoca la emisión estimulada. En el máser de amoníaco no se produce realmente una inversión de población entre dos niveles, sino que se aprovechan las moléculas ya excitadas.

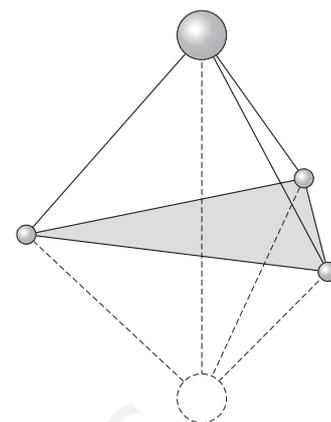


Fig. XXVIII-25.- En la molécula de amoníaco el nitrógeno vibra respecto del plano de los tres hidrógenos.

**XXVIII – 22. Bombeo óptico**

El BOMBEO ÓPTICO consiste en la promoción de electrones del nivel fundamental a un nivel excitado mediante irradiación con luz de la frecuencia adecuada. La finalidad del bombeo es la de producir una inversión de población, para lo cual han de participar al menos tres niveles energéticos (láser de tres niveles), el fundamental y dos excitados, uno de los cuales debe ser metaestable. En un ESTADO METAESTABLE los electrones excitados permanecen del orden de  $10^5$  veces más tiempo que en un estado excitado ordinario, en el que lo hacen durante aproximadamente  $10^{-8}$  segundos. Las energías de los tres niveles son  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$  en las Fig. XXVIII-27 y 28.

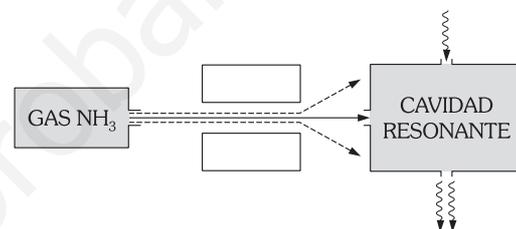


Fig. XXVIII-26.- Máser de amoníaco. Las moléculas de energía  $E_2$ , mayor que  $E_1$ , penetran en la cavidad, en la que estimuladamente pasan al estado  $E_1$  emitiendo un fotón de microondas.

La luz incidente bombea electrones del estado  $E_1$  al  $E_3$ , y de existir solamente ellos dos el bombeo sería equilibrado por la emisión estimulada  $E_3 \rightarrow E_1$ , con lo que no habría amplificación. La presencia del estado  $E_2$  permite la creación de la inversión de población. Si el estado metaestable es  $E_3$  (Fig. XXVIII-27), los electrones que realizan la transición  $E_3 \rightarrow E_2$  vuelven rápidamente de éste al estado fundamental, con lo que se produce una inversión entre  $E_3$  y  $E_2$  que permite la radiación láser con la frecuencia  $\nu = (E_3 - E_2)/h$ . De la misma forma, si el estado metaestable es  $E_2$  (Fig. XXVIII-28), la transición espontánea rápida  $E_3 \rightarrow E_2$  proporciona la inversión entre  $E_1$  y  $E_2$ , con la consiguiente radiación láser de frecuencia  $\nu = (E_2 - E_1)/h$ .

En un LÁSER DE CUATRO NIVELES, representados en la Fig. XXVIII-29, el estado metaestable es el  $E_3$  y las transiciones espontáneas son  $E_4 \rightarrow E_3$  y  $E_2 \rightarrow E_1$ . Al bombear los electrones de  $E_1$  a  $E_4$  éstos caen rápidamente a  $E_3$ ; los que saltan a  $E_2$  vuelven rápidamente al estado fundamental  $E_1$ . Se produce una inversión de población entre  $E_3$  y  $E_2$  que permite la amplificación láser de frecuencia  $\nu = (E_3 - E_2)/h$ .

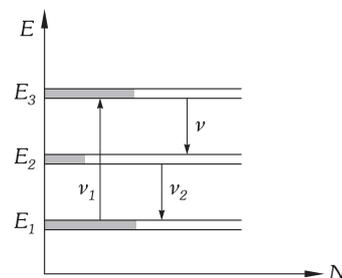


Fig. XXVIII-27.- El estado metaestable es  $E_3$ . La inversión de población se da entre  $E_2$  y  $E_3$ .  $\nu_1$  = frecuencia del fotón de bombeo;  $\nu_2$  = frecuencia del fotón emitido espontáneamente;

**XXVIII – 23. Láseres de rubí y de helio-neón**

En el primero el material láser es una barra de rubí, óxido de aluminio  $Al_2O_3$  con un pequeño porcentaje de átomos de aluminio sustituidos por cromo. Este, cuyos niveles de energía se representan en la Fig. XXVIII-30, es el responsable de la amplificación láser. El bombeo se produce mediante una lámpara de mercurio, para una longitud de onda de 550 nm, lo que equivale a los 2,2 eV del salto energético entre  $E_1$  y  $E_3$ . Como se muestra en la Fig. XXVIII-31, un espejo cilíndrico de sección elíptica concentra la luz de la lámpara en la barra de rubí. El estado metaestable es el  $E_2$ , con lo que se produce radiación espontánea en el salto de  $E_3$  a  $E_2$  y radiación láser en el salto estimulado  $E_2 \rightarrow E_1$  con una longitud de onda de 694,3 nm. Los fotones de la radiación espontánea que acompañan a la luz láser constituyen el «ruido».

En el láser de helio-neón (He-Ne) ambos gases se encuentran encerrados en un tubo de descarga a una presión del orden de  $10^{-3}$  atm. El bombeo de electrones no es óptico sino que se produce por colisiones de iones con electrones cuando en el tubo se produce la descarga al aplicar un voltaje suficiente. Los átomos de Helio son excitados al estado  $E_2$  metaestable (Fig. XXVIII-32) 20,61 eV más energético que el fundamental.

El neón presenta dos estados excitados próximos a  $E_2$ , uno  $E'_3$  a 20,66 eV de su estado fundamental y otro  $E'_2$  a 18,70 eV. Un átomo de helio excitado y con una pequeña energía cinética, de 0,05 eV como mínimo, puede colisionar con un átomo de neón con energía  $E'_1$  y excitarlo hasta  $E'_3$ , quedando el helio en su nivel fundamental. Puesto que  $E_2$  es un estado metaestable del helio y la energía se transfiere al neón con mucha facilidad, el estado  $E'_3$  de éste se comporta como metaestable; por otra parte el estado  $E'_2$  se desexcita rápida y espontáneamente al  $E'_1$ , con lo que se produce una inversión de población entre  $E_3$  y  $E'_2$  que posibilita la amplificación láser con una longitud de onda de 632,8 nm.

En los dos tipos de láser descritos, como en todos, el montaje se completa con los espejos citados en la sección XXVIII-20, que aumentan el tiempo de permanencia de los fotones en el material láser favoreciendo la emisión estimulada en avalancha.

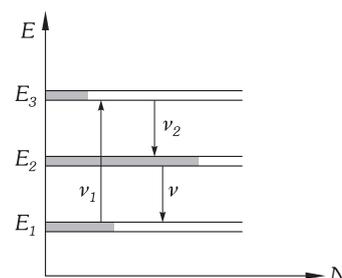


Fig. XXVIII-28.- El estado metaestable es  $E_2$ . La inversión se da entre  $E_3$  y  $E_2$ .

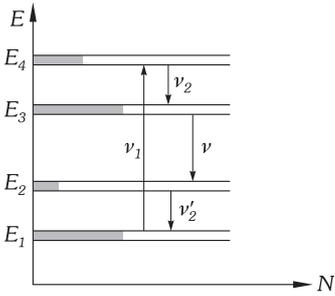


Fig. XXVIII-29.- Láser de cuatro niveles. El estado metaestable es  $E_3$  y la emisión láser corresponde al salto  $E_3 \rightarrow E_2$ .

**XXVIII – 24. Propiedades y aplicaciones de la luz láser**

Los fotones procedentes de la emisión estimulada tienen las mismas frecuencia, fase, polarización y dirección, por tanto la radiación resultante es *coherente*, condición que no verifican las fuentes de radiación convencionales en las que la emisión espontánea de los átomos individuales no está coordinada.

El carácter monocromático de la luz láser facilita su transporte mediante fibras ópticas, lo que unido a poder ser modulada en frecuencia y en amplitud y a su elevada frecuencia, la hace especialmente apta para la transmisión de señales.

Al ser el haz láser casi perfectamente paralelo se puede localizar con lentes en puntos extremadamente pequeños, en los que se suman las amplitudes de las ondas luminosas de todos los átomos, y no las intensidades como en el caso de una fuente convencional. Esto permite la acumulación de cantidades apreciables de energía que se pueden entregar a un material absorbente en tiempos muy cortos, es decir, se pueden desarrollar potencias enormes capaces de elevar la temperatura del material a  $100\,000^\circ\text{C}$  en menos de un segundo, vaporizándolo en pequeñas explosiones. Su capacidad de taladrar, cortar, soldar o quemar se emplea cada vez más en la industria y la medicina.

Produce figuras de interferencia muy puras que la hacen idónea para detectar imperfecciones, presencia de agentes contaminantes, etc., y que han permitido el desarrollo de la HOLOGRAFÍA, o sea, de la producción de imágenes tridimensionales. Así como en una fotografía la película registra solamente la intensidad que recibe en cada punto, en un holograma se registra también la diferencia de fase que tienen los rayos que provienen de distintos puntos del objeto respecto del haz incidente. Para la realización de un holograma se divide un haz de láser ensanchado en dos partes, una incide en el objeto y se refleja hacia la placa y la otra se dirige directamente a ella. La interferencia de ambas en la placa produce un holograma que, una vez revelado y al ser iluminado con una luz láser, permite apreciar las distintas perspectivas del objeto desde distintos ángulos como si se tratase del original.

Desde 1960 el desarrollo de láseres ha sido vertiginoso, los hay de gran variedad de tamaños, con distintas potencias, y frecuencias que van de los infrarrojos a los rayos X. Para la producción de estos últimos se ha sugerido la utilización de una pequeña explosión nuclear, en la que se emiten rayos X que pueden comunicar su energía a los átomos del material productor de láser. La energía total del láser de rayos X no sería muy grande pero la emisión puede hacerse en una trillonésima de segundo, desarrollándose potencias de cientos de trillones de vatios.

Una de las más recientes aplicaciones del láser en investigación es la obtención de temperaturas excepcionalmente bajas. El proceso consiste en frenar un chorro de átomos haciéndolos chocar con fotones. En las primeras experiencias (1975) se consiguió hacer pasar átomos de sodio desde una velocidad del orden de  $1000\text{ m/s}$  a la casi total inmovilidad, después de unos 33 000 choques. Este procedimiento permite alcanzar temperaturas de orden de  $10^{-6}\text{ K}$ , y su desarrollo les valió el premio Nobel de física, en 1997, al francés Claude Cohen y a los estadounidenses Steven Chu y William D. Phillips. En un agregado de átomos enfriados y confinados por láser se pueden «evaporar» los más rápidos mediante la aplicación de campos magnéticos; de este modo se ha descendido hasta  $2 \times 10^{-8}\text{ K}$ , obteniendo una forma de materia puramente cuántica que se denomina *condensado de Bose-Einstein*. Su consecución les supuso a Eric A. Cornell, Wolfrang Ketterle y Carl E. Wieman el premio Nobel de física del año 2001. (Una temperatura tan baja como  $2 \times 10^{-8}\text{ K}$  seguramente no se ha dado nunca hasta ahora en ningún lugar del Universo).

La producción de radiación láser en el laboratorio involucra a la física atómica, la óptica y la electrónica; esta interdisciplinariedad se ha convertido en una nueva rama de la ciencia conocida como FOTÓNICA.

**F) RAYOS X**

**XXVIII – 25. Rayos X. Propiedades**

Los rayos X o rayos Roentgen fueron descubiertos por este investigador en 1895 en sus experiencias con rayos catódicos. Observó que durante el funcionamiento de un tubo de gas, la producción de estos últimos iba acompañada de fluorescencia en una pantalla de platino-cianuro de bario, próxima. Posteriores experiencias del mismo Vilhelm C. Roentgen (1845-1923) y de otros investigadores (Laue, Barkla, ...) pusieron de manifiesto que se originaban por el choque de los electrones con las paredes del tubo, y que tienen las siguientes PROPIEDADES:

- Impresionan placas fotográficas.
- Excitan la fluorescencia en determinados cuerpos.
- Tienen un gran poder de penetración.
- No se desvían en campos eléctricos o magnéticos.
- Ionizan los gases.
- Experimentan fenómenos de interferencias, difracción y polarización.

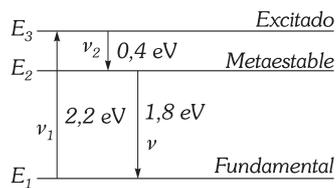


Fig. XXVIII-30.- Niveles de energía del cromo en el cristal de rubí. Los estados  $E_2$  y  $E_3$  son excitados;  $E_2$  es además metaestable.

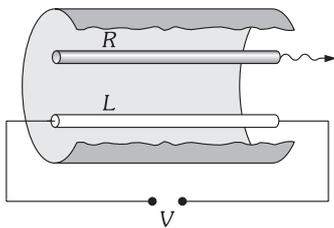


Fig. XXVIII-31.- Láser de rubí. La fuente de tensión  $V$  alimenta la lámpara  $L$  cuya luz es focalizada en la barra de rubí  $R$  por el espejo de sección elíptica.

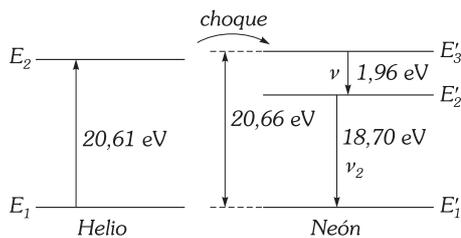


Fig. XXVIII-32.- Niveles de energía del He y del Ne.  $E_3'$  se comporta como metaestable. La energía del helio en  $E_2$  se transfiere al neón por choque, con un pequeño aporte de energía cinética del helio.

Todas ellas indican que:

Los rayos X están constituidos por ondas electromagnéticas transversales de la misma naturaleza que la luz aunque de mucha mayor frecuencia.

## XXVIII – 26. Tubos de producción de rayos X

TUBOS DE GAS.

Son tubos de la forma indicada en la Fig. XXVIII-33; en ellos se hace un vacío de centésimas de mm. El cátodo C es un casquete esférico de aluminio; tiene esta forma para que los electrones se proyecten sobre un blanco metálico llamado también anticátodo (AC), generalmente de wolframio y que se une al cátodo a través del secundario de una bobina de inducción que produce una tensión alterna que puede ser del orden de 30 000 a 50 000 voltios; para utilizar únicamente el semiperiodo en que C es negativo respecto del anticátodo, se instala una válvula rectificadora o notrón V (lámpara de dos electrodos) que deja pasar exclusivamente la corriente que interesa.

Producidos los rayos catódicos por el mecanismo ya estudiado en el párrafo XX-43, el choque de los electrones contra el anticátodo, provoca la emergencia de los rayos X.

Estos tubos tienen el inconveniente del endurecimiento; consiste éste en una absorción por parte del vidrio del gas del interior del tubo, disminuyendo la presión, e interrumpiendo la producción de rayos X, a menos que se eleve el potencial.

TUBOS DE COOLIDGE.

Están basados en el efecto termoiónico, o liberación de electrones por un filamento de incandescencia.

En un tubo de vidrio (Fig. XXVIII-34) en el que se ha hecho el vacío más alto posible, hay instalados un filamento (F) que sirve de cátodo y una placa de wolframio en la parte terminal de un tubo convenientemente refrigerado; el filamento se une a la pila (P) de pequeño potencial, constituyendo con ella el circuito de calefacción, o bien una resistencia próxima a F, caldea a éste, originándose la emisión termoiónica de electrones. Ánodo y cátodo se unen a la alta tensión originada por una bobina de inducción; los electrones salientes de F son atraídos por el anticátodo y, chocando con él, producen los rayos X.

Estos tubos no necesitan válvula rectificadora puesto que ellos mismos lo son, dejando pasar a los electrones únicamente del filamento al ánodo.

El fenómeno de endurecimiento no se verifica, ya que no se necesita gas para la producción de los rayos catódicos, puesto que los electrones emergen del cátodo por el efecto termoiónico y no por choque de los iones del gas, como en los tubos anteriores.

En ambos tubos, los rayos X se propagan en la semiesfera correspondiente a la parte anterior del anticátodo.

## XXVIII – 27. Análisis de los rayos X. Método de Bragg

Los rayos X, por su pequeña longitud de onda, no verifican fenómenos de difracción en las redes de difracción, por la misma razón que la luz no se difracta al pasar por el enrejado de una ventana. La naturaleza proporciona redes de rendijas estrechísimas en los cristales naturales; en ellos existe una distribución ordenada de los átomos (teoría reticular de los cristales) de forma que los espacios que forman entre ellos (constante reticular) separa planos reticulares en los que los rayos X realizan fenómenos análogos a la luz.

Supongamos dos capas de átomos A y B (Fig. XXVIII-35) a una distancia  $d$  (constante reticular) y un haz de rayos X que incide sobre el cristal, reflejándose en parte de A y en parte de B. La diferencia de caminos entre los rayos reflejados es:

$$CD + DE = 2 CD = 2d \operatorname{sen} \varphi$$

siendo  $\varphi$  el ángulo formado por los rayos y la cara del cristal. Si se verifica:

$$2d \operatorname{sen} \varphi = K \lambda$$

al interferir los rayos reflejados producirán un máximo. Pero si:

$$2d \operatorname{sen} \varphi = (2K + 1) \frac{\lambda}{2}$$

se produce anulación de la intensidad.

Haciendo incidir un haz de rayos X sobre un cristal de NaCl (C en la Fig. XXVIII-36) y girando el cristal, se obtiene sobre la cinta fotográfica (F) el espectro de los rayos X; se producen impresiones de intensidad máxima para los ángulos:

$$\operatorname{sen} \varphi = 0; \quad \operatorname{sen} \varphi = \frac{\lambda}{2d}; \quad \operatorname{sen} \varphi' = \frac{2\lambda}{2d}; \quad \operatorname{sen} \varphi'' = \frac{3\lambda}{2d}; \quad \text{etc.}$$

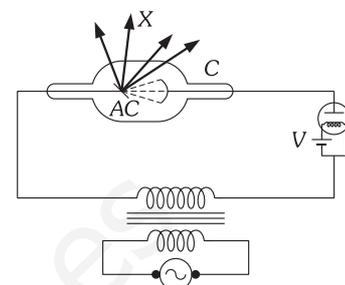


Fig. XXVIII-33.- Producción de rayos X (tubo de gas).

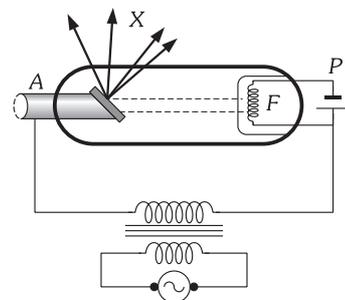


Fig. XXVIII-34.- Producción de rayos X (tubo de Coolidge).

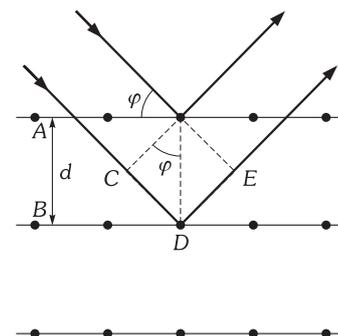


Fig. XXVIII-35.- Reflexión de rayos X en dos planos atómicos contiguos

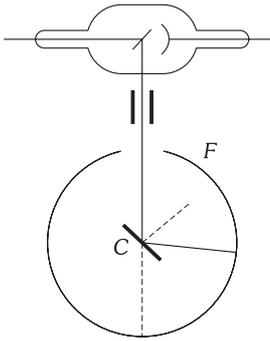


Fig. XXVIII-36.- Obtención del espectro del rayos X.

Si los rayos X son la superposición de varias longitudes de onda ( $\lambda$  y  $\lambda'$ ), para un espectro de orden determinado ( $K = 1$  por ejemplo) se cumple para el máximo de intensidad:

$$2d \text{ sen } \varphi = \lambda$$

$$2d \text{ sen } \varphi' = \lambda'$$

separándose la dos impresiones de las dos radiaciones, puesto que corresponden a ángulos distintos

$$\text{sen } \varphi = \frac{\lambda}{2d}$$

$$\text{sen } \varphi' = \frac{\lambda'}{2d}$$

Conocidos  $\varphi$  y  $d$  se pueden determinar  $\lambda$ .

**XXVIII – 28. Mecanismo de la producción de rayos X**

Los electrones que inciden sobre el anticátodo, tiene una energía cinética;  $mv^2/2 = Ve$  ( $V =$  caída de potencial del tubo de producción;  $e =$  carga del electrón). Tal energía cinética se transmite en parte a otros electrones o átomos del metal que forma el anticátodo elevando, así, la temperatura de éste; el resto de la energía de cada electrón, se transforma en un cuanto de radiación X, cuya frecuencia queda determinada por la ecuación:  $E = h\nu$  en la que  $E$  es la energía transformada en radiación,  $h$  el cuanto de acción de Planck y  $\nu$  la frecuencia. La mayor frecuencia (menor  $\lambda$ ) de tal radiación (RAYOS X HETEROGÉNEOS) corresponde a la transformación de la total energía cinética del electrón en un cuanto X.

Otros electrones chocan violentamente contra los electrones de los niveles energéticos inferiores de los átomos del anticátodo, expulsándolos; al quedar un hueco en su órbita, caen a ella los electrones de los niveles energéticos superiores transformándose la disminución de energía, en radiación (RAYOS X CARACTERÍSTICOS), que obedece a la anterior fórmula de Planck.

**XXVIII – 29. Espectro continuo de rayos X. Radiación de frenado.**

El espectro de los rayos X obtenido como se ha comentado, consta de dos partes distintas: un espectro continuo procedente de la radiación de energía por el frenado de los electrones (para la que se ha acuñado el nombre de *bremsstrahlung*), y un espectro de líneas agudas superpuesto sobre el espectro continuo (Fig. XXVIII-37) que es característico del material emisor. La Fig. XXVIII-37 muestra el espectro de los rayos X producidos por un metal, para distintos valores de la diferencia de potencial  $V$  aplicada al tubo en que se producen. El espectro continuo es casi independiente del material irradiado y depende sólo de la energía de los electrones. En él existe una mínima longitud de onda (máxima frecuencia); para tal radiación se verifica:

$$V \lambda = 12400$$

siempre que  $V$  se mida en voltios y  $\lambda$  Å. En consecuencia:

«La longitud de onda mínima en el espectro continuo de los rayos X, es inversamente proporcional al potencial del tubo de producción». (LEY DE DUANE-HUNT).

Así, para obtener RAYOS X DUROS (pequeña longitud de onda y gran frecuencia) hacen falta grandes potenciales. Para la obtención de RAYOS X BLANDOS (gran longitud de onda) hacen falta menores potenciales.

La fórmula anterior es una consecuencia de la ecuación general de las radiaciones; considerando que la pérdida de energía potencial del electrón es igual a la caída de potencial que sufre ( $V$ ) por su carga eléctrica, y que esta total pérdida de energía se transforma en radiación, obtenemos para la  $\nu$  máxima (mínima  $\lambda$ ):

$$Ve = h\nu$$

siendo la frecuencia:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow Ve = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow V\lambda = \frac{hc}{e}$$

El segundo miembro es constante:  $h =$  cuanto de acción;  $c =$  velocidad de la luz;  $e =$  carga del electrón. Reduciendo a las unidades expresadas, su valor aproximado es 12 400.

**XXVIII – 30. Rayos X característicos. Ley de Moseley**

Los rayos X característicos o radiación discontinua, caracterizan al metal que constituye el anticátodo; cada metal emite unas determinadas radiaciones.

LEY DE MOSELEY. La raíz cuadrada de la frecuencia de cada línea de las radiaciones características, es una función lineal del número atómico del metal que forma el anticátodo.

$$\sqrt{\nu} = AZ + B$$

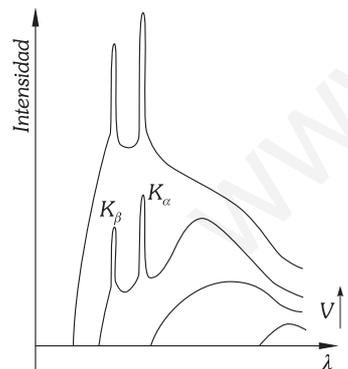


Fig. XXVIII-37.- Espectro de rayos X. A partir de un determinado valor de  $V$  aparece el espectro característico del material emisor.

donde  $A$  y  $B$  son constantes características de cada línea.

Estas líneas aparecen por las transiciones de electrones entre niveles energéticos internos del átomo, que inicialmente están completos. La energía del electrón en los primeros niveles es muy baja, mucho menor que la de los electrones de valencia, por lo que la frecuencia del fotón emitido al pasar el electrón de un nivel exterior a uno interno es grande, o lo que es lo mismo, la longitud de onda es corta.

Para que se produzca la radiación X característica es preciso que el electrón incidente arranque otro electrón de una de las capas interiores, produciendo así un hueco para el posterior salto que originará el fotón X. En la figura XXVIII-38 se esquematiza el proceso; las dos transiciones señaladas se corresponden con los picos de la Fig. XXVIII-37.

Los espectros característicos están compuestos por series aisladas que se denominan  $K$ ,  $L$ ,  $M$ , ... según cuál sea el nivel más bajo que interviene en la transición.

Henry G. Moseley (1887-1915) en 1913 confirmó y perfeccionó la tabla periódica de Mendeleeff y orientó a la ciencia física en el sentido de que el número atómico no es un concepto caprichoso de ordenación, sino una propiedad intrínseca de los átomos, a los cuales caracteriza. El joven físico inglés murió en el campo de batalla en los Dardanelos, durante la primera guerra mundial.

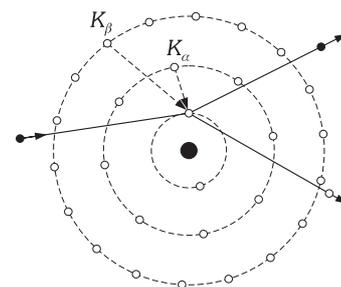


Fig. XXVIII-38.- Esquema de la producción de un hueco que posibilita la transición originadora de un fotón X.

### XXVIII - 31. Absorción de los rayos X por la materia. Ley de Bragg-Pierce

Si un haz de rayos X de intensidad  $I_0$ , atraviesa un cuerpo de espesor  $x$ , emerge con una intensidad  $I$  menor que la incidente.

*La variación relativa de la intensidad de los rayos X que atraviesan a una sustancia, es directamente proporcional al espesor de ésta:*

$$\frac{dI}{I} = -\mu dx$$

$\mu$  es el COEFICIENTE DE ABSORCIÓN de la sustancia que nos mide la disminución (signo  $-$ ) relativa de intensidad al atravesar los rayos X un espesor unidad.

Al ser la ecuación de dimensiones de  $\mu$ ,  $L^{-1}$ , el coeficiente de absorción se mide en  $m^{-1}$  en el sistema internacional.

De la ecuación anterior obtenemos por integración:  $\ln I = -\mu x + C$ . Además:  $x=0 \Rightarrow C = \ln I_0$  por tanto:

$$\ln I = -\mu x + \ln I_0 \Rightarrow \ln \frac{I}{I_0} = -\mu x \Rightarrow \frac{I}{I_0} = e^{-\mu x} \quad \boxed{I = I_0 e^{-\mu x}}$$

«Cuando el espesor de una sustancia atravesada por rayos X aumenta en progresión aritmética, la intensidad de los rayos salientes disminuye en progresión geométrica»

Para que la intensidad de los rayos X se reduzcan a la mitad, hará falta un ESPESOR DE SEMIABSORCIÓN:

$$\frac{I_0}{2} = I_0 e^{-\mu x} \Rightarrow e^{-\mu x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \mu x = \ln 2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{0,693}{\mu}}$$

La LEY DE BRAGG-PIERCE se enuncia:

El PODER ABSORBENTE ESPECÍFICO de una sustancia con respecto a los rayos X, es directamente proporcional al cubo del número atómico ( $Z$ ) y al cubo de la longitud de onda.

$$\boxed{A = \frac{\mu}{\rho} = K Z^3 \lambda^3}$$

$A$  –COEFICIENTE ABSORBENTE ESPECÍFICO– es el cociente de dividir el coeficiente de absorción ( $\mu$ ) por la densidad del cuerpo.

Se llama COEFICIENTE ATÓMICO DE ABSORCIÓN o bien SECCIÓN EFICAZ DE CAPTURA, a la cantidad  $\beta$  definida por:

$$\boxed{\beta = A \frac{M}{N_A} = \frac{\mu}{\rho} \frac{M}{N_A}}$$

donde  $M$  es la masa atómica y  $N_A$  el número de Avogadro. El cociente entre la sección eficaz y la sección geométrica mide la probabilidad de que un fotón X que atraviesa un átomo sea capturado por él.

Los cuerpos de número atómico más elevado absorben más los rayos X (son menos atravesados) que los de pequeño número atómico; propiedad que se aprovecha para la observación del cuerpo humano, por la diversa transparencia de los tejidos a los rayos X, por medio de pantallas fluorescentes (radioscopia) o por impresión de placas fotográficas (radiografía).

Los rayos X de gran longitud de onda (blandos) son más absorbidos que los de pequeña longitud de onda (duros); los rayos X duros tienen, por lo tanto, mayor poder de penetración que los blandos.

PROBLEMAS: 37 al 41.

G) DUALIDAD ONDA-CORPÚSCULO

XXVIII – 32. Teoría de De Broglie. Naturaleza ondulatoria de la materia

En 1924 el físico francés Louis De Broglie (1882-1967) presentó su tesis sobre el comportamiento dual de las partículas; para entonces ya se había puesto de manifiesto en diversas experiencias que la luz, que había sido considerada exclusivamente como una onda electromagnética, presentaba en determinados fenómenos un comportamiento corpuscular (aspectos comentados en la primera parte de este capítulo); esto le indujo a proponer que, de forma análoga, debería observarse un comportamiento ondulatorio de la materia.

De Broglie supuso que la relación entre el momento lineal y la longitud de onda de la ONDA DE MATERIA u onda de De Broglie asociada a una partícula, verifica la misma relación encontrada para el fotón:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

«A toda partícula que se mueve con un momento lineal de módulo  $p$ , se le puede asociar una onda cuya longitud de onda viene expresada por la relación anterior».

Si  $\nu$  es la frecuencia de las ondas asociadas a la materia y  $u$  su velocidad de propagación o velocidad de fase, podremos expresar el valor de  $\lambda$ , por:

$$\lambda = \frac{u}{\nu}$$

y por igualación de los dos valores de  $\lambda$ :  $\frac{h}{mv} = \frac{u}{\nu} \Rightarrow h\nu = muv$

El producto  $h\nu$  es el cuanto de energía de la vibración, cuyo valor es:  $E = h\nu = mc^2$

igualando las dos últimas ecuaciones, se obtiene:  $mc^2 = muv \Rightarrow c^2 = uv$  (24)

Al ser  $v$  (velocidad de la partícula) menor que la velocidad de la luz se ha de verificar que  $u > c$ , lo que parece ir en contra del principio de relatividad que considera como máxima la velocidad de la luz. No es así:  $u$  es la velocidad de propagación de una energía equivalente a partículas en movimiento o VELOCIDAD DE GRUPO;  $u$  corresponde a la llamada VELOCIDAD DE FASE no portadora de energía.

El hecho de que la velocidad de fase sea mayor que la de la partícula no significa que la onda de De Broglie vaya por delante de ella. Podemos imaginar la partícula (Fig. XXVIII-39) situada dentro de un paquete de ondas (sección XVII-21) que se propaga con una velocidad de grupo (que en esta ocasión denotaremos como  $\omega$ ) mientras que las ondas individuales lo hacen con la velocidad de fase  $u$ .

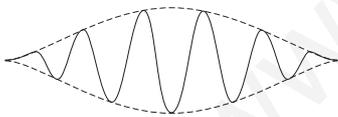


Fig. XXVIII-39.- Paquete de ondas asociado a una partícula.

Se puede demostrar que la velocidad de grupo del paquete coincide con la velocidad  $v$  de la partícula. Para obtener dicha velocidad de grupo expresamos en primer lugar la velocidad de fase en función de la longitud de onda: de la expresión relativista de la energía de un cuerpo de masa en reposo  $m_0$ ,  $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$ , de la relación de De Broglie  $\lambda = h/p$ , y de la de Einstein  $E = h\nu$ , obtenemos:

$$h^2 \nu^2 = \frac{h^2}{\lambda^2} c^2 + m_0^2 c^4$$

teniendo en cuenta que  $u = \lambda \nu$  y despejando  $u$ , se llega a:  $u = c \sqrt{1 + \frac{m_0^2 c^2}{h^2} \lambda^2}$  (25)

que nos indica una importante diferencia entre estas ondas y las de luz: la velocidad de la onda de De Broglie de una partícula con  $m_0 > 0$  depende de la longitud de onda incluso en el vacío.

La velocidad de grupo se obtiene como en la sección XVII-21, que con la notación empleada en esta ocasión es:

$$\omega = u - \lambda \frac{du}{d\lambda}$$

Derivando (25) obtenemos:  $\frac{du}{d\lambda} = \frac{m_0^2 c^3 \lambda}{h^2 \sqrt{1 + m_0^2 c^2 \lambda^2 / h^2}}$  (27)

e introduciendo (25) y (27) en (26) y operando, se llega al resultado:  $\omega = \frac{c^2}{u}$

que comparando con (24) conduce a  $v = \omega$ , es decir:

*La velocidad de grupo de las ondas de materia es la misma que la velocidad de la partícula.*

### XXVIII – 33. Difracción de electrones

El valor de la constante de Planck limita, a la vista de la expresión  $\lambda = h/mv$ , el tamaño de los objetos con los que pueden observarse fenómenos ondulatorios como interferencias o difracción. Los fenómenos de difracción están condicionados por el espaciado de la red, que ha de ser del orden de magnitud de la longitud de onda. Supongamos por ejemplo una pequeñísima partícula de hierro de  $10^{-9}$  Kg y que además se mueve a una velocidad tan baja como  $10^{-3}$  m/s, su longitud de onda asociada es del orden de  $10^{-34}/10^{-9} \cdot 10^{-3} = 10^{-22}$  m; no existe una estructura de este tamaño que pueda ser empleada como red de difracción (el tamaño de un núcleo se mide en fermis,  $1 \text{ Fm} = 10^{-15}$  m).

Sin embargo, cuando la masa de la partícula es muchos órdenes de magnitud menor, sí es posible encontrar tales estructuras; es el caso de los electrones. Para un electrón, de masa  $9,11 \cdot 10^{-31}$  Kg, a velocidades no relativistas, por ejemplo de  $10^6$  m/s, resulta una longitud de onda del orden de  $10^{-10}$  m, que es el orden de magnitud de la distancia entre átomos de un cristal.

El resultado del cálculo de la longitud de onda asociada al electrón partiendo de la expresión de De Broglie, hizo suponer que podrían producirse fenómenos de difracción con electrones, de forma análoga a los ya realizados con los rayos X.

La experiencia fue realizada con éxito por Clinton Davisson (1881-1958) y Lester H. Germer (1896-1971) y, separadamente, por G. P. Thomson\*.

El esquema del montaje realizado por los primeros es el de la Fig. XXVIII-40; los electrones emitidos por un filamento caliente son acelerados en una diferencia de potencial  $V$  hasta tener una energía cinética  $eV$ , a continuación son difractados por un monocristal de níquel y producen máximos de interferencia para determinados ángulos, cuya medida, junto con el dato del espaciado de la red y de la ley de Bragg, permite calcular  $\lambda$ . Los resultados están en perfecto acuerdo con la expresión  $\lambda = h/p = h/\sqrt{2meV}$ .

El desarrollo de los aceleradores de partículas y de los reactores con haces de neutrones de alta intensidad, ha permitido observar interferencias de protones, neutrones e incluso de átomos completos. La naturaleza ondulatoria de la materia ha sido comprobada de muchos modos diferentes, y se manifiesta tanto más acentuadamente cuanto mayor es la longitud de onda de De Broglie; las propiedades corpusculares son más marcadas para longitudes cortas. La conclusión es que:

*La dualidad onda-corpúsculo es aplicable tanto a la luz como a los objetos materiales.*

Hay que señalar sin embargo una diferencia, mientras que para un fotón la amplitud de la onda tiene un significado físico, que es el valor del campo eléctrico o magnético en el lugar considerado, no existe tal significado para las ondas de De Broglie de una partícula de masa en reposo no nula. La interpretación de la amplitud de estas ondas se verá más adelante, en este mismo capítulo.

### XXVIII – 34. La teoría de De Broglie y el modelo de Bohr

Un argumento esgrimido por De Broglie para justificar el carácter dual de los electrones, fue que permitía deducir razonadamente los postulados de Bohr. Puesto que en el modelo de Bohr los electrones se mueven en círculos, De Broglie propuso que la onda asociada al electrón debe ser una ONDA ESTACIONARIA CIRCULAR que se cierra sobre sí misma constructivamente, es decir, que en la longitud de la circunferencia orbital caben exactamente un número entero de longitudes de onda. En las órbitas en que esto no ocurriese (Fig. XXVIII-41) la interferencia de la onda consigo misma sería destructiva y se extinguiría rápidamente.

Cuando se verifica la condición propuesta (Fig. XXVIII-42), se tiene:  $2\pi r = n\lambda$  que, junto con  $\lambda = h/p = h/mv$ , conduce a:

$$2\pi r = n h / m v \quad \Rightarrow \quad m v r = n h$$

que es precisamente la expresión del postulado de Bohr de la ecuación (9).

La teoría de De Broglie conduce pues a la cuantificación de la energía a través del carácter ondulatorio del electrón, sin embargo, la imagen reflejada en la Fig. XXVIII-42, de una onda circular acomodándose a la órbita electrónica es incorrecta; como se verá más adelante, la idea de trayectoria electrónica carece de sentido cuando un electrón está confinado en un átomo.

**PROBLEMAS: 42 al 45.**

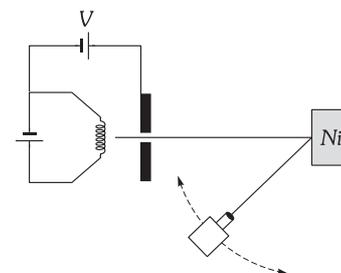


Fig. XXVIII-40.- Experiencia de Davisson-Germer de difracción de electrones en un monocristal de níquel.

\* George Paget Thomson (1892-1975), que recibió el premio Nobel en 1937 por su trabajo sobre la naturaleza ondulatoria del electrón, fue hijo de sir Joseph John Thomson (1856-1940), que había recibido en 1906 por demostrar precisamente su naturaleza corpuscular.

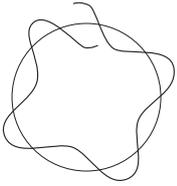


Fig. XXVIII-41.- Si  $2\pi r \neq n\lambda$  la onda interfiere consigo misma extinguiéndose.

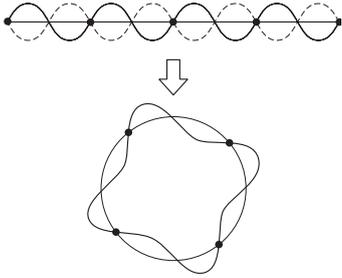


Fig. XXVIII-42.- Onda estacionaria circular.

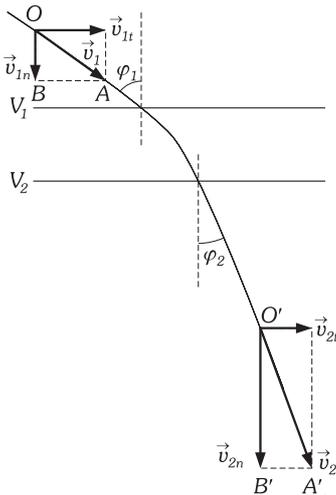


Fig. XXVIII-43.- Refracción de electrones.

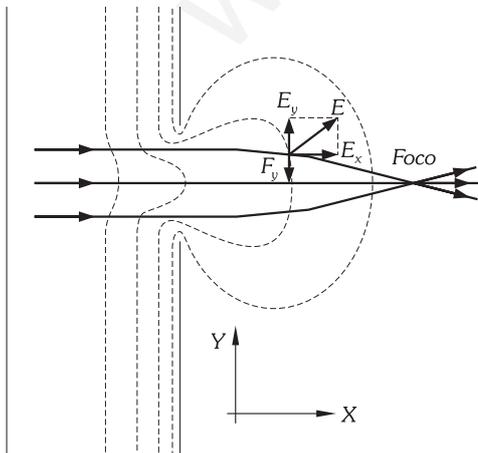


Fig. XXVIII-44.- Lente electrónica convergente.

**XXVIII - 35. Lentes electrónicas**

Supongamos un electrón a velocidad  $v_1$  que atraviesa una superficie pasando del potencial  $V_1$  (cara de entrada) al  $V_2$  (cara de salida). Si suponemos  $V_1 < V_2$ ; la disminución de energía potencial se emplea en incrementar la cinética: pasando en consecuencia, de una velocidad  $v_1$  a otra mayor  $v_2$ . En este cambio de velocidad la componente tangencial ( $v_{1t}$ ) no se modifica; solamente hay variación de la componente normal a la superficie ( $v_{1n}$ ):

$$v_{1t} = v_{2t} \quad v_{1n} < v_{2n}$$

Teniendo en cuenta los triángulos  $OAB$  y  $O'A'B'$ , se verifica (Fig. XXVIII-43):

$$\text{sen } \varphi_1 = \frac{v_{1t}}{v_1} \quad \wedge \quad \text{sen } \varphi_2 = \frac{v_{2t}}{v_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\text{sen } \varphi_1}{\text{sen } \varphi_2} = \frac{v_2}{v_1}}$$

Fórmula análoga a la de refracción de la luz, salvo que las velocidades de propagación están en cociente inverso.

«Un electrón al atravesar una zona en la que hay una diferencia de potencial sufre una refracción».

Esto indica la posibilidad de dirigir un haz de electrones mediante campos eléctricos y magnéticos; no solamente se puede desviar el haz sino que es posible hacerlo diverger o converger y enfocarlo en un punto. Un sistema de campos puede convertirse en una LENTE ELECTRÓNICA; la rama de la Física que estudia estos fenómenos es la ÓPTICA ELECTRÓNICA, uno de cuyos logros más notables es el microscopio electrónico.

Existe un gran número de sistemas que se comportan como una lente para un haz de electrones, los más sencillos constan de placas cargadas con orificios circulares, condensadores cilíndricos o de espiras y bobinas. Un ejemplo es el condensador plano de la Fig. XXVIII-44 en una de cuyas placas hay un orificio circular; las líneas discontinuas representan superficies equipotenciales. El campo eléctrico en un punto es perpendicular a la superficie correspondiente; si lo descomponemos en direcciones paralela y perpendicular al eje de simetría del sistema, observamos que la acción de la componente  $E_y$  de la figura es la de concentrar el haz de electrones hacia el eje X. Se puede demostrar analíticamente que la estructura radial del campo es tal que el haz se enfoca en un punto, es decir, este sistema realiza el papel de una lente convergente.

**XXVIII - 36. Microscopio electrónico**

Es un microscopio en el que el papel de los rayos de luz lo desempeñan los rayos electrónicos.

Los electrones salen del cátodo  $K$  (Fig. XXVIII-45) constituido por un filamento en incandescencia, son atraídos por el ánodo  $A$ , y atraviesan en su marcha a un medio de concentración, que en esencia puede ser un cilindro ( $C$ ) al que se le ha comunicado un potencial negativo. El papel del cilindro  $C$  es el de evitar la marcha de los electrones hacia el ánodo, cuya tensión es del orden de  $10^5$  V respecto del filamento. Una lente, que hace las funciones del condensador en el microscopio óptico, alinea los electrones dejando el haz paralelo. Este haz incide en el objeto (lámina delgadísima) al que atraviesa más o menos según la transparencia de sus diversos puntos para los rayos electrónicos, que emergen, así, con más o menos intensidad.

El haz catódico pasa a través de la lente eléctrica  $E$  (diafragmas metálicos a distinto potencial) para formar una imagen, de la cual, por el mismo mecanismo (lente  $E'$ ) se forma en una pantalla fluorescente o en una placa fotográfica la imagen definitiva. Para evitar choques de electrones con moléculas de aire, en el sistema se hace un vacío del orden de  $10^{-5}$  mm.

Siendo el poder separador del microscopio inversamente proporcional a la longitud de onda de la radiación empleada y al ser la longitud de onda asociada al electrón menor que la de la luz, el poder separador del microscopio electrónico es extraordinario. Con una tensión aceleradora en el ánodo de  $10^5$  voltios y salvando el efecto de las aberraciones en las lentes, se llegan a obtener aumentos útiles de aproximadamente un millón, frente a los entre mil y dos mil del microscopio óptico.

**H) MECÁNICA CUÁNTICA**

**XXVIII - 37. Mecánica cuántica**

Como se ha visto, no se puede asignar una descripción exclusivamente ondulatoria a la radiación electromagnética, ni exclusivamente corpuscular a las partículas; ambas participan de los dos tipos de comportamiento. Los trabajos realizados para unificar la dualidad onda-corpúsculo en una sola teoría consistente, condujeron a la MECÁNICA CUÁNTICA.

Por un lado Werner K. Heisenberg (1901-1976), Max Born (1882-1970) y Pascual Jordán (1902-1980), en 1925, dan a conocer su MECÁNICA DE MATRICES,

una teoría en la que las ecuaciones de movimiento de las variables dinámicas de un sistema cuántico se escriben como ecuaciones entre matrices. Esta teoría permite calcular matemáticamente las posibles transiciones electrónicas entre los distintos niveles energéticos de un átomo, con resultados más ajustados a los valores experimentales que los obtenidos a partir de los postulados de Bohr.

Casi al mismo tiempo, Erwin Schrödinger (1887-1961) desarrolla la MECÁNICA ONDULATORIA; basándose en la teoría de ondas clásica y en la teoría de De Broglie, establece la correspondencia entre variables dinámicas del corpúsculo y magnitudes características de la onda asociada. Un sistema cuántico se representa mediante una FUNCIÓN DE ONDA cuya propagación se describe mediante la ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER.

Ambas mecánicas, que en principio fueron consideradas como rivales debido a sus formulaciones diferentes, son en realidad matemáticamente idénticas como demostró posteriormente el propio Schrödinger; son dos formulaciones particulares de la mecánica cuántica, cuyo formalismo general fue expuesto por Dirac en 1929 incluyendo consideraciones relativistas.

La mecánica cuántica es la teoría adecuada para la descripción de los fenómenos microscópicos; por una parte en ella se incluyen como casos particulares todos los conceptos que son válidos clásicamente, y por otra, de ella se derivan como consecuencias lógicas los tres aspectos inexplicables por la teoría clásica: el comportamiento corpuscular de la materia, el ondulatorio de las partículas y la cuantificación de magnitudes físicas.

El formalismo general de Dirac es la forma más completa de exponer la mecánica cuántica, sin embargo en lo que resta emplearemos el lenguaje de la mecánica ondulatoria porque está mucho más próximo al que hemos venido utilizando y es más asequible a un estudiante de Física General.

**XXVIII – 38. Principio de incertidumbre. (Principio de Heisenberg)**

EL PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE O DE INDETERMINACIÓN, DE HEISENBERG, se refiere a la medida simultánea de los valores de diversas parejas de magnitudes relativas a una partícula. Para la posición y la cantidad de movimiento establece que:

*«No es posible determinar simultáneamente la posición y la cantidad de movimiento exactas de una partícula».*

La representación de un electrón en la teoría de De Broglie mediante un paquete de ondas implica que sólo puede asegurarse de su posición en un instante que está dentro de la región ocupada por el paquete. Si éste ocupa sobre *el eje X* una distancia  $\Delta x$ , diremos que ese valor es la INCERTIDUMBRE o INDETERMINACIÓN en la posición del electrón.

Llamando  $\Delta p_x$  a la INCERTIDUMBRE del valor de la componente según el eje X DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO, la formulación matemática del principio de Heisenberg para estas dos magnitudes es:

$$\Delta x \Delta p_x \geq h \tag{28}$$

De la misma forma se puede escribir:  $\Delta y \Delta p_y \geq h$        $\Delta z \Delta p_z \geq h$

*«El producto de las indeterminaciones en las medidas simultáneas de la posición y la cantidad de movimiento de una partícula es siempre mayor o igual que la constante de Planck».*

Este principio no implica que no se puedan realizar medidas exactas de una de las dos magnitudes, sino que cuanto más precisión se obtenga en una de ellas más indeterminada queda la otra.

El principio de indeterminación, básico en la mecánica cuántica, no se debe a un defecto de la teoría que podría ser subsanado perfeccionándola, ni a problemas con el grado de precisión de los instrumentos de medida; se deriva de la naturaleza ondulatoria de las partículas, como puede verse en el siguiente caso:

Supongamos un haz de electrones de la misma velocidad que viajan hacia la rendija de anchura  $b$  de la Fig. XXVIII-46, después de ser difractados producen en una placa fotográfica un ennegrecimiento (de intensidad representada por la curva de la figura) consistente en una franja central separada por mínimos de las dos franjas contiguas. Al atravesar la rendija la indeterminación en la posición del electrón es  $\Delta x = b$ , y, considerando solamente el máximo central, la indeterminación en la componente x de la cantidad de movimiento es  $\Delta p_x = p \text{ sen } \theta$ . La cuestión (XXVI-35) nos proporciona la relación  $\text{sen } \theta = \lambda/b$ , con lo que:

$$\text{sen } \theta = \frac{\lambda}{\Delta x} \Rightarrow \Delta x = \frac{\lambda}{\text{sen } \theta}$$

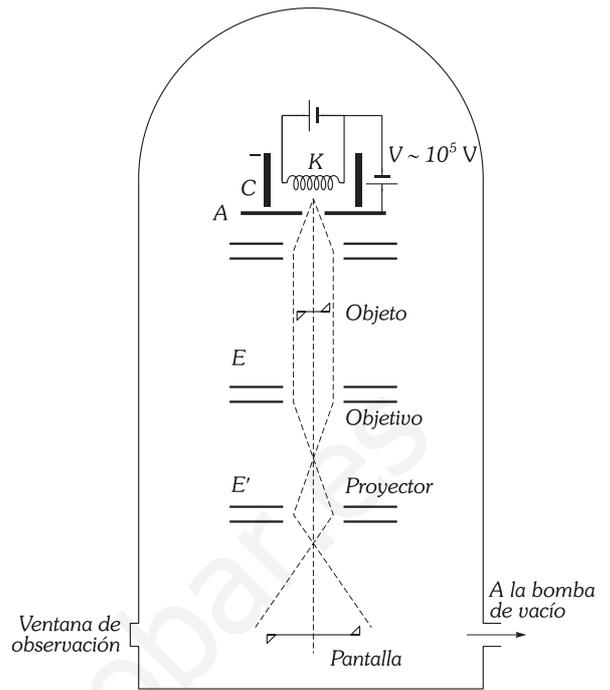


Fig. XXVIII-45.- Microscopio electrónico.

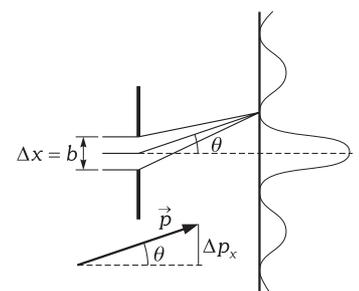


Fig. XXVIII-46.- Difracción de electrones por una rendija.

$$\text{y por ser } p = h/\lambda: \quad \Delta x \Delta p = p \operatorname{sen} \theta \frac{\lambda}{\operatorname{sen} \theta} = h$$

que es el valor del producto de incertidumbres en el caso más favorable. Como se ve, esta relación aparece porque los electrones son difractados, es decir, porque presentan propiedades de onda.

Existen otras parejas de magnitudes que verifican el mismo principio, la más importante la forman la energía y el intervalo de tiempo. Representando la onda asociada a una partícula mediante un paquete de anchura  $\Delta x$  que viaja en la dirección  $X$  con una velocidad de grupo  $v$ , el momento en que la partícula pasa por una posición dada puede determinarse con un incertidumbre  $\Delta t = \Delta x/v$ , de donde  $\Delta x = v \Delta t$ . Por ser  $p_x = h/\lambda$  y  $\lambda = v/\nu$  se tiene  $\Delta p_x = \Delta(h/\lambda) = \Delta E/\nu$ , es decir:  $\Delta x \Delta p_x = \Delta t \Delta E$ , con lo que:

$$\Delta t \Delta E \geq h \quad (29)$$

Aplicada a un electrón en un átomo, la expresión (29) relaciona el tiempo que el electrón permanece en un cierto estado y la incertidumbre en la determinación de la energía de ese estado. El electrón puede permanecer en el estado fundamental tanto tiempo como deseemos por lo que la energía de ese estado puede medirse con el grado de precisión más elevado; en un estado excitado el electrón permanece un tiempo  $\Delta t$  y su energía en ese estado es  $E \pm \Delta E$ , con lo que la frecuencia del fotón emitido en la desexcitación está afectada de una incertidumbre  $\Delta \nu = \Delta E/h$ . Este hecho se observa en la práctica, las rayas espectrales tienen una anchura finita, y su medida permite conocer el tiempo de vida de un estado excitado, es decir, el tiempo que el electrón permanece en él.

**PROBLEMAS: 46 al 49.**

### XXVIII – 39. Medida simultánea de las componentes del momento angular

El principio de incertidumbre permite la medida de  $\mathbf{p}$  con  $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{0}$ , pero indica que en este caso la posición de la partícula es absolutamente desconocida. De la magnitud vectorial  $\mathbf{p}$  podemos, pues, conocer simultáneamente sus tres componentes.

Esto no ocurre con todos los vectores, en particular, no ocurre con el momento angular orbital  $\mathbf{L}$  de un electrón en un átomo; no es posible determinar simultáneamente  $L_x$ ,  $L_y$  y  $L_z$ . Podemos razonarlo de la siguiente forma: supongamos que conocemos a la vez las tres componentes; ello significa que el vector  $\mathbf{L}$  está perfectamente determinado, y por tanto lo está también el plano de la órbita del electrón. Ahora bien, lo anterior supone por un lado que la componente de la posición del electrón en la dirección de  $\mathbf{L}$  (sea la dirección  $z$ , por ejemplo) está fijada exactamente,  $\Delta z = 0$ , y por otro lado, por ser el plano de la órbita perpendicular a ese eje, se tiene  $p_z = 0$  y  $\Delta p_z = 0$ ; así, se verificará  $\Delta z \Delta p_z = 0$ , lo que contradice la expresión (28) del principio de incertidumbre (salvo en el caso de  $L_x = L_y = L_z = 0$ ).

Del momento angular orbital podemos conocer simultáneamente cualquiera de sus componentes y su módulo. Si consideramos un orbital electrónico caracterizado por los números cuánticos  $n$ ,  $l$  y  $m_l$ , para un electrón, la fijación de esos tres números supone unos valores dados de  $L_x$  y  $L_y$ , con lo que las componentes  $L_x$  y  $L_y$  quedan indeterminadas, y en consecuencia lo mismo ocurre a la órbita del electrón.

Conviene recordar en este punto que el concepto de órbita electrónica fue introducido por Rutherford y confirmado por Bohr como «modelo» para explicar el espectro del hidrógeno. Sin embargo, por lo dicho parece razonable cuestionarse la validez de tal concepto.

### XXVIII – 40. Concepto de trayectoria

Vamos a comentar en que condiciones la idea de trayectoria tiene sentido físico al aplicarla a distintas partículas; lo haremos con un electrón y con un neutrón.

Consideremos en primer lugar un electrón en un átomo. Si pretendemos «ver» la trayectoria electrónica (por ejemplo en el hidrógeno y con  $n = 1$ ) con un margen de error menor que el radio de la órbita, deberemos emplear como «sonda» fotones de longitud de onda menor que dicho radio; una sucesión de choques del electrón con los fotones irá dejando un rastro de fotones compuestos dispersados. Sin embargo, con un cálculo aproximado obtenemos lo siguiente: supongamos para los fotones  $\lambda \sim r_0/10 \sim 10^{-11}$  m, esto supone  $E = h c/\lambda \sim 10^{-14}$  J  $\sim 10^5$  eV.

Puesto que la energía de ionización es del orden de electrón-voltios (13,6 eV para  $n = 1$  en el hidrógeno), comprobamos que en el primer choque fotón-electrón este, aun a costa de una pequeña fracción de energía del fotón, adquiere un momento lineal que perturba catastróficamente el movimiento que queremos observar. Este es un hecho que hay que considerar en los sistemas cuánticos: *el instrumento de medida empleado para determinar el valor de una magnitud perturba el estado del sistema*. En el caso descrito, la «sonda» ejerce sobre el electrón una acción incontrolable que impide comprobar experimentalmente si efectivamente describe o no una órbita.

*La órbita de un electrón en un átomo es un concepto que no tiene ningún aval experimental.*

El principio de indeterminación nos lleva por otro camino al mismo resultado: de  $\Delta x \Delta p \geq h$  tenemos  $\Delta x \Delta v \geq h/m$  y considerando la masa en reposo del electrón,  $\Delta x \Delta v \sim 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ . Cuando el electrón está confinado en el átomo se tiene  $\Delta x \sim 10^{-10} \text{ m}$ , con lo que  $\Delta v \sim 10^6 \text{ m/s}$  y por otra parte el modelo de Bohr proporciona un valor de la velocidad del electrón en  $n = 1$ , también del orden de  $10^6 \text{ m/s}$ ; es decir, del mismo orden de magnitud que su propia incertidumbre, con lo que cualquier razonamiento acerca de su velocidad en el átomo puede tener solamente un carácter muy general.

En otras situaciones podemos hablar de la trayectoria del electrón con toda propiedad, como para cualquier partícula clásica. Por ejemplo, en una cámara de niebla su paso deja un rastro de pequeñas gotas de agua condensadas sobre iones; si el espesor del rastro es de  $10^{-4} \text{ m}$ , existe en la componente de la velocidad transversal a la dirección del movimiento, una incertidumbre  $\Delta v \sim 1 \text{ m/s}$ , que frente a los  $10^4$  ó  $10^5 \text{ m/s}$  de un electrón relativamente lento representa un valor despreciable. En este caso la idea de trayectoria electrónica es perfectamente aplicable y con sentido físico.

Para un neutrón el principio de Heisenberg establece  $\Delta x \Delta v \sim 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ . Si el neutrón es lanzado contra un átomo, al atravesarlo la incertidumbre en su posición es  $\Delta x \sim 10^{-10} \text{ m}$ , con lo que  $\Delta v \sim 10^3 \text{ m/s}$ , que para un neutrón rápido supone un valor despreciable; se puede por tanto hablar de su trayectoria cuando atraviesa un átomo. No ocurre así si el neutrón está confinado en el núcleo, en este caso  $\Delta x \sim 10^{-15} \text{ m}$  y  $\Delta v \sim 10^8 \text{ m/s}$ , del orden de la velocidad de la luz, y de nuevo desaparece el sentido clásico de trayectoria, aunque en esta ocasión para distancias menores que para un electrón.

Como se ve en los dos casos anteriores, los conceptos de trayectoria u órbita dejan de tener sentido para rangos de distancia menores conforme aumenta la masa de la partícula; las propiedades ondulatorias pierden importancia frente a las corpusculares a medida que se consideran partículas más pesadas, de forma que para describir el movimiento de moléculas con una masa del orden de  $10^{-18} \text{ kg}$ , la mecánica clásica es un teoría suficiente. El valor de la constante de Planck es en definitiva el que fija los límites de aplicación de los conceptos clásicos.

#### XXVIII - 41. Efecto túnel

El estudio de este efecto puede hacerse de una forma completamente rigurosa a partir de la función de onda y de la ecuación de Schrödinger, dos temas que se comentarán a continuación; a pesar de ello lo incluimos aquí como una consecuencia más del principio de Heisenberg, para resaltar la diferencia de comportamiento de una partícula tratada clásica o cuánticamente.

Si en la región en la que se mueve la partícula existe un campo en el que tiene una energía potencial como la de la Fig. XXVIII-47, una partícula ordinaria con energía total  $E$  menor que  $U_b$ , podrá moverse en las zonas I y III, de  $U = 0$ , rebotando en la barrera caso de dirigirse hacia ella, pero nunca se moverá en la zona II pues en ella tendría una energía cinética negativa.

Ahora bien, en virtud del principio de incertidumbre no podemos asignarle a la partícula simultáneamente valores exactos de la posición y de la velocidad, es decir, de la energía potencial y de la cinética. Si la incertidumbre en esta última,  $\Delta T$ , es del orden de  $E - U$ , por ser  $T = p^2/2m$ , la incertidumbre en la cantidad de movimiento es  $\Delta p = \sqrt{2m \Delta T} = \sqrt{2m(E - U)}$ , con lo que:

$$\Delta x \sim \frac{h}{\Delta p} = \frac{h}{\sqrt{2m(E - U)}}$$

Cuando  $\Delta x$  sea mayor que la anchura  $L$  de la barrera de potencial, la partícula podrá encontrarse en cualquiera de las dos zonas a ambos lados de la barrera. Para que ocurra esto se ha de verificar:

$$L < \Delta x \Rightarrow L \sqrt{2m(E - U)} < h$$

Si se dan estas condiciones la partícula puede pasar de un lado al otro de la barrera; el resultado es el mismo que se tendría al perforar un túnel para la partícula clásica a través del cual salvar el obstáculo.

El efecto túnel permite explicar fenómenos como la emisión de partículas  $\alpha$  por el  $^{238}\text{U}$  o la conducción electrónica a través de partículas delgadas de óxidos aislantes, y construir dispositivos electrónicos de uso ya generalizado como el *diodo túnel*, puesto a punto por Leo Esaki (1925) en 1957, o aparatos de investigación como el *microscopio de efecto túnel*, una de cuyas capacidades es transportar átomos individuales y colocarlos en puntos determinados de una superficie.

#### XXVIII - 42. La función de onda

En mecánica cuántica la amplitud de la onda de materia asociada a una partícula se describe mediante una función llamada FUNCIÓN DE ONDA, que se representa con la letra griega  $\psi$ . Al igual que con las ondas mecánicas y con las electromagnéticas, la función de onda de una partícula contiene la información completa sobre su movimiento. Sin embargo, así como en las ondas clásicas la amplitud de la onda tiene un sentido físico claro, la elongación de los puntos de una cuerda,

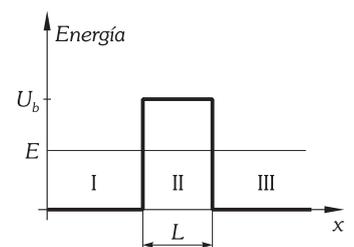


Fig. XXVIII-47.- Barrera de potencial de anchura  $L$ .

el campo eléctrico en un punto, ..., en las ondas de materia la amplitud carece de ese sentido. El significado de la función de onda fue sugerido por Max Born:

*El cuadrado de la función de onda,  $|\psi|^2$ , en un punto del espacio y en un instante determinado, representa la probabilidad de encontrar la partícula en esa posición y en ese instante.*

Más concretamente, si en un momento dado se realiza una medida para localizar una partícula en un volumen elemental  $dV$  en torno a un punto  $\mathbf{r}$ , la probabilidad  $P(\mathbf{r})$  de encontrarla es:

$$P(\mathbf{r}) = |\psi|^2 dV$$

$|\psi|^2$  mide la DENSIDAD DE PROBABILIDAD.

(La función de onda puede ser compleja, con lo que  $|\psi|^2 = \psi \psi^*$  siendo  $\psi^*$  la compleja conjugada de  $\psi$ ).

Para aclarar el anterior enunciado podemos recordar la experiencia de Young de difracción de luz por una doble rendija (párrafo XVI-27). Se producían en una pantalla franjas de interferencia consistentes en zonas iluminadas y oscuras, en las que la intensidad pasa por valores máximos y mínimos. Puesto que la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud, si mayor intensidad en un punto equivale a mayor número de fotones incidiendo en el, podemos asimilar mayor número de fotones a mayor valor del cuadrado de la amplitud.

Análogamente, se producen figuras de interferencia difractando un haz de electrones y haciéndolos incidir en una pantalla fluorescente que emite un destello en cada impacto. Al reducir la frecuencia de los impactos, lanzando los electrones uno a uno por ejemplo, cada destello se produce en un punto imposible de determinar de antemano, sin embargo, tras un gran número de ellos se observa que se concentran en las zonas donde el cuadrado de la función de onda del haz era máxima, y en las cuales es por tanto mayor la probabilidad de encontrar un electrón en un instante dado.

La difracción de electrones no se produce exclusivamente cuando el haz consta de un gran número de ellos, sino que es un fenómeno individual; cada electrón es difractado por las dos rendijas dado su carácter de onda, sin embargo, cada uno produce un destello en la pantalla manifestando así su carácter de partícula. La función de onda unifica los dos aspectos relacionándolos mediante la interpretación dada en el enunciado inicial y según el cual, *la Naturaleza a escala microscópica no es determinista, es decir, partiendo de unas condiciones iniciales no se puede asegurar en qué forma va a evolucionar un sistema cuántico, solamente se puede afirmar que una cierta situación posterior tiene una probabilidad determinada de producirse.*

### XXVIII – 43. Ecuación de Schrödinger para estados estacionarios

Para obtener la EXPRESIÓN DE LA FUNCIÓN DE ONDA de una partícula se debe resolver la ecuación propuesta por Erwin Schrödinger en 1926. Su forma para estados estacionarios (energía constante, independiente del tiempo) es:

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(x, y, z)] \psi = 0 \quad (30)$$

donde  $E$  es la energía total de la partícula y  $U(x, y, z)$  su energía potencial en un campo de fuerzas.

A las soluciones  $\psi(x, y, z)$  de la ecuación (30) se les imponen unas ciertas condiciones: por un lado  $|\psi|^2 dV$  mide la probabilidad de encontrar la partícula en un punto determinado, y por otro, esta probabilidad no puede variar de un punto a otro a saltos, ni puede tomar dos valores distintos en el mismo punto, ni ser mayor que la unidad. Esto exige que la función de onda sea *continua*, *unívoca* y *finita*, verificando la CONDICIÓN DE NORMALIZACIÓN:

$$\int_V |\psi|^2 dV = 1$$

donde la integral está extendida a todo el espacio.

Cada situación particular tiene su ecuación y su solución correspondientes, diferentes unas de otras por la forma de la energía potencial  $U$ . Así por ejemplo, para una partícula con  $U=0$  (partícula libre) existe solución continua, unívoca y finita cualquiera que sea el valor de  $E$ . Para un electrón en el átomo de hidrógeno, en el que  $U = -K e^2/r$ , solamente se obtienen soluciones con sentido físico para determinados valores de  $E$ , que coinciden precisamente con las energías de los estados estacionarios de la teoría de Bohr. Quiere esto decir que de *la ecuación de Schrödinger y de la condición de normalización se deduce de forma natural la cuantificación de la energía de una partícula no libre.*

La discusión que viene a continuación es una justificación de la ecuación de Schrödinger para hacerla más aceptable al estudiante; no es una deducción porque esta ecuación es en la mecánica ondulatoria una ecuación básica, no deducible de otra más elemental (hace el mismo papel que

las leyes de Newton en la mecánica clásica), su mayor justificación es el acuerdo de sus conclusiones con los resultados experimentales.

Considerando una función de onda unidimensional independiente del tiempo, de la forma:  $\psi(x) = \psi_0 e^{ikx}$ , obtenemos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = i k \psi_0 e^{ikx} \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - k^2 \psi_0 e^{ikx} \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2 \psi = 0$$

Aplicando la relación de De Broglie  $\lambda = h/m v$  se obtiene  $k = 2\pi/\lambda = 2\pi m v/h$ , y siendo la energía de la partícula  $E = U + T = U + m v^2/2$  se deduce:

$$\left. \begin{aligned} m^2 v^2 &= 2m(E - U) \\ k^2 &= m^2 v^2/h^2 \end{aligned} \right| \Rightarrow k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E - U)$$

de donde resulta inmediatamente:  $\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(x)] \psi(x) = 0$  (31)

que es la forma unidimensional de la ecuación (30), aplicable únicamente al cálculo de funciones de onda en situaciones estacionarias.

**PROBLEMAS: 50 al 52.**

#### XXVIII - 44. Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo. Radiación en una transición

Consideremos, en el caso unidimensional, una función de onda armónica no estacionaria, de la forma:

$$\Psi(x, t) = \psi_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

su primera derivada temporal es  $\partial \Psi / \partial t = -i \omega \Psi$ , y por  $2\pi\nu = E/\hbar$ , podemos poner:

$$E \Psi = i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (32)$$

La función  $\Psi(x, t)$  satisface la ecuación (31), como se puede verificar por sustitución, con lo que introduciendo (32) en (31) tenemos:

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ i \hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} - U(x) \Psi(x, t) \right] = 0 \quad (33)$$

que es la forma unidimensional de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo. Sus soluciones son, según se ha dicho, de la forma

$$\Psi(x, t) = \psi(x) e^{-i\omega t} = \psi(x) e^{-iEt/\hbar} \quad (34)$$

donde  $\psi(x)$  es la solución de (31).

Si representamos mediante la función (34) un *electrón en un estado no excitado*, designando este estado con el subíndice 1 y suponiendo por simplificación que  $\psi(x)$  es real, obtenemos para la densidad de probabilidad:

$$|\Psi|^2 = \Psi(x, t) \Psi^*(x, t) = \psi_1^2(x) e^{-iE_1 t/\hbar} e^{iE_1 t/\hbar} = \psi_1^2(x)$$

Puesto que esta densidad de probabilidad está distribuida por la región ocupada por el átomo, podemos pensar que la expresión  $-e |\Psi|^2$  representa la densidad de carga dentro del átomo para unos valores de  $x$  y  $t$  dados. Según esto, la expresión anterior nos indica que la densidad de carga está distribuida como  $\psi_1^2(x)$ , (como  $\psi_1^2(x, y, z)$  en tres dimensiones), pero sin cambiar con el tiempo, es decir, en una forma estacionaria y sin radiar energía.

Ahora bien, cuando el electrón, después de ser excitado a un estado que designaremos con el subíndice 2, se encuentra realizando una transición del estado excitado al fundamental, su función de onda dependiente del tiempo será una combinación ponderada de las de ambos estados, es decir:

$$\Psi(x, t) = A_1 \psi_1(x) e^{-iE_1 t/\hbar} + A_2 \psi_2(x) e^{-iE_2 t/\hbar}$$

donde los coeficientes  $A_1$  y  $A_2$  pueden variar de cero a uno según la influencia de cada estado en la función de onda. En el estado no excitado es  $A_1 = 1$  y  $A_2 = 0$ ; en el estado excitado es  $A_1 = 0$  y  $A_2 = 1$ , pero por ser éste inestable, durante la desexcitación  $A_2$  disminuye y  $A_1$  aumenta. Así, en un instante dado durante la desexcitación, la densidad de probabilidad es:

$$\Psi(x, t) \Psi^*(x, t) = A_1^2 \psi_1^2(x) + A_2^2 \psi_2^2(x) + A_1 A_2 \psi_1(x) \psi_2(x) \left[ e^{iE_1 t/\hbar} e^{-iE_2 t/\hbar} + e^{-iE_1 t/\hbar} e^{iE_2 t/\hbar} \right]$$

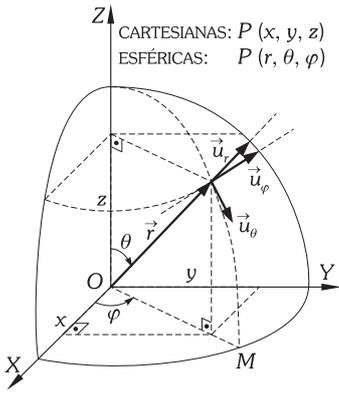


Fig. XXVIII-48.- Coordenadas polares esféricas.

Si hacemos la sustitución  $e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sen \alpha$ , el corchete de la expresión anterior se transforma en:

$$\left( \cos \frac{E_1 t}{\hbar} + i \sen \frac{E_1 t}{\hbar} \right) \left( \cos \frac{E_2 t}{\hbar} - i \sen \frac{E_2 t}{\hbar} \right) + \left( \cos \frac{E_1 t}{\hbar} - i \sen \frac{E_1 t}{\hbar} \right) \left( \cos \frac{E_2 t}{\hbar} + i \sen \frac{E_2 t}{\hbar} \right) = 2 \cos \frac{(E_2 - E_1) t}{\hbar}$$

y en definitiva:  $|\Psi(x, t)|^2 = A_1^2 \psi_1^2(x) + A_2^2 \psi_2^2(x) + 2 A_1 A_2 \psi_1(x) \psi_2(x) \cos \frac{(E_2 - E_1) t}{\hbar}$

Según esta expresión, durante la transición del estado excitado 2 al estado 1, la densidad de probabilidad y, por tanto, la densidad de carga tiene un término que oscila con una frecuencia:

$$\nu = \frac{E_2 - E_1}{\hbar 2\pi} = \frac{E_2 - E_1}{h}$$

esta oscilación de la distribución de la carga produce la radiación de un fotón de la frecuencia citada.

Como se ve, la interpretación cuántica de la radiación es completamente distinta de la hecha en el modelo de Bohr. En este último el electrón saltaba de un nivel a otro interior de menor radio a través de una zona en la que le estaba prohibido existir. En mecánica cuántica, al sustituir al órbita electrónica por una «nube de carga» distribuida con una cierta densidad de carga por todo el átomo, la radiación es consecuencia de la variación de la distribución de carga, y no del movimiento del electrón.

**XXVIII - 45. El átomo de hidrógeno en la mecánica cuántica**

La energía potencial coulombiana del electrón en el átomo de hidrógeno es  $U(r) = -K e^2/r$ , y su ecuación de Schrödinger en un estado estacionario:

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} [E + K e^2/r] \psi = 0$$

La resolución de esta ecuación para obtener la expresión de  $\psi(x, y, z)$ , se hace empleando coordenadas polares  $r, \theta$  y  $\varphi$ . La función de onda puede separarse en producto de tres funciones:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$$

introducida esta expresión en la fórmula (35) escrita en polares, e imponiendo a las funciones la condición de normalización, aparecen las condiciones de cuantificación expresadas a través de tres números cuánticos:  $n, l$  y  $m_l$ . La función de onda para el electrón es distinta para cada terna de valores de los números cuánticos; su dependencia con ellos, a través de  $R, \Theta$  y  $\Phi$ , es de la forma:

$$\psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \varphi) = R_{n,l}(r) \Theta_{l,m_l}(\theta) \Phi_{m_l}(\varphi)$$

función que representa un orbital. En la mecánica cuántica no relativista no aparece el cuarto número cuántico de spin, que lo hace en la teoría relativista al considerar  $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$  en lugar de  $E = p^2/2m$ , y en la que la ecuación de Schrödinger es sustituida por la de Dirac.

Analizamos a continuación los casos más sencillos. Las soluciones de la ecuación de Schrödinger para los orbitales 1s ( $n=1, l=0, m_l=0$ ) y 2s ( $n=2, l=0, m_l=0$ ) son:

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi r_0^3}} e^{-r/r_0} \quad \psi_{200} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi r_0^3}} (2 - r/r_0) e^{-r/2r_0}$$

donde  $r_0$  es el radio de Bohr,  $0,529 \text{ \AA}$ , que aquí no tiene el significado de radio de una órbita sino simplemente de una distancia al núcleo del átomo.

La probabilidad de encontrar al electrón en una corteza esférica de radio  $r$  y espesor  $dr$  es:

$$P(r) = \psi^2 dV = 4\pi r^2 \psi^2 dr$$

y su parte radial se representa gráficamente en la Fig. XXVIII-49 para los orbitales 1s y 2s.

En la primera se observa que la probabilidad es máxima en una corteza alrededor de  $r = r_0$ , lo que no impide que en una medida determinada el electrón sea localizado mucho más lejos del núcleo.

Si representamos mediante puntos las distintas localizaciones del electrón en un gran número de medidas, obtenemos una distribución como la de la Fig. XXVIII-50, en la que la circunferencia es la intersección con el plano del dibujo de una esfera dentro de la que se concentran el 90% de las localizaciones (este porcentaje es arbitrario y se adopta por convenio). Los orbitales s se representan gráficamente mediante tales esferas. En las figuras XXVIII-49 y 50 se observa que al aumentar el número cuántico principal aumenta el tamaño de la zona ocupada por la distribución de

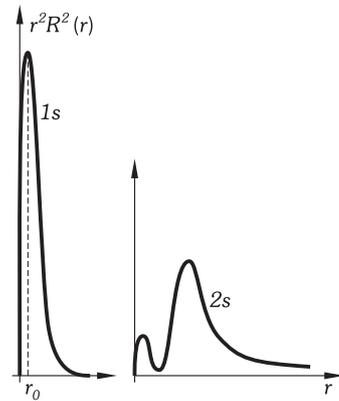


Fig. XXVIII-49.- Densidad de probabilidad en función de la distancia al núcleo para orbitales 1s y 2s del hidrógeno.

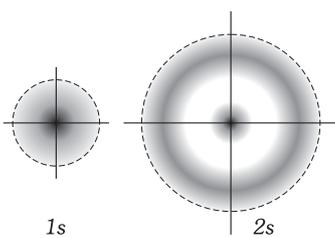


Fig. XXVIII-50.- Distribución de las localizaciones del electrón con energía correspondiente a los orbitales 1s y 2s, en un gran número de medidas.

carga y, por tanto, por tratarse del único electrón del átomo, disminuye la densidad de probabilidad, o lo que es lo mismo, el porcentaje de localizaciones por unidad de volumen.

En la Fig. XXVIII-51 se representan las distribuciones de probabilidad en función de la distancia al núcleo para los orbitales 2p, 3s, 3p y 3d del hidrógeno, y en la Fig. XXVIII-52 la distribución calculada con la parte angular de la función de onda,  $\Theta^2 \Phi^2$  para un valor de r constante.

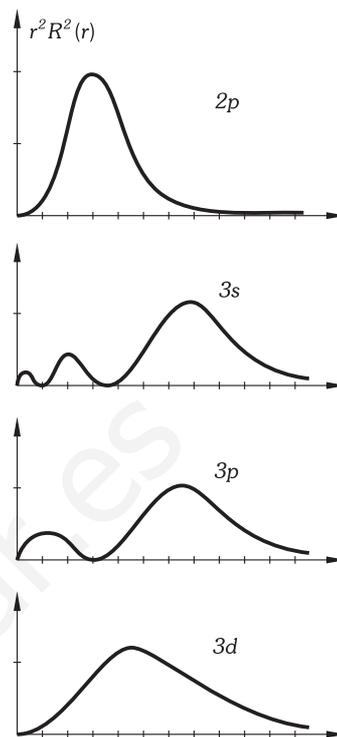


Fig. XXVIII-51.

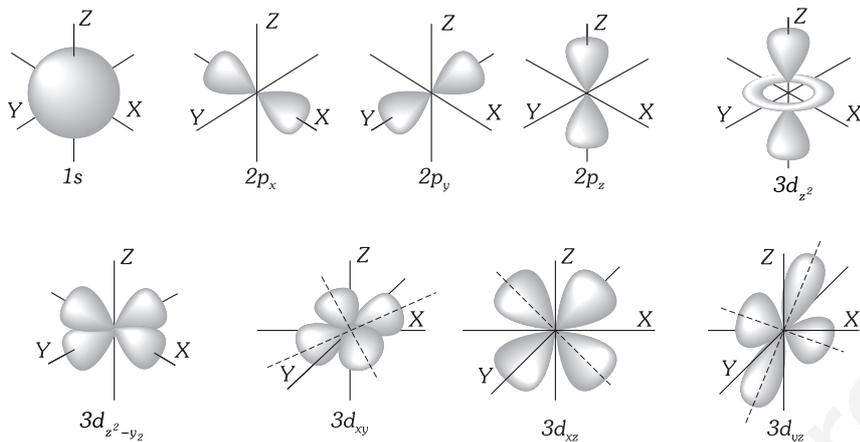


Fig. XXVIII-52.

PROBLEMAS

1. Calcular en julios y electrón-voltios la energía de un fotón de luz amarilla de 5 800 Å de longitud de onda.

2. La potencia mínima capaz de ser percibida por un ojo normal en luz amarilla de 589 nm es de  $3,1 \times 10^{-16}$  W. Calcular el número mínimo de fotones de esta longitud de onda que deben incidir por segundo en la retina para producir la visión.

3. Una estación de radio emite con una potencia de 5 kW y con longitud de onda de 24 m. Calcular: 1) El número de fotones que emite cada segundo. 2) La frecuencia a la que se debe sintonizar el receptor para captarla.

4. Las moléculas de yodo gaseoso se pueden disociar con fotones de longitud de onda máxima de 4 995 Å. Calcular la energía mínima requerida para disociar un mol de I<sub>2</sub> gas.

5. Una sustancia fluorescente tiene su máxima absorción a 4 500 Å y su máxima emisión a 5 000 Å. El número de cuantos emitidos por fluorescencia es el 53 % de los absorbidos. Calcular el porcentaje de la energía absorbida que se vuelve a emitir.

6. Al incidir sobre un metal una radiación de  $\lambda = 200$  nm, los fotoelectrones son emitidos con una velocidad máxima de  $10^6$  m/s. Calcular: 1) La energía mínima necesaria para arrancar un electrón del metal. 2) La frecuencia umbral.

7. Sobre la superficie de un metal cuya frecuencia umbral es de  $7 \times 10^{14}$  Hz, incide una radiación de  $1,4 \times 10^{15}$  Hz. Calcular la velocidad máxima de los electrones emitidos.

8. En una célula fotoeléctrica con cátodo de wolframio, los electrones poseen una energía cinética de  $8 \times 10^{-19}$  J cuando son arrancadas por luz de 1 250 Å. Calcular la máxima longitud de onda de luz que puede hacer funcionar la célula.

9. El cesio, que posee la menor energía de ionización de todos los elementos, emite electrones para una longitud de onda máxima de 579 nm. Calcular la energía cinética de los fotoelectrones emitidos si se le ilumina con luz verde de 500 nm.

10. Calcular la frecuencia umbral para el sodio sabiendo que una radiación de 400 nm le arranca fotoelectrones de energía cinética igual a  $5,52 \times 10^{-20}$  J.

11. La frecuencia umbral para la emisión de fotoelectrones por parte del wolframio es de  $1,19 \times 10^{15}$  Hz. Calcular la longitud de onda

que se necesitará emplear si se pretende que los electrones sean emitidos con energía cinética igual a dos veces la que poseen los arrancados con  $\lambda = 2 000$  Å.

12. Dibujar un gráfico en el que se relacionen las longitudes de onda de las radiaciones que inciden sobre una lámina de aluminio y las velocidades de los fotoelectrones. Realizar los cálculos para longitudes de onda de 3 000 Å, 2 900 Å (longitud de onda «crítica»), 2 500 Å, 2 000 Å y 1 500 Å.

13. Calcular el trabajo de extracción de un metal del que se observa que la velocidad máxima de los fotoelectrones cuando se ilumina con 410 nm de longitud de onda, es el doble que cuando la radiación incidente es de 500 nm.

14. Se ilumina la placa de una célula fotoeléctrica con luz azul de  $\lambda = 460$  nm, y el colector se pone a un potencial negativo, respecto de la placa, que puede variarse a voluntad. En el circuito exterior se mide la intensidad de la corriente, y se observa una disminución brusca, hasta hacerse prácticamente nula, cuando el potencial del colector es de -550 mV. Calcular el trabajo de extracción del metal de la placa, expresado en electrón-voltios.

15. La placa de una célula fotoeléctrica tiene un trabajo de extracción de 2,9 eV. Si se ilumina con una potencia luminosa constante de  $10^{-2}$  W, y suponiendo un rendimiento cuántico del 100 % (un electrón emitido por cada fotón incidente): 1) Dibujar la gráfica de la intensidad de corriente en la célula en función de la longitud de onda incidente. 2) Al iluminar con  $\lambda = 400$  nm la intensidad resultante ha sido de 25  $\mu$ A, calcular el rendimiento cuántico en este caso.

16. Demostrar que cuando un fotón incide sobre un electrón libre se verifica el efecto Compton, es decir, que siempre existe un fotón dispersado y que nunca el fotón es totalmente absorbido.

17. Un fotón de  $10^{20}$  Hz de frecuencia es dispersado bajo un ángulo de 60° por un electrón libre en reposo. Calcular: 1) La frecuencia del fotón dispersado. 2) La energía cinética final del electrón.

18. En la dispersión de un fotón por un electrón libre en reposo, obtener la expresión de la energía del fotón incidente en función del ángulo  $\theta$  de dispersión del fotón y de la energía cinética final T del electrón. Aplicación numérica:  $\theta = 60^\circ$ ,  $T = 0,1$  MeV.

19. Un haz de fotones monocromáticos es dispersado por electrones libres. Se mide la energía cinética de los electrones y se obtiene que el valor máximo es de 20 keV. Con estos datos, y empleando el resultado del problema anterior, calcular la frecuencia del haz incidente.

20. Con el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, calcular: 1) La velocidad del electrón en cada órbita. 2) La intensidad de corriente que supone su movimiento. 3) La energía necesaria para ionizar un átomo excitado con el electrón en el nivel  $n = 5$ . 4) La frecuencia mínima necesaria para esa ionización.

21. Se tiene un átomo de hidrógeno con el electrón en el primer nivel excitado ( $n = 2$ ). El electrón absorbe la energía de un fotón y es liberado del átomo con una energía cinética de 10 eV. Calcular la frecuencia del fotón.

22. El electrón del ión  $\text{He}^+$  pasa de un estado excitado de número cuántico  $n$  al estado fundamental, emitiendo sucesivamente dos fotones de longitudes de onda 320,7 nm y 25,7 nm. Calcular el número  $n$ .

23. Llamamos  $m = 9,11 \times 10^{-31}$  kg a la masa del electrón,  $1\ 800\ m$  a la del núcleo de hidrógeno y  $3\ 600\ m$  a la del núcleo de deuterio. Teniendo en cuenta la diferencia de las masas reducidas de estos dos últimos, calcular la diferencia existente en sus energías de ionización desde el estado fundamental.

24. Basándose en los postulados de Bohr, calcular los radios de las órbitas y la energía en cada órbita, de una partícula de masa  $m$  que describe órbitas circulares con una energía potencial del tipo  $U = kr^2/2$ .

25. Calcular la frecuencia y la longitud de onda de la quinta línea de la serie de Balmer.

26. Una de las líneas de la serie de Balmer tiene una longitud de onda de 379,8 nm. Calcular el número de orden de la línea en la serie.

27. Obtener los valores límites de la frecuencia reducida  $\bar{\nu}$  para la serie de Lyman del espectro del hidrógeno, y compararlos con los experimentales, que son  $109\ 678\ \text{cm}^{-1}$  y  $82\ 529\ \text{cm}^{-1}$ .

28. En un ión hidrogenoide la longitud de onda de la segunda línea de la serie de Balmer es de 54,1 nm. Deducir de qué ión se trata y obtener la energía del electrón en el estado fundamental.

29. Calcular en qué ión hidrogenoide la diferencia entre las longitudes de onda mayores de las series de Lyman y Balmer es de 33,5 nm.

30. Indicar cuáles de las siguientes ternas de valores de los números cuánticos,  $n, l, m_l$ , no son permitidas, y por qué: 1) 2, 1, 0. 2) 2, 2, 0. 3) 2, 1, -1. 4) 2, 1, 2. 5) 3, -1, 1.

31. Escribir la estructura electrónica del bromo (Br), sabiendo que su número atómico es  $Z = 35$ .

32. Clasificar las siguientes configuraciones electrónicas como correspondientes a átomos en estado fundamental, a átomos en estado excitado o en incorrecta. ¿De qué elemento se trata en cada caso? 1)  $1s^2 2s$ . 2)  $1s^2 2s^2 2d$ . 3)  $1s^2 2s 2p^2$ . 4)  $1s^2 2s^2 2p^4 3s$ . 5)  $1s^2 2s^4 2p^2$ . 6)  $1s^2 2s^2 2p^6 3d$ .

33. Escribir los números cuánticos que caracterizan a los electrones desapareados del potasio (K) y del cloro (Cl).

34. ¿Cuáles de entre los 20 primeros elementos tienen dos electrones desapareados en su estado fundamental?

35. Escribir los números cuánticos de los electrones del átomo de nitrógeno en estado fundamental.

36. Suponiendo que el número cuántico de spin pudiera tomar tres valores distintos,  $a, b$  y  $c$ , sin que se modificase el orden de llenado de los subniveles, calcular: 1) El número de electrones posibles en un subnivel  $s$  y en uno  $p$ . 2) El número de electrones con  $n = 1$  y con  $n = 2$ . 3) ¿Cuál sería la configuración electrónica de un átomo de  $Z = 12$ ?, ¿y del de  $Z = 16$ ?

37. Un electrón es acelerado en un tubo de rayos X por una diferencia de potencial de  $5 \times 10^3$  V antes de chocar con el anticátodo. Calcular: 1) La velocidad con que el electrón alcanza el anticátodo. 2) La longitud de onda de la radiación X producida al anularse la energía cinética del electrón.

38. La longitud de onda de los rayos X varía aproximadamente entre 1 y 10 Å. La energía del enlace C-C es de unos 350 kJ/mol. Razonar si los rayos X son capaces de romper los enlaces C-C.

39. Se difracta sobre un cristal de calcita la radiación X del molibdeno de longitud de onda 0,71 Å, observándose que el menor ángulo

de inclinación para el que existe reflexión es de  $6,73^\circ$ . Calcular la distancia entre los planos reticulares del cristal.

40. La distancia entre planos de iones en la red cristalina del cloruro de sodio es de 2,82 Å. Calcular el ángulo de inclinación con que ha de incidir un haz de rayos X, de 1,5 Å de longitud de onda, para que se produzca: 1) Reflexión de primer orden. 2) Reflexión de segundo orden.

41. Se mide el coeficiente de absorción cuando un haz monocromático de rayos X atraviesa una lámina de plata, y se obtiene un valor de  $400\ \text{cm}^{-1}$ . Calcular la probabilidad de que un fotón X del citado haz sea absorbido al atravesar un átomo de plata. Datos sobre la plata:  $\rho = 10,50\ \text{g/cm}^3$ ; radio atómico = 1,44 Å; masa molar = 107,868 g/mol.

42. Calcular la longitud de onda de la onda asociada a: 1) Un hombre de 80 kg corriendo a 10 m/s. 2) Una bala de 10 g a la velocidad de 150 m/s. 3) Un protón ( $m = 1,67 \times 10^{-27}$  kg) con velocidad de  $c/2$ . 4) Un electrón con velocidad  $c/3$ . 5) ¿Qué se puede decir sobre las propiedades ondulatorias en los casos 1 y 2?

43. Calcular la longitud de onda de De Broglie para una partícula no relativista de masa  $m$  y energía cinética  $T$ . Aplicarlo a un protón ( $m = 1,67 \times 10^{-27}$  kg) y a una partícula  $\alpha$  ( $m = 6,65 \times 10^{-27}$  kg) con energías cinéticas de 100 eV.

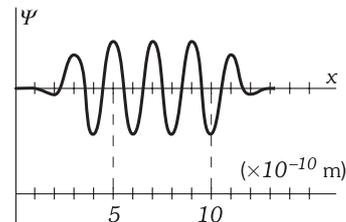
44. Un electrón acelera, partiendo del reposo, en una diferencia de potencial de 100 V. Calcular la longitud de onda asociada al electrón una vez acelerado. ¿Es necesario introducir la expresión relativista de la masa?

45. Obtener la expresión de la energía de un fotón de frecuencia  $\nu$ , partiendo de la relación de De Broglie.

46. 1) Aceleramos un electrón hasta que adquiere una velocidad de 300 m/s, medida con una precisión del 0,01 %. ¿Con qué precisión se puede localizar la posición de este electrón? 2) Lo mismo para una bola de 100 g de masa que se mueve a 30 m/s. Si hemos medido su velocidad con una exactitud del 0,1 %

47. Determinamos la posición de un electrón con una imprecisión de 1 Å. ¿Cuál es la imprecisión en la medida de su cantidad de movimiento, de su velocidad y de su energía cinética?

48. La amplitud de la onda asociada a un electrón no relativista es la de la figura. Calcular: 1) La cantidad de movimiento del electrón. 2) u energía cinética. 3) La incertidumbre en su posición. 4) La incertidumbre en su cantidad de movimiento.



Problema XXVIII-48.

49. Se observa un electrón libre localizado en una zona  $\Delta x = 10^{-10}$  m. ¿Cuál será la indeterminación en su posición al cabo de un segundo?

50. Obtener las funciones de onda solución de la ecuación de Schrödinger para una partícula que se mueve libremente en la dirección X. ¿Aparece alguna restricción a los valores de la energía de la partícula?

51. En un «pozo de potencial» unidimensional de paredes infinitas y anchura  $a$ , la energía potencial de una partícula es  $U = \infty$  para  $0 \geq x \geq a$  y  $U = 0$  para  $0 < x < a$ . Solucionando la ecuación de Schrödinger, obtener: 1) Los valores posibles de la energía cinética de la partícula confinada en el pozo de potencial. 2) La función de onda asociada a la partícula con una energía determinada.

52. Una partícula está confinada en una «caja de potencial» de lados  $a, b, c$ . El potencial fuera de la caja es infinito y la energía potencial de la partícula en el interior es nula. 1) Obtener los valores posibles de la energía cinética de la partícula. 2) Obtener la función de onda correspondiente a cada energía. 3) Particularizar al caso  $a = b = c$  y demostrar que en este caso existen niveles de energía degenerados.

# CAPÍTULO XXIX

## ELECTRÓNICA

### A) TEORÍA DE BANDAS

#### XXIX – 1. Introducción a la teoría de bandas en sólidos

Se ha visto en capítulos anteriores cómo el estudio de la corriente eléctrica fue realizado experimentalmente en la primera mitad del siglo XIX, principalmente por Ohm (1826) y Joule (1841), que relacionaron macroscópicamente la diferencia de potencial, la intensidad en un conductor y la potencia disipada por el paso de corriente. Al descubrirse posteriormente (1897) el electrón, se explicó la conducción a partir del comportamiento de éste en el interior del material a base de modelos teóricos cada vez más complejos. Los actuales modelos de conducción electrónica se fundan en la aplicación de la Mecánica Cuántica, y en particular, en el hecho de que los electrones en un átomo pueden poseer una serie discreta de *niveles de energía* separados por valores de la energía prohibidos al electrón. La estructura de los niveles ocupados es tanto más compleja cuanto mayor es el número de electrones del átomo neutro, pero es la misma para átomos aislados del mismo elemento en su estado fundamental.

Supongamos que tenemos dos átomos iguales, muy alejados, y consideremos el mismo nivel energético en cada átomo. En el sistema formado por ambos hay entonces en cada nivel electrones con la misma energía, es decir, los niveles son degenerados. Si aproximamos entre sí ambos átomos, su interacción mutua hace que un nivel degenerado se separe en otros dos de distinta energía, de tal forma que esta separación aumenta conforme disminuye la distancia interatómica (Fig. XXIX-1).

Consideremos ahora que tenemos  $N$  átomos del mismo elemento, muy separados, y que con ellos vamos a formar una red cristalina, consistente en una disposición tridimensional de los átomos con una repetición periódica de una *celdilla unidad*, cuya estructura determina el sistema cristalográfico característico del material (cúbico, cúbico centrado en las caras, hexagonal,...). El número de átomos que deberemos juntar será del orden de  $10^{22}$  en cada centímetro cúbico. Si suponemos los  $N$  átomos dispuestos como lo estarán en el cristal pero muy separados, sin interaccionar, los niveles de energía permitidos son los niveles atómicos y, considerados todos los átomos como un conjunto, en cada nivel hay  $N$  electrones con la misma energía. Al disminuir la distancia  $d$  entre átomos (Fig. XXIX-2), su interacción hace que cada nivel se separe en  $N$  niveles distribuidos en un intervalo de energía relativamente estrecho, con lo que, por ser  $N$  muy grande, podemos considerar que los  $N$  niveles forman una distribución casi continua, que llamaremos **BANDA DE ENERGÍA**.

Para los niveles más internos de cada átomo la perturbación producida por los demás átomos es muy pequeña, comparada con la interacción con el núcleo, y la separación de esos niveles será pequeña; para los electrones exteriores, llamados de valencia por ser los responsables de los enlaces entre átomos y los que intervienen en las reacciones químicas, la separación será grande y de hecho las bandas pueden solaparse, como ocurre a la distancia  $d_3$  de la Fig. XXIX-2. La anchura de las bandas es, por consiguiente, tanto mayor cuanto mayor es la energía de los niveles de que provienen.

Cuando la separación de los átomos en el cristal es como las  $d_1$  o  $d_2$  de la Fig. XXIX-2, las **BANDAS DE ENERGÍA PERMITIDA** representadas están separadas por una **BANDA PROHIBIDA** que, en cristales puros y sin imperfecciones, no contienen ningún nivel permitido a los electrones.

#### XXIX – 2. Bandas de conducción y de valencia

El comportamiento de las bandas de energía permitida respecto de la conducción depende de que estén total o parcialmente ocupadas por electrones.

Consideremos un nivel atómico ocupado por los dos electrones que permite el principio de exclusión de Pauli; en el cristal completo de  $N$  átomos hay por tanto  $2N$  electrones que, en el cristal ya formado, llenan completamente la banda correspondiente. Para contribuir a la conducción un electrón debe desligarse de su átomo y acelerarse al recibir energía de un campo eléctrico o bien, en términos mecano-cuánticos, debe ser excitado a un nivel de mayor energía. Si nos limitamos a su propia banda y todos los niveles están ocupados en ella, la excitación (o aceleración) del electrón no puede ocurrir y, por tanto:

*Una banda completamente llena no contribuye a la conducción.*

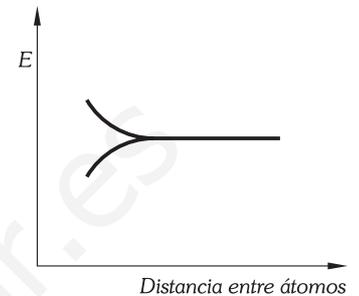


Fig. XXIX-1.- La interacción entre dos átomos iguales produce el desdoblamiento de un mismo nivel en dos niveles de energía distinta.

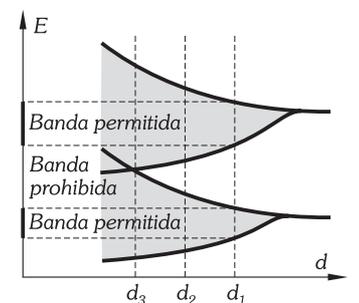


Fig. XXIX-2.- Bandas de energía en un cristal como función de la distancia entre átomos. Las marcadas en el eje corresponden a separación  $d_1$ .

Los electrones sólo pueden desplazarse si hay niveles próximos vacíos. Según esto:

*Se denomina BANDA DE CONDUCCIÓN a la banda de energía más baja que no está completamente llena; a la inmediatamente inferior se le llama BANDA DE VALENCIA.*

Estas definiciones se refieren a la situación que se daría si el cristal estuviera a cero grados kelvin de temperatura ya que, como comentaremos más adelante, un incremento de temperatura puede promocionar electrones de una banda a otra superior.

Es evidente que por encima de la banda de conducción podemos considerar otras bandas correspondientes a estados excitados de los átomos, y que a cero grados kelvin estarían vacías.

### XXIX – 3. Conductores, semiconductores y aislantes

La distinción entre aislantes (o dieléctricos), semiconductores y conductores aparece de forma natural en la teoría de bandas. En efecto, consideremos un cristal en el que la separación entre átomos corresponde a  $d_1$  de la Fig. XXIX-2, las bandas de valencia y de conducción están separadas por una amplia banda prohibida, situación que se representa en la Fig. XXIX-3a; es el caso de los materiales denominados AISLANTES. *En un aislante ideal todos los niveles de la banda de valencia están ocupados, la banda está llena y no contribuye a la conducción, y la banda de conducción está vacía.* En el aislante ideal la intensidad de corriente es nula para cualquier tensión aplicada; sin embargo, si algunos electrones reciben energía suficiente para pasar a la banda de conducción deja de comportarse como ideal, aunque las intensidades de corriente que se pueden producir suelen ser extremadamente pequeñas.

Cuando la distancia entre átomos en la red cristalina es como la  $d_2$  de la Fig. XXIX-2, la posición relativa de las bandas es la representada en la Fig. XXIX-3b, en la que la banda prohibida tiene una anchura pequeña, del orden de un electrón-voltio ( $1,602 \times 10^{-19}$  J); se trata de los SEMICONDUCTORES, como el germanio y el silicio. A la temperatura de cero grados kelvin todos los electrones ocupan niveles por debajo de uno dado, denominado NIVEL DE FERMI, que en los semiconductores puros y sin imperfecciones en la red cristalina se encuentra en el centro de la banda prohibida; a cero grados kelvin la banda de valencia está completa y la de conducción vacía, con lo que a esa temperatura el material se comporta como un aislante, pero, por ser pequeña la anchura de la banda prohibida, conforme aumenta la temperatura cada vez más electrones adquieren la energía suficiente para superarla, gracias a las vibraciones térmicas de la red, y el material aumenta su conductividad, al revés de lo que ocurre en los metales; en definitiva, el coeficiente de variación de la resistencia con la temperatura es negativo en los semiconductores. Los electrones que son promocionados a la banda de conducción dejan en la de valencia huecos que también contribuyen al proceso de conducción, como se comentará en la cuestión XXIX-6.

Una tercera situación, la de los CONDUCTORES, se presenta cuando el espaciado de la red es como el  $d_3$  de la Fig. XXIX-2, en cuyo caso las bandas se solapan y la prohibida desaparece (Fig. XXIX-3c). Esta situación se da en los metales, en los que por penetrar la banda de valencia en la de conducción, ésta posee electrones y niveles desocupados. Los electrones de conducción pueden moverse bajo la influencia de un campo eléctrico establecido en el metal.

### XXIX – 4. Conductores metálicos. Electrones libres

En un cristal perfecto de un elemento metálico los electrones de conducción están sometidos por parte de los átomos de la red a fuerzas que se compensan, pudiéndoseles considerar como libres de los campos internos atómicos. Cada átomo contribuye con uno o más electrones de conducción que constituyen lo que se denomina una NUBE DE ELECTRONES LIBRES. Un electrón de conducción se mueve al azar en el interior del metal sin experimentar ninguna fuerza, a no ser que se aplique una diferencia de potencial entre dos puntos del material.

Existen algunos hechos que avalan la existencia de electrones libres en el conductor. Por un lado, el que la ley de Ohm se verifique incluso para tensiones muy bajas indica que no hay que superar ninguna fuerza de ligadura de los electrones de conducción a sus átomos originales. Por otro lado, en determinadas circunstancias que se comentarán en las cuestiones XXIX-5 y XXIX-8, el metal puede emitir electrones sin alteración de sus átomos, e incluso, conectado a un circuito, puede trasvasar muchos más de los que posee, lo que sugiere que éstos pasan libremente del circuito exterior al metal. A pesar de esa libertad, es un hecho fácilmente comprobable que en un trozo de metal cargado positivamente, los electrones no escapan espontáneamente del material; todo ello significa que se encuentran obligados a permanecer dentro del metal, fluyendo libremente por su interior pero retenidos por una BARRERA DE POTENCIAL existente en la superficie.

Para investigar la naturaleza de la barrera de potencial consideremos en primer lugar la interacción de un electrón, de carga  $-e$ , con el resto del átomo, de carga  $+e$ . La energía potencial del electrón en función de la distancia viene dada por:

$$U = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r}$$

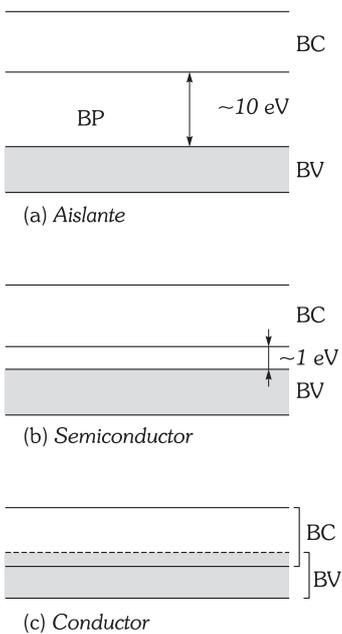


Fig. XXIX-3.- Bandas de conducción (BC), de valencia (BV) y prohibida (BP).

que es negativa y se anula solamente para  $r$  igual a infinito; según esto, el electrón se encuentra en un pozo de energía potencial como el de la Fig. XXIX-4, en la que se representan también los niveles de energía permitidos al electrón. Si queremos separarlo del átomo deberemos comunicarle energía suficiente para que alcance  $U = 0$ .

Si consideramos ahora una dirección que atraviesa una línea de átomos en el cristal y sumamos las energías potenciales del electrón con cada átomo, obtenemos una gráfica como la de la Fig. XXIX-5, en la que los niveles de energía se han desdoblado en bandas. Para escapar del metal, el electrón al llegar a la superficie tiene que salvar la barrera de energía potencial, o de potencial ( $V = U/q$ ), representada.

El potencial que producen los átomos de la línea de la figura tiene la misma forma que la energía potencial dibujada, y verifica el hecho particular de ser periódico con la misma periodicidad que la red cristalina. El estudio mecanocuántico del movimiento de un electrón en un potencial periódico conduce a una conclusión importante: *en una red periódica un electrón puede moverse libremente sin ser dispersado por los átomos individuales de la red sino solamente por imperfecciones*; tales imperfecciones pueden ser dislocaciones, falta de algún átomo, presencia de átomos intersticiales, etc. La consecuencia es que el electrón podrá moverse totalmente libre en un cristal perfecto y, en cualquier caso, recorrerá una distancia mucho mayor que la que hay entre dos átomos, antes de ser frenado o desviado en una colisión.

Una muestra corriente de material no es un cristal perfecto sino que está formada por un conglomerado de pequeños cristales que dificulta la libre circulación de electrones; otra dificultad añadida se debe a la agitación térmica de los átomos, que naturalmente aumenta con la temperatura, por lo que *en los metales el coeficiente de variación de la resistencia con la temperatura es positivo*.

**XXIX - 5. Emisión de electrones por un metal**

Para conseguir que un metal emita electrones hay que comunicarle a éstos energía para que superen la barrera de potencial superficial; la forma de comunicarle esa energía da nombre a los distintos tipos de emisión.

Antes de analizar esos tipos debemos saber cómo se distribuyen los electrones en la banda de conducción del metal; la forma en que lo hacen se conoce como DISTRIBUCIÓN DE FERMI-DIRAC, que proporciona el número de electrones en esa banda en función de la energía (Fig. XXIX-6). A la temperatura de cero grados kelvin este número aumenta desde el fondo de la banda de conducción hasta el nivel de Fermi, en el que se anula bruscamente. A temperaturas mayores existen electrones con energías superiores al nivel de Fermi, y para temperatura ambiente la curva tiene el aspecto de la dibujada con trazo discontinuo en la figura.

En el cero absoluto la energía requerida para elevar un electrón desde el nivel de Fermi hasta el de energía potencial nula es:

$$E_w = E_B - E_F$$

donde cada energía tiene el significado representado en la figura.  $E_w$  se denomina *trabajo de extracción* y es igual a la carga del electrón por un potencial llamado POTENCIAL DE EXTRACCIÓN:

$$E_w = e V_w$$

Para temperaturas superiores a cero grados kelvin el trabajo de extracción es menor que  $E_B - E_F$  debido a la existencia de electrones por encima del nivel de Fermi.

Los mecanismos principales de comunicar energía al electrón son la ya mencionada elevación de la temperatura, la iluminación del metal y el bombardeo con iones o con electrones, y producen los llamados efectos termoiónico, fotoeléctrico y de emisión secundaria. Además, la aplicación de un campo eléctrico produce los efectos Schottky y de emisión de campo.

El EFECTO TERMOIÓNICO o de emisión de electrones por calentamiento del metal, se comenta en la cuestión XXIX-8 como introducción al estudio de las válvulas electrónicas.

El EFECTO FOTOELÉCTRICO, ya estudiado en el capítulo XXVIII, es, en resumen, la *emisión producida al absorber los electrones la energía de la radiación electromagnética*. Se observa que los metales y sus óxido y aleaciones, son capaces de liberar electrones cuando son iluminados con radiación electromagnética de frecuencia superior a una determinada, característica de cada material. Algunos de ellos, como los alcalinos, lo hacen con luz visible, y en todos el número de electrones emitidos en la unidad de tiempo es función de la intensidad de la radiación incidente.

En la EMISIÓN SECUNDARIA *los electrones del metal absorben energía de los iones o de los electrones con que se bombardea éste*.

Los electrones que han abandonado el material pueden quedar en una zona próxima a la superficie, denominada REGIÓN DE CARGA ESPACIAL, y dificultar la salida de nuevos electrones. Si el efecto que se busca es la emisión, conviene alejarlos de la superficie del metal, lo que se consigue con la aplicación de un campo eléctrico, cuya existencia produce dos nuevos efectos que se superponen a los anteriores.

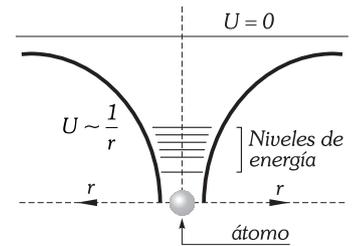


Fig. XXIX-4.- Pozo de energía potencial de un electrón en el átomo.

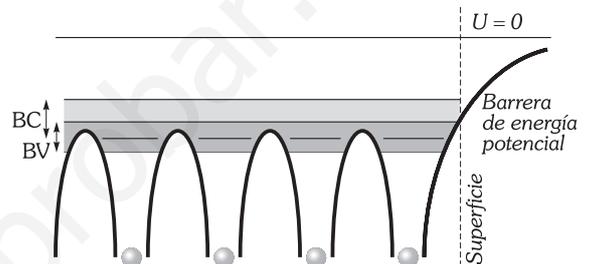


Fig. XXIX-5.- Energía potencial (y potencial) en una dirección que atraviesa una línea de átomos en el cristal.

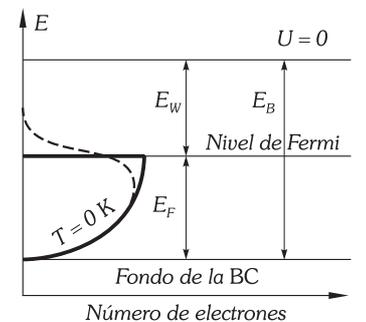


Fig. XXIX-6.- Distribución del número de electrones en la banda de conducción de un metal en función de la energía, a 0 K y a temperatura ambiente (línea discontinua).

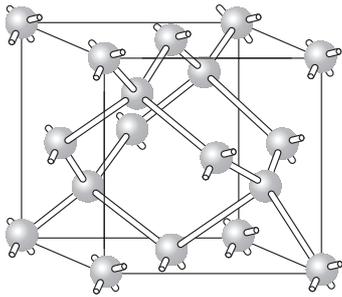


Fig. XXIX-7.- Cubo unidad del silicio y del germanio.

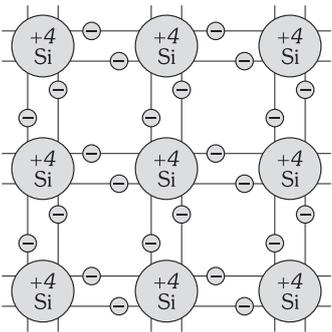


Fig. XXIX-8.- Modelo bidimensional de los enlaces en un cristal puro de silicio a  $T = 0$  K.

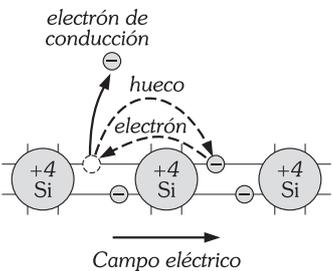


Fig. XXIX-9.- La vacante dejada al romperse un enlace puede ser ocupada por un electrón de valencia. El efecto es el de un hueco con carga positiva moviéndose en el sentido del campo aplicado.

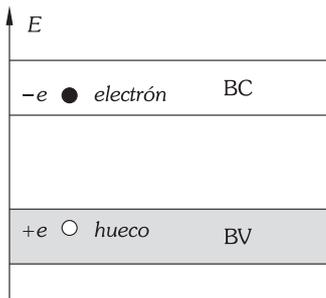


Fig. XXIX-10.- Un electrón que, absorbiendo energía, pasa a la banda de conducción origina un hueco en la de valencia.

El EFECTO SCHOTTKY es la disminución de la barrera de potencial del metal debida a la presencia del campo recolector de los electrones emitidos, y tiene como consecuencia el reforzamiento del efecto emisor original. La disminución de la barrera es aproximadamente proporcional a la raíz cuadrada de la intensidad del campo en la superficie.

La EMISIÓN DE CAMPO o EMISIÓN EN FRÍO, se produce por la aplicación de campos eléctricos muy intensos, del orden de  $10^7$  V/m, incluso con el metal sin calentar ni iluminar. Esta emisión es independiente de la temperatura y se debe a un efecto túnel a través de la barrera de potencial.

**XXIX – 6. Semiconductores intrínsecos**

Los elementos semiconductores por excelencia son el silicio y el germanio, aunque existen otros elementos como el estaño, y compuestos, como el arseniuro de galio o el sulfuro de plomo (II) entre otros muchos, que se comportan como tales. Tanto el germanio como el silicio poseen cuatro electrones de valencia que forman parte de los enlaces covalentes que mantienen unidos a los átomos. La estructura cristalina de ambos elementos se puede generar por repetición de la celda unidad de la Fig. XXIX-7, en la que las barras entre átomos indican la localización de los electrones que forman los enlaces.

Resulta más cómodo para nuestros propósitos representar la red cristalina mediante el modelo bidimensional de la Fig. XXIX-8. En ella se refleja cómo cada átomo de silicio se encuentra rodeado de cuatro vecinos próximos con los que comparte sus cuatro electrones de valencia. Si la temperatura es de cero grados Kelvin, todos estos electrones hacen su papel de enlace y tienen energías correspondientes a la banda de valencia, que está completa mientras que la de conducción permanece vacía; a esta temperatura un semiconductor es un aislante perfecto. Ahora bien, si se aumenta la temperatura aumenta la energía cinética de vibración de los átomos de la red y algunos electrones de valencia pueden absorber de los átomos vecinos la energía suficiente para liberarse del enlace y moverse a través del cristal como electrones libres; su energía pertenece en este caso a la banda de conducción. Cuanto más elevada sea la temperatura, mayor será el número de electrones de conducción, pero ya a temperatura ambiente ese número es el suficiente como para poder decir que el semiconductor conduce la corriente eléctrica.

Como se aprecia en la Fig. XXIX-9, un electrón de valencia que se ha convertido en electrón de conducción, deja una vacante, de forma que, si se aplica un campo eléctrico al semiconductor, ésta puede ser ocupada por otro electrón de valencia que deja, a su vez, una nueva vacante en la región donde estaba. El efecto es el de una carga  $+e$  moviéndose en la dirección del campo eléctrico.

Se interpreta este hecho diciendo que: *el paso de un electrón a la banda de conducción produce un HUECO en la banda de valencia, al que se considera como un portador de carga positiva que contribuye a la conducción* (Fig. XXIX-10).

El concepto de hueco como partícula cargada es un artificio que permite describir de forma sencilla el complejo movimiento de los electrones de valencia en una capa incompleta.

Paralelamente al proceso descrito de *generación térmica de pares electrón-hueco* se da el de *recombinación*; algunos electrones de la banda de conducción pueden perder energía, emitiéndola en forma de fotones por ejemplo, y pasar a la de valencia ocupando un nivel energético que estaba libre, o sea, recombinándose con un hueco. Si la temperatura permanece constante se tendrá un equilibrio entre los procesos de generación y recombinación de pares, con el mismo número medio de electrones en la banda de conducción que el de huecos en la de valencia.

A un semiconductor puro, como el que estamos describiendo, se le llama SEMICONDUCTOR INTRÍNSECO, y al fenómeno de la conducción asociada a la formación de pares en él, CONDUCCIÓN INTRÍNSECA.

Designando por  $p$  y  $n$  a las concentraciones de huecos y electrones, respectivamente, se verifica:

$$p = n = n_i$$

donde  $n_i$  se llama CONCENTRACIÓN DE PORTADORES INTRÍNSECOS.

**XXIX – 7. Semiconductores extrínsecos.**

En los semiconductores se añaden impurezas deliberadamente durante el proceso de fabricación, consistentes en átomos distintos a los del elemento base (silicio o germanio). La presencia de estas impurezas, a pesar de constituir un porcentaje muy bajo del número total de átomos, afectan drásticamente a la conductividad del material y a la dependencia de ésta con la temperatura; por ejemplo, la inclusión de un átomo de arsénico por cada  $10^5$  de germanio aumenta la conductividad en un factor de  $10^4$  a temperatura ambiente.

Durante la formación del cristal a partir del elemento fundido se añaden como impurezas elementos del quinto grupo del sistema periódico (fósforo, arsénico, antimonio o bismuto) o del tercer grupo (boro, aluminio, indio o galio); estos átomos se intercalan en la red cristalina distorsionándola ligeramente en sus proximidades. Según sean de uno u otro grupo las impurezas añadidas, dan lugar a los *semiconductores extrínsecos tipo N o tipo P*.

En los SEMICONDUCTORES N cada átomo de elemento del grupo V emplea cuatro de sus cinco electrones de valencia en los enlaces covalentes con sus vecinos, pero el quinto no interviene en

esos enlaces (Fig. XXIX-11). Por otra parte, el nivel de energía del estado fundamental de este electrón se encuentra por debajo de la banda de conducción y muy próximo a ella, de forma que a cero grados kelvin el electrón se encontrará ligado a su átomo, pero al aumentar la temperatura pasará fácilmente a la banda de conducción, posibilitando así la conducción eléctrica, sin que se hayan formado pares electrón-hueco, ya que no se ha roto ningún enlace. A estas impurezas que ceden electrones se les denomina IMPUREZAS DONADORAS, y a los niveles de energía que introducen, NIVELES DONADORES (Fig. XXIX-13).

Si se aumenta lo suficiente la temperatura empezarán a romperse enlaces y a formarse, por tanto, pares electrón-hueco. Ahora la conducción se verificará mediante ambos tipos de portadores de carga, pero la concentración de electrones de conducción en el semiconductor *N* será mayor que la de huecos; los electrones son los portadores mayoritarios y los huecos los minoritarios. Puesto que las impurezas están presentes en cantidades siempre muy pequeñas, a temperaturas elevadas el número de pares de portadores formados puede llegar a ser mucho mayor que el número de átomos de impurezas y el semiconductor se comportará como intrínseco.

En los SEMICONDUCTORES *P* las impurezas son átomos con tres electrones de valencia que al intercarse en la red cristalina dejan un enlace por átomo sin completar (Fig. XXIX-12). Esto da como resultado la aparición de niveles energéticos próximos a la banda de valencia, que se denominan NIVELES ACEPTORES (Fig. XXIX-13).

A cero grados kelvin estos niveles están vacíos, pero un aumento de temperatura provocará la promoción hasta ellos de electrones de la banda de valencia. Los electrones promocionados pasan a formar parte de un enlace por lo que no contribuyen a la conducción, sin embargo, han dejado tras de sí huecos que sí que lo hacen. Aunque la temperatura sea suficiente para la formación de pares electrón-hueco, un semiconductor *P*, con impurezas aceptoras, conduce principalmente por huecos, que son en este caso los portadores mayoritarios. Al igual que ocurre con los semiconductores *N*, a temperatura elevada la conducción intrínseca llega a enmascarar a la extrínseca y el semiconductor se comporta como si fuese puro.

Se verifica que para semiconductores en equilibrio con cualquiera de los dos tipos de impurezas, el producto de las concentraciones de electrones y huecos, a una cierta temperatura, es siempre igual al cuadrado de la concentración de portadores intrínsecos:

$$n p = n_i^2$$

En la práctica, en una muestra de semiconductor existen los dos tipos de impurezas y éste se comportará como tipo *P* o *N* según que predomine la concentración de las aceptoras o de las donadoras. Llamando  $N_A$  a la concentración de las primeras y  $N_D$  a la de las segundas, y suponiéndolas todas ionizadas, la condición de neutralidad del cristal impone la siguiente relación:

$$n + N_A = p + N_D$$

En efecto: la concentración de carga positiva será la suma de la de huecos más la de impurezas donadoras que han cedido su electrón, y la concentración de carga negativa será la correspondiente a electrones e impurezas aceptoras ionizadas. La condición de carga neta nula demuestra la relación anterior.

**B) VÁLVULAS ELECTRÓNICAS\***

**XXIX - 8. Efecto Edison-Richardson o termoiónico**

Consiste en la propiedad que tienen los metales en caliente de liberar electrones desde su superficie.

La Fig XXIX-14, análoga a la Fig. XXIX-6, muestra la distribución de electrones para distintas temperaturas de un determinado metal; se observa que a temperaturas del orden de 3 000K existe un número apreciable de electrones (zona sombreada en la figura) con energía suficiente para superar la barrera de potencial superficial, que si se encuentran próximos a la superficie del metal pueden escapar de él.

Los electrones liberados, atraídos por el metal que ha quedado cargado positivamente como consecuencia de la emisión, forman en las proximidades de la superficie una nube electrónica a la que se denomina CARGA ESPACIAL y que tiene por efecto aumentar el trabajo de extracción,  $E_w$ , de nuevos electrones. Para mantener la misma intensidad de emisión hay que retirar inmediatamente los electrones liberados, lo que se consigue poniendo enfrente del metal emisor (cátodo) un electrodo a potencial positivo respecto de aquél (ánodo). Cuando el ánodo recoge todos los electrones emitidos por el cátodo, a la intensidad de corriente existente entre ellos se le llama INTENSIDAD DE SATURACIÓN. La corriente en condiciones de saturación se establece a partir de un valor mínimo de

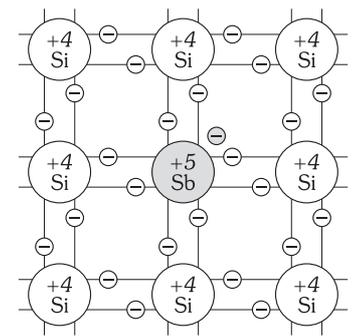


Fig. XXIX-11.- Silicio (Si) impurificado con antimonio (Sb). Un electrón de valencia del Sb no interviene en los enlaces.

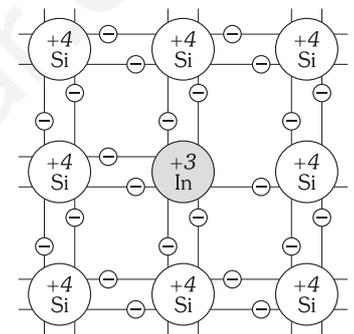


Fig. XXIX-12.- Las impurezas del tercer grupo del sistema periódico dejan un enlace por átomo sin completar.

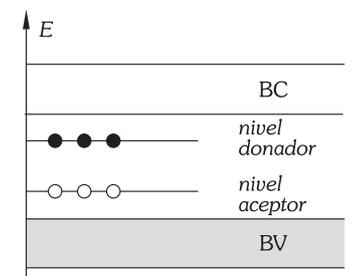


Fig. XXIX-13.- Niveles donadores y aceptores introducidos por impurezas del quinto y del tercer grupo respectivamente.

\* Las válvulas electrónicas han sido sustituidas en su práctica totalidad por dispositivos semiconductores, que se verán a continuación.

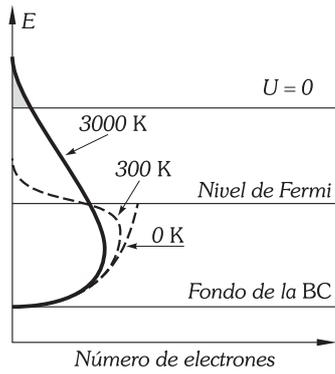


Fig. XXIX-14.- A temperaturas del orden de 3 000 grados Kelvin existen electrones de conducción con energía suficiente para superar la barrera de potencial superficial.

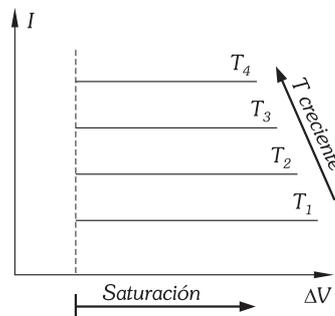


Fig. XXIX-15.- La intensidad de corriente de saturación aumenta con la temperatura del cátodo emisor de electrones.

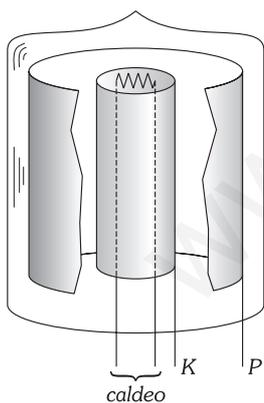


Fig. XXIX-16.- Diodo de vacío.

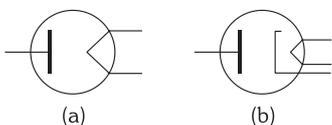


Fig. XXIX-17.- Símbolos de los diodos de vacío de caldeo directo (a) e indirecto (b).

la diferencia de potencial entre ánodo y cátodo, y el valor de su intensidad depende de la temperatura de éste último (Fig. XXIX-15). La densidad de corriente de saturación se ajusta a la ECUACIÓN DE RICHARDSON-DUSHMAN:

$$J = \frac{I}{S} = A T^2 \varepsilon^{-\frac{eV_w}{kT}}$$

en la que S es la superficie del cátodo, A es una constante, característica del metal, que se expresa en  $A/m^2 K^2$ , k es la constante de Boltzman ( $1,381 \times 10^{-23} J/K$ ) y  $\varepsilon$  la base de los logaritmos neperianos (2,718).

La medida de la densidad de corriente de saturación y de la temperatura del metal permite determinar el trabajo de extracción ( $E_w = e V_w$ ) del material empleado como cátodo, que para la mayoría de metales y sus óxidos varía entre 1 y 5 eV.

**XXIX - 9. Diodo de vacío.**

La válvula DIODO consta de un electrodo, K, (filamento o cátodo) que emite electrones por efecto termiónico y otro electrodo, P, (placa o ánodo) que estando a potencial positivo respecto del primero, recoge dichos electrones; todo ello encerrado en una ampolla de vidrio en la que se hace un vacío del orden de  $10^{-6}$  mm Hg. En la construcción más frecuente un ánodo cilíndrico rodea al cátodo, que consiste en un filamento metálico calentado por el paso de una corriente eléctrica (caldeo directo), o bien en un cilindro metálico calentado por un filamento en su interior (caldeo indirecto), que es el representado en la Fig. XXIX-16. Los símbolos de ambos tipos son los de la Fig. XXIX-17.

Si conectamos el diodo en un circuito provisto de un amperímetro y un generador de tensión continua (Fig. XXIX-18), de forma que la placa sea positiva respecto al filamento, los electrones recogidos por aquella constituyen una corriente, cuya intensidad  $I_p$  refleja el amperímetro. Variando la tensión de caldeo y la de placa se obtienen las curvas características del diodo para distintas temperaturas (Fig. XXIX-19).

Antes de alcanzarse la saturación, en la zona de carga espacial, la intensidad no depende de la temperatura, ajustándose a la ECUACIÓN DE CHILD-LANGMUIR (o ley de la potencia 3/2):

$$I_p = B V_p^{3/2}$$

donde B se denomina PERVEANCIA del diodo. La curva correspondiente a esa ecuación pasa por el origen, lo que realmente no es así; debido a que los electrones son emitidos por el cátodo con velocidad no nula, existe una pequeña intensidad de corriente aunque sea nulo el potencial de placa.

Se puede deducir fácilmente la ecuación anterior en un caso particular. Supongamos los dos electrodos planos y paralelos, y tomemos un eje (OX) en la dirección perpendicular a ambos y en el sentido de cátodo a placa. Aplicamos una tensión V correspondiente a la zona de carga espacial, con lo que en un punto de abscisa x habrá una densidad de carga,  $\rho(x)$  función de x. Si en ese punto la velocidad media de los electrones es  $v(x)$ , se tendrá una densidad de corriente dada por:

$$J = -\rho v \text{ A/m}^2 \tag{1}$$

Despreciamos la velocidad inicial de los electrones a la salida del cátodo; su velocidad en x verifica:

$$\frac{1}{2} m v^2 = eV \tag{2}$$

La relación entre el potencial en un punto y la densidad de carga nos la proporciona la ecuación de Poisson, que en una dimensión se escribe:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Sustituyendo en esta última las expresiones (1) y (2) tenemos:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{J}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2eV}}$$

Multiplicando ambos miembros por  $dV/dx$ , teniendo en cuenta que:

$$\frac{dV}{dx} \left( \frac{d^2 V}{dx^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{dV}{dx} \right)^2$$

y que en  $x = 0$ ,  $dV/dx = E(0) \approx 0$ , resulta:

$$\left( \frac{dV}{dx} \right)^2 = \frac{4J}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}} V^{1/2}$$

Despejando  $dV/dx$  e integrando con las condiciones  $V(0) = 0$  y  $V(d) = V_p$ , donde  $d$  es la distancia entre electrodos, obtenemos:

$$J = \frac{4 \epsilon_0}{9 d^2} \sqrt{\frac{2e}{m}} V_p^{3/2}$$

que multiplicada por el área nos proporciona la ecuación enunciada:

$$I_p = J A = \frac{4 \epsilon_0}{9 d^2} \sqrt{\frac{2e}{m}} V_p^{3/2} = B V_p^{3/2}$$

**XXIX - 10. El diodo como rectificador**

La LÁMPARA DE DOS ELECTRODOS O KENOTRÓN, sirve para la *rectificación* de corrientes; es decir, intercalada en un circuito de corriente alterna no deja pasar por él más que un sentido de corriente.

En efecto: cuando la placa funciona como polo positivo, la corriente pasa por ser atraídos los electrones por el potencial positivo de la placa; sin embargo, cuando la placa funciona como negativa y el filamento como positivo, los electrones no pasan de filamento a placa, pues son atraídos por aquél y repelidos por ésta; al no haber circulación electrónica, no hay corriente eléctrica (Fig. XXIX-20).

Si la representación gráfica de una corriente alterna es como en la Fig. XXIX-21 (intensidades de corriente en ordenadas y tiempo en abscisas), la *corriente rectificada* por la instalación de un *kenotrón* queda representada por la Fig. XXIX-22, observándose el paso de corriente continua pulsante.

En el *rectificador de onda completa* (Fig. XXIX-23) se aprovechan ambos semiperiodos de la corriente alterna. Por el secundario  $S$  del transformador  $T$ , circula la corriente a rectificar. Cuando en el diodo  $A$  la placa es positiva, en el  $B$  es negativa, funcionando, por tanto, solamente el primero y originándose en el circuito exterior ( $R$ ) corriente en el sentido indicado. En el siguiente semiperíodo funciona  $B$ , y por  $R$  circula corriente en el mismo sentido que en el semiperíodo anterior. El resultado es el indicado en la Fig. XXIX-24.

Intercalando un condensador en derivación entre los extremos de  $R$  (de puntos en la figura) se consiguen disminuir las fluctuaciones de la corriente rectificada (línea continua de la Fig. XXIX-25).

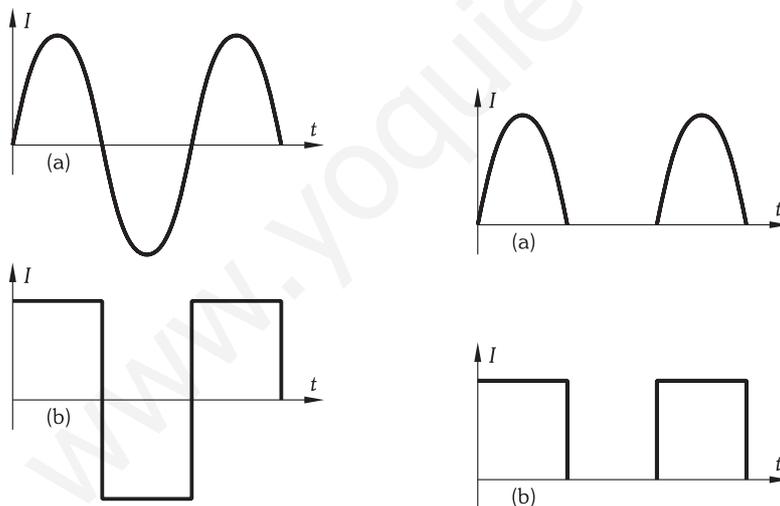


Fig. XXIX-21.- Dos formas típicas de corriente alterna: (a) sinusoidal, (b) cuadrada.

Fig. XXIX-22.- Resultado de la rectificación de media onda de las intensidades de la figura anterior.

**XXIX - 11. Triodo. Curvas características de rejilla**

A la lámpara de dos electrodos se añade un tercero, consistente en una rejilla metálica colocada entre la placa y el filamento, obteniéndose la LÁMPARA DE TRES ELECTRODOS O TRIODO, cuyas finalidades son muy variadas. A este tercer electrodo se le llama REJILLA DE CONTROL.

En el triodo de geometría cilíndrica (Fig. XXIX-26) la rejilla ( $G$ ) es un alambre espiral, que rodea al cátodo, cuya función es controlar la corriente de electrones entre cátodo y placa; va conectada a potencial negativo respecto del cátodo, de forma que pequeñas variaciones del potencial de rejilla ocasionan variaciones relativamente grandes de la corriente de placa.

Si en el circuito de la Fig. XXIX-28 se comunica a la rejilla un fuerte potencial negativo  $V_g$  (uniéndola a tal polo de la batería  $E_B$ ) el campo creado, mayor y de sentido contrario al originado

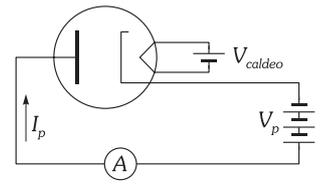


Fig. XXIX-18.- Conexión de un diodo.

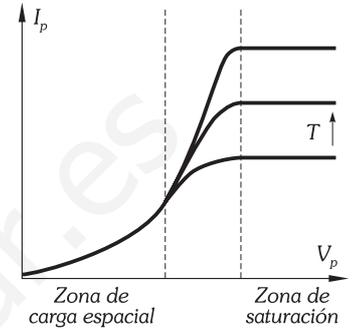


Fig. XXIX-19.- Curvas características de un diodo para tres temperaturas de cátodo distintas.

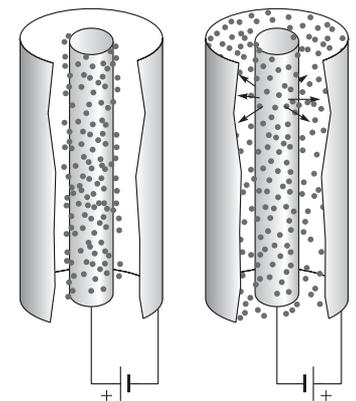


Fig. XXIX-20.- Si el filamento es positivo respecto de la placa no hay circulación de electrones entre ambos. En caso contrario si que existe conducción electrónica.

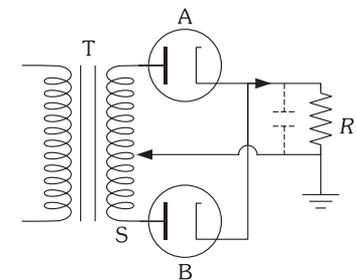


Fig. XXIX-23.- Rectificador de onda completa.

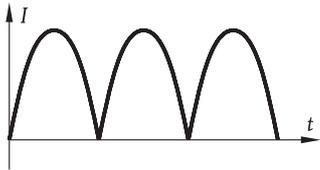


Fig. XXIX-24.- Corriente alterna sinusoidal rectificada en onda completa.

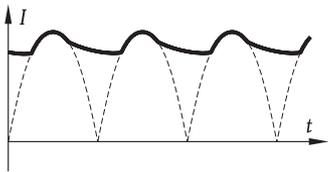


Fig. XXIX-25.- Influencia de un condensador en la rectificación en onda completa.

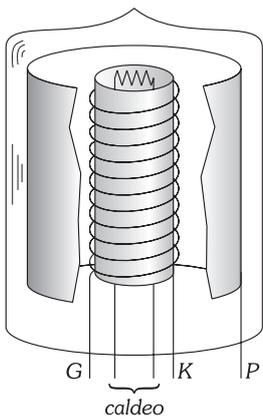


Fig. XXIX-26.- Estructura de un triodo con electrodos cilíndricos.

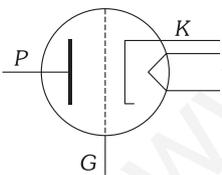


Fig. XXIX-27.- Símbolo del triodo.

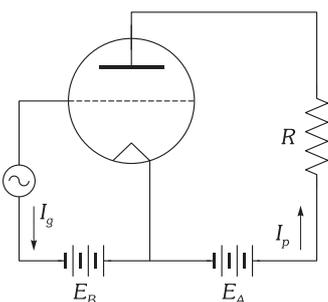


Fig. XXIX-28.- Instalación de un triodo como amplificador.

por la placa, no deja circular a los electrones producidos en el filamento y la corriente no pasa; disminuyendo el potencial negativo de la rejilla (manteniendo constante el de la placa), se llega a un valor  $V_0$  (Fig. XXIX-29), POTENCIAL DE CORTE, en que ambos campos se igualan; una disminución del potencial negativo de rejilla permite pasar la corriente en el sentido indicado en la Fig. XXIX-28.

Si seguimos disminuyendo el potencial negativo de la rejilla, llegaremos a un valor cero de su potencial siendo, entonces, la intensidad de la corriente  $I_0$ . Aumentando, ahora, el potencial positivo aumenta la intensidad de la corriente. Por analogía con el diodo, parece que se debería llegar a una saturación. En realidad esto no ocurre debido a la formación de una intensidad en el circuito de rejilla  $I_g$  que se va restando de la intensidad de placa. El diagrama que compendia tales valores se llama CURVA CARACTERÍSTICA DE REJILLA (Fig. XXIX-29). Tan sólo interesa la región de la curva en que  $V_g$  es negativo.

Para potenciales adecuados de la rejilla, las pequeñas variaciones de su potencial ( $\Delta V$ ) se traducen en grandes variaciones de la intensidad de corriente en el circuito placa-filamento ( $\Delta I$ ).

Si en el circuito de rejilla se incluye un generador de tensiones alternas de pequeña amplitud, se producirán en el circuito de placa grandes ampliaciones de las variaciones de intensidad de la corriente de placa. En la Fig. XXIX-29 se ha dibujado una tensión alterna en la rejilla, que se traduce en una intensidad alterna en la corriente de placa.

### XXIX - 12. Factor de amplificación

Si  $V_p$  y  $V_g$  son los potenciales de placa y rejilla, la intensidad de la corriente de placa tiene por valor:

$$I = f(V_p + \mu V_g)$$

$\mu$  es el llamado FACTOR DE AMPLIFICACIÓN, que depende de la forma como está construida la válvula y del punto de la curva característica en que trabaje.

Supongamos un incremento del potencial de placa  $\Delta V_p$ , manteniendo constante el de rejilla; la nueva intensidad tendrá por valor:

$$f(V_p + \Delta V_p + \mu V_g)$$

si lo que se hubiese incrementado hubiera sido el potencial de rejilla, manteniendo constante el de placa, la nueva intensidad sería de la forma:

$$f[V_p + \mu(V_g + \Delta V_g)] = f(V_p + \mu V_g + \mu \Delta V_g)$$

Si se verifica que  $\Delta V_g = \mu \Delta V_g$  las intensidades en uno y otro caso serían idénticas, obteniéndose para  $\mu$  el valor:

$$\mu = \frac{\Delta V_p}{\Delta V_g} \tag{3}$$

FACTOR DE AMPLIFICACIÓN es el potencial que habría que variar en la placa para producir en su corriente el mismo efecto que se obtiene al variar en una unidad el potencial de rejilla. Un factor de amplificación  $\mu = 10$ , quiere decir que 1 voltio en la rejilla tiene la misma eficacia para la intensidad de corriente, que 10 voltios en la placa.

Como cociente de dos tensiones  $\mu$  es un número abstracto. Suele estar comprendido entre 2,5 y 100.

### XXIX - 13. Transconductancia o conductancia mutua

A la pendiente de la curva característica de rejilla, se llama TRANSCONDUCTANCIA O CONDUCTANCIA MUTUA:

$$g_m = \frac{\Delta I_p}{\Delta V_g} \tag{4}$$

en definitiva es la variación de la intensidad de placa cuando varía 1 voltio el potencial de rejilla. Como cociente de una intensidad a un potencial, su unidad es la inversa de ohmio (MHO); en la práctica se emplea el  $\mu\text{mho} = 10^{-6} \text{ mho}$ .

Como la pendiente de la curva característica de rejilla no es constante, el valor de la transconductancia depende del punto del gráfico en que el triodo está funcionando aunque en las regiones que se suele trabajar (zona casi recta del gráfico) se puede considerar como constante.

Una gran transconductancia indica una gran variación de la intensidad de placa, conseguida con pequeñas modificaciones del potencial de rejilla; la transconductancia nos da una medida de la eficiencia del potencial de rejilla sobre la intensidad de placa. Su valor suele estar comprendido entre 500 y 6 000 micromhos.

**XXIX – 14. Curvas características de placa. Resistencia de placa**

Manteniendo constante el potencial de rejilla y aumentando el de placa, obtenemos intensidades de corriente de placa que representadas gráficamente dan curvas ascendentes. En la Fig. XXIX-30 se han dibujado tres gráficos correspondientes a valores negativo, cero y positivo del potencial de rejilla. Las gráficas son aproximadamente rectas en un intervalo de tensión bastante grande.

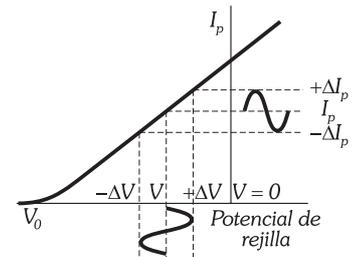


Fig. XXIX-29.- Curva característica de rejilla.

La pendiente de la curva:

$$g_p = \frac{\Delta I_p}{\Delta V_p}$$

se llama CONDUCTANCIA DE PLACA; a su inversa:

$$r_p = \frac{\Delta V_p}{\Delta I_p} \tag{5}$$

se llama RESISTENCIA DE PLACA que como cociente de un potencial a una intensidad, se mide en *ohmios*; su valor no es constante, ya que siendo la inversa de la pendiente de la curva, varía según el punto que consideremos en el gráfico; se puede suponer constante para la zona en que el gráfico es aproximadamente recto, dependiendo su valor de las dimensiones y de la posición relativa del cátodo, placa y rejilla.

Una pequeña conductancia de placa (gran resistencia) indica que a grandes variaciones del potencial de placa, corresponden pequeñas modificaciones de intensidad y a la inversa. Esta característica del triodo nos da una medida de la *eficiencia del potencial de placa sobre la intensidad de la corriente de placa*. El valor de la resistencia de placa suele estar comprendido entre 500 y 100 000 ohmios.

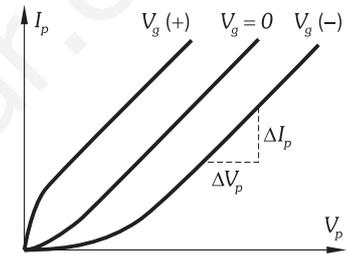


Fig. XXIX-30.- Curvas características de placa.

**XXIX – 15. Relación entre las tres características del triodo**

De la (3), que nos define el factor de amplificación, obtenemos:

$$\mu = \frac{\Delta V_p}{\Delta V_g} = \frac{\Delta V_p}{\Delta I_p} \frac{\Delta I_p}{\Delta V_g}$$

y teniendo en cuenta la (4) y la (5)

$$\mu = r_p g_m$$

expresión conocida como RELACIÓN DE BARKHAUSEN.

Las válvulas triodo deben tener gran transconductancia y resistencia de placa y trabajar en regiones de sus curvas en que estas magnitudes sean grandes, para tener un gran *factor de amplificación*.

**XXIX – 16. El triodo como amplificador. Recta de carga**

En el circuito de la Fig. XXIX-28, sin funcionar el alternador, la diferencia de potencial entre placa y filamento, es la determinada por la ley de Ohm:

$$V_p = E_A - I_p R \tag{6}$$

Para  $E_A = I_p R$ , es decir para un valor de  $I_p = E_A/R$ , el potencial de placa se hace nulo (80 mA y voltaje nulo, en la Fig. XXIX-31). Para  $I_p = 0$ ,  $V_p = E_A$  (intensidad nula y 400 voltios en la figura). Uniendo entre sí tales puntos por un segmento recto (diagonal, en el esquema), obtenemos la recta de carga, representativa de la ecuación (6) entre los valores citados. Los puntos de contacto de la recta de carga con las curvas características de placa (con potenciales negativos de rejilla) son los de funcionamiento del triodo, ya que tales puntos obedecen a la ecuación (6), y además nos determinan valores posibles de las tres variables  $V_p$ ,  $V_g$  e  $I_p$  (Ver punto M en la Fig. XXIX-31).

Si funcionando estáticamente el triodo en el punto M, se establecen variaciones del potencial de rejilla  $\pm \Delta V_g$  entonces la válvula funciona en los puntos  $M'$  y  $M''$ , originando variaciones del potencial de placa  $\pm \Delta V_p$ , y de la intensidad de placa  $\pm \Delta I_p$ . Si la señal recibida en el circuito de rejilla es una variación senoidal de  $V_g$  (alternador de la Fig. XXIX-28) las variaciones del potencial de placa y de la intensidad, también los serán.

$I_g V_g$  es la *potencia de entrada* por pertenecer a la línea de carga,  $I_p V_p$  es la *potencia de salida* del triodo, mayor que la anterior y suministrada su diferencia por la batería  $E_A$  (Fig. XXIX-31). Las variaciones de la potencia de entrada se conservan en la de salida.

Las características de la instalación de la figura son:

$E_A = 400 \text{ V}$ ;  $R = 5\,000 \text{ }\Omega$ ;  $I_p = 30 \text{ mA}$ ; a los que corresponde  $V_p = 250 \text{ V}$  y por tanto el punto M de la figura. El potencial de rejilla es en el funcionamiento estático  $V_g = -20 \text{ V}$ .

Suponiendo que el generador nos origina un potencial alterno que se superpone a  $V_g$ , dado por la ecuación:  $\Delta V_g = \Delta V_{0g} \text{ sen } \omega t$  en la que:  $\Delta V_{0g} = 5 \text{ V}$

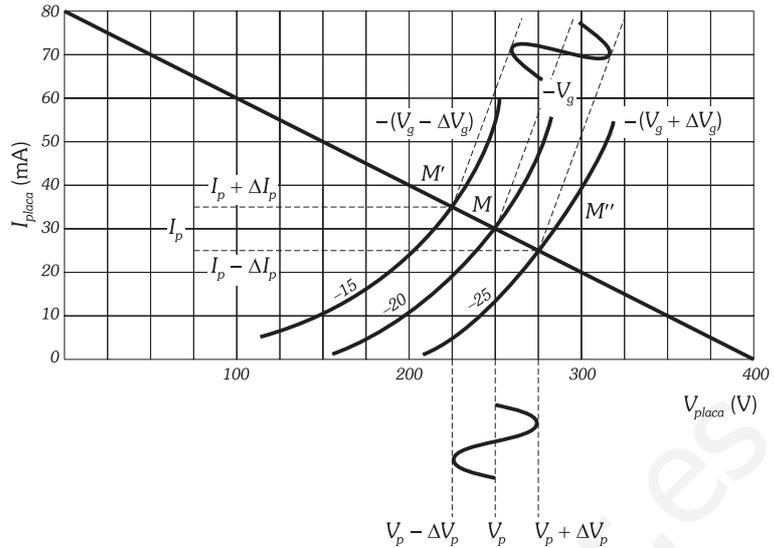


Fig. XXIX-31.- Línea de carga y amplificación con un triodo.

el triodo funcionará en la línea de carga, pasando su punto representativo por las posiciones  $M \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow M$ . La variación en el potencial eficaz en la corriente alterna de rejilla será:  $V_{Eg} = V_{0g} / \sqrt{2} = 5 / \sqrt{2} = 3,57 \text{ V}$

Esta variación senoidal en el potencial de rejilla origina otra variación senoidal en el potencial de placa (que se superpone a los 250 V de la placa en funcionamiento estático), dada por la ecuación, si no hay distorsiones:  $\Delta V_p = \Delta V_{Op} \text{ sen } \omega t$  en la que  $\Delta V_{Op}$  (ver figura) es 25 V, lo que supone un potencial eficaz en la corriente alterna de placa:  $V_{Ep} = \Delta V_{Op} / \sqrt{2} = 25 / \sqrt{2} = 17,85 \text{ V}$  y un incremento en la intensidad de placa dado por la ecuación:  $\Delta I_p = \Delta I_{Op} \text{ sen } \omega t$  (se supone la impedancia reducida a la resistencia). El valor de  $\Delta I_{Op}$  es (ver figura):  $\Delta I_{Op} = 5 \text{ mA}$ , lo que supone una intensidad eficaz alterna en el circuito de placa:  $I_{Ep} = 5 / \sqrt{2} = 3,57 \text{ mA}$ .

Tal intensidad alterna se superpone a la continua del funcionamiento estático. La ganancia es:

$$A_v = \frac{\text{Potencial eficaz de salida}}{\text{Potencial eficaz de entrada}} = \frac{V_{Ep}}{V_{Eg}} = \frac{17,85}{3,57} = 5$$

La potencia en el funcionamiento estático es:  $P = V_p I_p = 250 \times 30 \times 10^{-3} = 75 \text{ W}$  y el aumento de potencia al superponerse la tensión alterna es:  $\Delta P = V_{Ep} I_{Ep} = 17,85 \times 3,57 \times 10^{-3} = 0,064 \text{ W}$

Estos pequeños aumentos de potencia hacen necesaria una instalación de amplificadores en cascada, en la que la corriente de placa del primer triodo actúa sobre la rejilla del segundo y así sucesivamente hasta conseguir la potencia adecuada.

**XXIX - 17. El triodo como oscilador.**

Se pueden producir las corrientes oscilantes en una antena, por medio de un triodo: consideramos la instalación de la Fig. XXIX-32. Al cerrar el interruptor S, los electrones emitidos por el cátodo son atraídos por la placa, estableciéndose una corriente; la autoinducción L hace que la intensidad de corriente (corriente de cierre) vaya creciendo gradualmente; esta corriente creciente induce en L', acoplada magnéticamente a L, otra de sentido contrario, originando en la rejilla un potencial negativo que, rechazando a los electrones hace disminuir la intensidad de la corriente de placa hasta anularla. La disminución de corriente en L, induce en L' una corriente en su sentido y en la rejilla un potencial positivo restableciéndose el paso de la corriente ahora, de nuevo, creciente.

El fenómeno se repite constantemente, produciéndose corrientes oscilantes cuyo período depende de la autoinducción L y de las capacidades intercaladas en el circuito.

**XXIX - 18. Tetrodo**

La rejilla y la placa de una válvula triodo actúan como un condensador, cuya capacidad dificulta el buen funcionamiento de la válvula. Intercalando entre rejilla y placa una segunda rejilla (PANTALLA) cuyo potencial esté comprendido entre los de aquéllas, se consigue desdoblarse el condensador citado en dos «en serie», con la consiguiente disminución de capacidad.

A la pantalla se le da potencial positivo con el fin de acelerar los electrones que van de filamento a placa.

A una válvula con filamento, placa y rejillas de control y pantalla se le da el nombre de TETRODO.

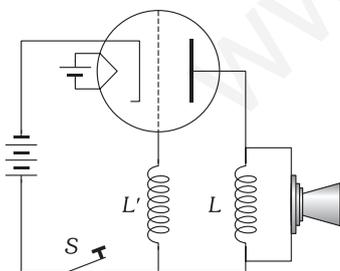


Fig. XXIX-32.- Triodo oscilador.

**XXIX – 19. Pentodo**

En una válvula «tetrodo» se verifica que al chocar los electrones contra la placa, su gran energía cinética provoca la emisión de nuevos electrones de la propia placa (emisión secundaria); estos electrones, atraídos por la pantalla positiva producen una corriente de sentido contrario a la que va de filamento a placa, provocando trastornos en el funcionamiento de la válvula.

Para evitar este defecto se intercala entre pantalla y placa una nueva rejilla (SUPRESORA) conectada normalmente al cátodo y cuyo potencial negativo respecto de la placa hace que los electrones de la emisión secundaria vuelvan hacia la placa sin alcanzar la rejilla de pantalla (Fig. XXIX-34). A estas válvulas con *filamento, placa y rejillas de control, pantalla y supresora se les llama PENTODOS.*

**XXIX – 20. Válvulas de gas. Tiratrón**

La diferencia de comportamiento entre las válvulas de vacío y las de gas se debe a los fenómenos asociados con las descargas eléctricas en gases que se producen en éstas últimas.

En un diodo de vacío los electrones emitidos por el cátodo progresan constantemente hacia la placa por la acción del campo eléctrico existente entre ambos electrodos. Un diodo de gas contiene en su interior un gas inerte (helio, argón, vapor de mercurio,...) a baja presión; los electrones acelerados desde el cátodo experimentan colisiones con los átomos del gas de tal forma que, cuando han adquirido una energía suficiente, pueden arrancar electrones de esos átomos. En cada una de esas colisiones se produce un par electrón-ión positivo, el ión se dirige hacia el cátodo y los dos electrones, el original y el arrancado del átomo, son acelerados de nuevo hacia la placa (ánodo). Cuando otra vez estos electrones han sido acelerados lo suficiente son capaces de ionizar los átomos, con lo que aparecen dos nuevos iones positivos y cuatro electrones que repetirán el proceso hasta llegar a la placa.

Los iones positivos poseen mucha mayor masa que los electrones y se mueven con menos aceleración que éstos, con el resultado de que se forma una zona de carga espacial positiva. Cuando la descarga se ha establecido (en tiempos del orden de  $10^{-6}$  segundos) aparecen en el diodo dos zonas (Fig. XXIX-35), una con átomos neutros, iones positivos y electrones atrapados por los iones, que se comporta como un conductor poniéndose al mismo potencial que la placa, y otra, pegada al cátodo, en la que los electrones se aceleran antes de la primera ionización y los iones circulan hacia él.

Para diferencias de potencial pequeñas no se llega a producir ionización por choques, pero a partir de un potencial mínimo ( $V_0$  en la Fig. XXIX-36) cualquier aumento de tensión produce grandes variaciones en la intensidad de corriente. La curva característica del diodo de gas muestra que este dispositivo puede rectificar la corriente alterna preservando su forma más fielmente que el diodo de vacío.

El triodo de gas se denomina TIRATRÓN. Un potencial negativo de la rejilla, que está muy próxima al cátodo, impide la circulación de electrones hacia la placa para potenciales positivos de ésta muy elevados. Haciendo la rejilla menos negativa que un cierto valor crítico se inicia la descarga, la rejilla queda apantallada por los iones positivos que la rodean y deja de ejercer sus funciones de control sobre la corriente de placa; la descarga sólo se interrumpe anulando el voltaje de placa. Estas características convierten al tiratrón en un buen interruptor en circuitos de elevada potencia.

**PROBLEMAS: 1 al 16.**

**C) TUBOS FOTOELÉCTRICOS**

**XXIX – 21. Célula fotoeléctrica**

Una CÉLULA FOTOELÉCTRICA es un dispositivo que transforma la energía radiante en eléctrica.

Los metales alcalinos, el cesio, por ejemplo, verifican el efecto fotoeléctrico (párrafo XXVIII-5) al ser excitados por la luz; en este hecho se basa la célula fotoeléctrica.

Consta de una ampolla de vidrio en cuyo interior existe un cátodo semicilíndrico en el que se ha hecho un depósito finísimo de metal fotosensible (cesio, por ejemplo); frente al cátodo se coloca un segundo electrodo, al que se le da un potencial positivo por medio de un generador (Fig. XXIX-37).

Al incidir la luz en el metal éste emite electrones, que son atraídos por el ánodo, estableciendo una corriente eléctrica, que acusa un galvanómetro G.

El tipo de célula descrita se conoce con el nombre de FOTOEMISIVA.

En las CÉLULAS FOTOVOLTAICAS no es necesario comunicar una diferencia de potencial entre sus electrodos; la célula fotovoltaica produce su propia fuerza electromotriz. Una pieza de cobre se recubre de otra de óxido de cobre (I), sobre la que se deposita una capa delgadísima de cobre, transparente a la luz (Fig. XXIX-38); al incidir ésta, atraviesa tal capa y llegando al óxido deja electrones en libertad, que se dirigen hacia la delgadísima capa de cobre que hace de polo negativo de la célula originándose en el circuito una corriente, cuya intensidad depende de la intensidad de la luz incidente; de ahí su empleo en los fotómetros empleados para indicar el tiempo de exposición en las cámaras de fotografía.

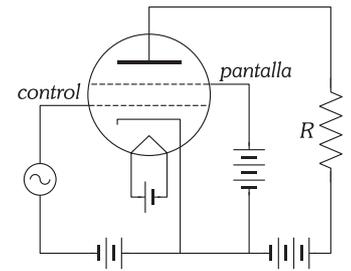


Fig. XXIX-33.- Circuito básico del tetrodo.

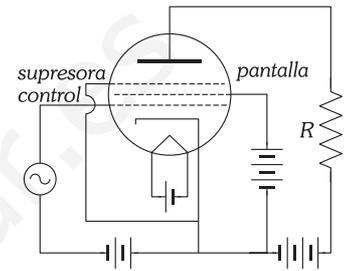


Fig. XXIX-34.- Conexión del pentodo.

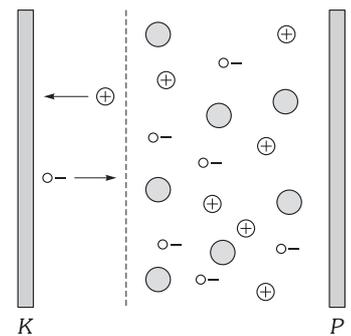


Fig. XXIX-35.- Distribución de la carga en un diodo de gas.

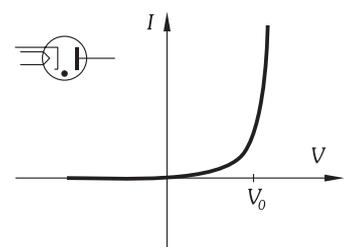


Fig. XXIX-36.- Curva característica y símbolo del diodo de gas.

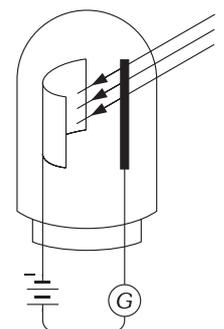


Fig. XXIX-37.- Célula fotoeléctrica.

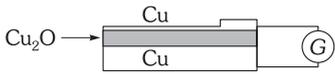


Fig. XXIX-38.- Célula fotovoltaica de cobre.

La CÉLULA DE HIERRO-SELENIO, está formada por una placa de hierro, sobre la que hay depositada otra de seleniuro de hierro, y sobre ella una finísima lámina de laca conductora. La lámina de laca constituye el electrodo negativo y la de hierro el positivo.

**XXIX - 22. Fotomultiplicadores.**

En las células fotoeléctricas se generan corrientes de muy poca intensidad que para ciertas aplicaciones han de ser previamente amplificadas. La amplificación se consigue con un FOTOMULTIPLICADOR, dispositivo basado en la emisión secundaria.

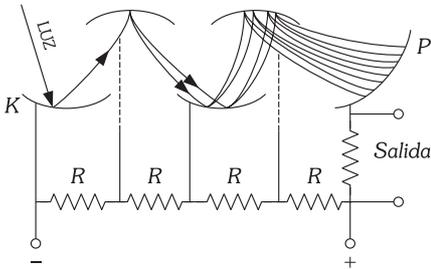


Fig. XXIX-39.- Tubo multiplicador de tres dinodos.

Existen materias (NaCl, BaO, BaO-SrO,...) en los que el impacto de un electrón es capaz de arrancar más de un electrón secundario (hasta 14 en un cristal de cloruro de sodio), de forma que acoplando electrodos recubiertos de estos materiales como en la Fig. XXIX-39, se puede conseguir multiplicar una intensidad para obtener una ganancia del orden de millones. Para evitar que los electrones secundarios se dispersen y no alcancen los siguientes electrodos, se les da a éstos forma curva y se focalizan los electrones con campos eléctricos y magnéticos.

Cada electrón producido por fotoemisión en el cátodo es acelerado hasta el primero de los electrodos (a los que se denomina DINODOS), que está a potencial positivo respecto al cátodo; de éste parten  $n$  electrones secundarios hacia el segundo dinodo, positivo respecto al primero y del que salen  $n^2$  hacia el tercer dinodo, y así sucesivamente. Si el tubo fotomultiplicador consta de  $m$  dinodos la intensidad inicial quedará multiplicada por  $n^m$ .

Como se observa en la Fig. XXIX-39, para polarizar los dinodos la diferencia de potencial entre placa y cátodo se reparte por igual entre todos ellos intercalando resistencias iguales.

**XXIX - 23. La célula fotoeléctrica como «relais»**

Se llama «RELAIS» a un sistema capaz de abrir o cerrar un circuito (es decir que cese o pase corriente por él) y con ello conseguir que suene un timbre de alarma, se encienda una lámpara, comience o cese de funcionar un cronómetro, etc. En el esquema de la Fig. XXIX-40, C es una célula fotoeléctrica cuyo electrodo fotosensible es M. La luz incidente en M provoca una corriente en el circuito de la célula produciendo en la rejilla del triodo T un pequeño potencial negativo. La corriente que circula en el circuito del triodo T hace activo el electroimán E, el cual atrae a la plaquita P quedando abierto el circuito en el cual está instalado el aparato A (timbre de alarma, por ejemplo). La diferencia de potencial entre 1 y 2 es:  $V_1 - V_2 = IR \Rightarrow V_1 = V_2 + IR$

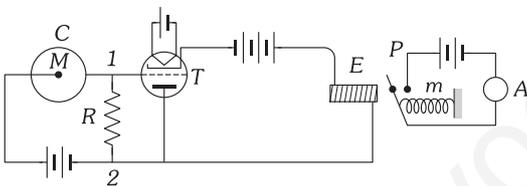


Fig. XXIX-40.- La célula fotoeléctrica como "relais".

Al cortarse el haz de luz incidente (por el paso de una persona, por ejemplo) cesa la corriente en el circuito de la célula y, al ser  $I = 0$ , el valor de  $V_1$  se hace igual a  $V_2$ , haciéndose menor (más negativo) y disminuyendo, por consiguiente, la intensidad de corriente en el triodo. La fuerza de atracción de E sobre P se hace menor y el muelle m, hace que se establezca el contacto P, cerrándose el circuito de A y pasando corriente por él (funcionando así, por ejemplo, el timbre de alarma).

**XXIX - 24. Cinematógrafo sonoro**

En el cinematógrafo se verifican las siguientes operaciones:

- 1.º Obtener una fotografía del sonido (impresión de la película).
- 2.º Reproducir el sonido original.

La primera operación se consigue de la siguiente forma: el artista habla o canta en las proximidades de un micrófono; su placa P (Fig. XXIX-41) vibra originándose en su circuito corrientes de intensidad variable que, ampliadas por un triodo y pasando por una fuente luminosa eléctrica L, hacen que ésta emita luz de más o menos intensidad según sea mayor o menor la intensidad de la corriente. La luz emitida por L impresiona el margen de una cinta cinematográfica que, en su parte central, es impresionada por las escenas correspondientes.

La reproducción del sonido se verifica haciendo pasar un haz de rayos luminosos a través de las fotografías de los sonidos; los rayos emergentes de ellas (Fig. XXIX-42) son de más o menos intensidad luminosa según sea el ennegrecimiento de la película; la luz que ha atravesado a ésta incide en una célula fotoeléctrica, produciendo en su circuito corrientes de intensidad variable, las cuales, ampliadas por un triodo T, reproducen el sonido original por medio de un altavoz A.

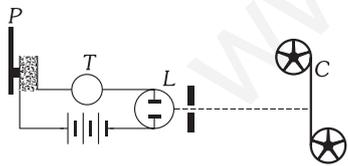


Fig. XXIX-41.- Obtención de una banda sonora.

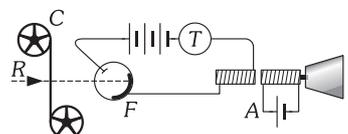


Fig. XXIX-42.- Reproducción del sonido impresionado en una banda sonora.

**D) APLICACIONES DE LOS RAYOS CATÓDICOS\***

**XXIX - 25. Osciloscopio de rayos catódicos**

Si entre dos placas metálicas 1 y 2 (Fig. XXIX-43) situadas en el interior de un tubo de producción de rayos catódicos, se establece una diferencia de potencial, funcionando la placa 2 como po-

\* Ver rayos catódicos en el párrafo XX-43.

sitiva por ejemplo, el campo eléctrico originado modifica la trayectoria rectilínea de los electrones y en una pantalla fluorescente se verá desplazarse el punto  $E_1$  a la posición  $E_2$ . Si varía constantemente el potencial que desvía al pincel, también varía en dirección vertical la posición del impacto que éste produce en la pantalla. Las placas deflectoras 3 y 4 permiten variar la posición del impacto sobre el eje horizontal de la pantalla.

Al conectar a ambas parejas de placas tensiones alternas periódicas, se dibujarán en la pantalla las figuras correspondientes a la composición de movimientos vibratorios de direcciones perpendiculares (figuras de Lissajous).

Entre 3 y 4 se suele establecer una tensión en «dientes de sierra»: la diferencia de potencial entre las placas crece con el tiempo desde  $-V_H$  a  $+V_H$  según una función lineal, sufriendo luego una caída brusca hasta  $-V_H$ . La representación gráfica de la diferencia de potencial entre las placas 3-4 en diversos instantes es la de la Fig. XXIX-44; el tiempo  $T_R$  (base de tiempo) representa el período de la corriente. El efecto producido sobre el pincel de rayos catódicos es un barrido del eje horizontal de la pantalla cada  $T_R$  segundos.

Si entre las placas 1-2 se establece un potencial alterno senoidal de tal forma que su período  $T$  sea igual a  $T_R$ , el pincel de rayos catódicos dibujará en la pantalla la línea senoidal de la Fig. XXIX-45. Transcurrido este tiempo el pincel volverá a dibujar la misma línea, para repetir de nuevo el fenómeno en cada período. La persistencia de las imágenes en la retina hará ver la sinusoide como una línea permanente.

Si  $T_R = 2T$ , la sinusoide comprenderá dos ondas completas. El número de ondas completas dibujadas en la pantalla será:  $n = T_R/T$

Conocido  $n$  y  $T_R$  se puede determinar el valor del período de oscilación de las corrientes alternas productoras del potencial 1-2. El osciloscopio funciona, de esta forma, como un cronógrafo.

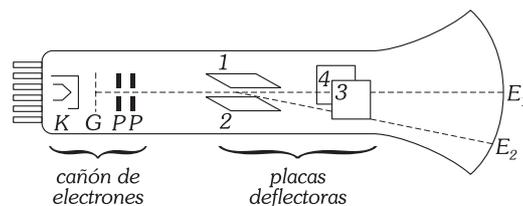


Fig. XXIX-43.- Osciloscopio de rayos catódicos.

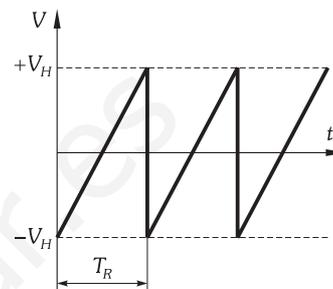


Fig. XXIX-44.- Tensión en diente de sierra para barrido horizontal.

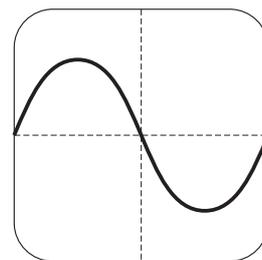


Fig. XXIX-45.- Imagen senoidal en la pantalla cuando coinciden los períodos de las señales vertical y de barrido.

**XXIX - 26. El radar**

Muy esquemáticamente, el fundamento del RADAR (mecanismo empleado para la localización de aviones, buques, etc.), es el siguiente: una estación emisora lanza al espacio micro-ondas (centimétricas) electromagnéticas moduladas, en forma de pequeños impulsos. Estas ondas, al llegar a un cuerpo sólido (un avión, un buque, etc.), se reflejan y un receptor de ondas hertzianas capta este eco (ondas reflejadas). El circuito receptor está unido a las placas 1, 2 (Fig. XXIX-46) de un osciloscopio de rayos catódicos. Las placas 3 y 4 están unidas a un «circuito de barrido» que origina entre ellos una diferencia de potencial en dientes de sierra, que hace «pasearse» al pincel de electrones horizontalmente, para volver rápidamente al punto de partida. La frecuencia del «circuito de barrido» es la misma que la de emisión de los impulsos. Como se conoce el período del potencial en dientes de sierra, la pantalla puede ir calibrada en tiempos.

Cuando el receptor no capta ondas, la diferencia de potencial entre las placas 1 y 2 es nula y el punto luminoso que originan los electrones en la pantalla fluorescente  $-P-$  se desplazará a lo largo del eje horizontal. Si el circuito receptor capta una pulsación electromagnética, el haz oscilará en la dirección vertical y en la pantalla se dibujará la parte superior o la inferior de la pulsación captada, ya que las ondas son detectadas por el aparato receptor.

La formación de tales curvas en la pantalla, indica la existencia del obstáculo reflector. El tiempo que ha empleado el impulso en llegar hasta el obstáculo y volver al punto de partida es el mismo que el empleado por el haz en recorrer la distancia que existe entre el origen  $E_1$  (en el que se dibuja la representación de la pulsación emitida, captada por el receptor) y  $E_2$  en el que se dibuja la pulsación reflejada. Sea este tiempo  $t_1$ , perfectamente conocido por el conocimiento de la distancia  $E_1 E_2$ , el camino recorrido por el impulso electromagnético es:  $D = ct_1$  y, teniendo en cuenta que las ondas han recorrido, en su ida y retorno, dos veces tal distancia, la correspondiente al obstáculo reflector es:  $D = ct_1/2$  proporcional al tiempo, por lo que la pantalla se puede calibrar directamente en distancias.

También el «radar» permite determinar posiciones y velocidades.

**XXIX - 27. Fundamento de la televisión**

Imaginemos una placa fotográfica impresionada por dos bandas verticales, una de ellas transparente,  $D$ , y la otra casi opaca,  $A$  (Fig. XXIX-47).

Illuminemos la placa por la parte anterior con un pincel de rayos luminosos que sigue la trayectoria  $I$ , recorriendo la superficie de izquierda a derecha. Si en una pantalla situada detrás de la placa recogemos el haz saliente, obtendremos una serie de manchas luminosas como las de la figura  $b$ .

Si en vez de una pantalla recogemos el pincel luminoso en el depósito metálico de una célula fotoeléctrica, la intensidad de la corriente variará en cada instante, adquiriendo los valores representados en la figura  $c$ , ya que el número de fotoelectrones emitidos depende de la intensidad de la luz incidente en la célula fotoeléctrica.

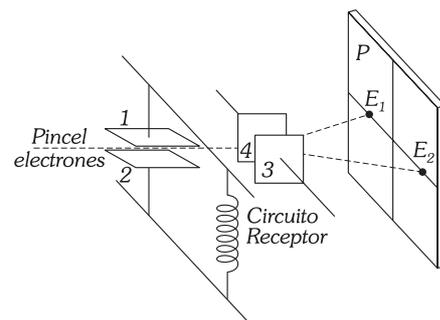


Fig. XXIX-46.- Esquema de un receptor de radar

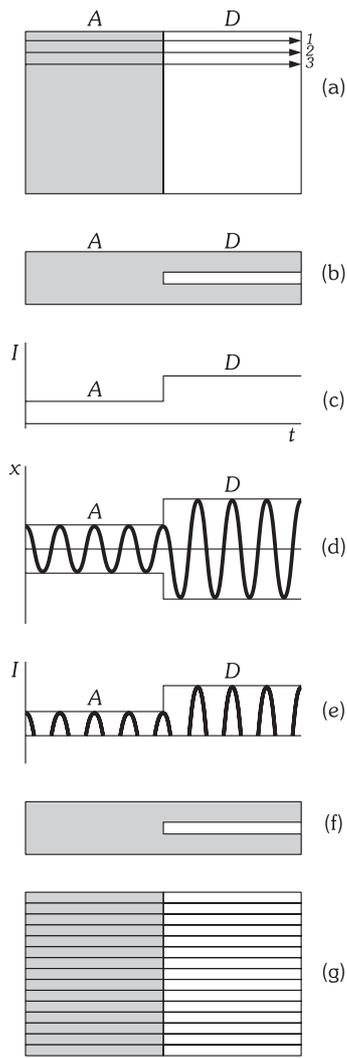


Fig. XXIX-47.- Fundamento de la televisión.

Si las corrientes de la célula, convenientemente ampliadas, modulan las ondas en un circuito oscilante, las ondas electromagnéticas lanzadas al espacio tendrán la forma de la figura *d* ( $x = \text{elongación}$ ), variando su amplitud con el mismo ritmo de ennegrecimiento de la película.

Una estación receptora capta las ondas y las detecta, estableciéndose en un circuito corrientes oscilantes, cuya intensidad viene representada por la figura *e*. Estas corrientes se emplean para provocar variaciones en la luminosidad de un sistema (osciloscopio de rayos catódicos) que lanza un pincel luminoso de intensidad variable que se «pasea» horizontalmente, sobre una pantalla; y así, el recorrido 1 de la figura superior es reproducido en la pantalla (Fig. XXIX-47-f).

Acabada la *exploración* de la línea 1 en la estación emisora, el rayo luminoso recorre la 2, extraordinariamente cercana a la 1, y luego la 3, etc., hasta explorar toda la fotografía. Si el recorrido total se hace en un tiempo menor que 1/10 de segundo, en menos de este tiempo se proyectará en la pantalla receptora el dibujo de la figura (g), no habiendo terminado la *sensación* de visión de la línea 1, cuando se origina la última, *viéndose*, en consecuencia, la fotografía completa. Las líneas de exploración 1, 2, 3, etc., deben estar extraordinariamente juntas para evitar el rayado que se observa en la figura inferior.

Si el mecanismo descrito se sucede en las diversas fotografías que constituyen un film, y tras la exploración (en la emisora) y proyección (en el receptor) de una fotografía se explora y proyecta la siguiente, con un intervalo menor de 1/10 de segundo, se reproducirá en la pantalla receptora el film original.

**XXIX - 28. El iconoscopio**

El iconoscopio inventado por M. Zwrykin es un «ojo artificial» que permite la reproducción directa de las escenas, evitando la necesidad de impresionar un film. En una de las caras de una delgadísima lámina de mica se hace un denso depósito de partículas pequeñísimas de plata pura sensibilizadas con cesio, e independientes unas de otras. La otra cara de la lámina se reviste de un depósito continuo de plata pura.

Este *mosaico fotoeléctrico* hace un papel análogo al de la retina en la visión. Sobre la lámina de mica se proyecta por medio de un sistema óptico la escena a transmitir  $-AB-$  formándose la imagen real  $A'B'$  en el mosaico fotoeléctrico. (Fig. XXIX-48a)

La emisión de electrones de las pequeñísimas células fotoeléctricas, que son recogidos por la película conductora *C* depositada sobre la superficie interior del tubo, hace que las partículas sensibles se carguen más o menos positivamente según la intensidad de la luz. Ellas, con la lámina continua de plata, funcionan como condensadores, quedando la lámina de plata cargada negativamente por el fenómeno de inducción. Si a la armadura positiva de un condensador se le comunica electricidad negativa hasta neutralizar su carga, los electrones de la armadura negativa van a tierra, estableciéndose instantáneamente, en el hilo de contacto *ET* (Fig. XXIX-48-b) una corriente eléctrica.

El efecto descrito se produce en el iconoscopio, en el que el mosaico fotosensible está introducido en un osciloscopio de rayos catódicos que exploran el mosaico. Las diversas células, cargadas positivamente, son exploradas una después de otra por el haz de rayos catódicos que emerge del cátodo, y que se pasea sobre la fotografía en líneas horizontales cada vez más bajas por medio de dos circuitos deflectores análogos a los de la Fig. XXIX-43. Una a una, captan las células los electrones necesarios para su neutralización y, en consecuencia, por el conductor *ET* circulan un número de ellos igual al de los captados, y estableciéndose sucesivas corrientes de intensidad proporcional a la de la luz recibida por cada *pieza* del mosaico.

Las corrientes que circulan por *ET* son las que modulan la emisión de ondas electromagnéticas.

La exploración total del mosaico debe hacerse en un tiempo menor de 1/10 de segundo, para recomenzar de nuevo.

**XXIX - 29. Tubo de Braum (kinescopio)**

Después de captar, detectar y ampliar las ondas electromagnéticas emitidas, tenemos en el circuito receptor corrientes moduladas según la intensidad luminosa de los sucesivos puntos de la imagen transmitida. Estas corrientes modifican el potencial de la rejilla situada delante del cátodo de un osciloscopio de rayos catódicos. Cuando el potencial de rejilla es fuertemente negativo, no pasan electrones a través de su orificio. Las variaciones de ese potencial modifican la intensidad (número de electrones) de la corriente electrónica y, así, conforme el potencial negativo disminuye, la intensidad de los rayos catódicos es mayor.

Dos circuitos de barrido horizontal y vertical, que en el osciloscopio de deflexión magnética o *KINESCOPIO* son dos pares de bobinas Helmholtz, hacen que el haz de electrones recorra una pantalla fluorescente en sucesivas líneas horizontales cada vez más bajas produciéndose más o menos luminosidad en cada uno de sus puntos según sea la intensidad de la corriente electrónica. Si el *recorrido completo* de la pantalla se hace en un tiempo menor de 1/10 de segundo, para recomenzar de nuevo, se proyectará la escena captada en el mosaico fotosensible del iconoscopio.

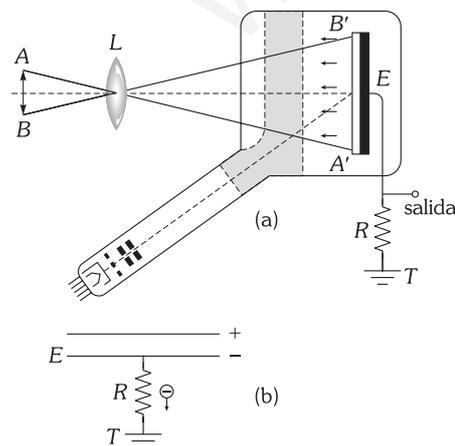


Fig. XXIX-48.- Iconoscopio.

Los circuitos cronométricos de exploración (iconoscopio) y proyección (tubo de Braum) deben estar en sincronización.

### E) DISPOSITIVOS CON SEMICONDUCTORES

#### XXIX – 30. Diodo de unión

Los diodos de semiconductores o diodos de unión son dispositivos cuyas características se derivan de las especiales propiedades que posee la zona de unión de dos semiconductores extrínsecos, uno tipo *P* y otro tipo *N*. En un mismo cristal semiconductor se consigue esa unión, que se denomina UNIÓN PN, mediante diversas técnicas, de las que las principales son la difusión de impurezas y el bombardeo iónico.

En el proceso de difusión se parte de un substrato de silicio (o germanio), dopado previamente con impurezas donadoras y se le somete a temperaturas de aproximadamente 1 000° C en una atmósfera con una fuerte concentración de átomos de un elemento aceptor en estado gaseoso. La impureza aceptor penetra en la estructura cristalina del silicio *N* hasta una profundidad controlada mediante la propia temperatura y el tiempo que dura la difusión, de forma que en la zona que ha penetrado compensa y supera la concentración de impurezas donadoras, convirtiéndola así en una región tipo *P*.

Para obtener una geometría conveniente de la unión se provoca en primer lugar la formación sobre el substrato de una capa de SiO<sub>2</sub>, a través de la cual la difusión de impurezas es muy lenta, y a continuación se abre en esa capa, por un procedimiento fotográfico, una ventana de la forma elegida por la que se difundirán las impurezas de tipo distinto a las del substrato. El proceso continúa con el depósito de láminas metálicas a las que se sueldan los terminales, obteniéndose una estructura como la indicada en la Fig. XXIX-49, y concluye con el encapsulado protector del dispositivo.

En el proceso de bombardeo iónico se disparan sobre la ventana abierta en la capa de óxido de silicio, iones de átomos aceptores fuertemente acelerados mediante campos electrostáticos. Este procedimiento permite un mayor control del dopado, por lo que proporciona dispositivos con una gran uniformidad de características.

Aunque las dimensiones típicas de los primeros dispositivos de semiconductores eran las indicadas en la Fig. XXIX-49, su tamaño ha decrecido exponencialmente con el tiempo de manera que en la actualidad se construyen de unas pocas décimas de micra. Se espera que en 20 ó 30 años se desarrolle plenamente la nanotecnología con la utilización de dispositivos de tamaños moleculares, de unos pocos nanómetros.

Veamos lo que ocurre en una unión PN antes de conectarla a un circuito. A una temperatura determinada, en la región *N* existen electrones de conducción procedentes de la ionización de las impurezas y de la formación de pares electrón-hueco, y existen además huecos que provienen de este último proceso; los electrones son los portadores mayoritarios y los huecos los minoritarios. En la región *P* los huecos son los mayoritarios y los electrones los minoritarios.

Ambos tipos de portadores de carga pueden moverse a través de la estructura cristalina, de forma que en la zona de la unión se produce una difusión de electrones de la región *N* a la *P*, dejando en la primera iones con carga positiva. Los electrones que pasan a la zona *P* se recombinan con huecos existentes en ella produciendo iones negativos. Este proceso no alcanza a la totalidad de ambas regiones debido a que, conforme los electrones se difunden de *N* a *P*, aparece un campo eléctrico, producido por los iones, que se opone a la difusión (Fig. XXIX-50) y merced al cual se alcanza una situación de equilibrio.

En el equilibrio existen en el cristal dos REGIONES NEUTRAS a ambos lados de la unión en las que el campo eléctrico es prácticamente nulo y el potencial constante (Fig. XXIX-51), y una ZONA DE TRANSICIÓN o capa vacía que efectivamente está vacía de huecos y de electrones de conducción, que tiene por tanto una densidad de carga neta no nula debida a los iones de la red y en la que existe un fuerte campo eléctrico, con valores típicos de la intensidad del orden de 10<sup>4</sup> V/cm. El potencial en la zona de transición no es constante sino que varía entre sus valores en las regiones neutras (Fig. XXIX-51); como se aprecia en esta figura, el potencial en el lado *N* es más alto por corresponder a una región más positiva.

#### XXII – 31. Polarización del diodo de unión

Se dice que un diodo está polarizado cuando se aplica una diferencia de potencial externa entre sus terminales.

La POLARIZACIÓN DIRECTA se obtiene cuando se conecta el polo positivo de una batería al semiconductor *P* y el negativo al *N* (Fig. XXIX-52-a). En estas condiciones existe un campo eléctrico a lo largo de todo el dispositivo que favorece la difusión de portadores mayoritarios. Si la tensión externa se aumenta a partir de cero, un número cada vez mayor de huecos es empujado desde el lado *P* hacia la unión, y otro también mayor cada vez de electrones lo es desde el lado *N* hacia la unión.

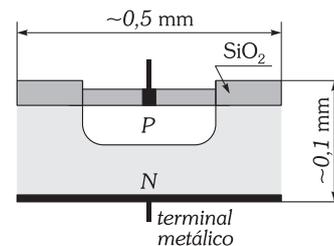


Fig. XXIX-49.- Estructura de un diodo de unión obtenido por difusión de impurezas.

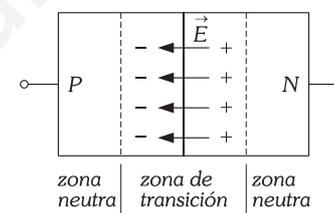


Fig. XXIX-50.- La difusión de portadores de carga de una región a otra origina en la unión un campo eléctrico que se opone a esa difusión.

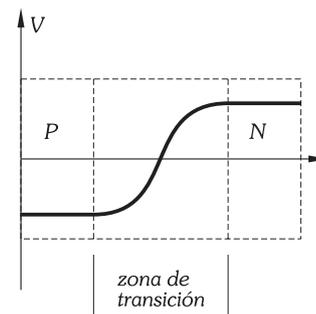


Fig. XXIX-51.- En el equilibrio el potencial es constante en las regiones neutras y más positivo en la región *N*.

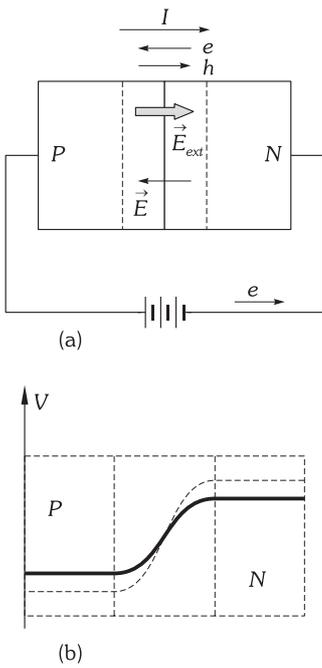


Fig. XXIX-52.- a) Polarización directa del diodo. b) Efecto de la polarización directa sobre el potencial.

Las consecuencias son que la barrera de potencial queda rebajada respecto de su altura en la situación de equilibrio (Fig. XXIX-52-b), disminuye la anchura de la zona de transición y, a través de la unión, se obtiene una corriente de portadores mayoritarios en ambos sentidos que crece rápidamente para incrementos pequeños de la tensión externa. El voltaje de polarización tiene un valor límite por encima del cual la intensidad de corriente calienta excesivamente la unión y el semiconductor queda dañado de forma permanente.

En la POLARIZACIÓN INVERSA el lado P está a potencial negativo respecto al N (Fig. XXIX-53-a). El campo externo aplicado se opone a la difusión de portadores mayoritarios, éstos son alejados de la unión con lo que la anchura de la zona de transición aumenta y crece el valor de la barrera de potencial (Fig. XXIX-53-b). Aumentando la tensión externa a partir de cero, es suficiente un valor muy pequeño para que el campo resultante en el semiconductor anule completamente la difusión de portadores mayoritarios a través de la unión.

Existe, sin embargo, una pequeña corriente de portadores minoritarios (indicada con flechas en la Fig. XXIX-53-a), mantenida por la producción de pares electrón-hueco en todo el cristal, que es prácticamente independiente de la tensión inversa. Los valores típicos de la corriente inversa están, a temperatura ambiente, en el rango de los microamperios.

Una característica importante de la unión PN en polarización inversa es su capacidad. Con este tipo de polarización la zona de transición está vacía de portadores móviles y flanqueada por dos zonas con cargas de distinto signo, por lo cual, se comporta como un condensador, cuya capacidad además puede ser considerable ya que la constante dieléctrica,  $\epsilon$ , es 16 para el germanio y 12 para el silicio. Por otra parte, una disminución del voltaje de polarización produce una reducción de la zona vacía de portadores; de la misma forma, un aumento de esa tensión ocasiona un ensanchamiento de dicha zona. Como la capacidad de un condensador depende de la distancia entre armaduras, la unión PN puede emplearse como condensador variable controlado por una tensión, denominándose VARICAP al diodo semiconductor construido con esa finalidad.

**XXII - 32. El diodo de unión como rectificador. Curva característica**

Como acabamos de ver, el diodo de unión, cuyo símbolo en circuitos es el de la Fig. XXIX-54, muestra un comportamiento asimétrico en lo que respecta al paso de corriente, que recuerda al de la válvula diodo. En efecto, en polarización directa permite el paso de corriente presentando una resistencia baja y en polarización inversa su resistencia es muy elevada y la intensidad de corriente muy pequeña.

Este comportamiento se refleja en la curva experimental tensión-intensidad de las Fig. XXIX-54 y XXIX-55, en la primera de las cuales hay que advertir las distintas escalas empleadas para polarización directa e inversa. Las curvas experimentales responden muy aproximadamente a la ecuación V-I del diodo ideal, que incluimos sin demostrar:

$$I = I_s (\epsilon^{eV/kT} - 1)$$

en la que  $I_s$  se denomina corriente de saturación del diodo de unión y  $\epsilon$  es la base de los logaritmos neperianos.

Esta ecuación no da cuenta del aumento brusco de intensidad que se produce en polarización inversa, cuando se alcanza la tensión ruptura. El efecto se debe al fenómeno de MULTIPLICACIÓN EN AVALANCHA, que tiene la siguiente explicación: el campo eléctrico en la zona de transición aumenta al aumentar la tensión inversa; si la intensidad de campo alcanza valores del orden de  $10^7$  V/m, los

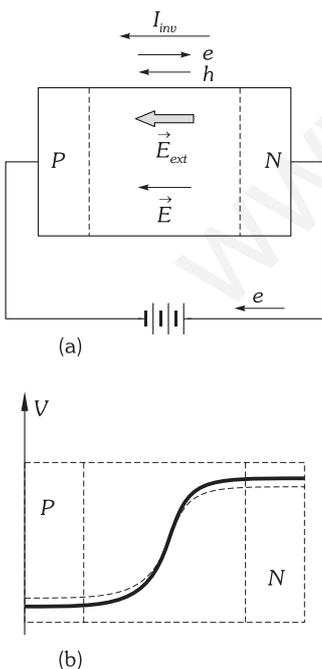


Fig. XXIX-53.- a) Polarización inversa del diodo. b) Efecto de la polarización inversa sobre el potencial.

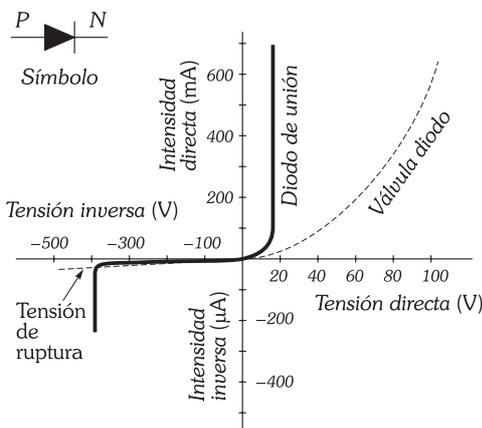


Fig. XXIX-54.- Símbolo del diodo de unión y curva característica de un diodo rectificador, comparada con la de un diodo de vacío (en línea discontinua).

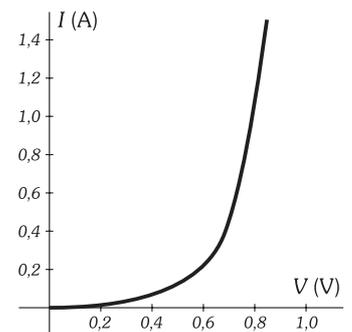


Fig. XXIX-55.- Zona de polarización directa de la curva anterior con escala ampliada.

portadores minoritarios son fuertemente acelerados al atravesar esa zona, adquiriendo una energía que es suficiente para arrancar electrones de valencia de los átomos de la red y producir así pares electrón-hueco. Si estos portadores secundarios producidos adquieren también energía suficiente, producirán nuevos portadores, etc. Una vez iniciada la multiplicación en avalancha, cualquier pequeño aumento de la tensión inversa provoca un gran incremento de la intensidad de corriente, que puede llegar a fundir el semiconductor. Si esto no ocurre, al reducir el voltaje aplicado por debajo de la tensión de ruptura el diodo vuelve a comportarse con normalidad; de hecho el efecto de avalancha y otro similar que comentaremos en la cuestión siguiente (efecto Zener) son aprovechados para el funcionamiento de ciertos diodos de aplicaciones especiales.

Las configuraciones típicas del circuito rectificador de media onda y de onda completa son las de las Fig. XXIX-56 y XXIX-57, y sus resultados, los de las Fig. XXIX-22 y XXIX-24.

En la rectificación de corriente alterna, los diodos de unión presentan grandes ventajas respecto de los de válvulas. La primera de ellas es el tamaño mucho más reducido de los primeros; otra importante es la ausencia de un filamento que haya que calentar, además, su resistencia eléctrica es mucho menor con lo que la energía perdida en forma de calor es menor y el rendimiento más elevado.

Estas características han hecho que en la actualidad prácticamente todas las funciones del diodo vacío hayan pasado a ser realizadas por diodos semiconductores.

**XXII - 33. Diodos especiales**

Además de los ya mencionados diodos varicap y rectificadores, existe una gran variedad de diodos fabricados para realizar multitud de funciones distintas. De ello da idea el hecho de que la producción global de diodos hace ya una década que superó los diez mil millones de unidades al año. Comentamos a continuación algunos de los tipos existentes.

**DIODOS METAL-SEMICONDUCTOR:** la capacidad de la unión PN limita su funcionamiento como rectificador al caso de frecuencias bajas. Para frecuencias elevadas se usa el rectificador de *punta de contacto*, que en los primitivos receptores de radiodifusión consistía en una punta metálica o *barba de gato* en contacto con un trozo de galena, pirita de hierro u otras determinadas sustancias, que hoy se han sustituido por germanio o silicio.

En el rectificador de germanio el *elemento activo* es este elemento, al que se han añadido impurezas donadoras, con lo que funciona como semiconductor de tipo N, es decir, conduciendo la corriente eléctrica por electrones. Con el germanio impurificado, se hacen plaquitas de pequeña superficie y espesor que realizan el contacto con la *barba de gato* que está constituida por un fino alambre de wolframio o de oro terminado en punta (Fig. XXIX-58).

El «trabajo de extracción» de los electrones en la superficie del germanio es menor que el correspondiente al wolframio, pasando electrones del primero al segundo, quedando en la superficie del germanio un déficit de electrones y originándose así una unión PN con una zona de transición de un espesor del orden de la milésima a cien milésima de mm. Si se comunica potencial positivo a la *barba de gato* (*funcionamiento directo*) se elimina esta zona, la corriente pasa y el rectificador ofrece muy poca resistencia; si, por el contrario, la *barba de gato* es negativa (*funcionamiento inverso*) la zona de transición aumenta de espesor, ofreciendo el rectificador una gran resistencia al paso de la corriente.

En los *rectificadores de área grande o metálica* (DIODOS SCHOTTKY) el contacto entre metal y semiconductor no es un punto sino una superficie. Están constituidos en esencia por una unión metal-silicio tipo N; su punta de contacto en vez de estar conectada al silicio, lo está a una superficie metálica depositada sobre una fina capa de óxido obtenida durante el proceso de dopado. Son diodos de mejor rendimiento que los anteriores, incluso para las frecuencias más elevadas.

Hay que hacer notar que es posible tener uniones metal-semiconductor que sean óhmicas, es decir, que no rectifican la corriente alterna. De este tipo son las que se establecen entre las zonas P y N del diodo y los terminales metálicos que las conectan al circuito exterior.

**FOTODIODOS Y DIODOS LED:** cuando incide luz sobre una unión PN que actúa al descubierto, la energía de los fotones puede promocionar electrones de la banda de valencia a la de conducción originando pares electrón-hueco. La contribución de estos portadores a la intensidad de corriente sólo es importante si el diodo está en polarización inversa, y los diodos que aprovechan este efecto se denominan *fotodiodos* (Fig. XXIX-59). Estos dispositivos transforman por tanto energía luminosa en eléctrica.

El proceso inverso se verifica cuando en la unión se recombinan electrones y huecos, con el diodo polarizado directamente. La energía liberada por un electrón que pasa de la banda de conducción a la de valencia se emite en forma de calor, de radiaciones infrarrojas o de luz visible (Fig. XXIX-60). Para la obtención de radiación luminosa se emplean diodos de arseniuro de galio, con fósforo u otras sustancias en función del color deseado en la emisión. A estos diodos se les denomina LED (light emitting diode).

**DIODOS ZENER.** Hemos visto que en los diodos de unión se puede llegar a un valor de la tensión inversa en que la intensidad aumenta bruscamente debido al efecto de multiplicación en avalancha. Se puede obtener la misma relación entre la tensión inversa y la intensidad, de forma más

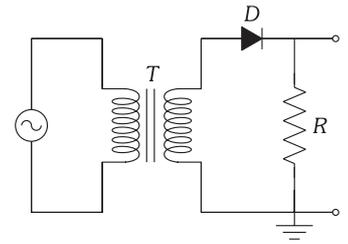


Fig. XXIX-56.- Rectificador de media onda alimentado con transformador.

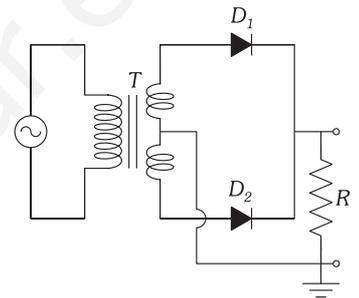


Fig. XXIX-57.- Rectificador de onda completa alimentado con transformador.

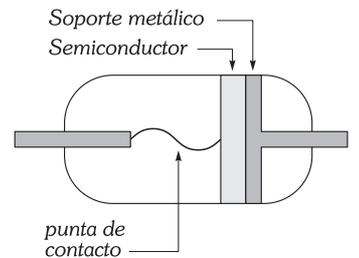


Fig. XXIX-58.- Rectificador de punta de contacto.

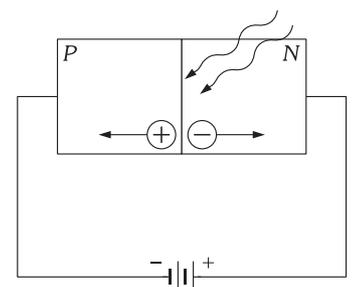


Fig. XXIX-59.- En un fotodiodo la iluminación produce en aumento de la corriente inversa.

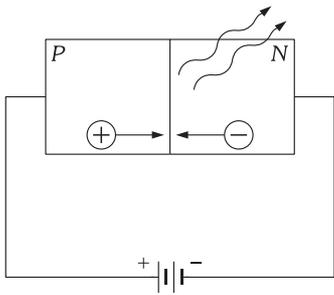


Fig. XXIX-60.- En el diodo LED la recombinación de portadores produce emisión de luz visible.

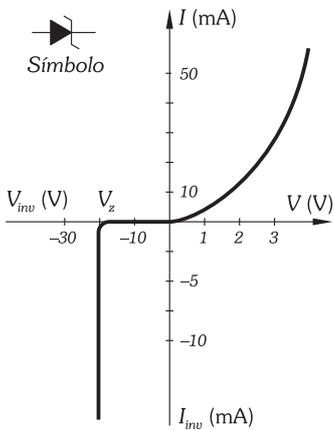


Fig. XXIX-61.- Símbolo y curva característica de un diodo zener,  $V_z$  la tensión Zener del diodo.

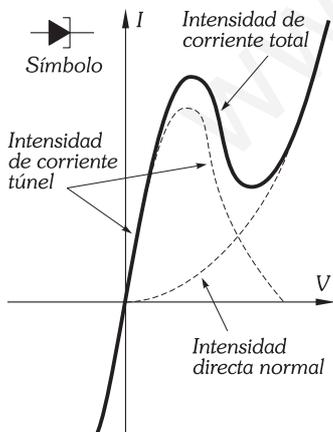


Fig. XXIX-62.- Símbolo y curva característica de un diodo túnel.

controlada y mucho más brusca, mediante el efecto Zener (Fig. XXIX-61). En diodos muy fuertemente dopados el campo en la unión es muy intenso y la anchura de la zona de transición muy pequeña; los portadores de carga la atraviesan en un tiempo demasiado corto para producir portadores secundarios en cantidad apreciable. Sin embargo, si la intensidad de campo alcanza valores del orden de  $5 \times 10^7$  V/m, la fuerza que ejerce sobre los electrones de valencia es capaz de arrancarlos directamente de sus enlaces, produciendo pares electrón-hueco que contribuyen a la corriente inversa, sin necesidad de la intervención de un portador primario. El fenómeno puede explicarse como un efecto túnel mecanocuántico a través de una barrera de potencial que tiene a ambos lados niveles energéticos libres para los electrones.

Al igual que ocurría en la multiplicación en avalancha, el fenómeno no es necesariamente destructor de la unión, sino que al volver a tensiones menores que la tensión Zener,  $V_z$ , el funcionamiento del diodo es el normal. La curva característica de estos diodos es como la de la Fig. XXIX-61.

Los diodos Zener se emplean principalmente como fuente de tensión de referencia y como reguladores de tensión en instrumentos electrónicos, fabricándose para trabajar a tensiones de hasta 200 V y capaces de disipar potencias de más de 10 W, admitiendo por tanto intensidades inversas considerables.

**DIODOS TÚNEL.** El diodo túnel o diodo Esaki (por el nombre de su inventor) es básicamente un diodo de unión pero con ambas zonas muchísimo más dopadas que en los diodos normales. El gran porcentaje de impurezas que contiene permite disponer de grandes cantidades de portadores mayoritarios; la barrera de potencial en ausencia de tensión externa es muy débil. En los diodos túnel el efecto Zener se puede producir a tensiones inversas muy bajas, e incluso a cero voltios; la unión puede soportar intensas corrientes en polarización inversa y tender al funcionamiento normal al aplicar un pequeño voltaje directo. Bastan unas décimas de voltio para eliminar el efecto Zener y reducir la corriente; si se sigue aumentando la tensión en polarización directa la corriente vuelve de nuevo a intensificarse (Fig. XXIX-62).

La característica que hace útiles estos diodos es la zona de la curva de pendiente negativa; en esa zona al aumentar la tensión disminuye la intensidad, lo que se usa provechosamente en osciladores y amplificadores.

**PROBLEMAS: 17 al 21.**

**XXII - 34. El transistor bipolar**

Un dispositivo semiconductor se llama bipolar si conduce mediante electrones y huecos, como la unión PN por ejemplo. Si la conducción es realizada por un solo tipo de portadores el dispositivo se denomina *unipolar*; es el caso de los transistores de efecto de campo (FET) que comentaremos en la cuestión XXIX-38.

El transistor bipolar está formado por dos uniones PN que interaccionan entre sí, y posee tres terminales conectados a sus tres zonas (Fig. XXIX-63a), que se denominan EMISOR (E) y COLECTOR (C) las extremas y BASE (B) la intermedia, estando esta última dopada con impurezas de distinto tipo que las de emisor y colector. Según sea el tipo de impurezas se tendrá un transistor PNP o bien NPN, cuyos símbolos en los circuitos son los de la figura XXIX-63b.

La técnica de fabricación de transistores es similar a la de las uniones PN. En un substrato, tipo N por ejemplo, se provoca la formación de una capa de óxido, se abre una ventana en esa capa y se difunden a través de ella impurezas aceptoras para obtener una zona P a la que se conecta un

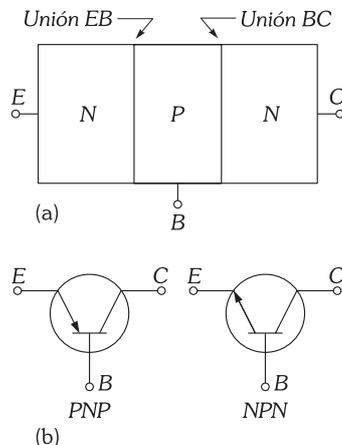


Fig. XXIX-63.- a) Las tres zonas del transistor están separadas por dos uniones PN. Los terminales se conectan al emisor (E), a la base (B) y al colector (C). b) Símbolo de los transistores PNP y NPN.

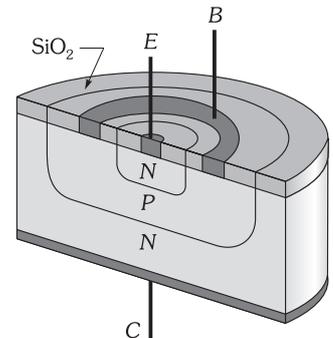


Fig. XXIX-64.- Estructura de un transistor NPN.

terminal metálico. Unas nuevas oxidación, apertura de ventana, difusión de impurezas donadoras y conexión de un terminal metálico, completan el proceso que da como resultado una estructura como la de la fig. XXIX-64. Para la fabricación de un transistor PNP se realizan los mismos pasos partiendo de un substrato con impurezas aceptoras.

**XXII – 35. Funcionamiento del transistor y parámetros característicos**

El transistor es un dispositivo de tres terminales en el que, para medir diferencias de potencial, tomaremos uno de ellos como referencia y lo supondremos conectado a potencial cero (tierra). Según que conectemos a tierra uno u otro tendremos las configuraciones de *emisor común*, *base común* o *colector común*, de los que las dos primeros son las más utilizadas en circuitos electrónicos. Existen además cuatro formas de polarizar el transistor según que apliquemos tensiones continuas directa o inversamente a cada una de las dos uniones. En *el modo normal* de funcionamiento la primera unión se polariza directamente y la segunda de forma inversa.

Estudiaremos el comportamiento de un asistor NPN en configuración de base común y en modo normal (Fig. XXIX-65). En este caso los electrones son portadores mayoritarios en la región del emisor y, por estar la primera unión polarizada directamente, son inyectados en la base. Una fracción de esos electrones se recombinan con huecos de la base, y el resto son lanzados hacia el colector por el campo existente en la zona de transición de la segunda unión, que está en polarización inversa, constituyendo la corriente de colector  $I_C$  (Fig. XXIX-66). El transistor en estas condiciones puede ser utilizado como una fuente de corriente (corriente de colector) controlada por una tensión (tensión base-emisor  $V_{BE}$ ).

Interesa que la mayor parte de los electrones inyectados en la base la atraviesen sin recombinarse. Esto se consigue haciendo la base muy estrecha, impurificándola no uniformemente durante la fabricación del transistor, de forma que las impurezas ionizadas produzcan en ella un campo eléctrico que favorezca la difusión de electrones, y por fin, dopándola mucho más débilmente que el emisor. Con esto los electrones emplean menos tiempo en atravesarla, son empujados por el campo existente en ella y encuentran pocos huecos con los que recombinarse.

Con todo ello, la corriente de base es muy pequeña y las de emisor (entrada del circuito) y colector (salida) prácticamente iguales. Como además la primera unión está polarizada directamente y la tensión  $V_{BE}$  es pequeña, y la segunda inversamente, con una tensión  $V_{CB}$  que puede ser grande, el producto  $I_C V_{CB}$  será mayor que el  $I_E V_{BE}$ ; se puede obtener con este montaje una relación de la potencia de salida a la de entrada, es decir, una GANANCIA EN POTENCIA, mayor que la unidad.

Además de la ganancia en potencia, son parámetros característicos de un transistor la GANANCIA EN TENSIÓN (relación de la de salida a la de entrada) y la GANANCIA EN CORRIENTE, que en el caso de la configuración de base común es  $\alpha = I_C/I_E$  y en la de emisor común  $\beta = I_C/I_B$ . Estas dos últimas están relacionadas, en efecto: puesto que  $I_E = I_C + I_B$  se tiene:

$$\beta = \frac{I_C}{I_B} = \frac{I_C}{I_E - I_C} = \frac{I_C/I_E}{1 - I_C/I_E} \Rightarrow \beta = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

Teniendo en cuenta que  $I_C$  es siempre algo menor que  $I_E$  resulta que  $\alpha$  es siempre menor que la unidad, por tanto con la configuración de base común no se obtiene ganancia sino pérdida de corriente. Si se pretende obtener a la salida una intensidad mayor que en la entrada hay que recurrir a la configuración de emisor común, ya que los valores típicos de  $\alpha$  son aproximados a 0,98 con lo que resulta  $\beta \approx 49$  y, por tanto,  $I_C \approx I_B$ .

**XXII – 36. Curvas características. Recta estática de carga**

Si pretendemos realizar el estudio del circuito de la Fig. XXIX-66, nos entramos con cinco incógnitas:  $I_E, I_B, I_C, V_{BE}$  y  $V_{CE}$ , y con unos valores conocidos de  $V_{EE}, V_{CC}, R_E$  y  $R_C$ . Debemos expresar aquellas en función de éstos últimos. Las intensidades verifican:

$$I_E = I_C + I_B \tag{7}$$

y resolviendo las dos mallas del circuito obtenemos:

$$V_{BE} = V_{EE} - I_E R_E \tag{8} \quad V_{CB} = V_{CC} - I_C R_C \tag{9}$$

Tenemos por tanto 3 ecuaciones y 5 incógnitas. Podemos resolver el problema de forma gráfica recurriendo a las *curvas características* del transistor, que se pueden determinar experimentalmente pero que generalmente son proporcionadas por el fabricante del dispositivo.

Para el caso que nos interesa las curvas que deberemos consultar son la que da la relación  $(V_{BE}, I_E)$  de la unión emisor-base, y la familia de curvas de  $I_C$  frente a  $V_{CB}$  para valores constantes de la corriente de emisor  $I_E$ . Su aspecto típico es el de las Fig. XXIX-67 y XXIX-68

Representando la ecuación (8) en la primera de ellas tenemos una recta que corta a los ejes en:  $V_{BE} = V_{EE}$  ( $I_E = 0$ ) y en  $I_E = V_{EE}/R_E$  ( $V_{BE} = 0$ ). La intersección de esta recta con la curva característica es un punto cuya proyección sobre los ejes nos proporciona los valores  $I_{E1}$ , y  $V_{BE1}$ , de dos de las incógnitas.

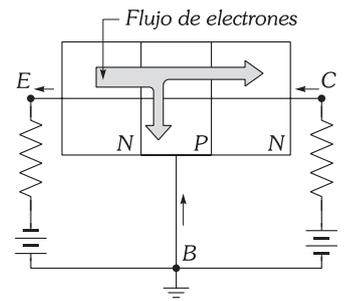


Fig. XXIX-65.- En el modo normal de funcionamiento del transistor NPN en base común la unión de emisor está polarizada directamente y la de colector de forma inversa.

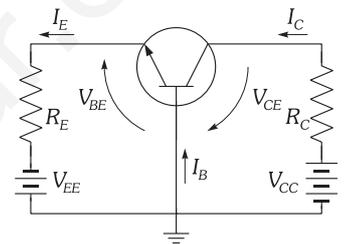


Fig. XXIX-66.- Sentido de las intensidades y tensiones en el circuito de la figura anterior. Las tensiones que polarizan ambas uniones son  $V_{EE}$  y  $V_{CC}$ .

Si representamos la ecuación (9) en la Fig. XXIX-68, obtenemos la *recta estática de carga* que corta a los ejes en  $V_{CB} = V_{CC}$  ( $I_C = 0$ ) y en  $I_C = V_{CC}/R_C$  ( $V_{CB} = 0$ ). De entre esta familia de curvas debemos seleccionar la que corresponde al valor  $I_{E,1}$ , obtenido en la gráfica anterior. La intersección con la recta de carga es el punto de trabajo del transistor, que proyectado sobre los ejes, nos da los valores  $I_{C,Q}$  y  $V_{CB,Q}$  de otras dos de las incógnitas.

La quinta incógnita,  $I_B$ , se obtiene de la ecuación (7) una vez conocidas las corrientes de emisor y colector.

En lo dicho hasta ahora del transistor bipolar se observa un gran paralelismo entre el funcionamiento de este dispositivo y el del triodo de vacío. Efectivamente, existe correspondencia entre el papel que desempeñan el cátodo, la rejilla o la placa y el del emisor, la base o el colector, respectivamente (Fig. XXIX-69). El cátodo (emisor) emite electrones que recibe la placa (colector), estando su flujo controlado por la rejilla (base). No obstante esta equivalencia es sólo aproximada. La principal diferencia existe entre la rejilla y la base; mientras que aquella no absorbe electrones, acabamos de ver que en la base se tiene una corriente no nula, de hecho, las resistencias típicas son de algunos megaohmios en la rejilla y de aproximadamente 2 000 ohmios en la base. Por otro lado la ganancia en corriente  $\beta$ , que se corresponde con el factor de amplificación  $\mu$ , es una relación entre intensidades, mientras que  $\mu$  lo es entre tensiones. A pesar de estas diferencias siempre es útil la comparación entre ambos tipos de dispositivos.

**XXII - 37. Funcionamiento del transistor como amplificador de señales**

Cuando entre los terminales de entrada de un transistor se incluye en serie una señal alterna, ésta se recoge en la salida modificada en amplitud.

Consideremos el transistor NPN, en configuración de emisor común, de la Fig. XXIX-70, en la que se ha prescindido de las resistencias que, junto con  $V_{BB}$  y  $V_{CC}$ , lo sitúan en el punto de trabajo. En la entrada, a la tensión continua que polariza directamente la unión base-emisor se superpone la tensión alterna  $v_e = v_{e0} \text{ sen } \omega t$ ; en la salida se incluye la resistencia de carga  $R_L$ .

Cuando la tensión  $V_{BE}$  crece a causa de  $v_e$  (por ejemplo entre  $t=0$  y  $t=T/4$ , siendo  $T$  el período de la señal), a través de la unión NP entre emisor y base, en polarización directa, se produce una mayor inyección de electrones aumentando tanto  $I_E$  como  $I_B$ , y por lo tanto  $I_C$ . Si  $V_{BE}$  disminuye (entre  $t=T/4$  y  $t=3T/4$ , por ejemplo) y  $v_{e0}$  es menor que  $V_{BB}$ , la unión base-emisor sigue en polarización directa pero las corrientes de emisor y base decrecen, haciéndolo también  $I_C$ . Es evidente pues que las modificaciones de la tensión de entrada hacen cambiar la intensidad y consecuentemente la tensión en la salida.

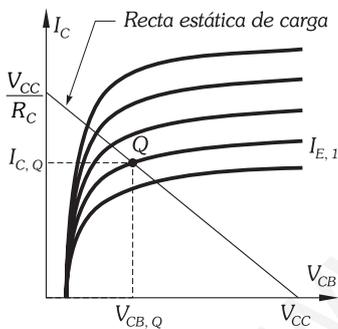


Fig. XXIX-68.- Familia de curvas ( $V_{CB}$ ,  $I_C$ ) para distintos valores de la corriente de emisor.

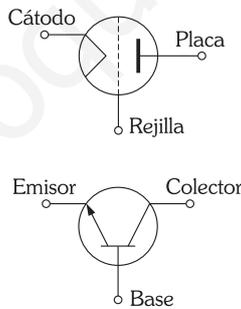


Fig. XXIX-69.- Las funciones que desempeñan las tres zonas del transistor son similares a las de los tres elementos del triodo.

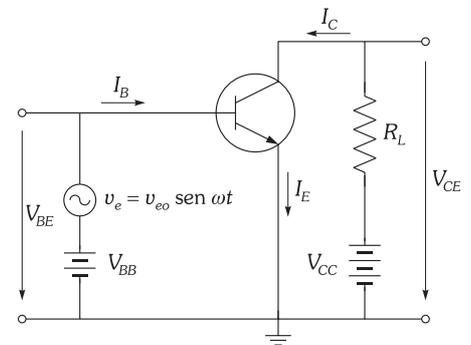


Fig. XXIX-70.- Etapa amplificadora con transistor NPN en configuración de emisor común.

Después de filtrar de  $V_{CE}$  la componente de continua introducida por las baterías de polarización, se obtiene una señal que responde a la ecuación  $v_s = -v_{s0} \text{ sen } \omega t$ . El signo negativo se debe a que, por ser  $V_{CE} = V_{CC} - I_C R_L$ , el aumento de  $V_{BE}$ , que provoca un aumento de  $I_C$ , lleva aparejada una disminución de  $V_{CE}$ ; en consecuencia la señal de salida está invertida en fase respecto de la de entrada (Fig. XXIX-71).

Al tratarse de señales, las ganancias en intensidad, tensión y potencia se calculan con los valores máximos, o con los eficaces, de dichas señales, y no coinciden con las ganancias calculadas en corriente continua. La ganancia en potencia, y por tanto en energía, que se produce en las señales se obtiene a costa del trabajo de la batería  $V_{CC}$  en el circuito de colector.

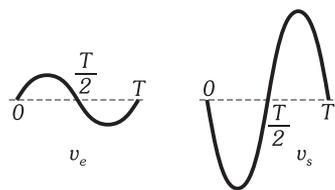


Fig. XXIX-71.- El circuito de la figura anterior produce una señal de salida amplificada e invertida en fase respecto de la de entrada.

**XXII - 38. Transistor de efecto campo. FET**

Se ha dicho al introducir los transistores que son dispositivos bipolares por conducir mediante electrones y huecos. Existen sin embargo transistores que lo hacen exclusivamente mediante un

tipo de portadores, y de entre ellos vamos a analizar brevemente el caso del transistor de efecto de campo, FET, de unión. Su estructura y su símbolo son los de la Fig. XXIX-72.

Tiene tres terminales que se denominan *fuerza (S)*, *drenaje (D)* y *puerta (G)*, y entre drenaje y fuerza existe un canal, que es de tipo *N* en el caso de la figura. Basta cambiar los símbolos *N* y *P* para tener el esquema de un FET de canal *P*.

Cuando el drenaje se mantiene a potencial positivo respecto de la fuerza, y la tensión puerta-fuerza  $V_{GS}$  es cero, los electrones circulan por el canal *N* de *S* a *D* constituyendo la corriente de drenaje; en el FET de canal *N* no hay corriente de huecos. Si la tensión  $V_{GS}$  se hace negativa, las dos uniones *PN* que hay entre la fuerza y ambas partes de la puerta se encuentran polarizadas inversamente, y las anchuras de sus capas vacías de portadores se agrandan respecto del caso  $V_{GS} = 0$ . Conforme  $V_{GS}$  se hace más negativo las regiones vacías se ensanchan, el canal se estrecha y la corriente de drenaje disminuye. Si  $V_{GS}$  se hace lo suficientemente negativo las regiones vacías se superponen, desaparece el canal y la corriente de electrones de fuerza a drenaje se anula.

Se observa de lo dicho que *el FET de canal N se comporta exactamente como un triodo de vacío*, en el cual el flujo de electrones del cátodo a la placa se puede reducir hasta cero mediante el potencial negativo aplicado a la rejilla. Los principales usos del FET son los del triodo, es decir, amplificador de tensión, oscilador, etc., aunque frente a las válvulas presenta todas las ventajas de los dispositivos de semiconductores: baja tensión de trabajo, consumo mínimo, ausencia de filamento, volumen pequeñísimo, mayor solidez y vida mucho más larga.

**PROBLEMAS: 22 al 25.**

**F) CONMUTACIÓN Y PUERTAS LÓGICAS**

**XXII - 39. El transistor como conmutador**

Por *CONMUTACIÓN* se entiende el estudio de los sistemas que permiten el análisis y el tratamiento de la información. Los más utilizados son los sistemas con dos estados que pueden ser representados por una variable binaria que sólo puede formar los valores convencionales 1 y 0; éstos representan la realización o no de una proposición, en general el estado 1 representa la verdad de la proposición (todo) y el estado 0 la falsedad de la misma (nada).

Son varios los dispositivos utilizados en conmutación, bien sean de tipo sensible a dos estados de corriente (presencia: 1, ausencia: 0), como los dispositivos mecánicos (interruptor cerrado: 1, abierto: 0), eléctricos (lámpara encendida: 1, apagada: 0), o bien los sensibles a dos estados de tensión (por ejemplo, 5 voltios: 1, cero voltios: 0).

En estos últimos dispositivos se emplean los transistores trabajando en *régimen impulsional* en el que pueden presentar dos estados: *el estado bloqueado*, representado por el punto A de la recta de carga de la Fig. XXIX-73, y *el estado conductor*, representado por el punto B. Estos estados se obtienen polarizando las uniones del emisor y del colector de forma directa ambas (saturado) o inversa los dos (bloqueado).

De la figura XXIX-74, en el estado bloqueado  $I_C = 0$  y por tanto  $V_{CE} = V_{CC}$  (tensión de alimentación). Esto se obtiene abriendo el circuito de la base, con lo que  $I_B = 0$  (punto A), entonces la corriente de colector se reducirá a una corriente residual que, aunque es muy baja, circula inevitablemente por el circuito del colector e impide que el transistor actúe como un interruptor perfecto.

En el estado saturado  $I_C = V_{CC}/R_C$  y  $V_{CE} = 0$ . Basta una corriente de base pequeña para alcanzar la recta de carga en el punto B con lo que, al ser  $I_B = cte$  (Fig. XXIX-74), la corriente de colector no puede aumentar y se dice que el transistor está saturado, siendo la tensión de saturación  $V_{CE}$  bastante débil, del orden de 0,1 V. La corriente de colector es entonces  $I_{C, max} \approx V_{CC}/R_C$  y está limitada solamente por el circuito exterior al transistor.

**XXII - 40. Circuitos lógicos**

Los circuitos lógicos son los que permiten realizar las operaciones del álgebra lógica (álgebra de Boole): negación, unión (suma lógica), intersección (producto lógico), etc. Estos circuitos presentan normalmente varias entradas y una salida. Analizamos los básicos.

A) *La función NO* (negación) es la más simple ya que hace corresponder a toda información *x* la información contraria  $\bar{x}$  (Fig. XXIX-75 a); esto se expresa en el cuadro llamado *tabla de verdad* de la Fig. XXIX-75 b.

La realización práctica es la de la Fig. XXIX-76. Si el contacto *E* está abierto ( $E = 0$ ) el transistor está bloqueado y existe tensión de salida ( $S = 1$ ). Si *E* está cerrado ( $E = 1$ ) el transistor está saturado y la tensión de salida es nula ( $S = 0$ ). O sea, que *la salida es 1 si la entrada no es 1*.

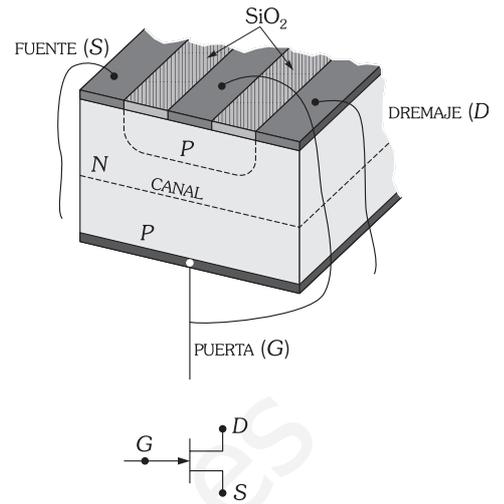


Fig. XXIX-72.- Transistor de efecto campo (FET).

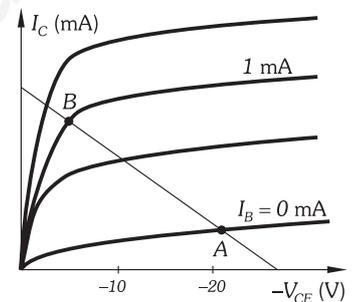


Fig. XXIX-73.- En régimen impulsional el transistor trabaja en el estado bloqueado (A) o en el estado conductor (B).

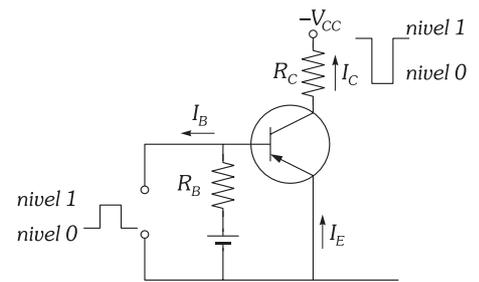
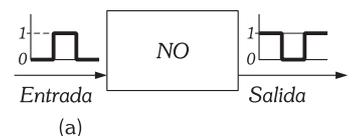


Fig. XXIX-74.



x	$\bar{x}$
0	1
1	0

Fig. XXIX-75.- a) Función lógica NO. b) Tabla de verdad de la función NO.

B) La función NI. Esta función condiciona la presencia de una información en la salida a la ausencia de esa información en todas las entradas simultáneamente. La salida es 1 cuando ni x ni y es 1 (Fig. XXIX-77a). Los valores de la salida en función de los de las entradas x e y se expresan en la tabla de la Fig. XXIX-77 b, y la realización de la función con un transistor en la Fig. XXIX-78.

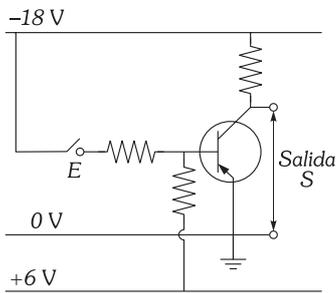


Fig. XXIX-76.- Realización práctica de la función NO.

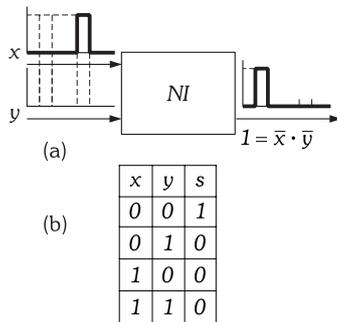


Fig. XXIX-77.- Función NI.

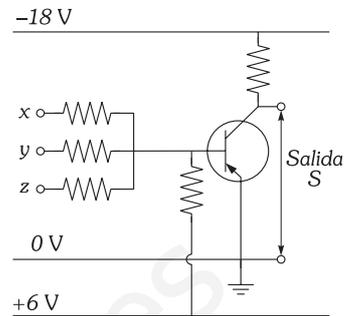


Fig. XXIX-78.- Realización práctica de la función NI.

C) La función Y. Se aplica a los sistemas que han de dar una información de salida siempre que concorra esa información en todas las entradas simultáneamente, lo cual se corresponde con el sentido lógico de la conjunción y: intersección de dos o más acontecimientos. En la práctica se compone de tantos inversores (circuitos NO) como entradas tenga y a continuación un circuito NI. (Fig. XXIX-79 y XXIX-80).

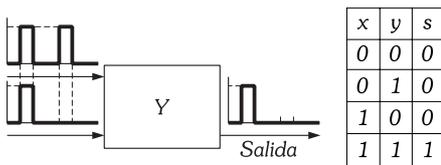


Fig. XXIX-79.- Esquema y tabla de la función Y.

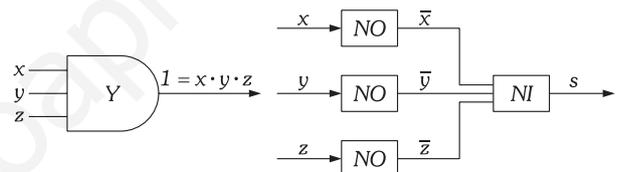


Fig. XXIX-80.- Símbolo con tres entradas y realización práctica de la función Y.

D) La función O. La salida es 1 si la entrada x es 1 o la entrada y es 1. Esta definición corresponde al sentido lógico de la disyunción «o»: unión no exclusiva de dos o más acontecimientos. Para su construcción práctica se pone un circuito NI con las entradas necesarias seguido de un circuito NO.

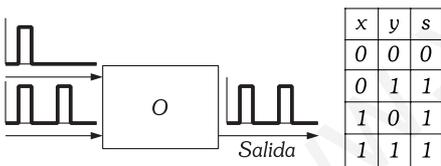


Fig. XXIX-81.- Función O: esquema y tabla.

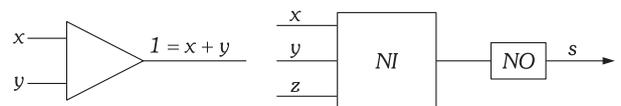


Fig. XXIX-82.- Función O: símbolo y realización.

PROBLEMAS

A) VÁLVULAS ELECTRÓNICAS

1. El filamento de un diodo es de platino, tiene un área de 0,5 cm<sup>2</sup> y se pone incandescente a 1 600 K. Sabiendo que la constante de la ley de Richardson-Dushman vale 1,7 × 10<sup>4</sup> A/cm<sup>2</sup> · K<sup>2</sup> y que el trabajo de extracción es 5,3 eV, calcular la intensidad de corriente de saturación.
2. Para el wolframio el trabajo de extracción es de 4,5 eV. Calcular en qué factor aumenta la densidad de corriente de emisión termoiónica si la temperatura del metal se eleva de 2 000 K a 3 000 K.
3. Para calcular el valor de la constante A de la ecuación de emisión termoiónica del wolframio se mide en primer lugar su frecuencia umbral de emisión fotoeléctrica y a continuación la densidad de corriente de saturación en un diodo con el filamento de ese metal. Resultan ser:  $\nu_0 = 1,1 \times 10^{15}$  Hz y  $J = 9 \times 10^{-5}$  A/m<sup>2</sup> cuando  $T = 1 420$  K. Calcular el valor de la constante buscada.

4. Sobre un haz de rayos catódicos actúan un campo eléctrico y un campo magnético, perpendiculares entre sí y perpendiculares a la velocidad de estos rayos. Sabiendo que el tubo de producción de los rayos tiene 1 V de caída de potencial, que la carga de un electrón es 1,6 × 10<sup>-19</sup> C y que el valor del campo eléctrico es 6 × 10<sup>5</sup> veces mayor que el magnético, medidos ambos en el SI, determinar: 1) ¿Cuándo no sufrirán los rayos desviación alguna? ¿Qué velocidad tienen los electrones? 2) ¿Cuál es la masa del electrón?
5. En un diodo que suponemos plano, la distancia cátodo-ánodo es de 2 mm y la tensión entre ambos de 60 V. Despreciando la velocidad inicial de los electrones, calcular su tiempo de tránsito en el diodo.
6. En el diodo del problema anterior los electrones tienen una energía cinética inicial de origen térmico correspondiente a una temperatura de 2 000 K. Si la tensión aplicada es de 10 V, calcular el tiempo de tránsito promedio de los electrones.

7. La distancia entre el cátodo y el ánodo de un diodo es de 5 mm. Cuando la diferencia de potencial es de 100 V, la densidad de corriente es de 20 mA/cm<sup>2</sup>. Calcular: 1) La densidad de carga en las proximidades del ánodo. 2) El número de electrones por milímetro cúbico en esa zona.

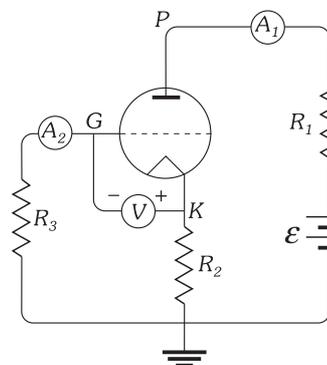
8. Una válvula diodo presenta una resistencia de 1 kΩ cuando se le aplica una tensión de placa de 50 V. Calcular la intensidad de corriente que circulará cuando la tensión aplicada sea de 100 V, suponiendo que trabaja en la zona de carga espacial.

9. La energía cinética de los electrones que llegan al ánodo de un diodo se disipa en forma de calor. La potencia disipada ¿es proporcional al cuadrado de la intensidad, como ocurre en una resistencia eléctrica?

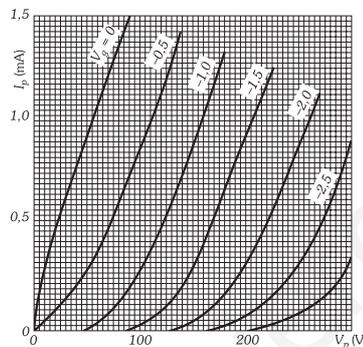
10. En un triodo los electrones son emitidos por el cátodo con una velocidad de 10<sup>6</sup> m/s. Calcular la menor tensión negativa de rejilla que hace nula la corriente de placa.

11. En un triodo la tensión de placa es de 100 V y la de rejilla -3 V. Si el cátodo emite un electrón con una velocidad de 2 × 10<sup>6</sup> m/s, calcular: 1) Su velocidad al atravesar la rejilla. 2) Su energía cinética al llegar a la placa.

12. En el circuito de la figura los amperímetros indican I<sub>1</sub> = 4 mA, I<sub>2</sub> = 0, el voltímetro marca 2 V, la resistencia R<sub>1</sub> es de 10 kΩ y la batería tiene una FEM de 100 V y resistencia interna despreciable. Calcular: 1) El valor de la resistencia R<sub>2</sub>. 2) La diferencia de potencial entre el ánodo y el cátodo. 3) La resistencia interna del triodo.



Problema XXIX-12.



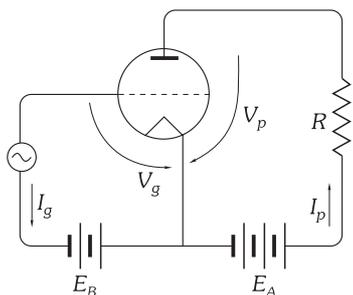
Problema XXIX-14.

13. Experimentalmente se miden en un triodo las siguientes ternas de valores: A) V<sub>p</sub> = 100 V; V<sub>g</sub> = -2 V; I<sub>p</sub> = 5 mA. B) V<sub>p</sub> = 100 V; V<sub>g</sub> = -3 V; I<sub>p</sub> = 3 mA. C) V<sub>p</sub> = 110 V; V<sub>g</sub> = -2 V; I<sub>p</sub> = 6 mA. Calcular: 1) La resistencia de placa. 2) La transconductancia. 3) El factor de amplificación.

14. Las características V<sub>p</sub> - I<sub>p</sub> de un triodo son las de la figura. El punto de operación se elige en V<sub>p</sub> = 125 V, V<sub>g</sub> = -1 V. Calcular: 1) La transconductancia. 2) La resistencia de placa. 3) El factor de amplificación.

15. El comportamiento de un triodo se puede representar con una buena aproximación mediante la ley de Child generalizada: I<sub>p</sub> = B (V<sub>p</sub> + μ V<sub>g</sub>)<sup>3/2</sup>. 1) Demostrar que a partir de esta expresión se deduce la relación de Barkhausen entre las tres características del triodo. 2) Calcular B para el triodo del problema anterior.

16. La ley de Child generalizada para el triodo de la figura se expresa: I<sub>p</sub> = 1,7 × 10<sup>-6</sup> (V<sub>p</sub> + 100 V<sub>g</sub>)<sup>3/2</sup>. Se polariza en el punto de funcionamiento Q en el que V<sub>p</sub> = 250 V y V<sub>g</sub> = -1,5 V. En dicho punto, calcular: 1) La resistencia de placa. 2) La transconductancia. 3) Probar que estos valores verifican la relación de Barkhausen. 4) Si la resistencia R es de 100 kΩ, ¿cuál ha de ser la tensión de polarización E<sub>A</sub> para que el punto Q sea el indicado antes?



Problema XXIX-16.

**B) SEMICONDUCTORES**

17. La concentración de portadores en el silicio puro tiene los siguientes valores aproximados, para las temperaturas que se indican: n<sub>i</sub> = 2 × 10<sup>10</sup> cm<sup>-3</sup> a T = 300 K; n<sub>i</sub> = 8 × 10<sup>12</sup> cm<sup>-3</sup> a T = 400 K y n<sub>i</sub> = 3 × 10<sup>15</sup> cm<sup>-3</sup> a T = 675 K. Dada una muestra de silicio impurificada con 10<sup>13</sup> átomos de galio por cada centímetro cúbico, calcular la concentración aproximada de electrones libres y huecos para cada una de las temperaturas citadas, y razonar, en función de esas concentraciones, si la muestra se comportará como un semiconductor intrínseco o extrínseco.

18. 1) Obtener una expresión exacta para la concentración p de huecos en un semiconductor N, en función de la concentración de impurezas, N<sub>D</sub>, y la de portadores intrínsecos n<sub>i</sub>. 2) Lo mismo para n en función de N<sub>A</sub> y n<sub>i</sub>, en un semiconductor P.

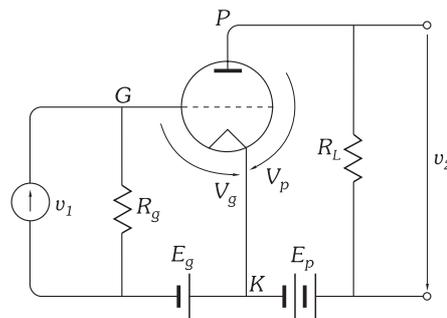
19. A una cierta temperatura un semiconductor tiene una concentración de 10<sup>15</sup> electrones/cm<sup>3</sup> y de 2 × 10<sup>14</sup> huecos/cm<sup>3</sup>. 1) ¿Qué tipo de impurezas predomina? 2) Calcular la concentración neta de impurezas. 3) Calcular la concentración de portadores que tendrá el semiconductor sin impurezas, a esa temperatura.

20. Supongamos un diodo de unión polarizado con una tensión directa V<sub>0</sub>, a la que corresponde una intensidad I<sub>0</sub> que superaremos mucho mayor que la de saturación. Demostrar que al superponer a V<sub>0</sub> una tensión alterna de pequeña amplitud, el diodo se comporta como un VARISTOR, es decir, como una resistencia variable.

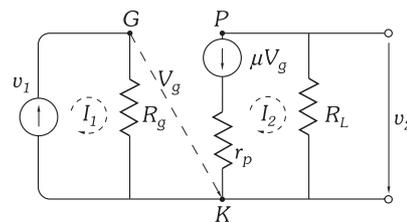
21. Las anchuras de la banda prohibida en el germanio, silicio y arseniuro de galio son, respectivamente, de 0,72, 1,12 y 1,40 eV. Calcular la menor frecuencia de la radiación en los fotodiodos construidos con cada uno de esos materiales.

**C) AMPLIFICADORES**

22. Se conecta un triodo con el cátodo a tierra en el circuito de la figura A, en el que v<sub>1</sub> es la tensión proporcionada por un oscilador de baja frecuencia. Para el estudio de las señales se prescinde de las baterías de polarización y, si la frecuencia es baja, no se consideran las capacidades interelectrónicas; con todo ello el circuito equivalente es el de la figura B, en la que se ha sustituido el trayecto placa-cátodo por la resistencia de placa en serie con un generador de tensión de valor μV<sub>g</sub>. En esta etapa amplificadora, calcular: 1) La ganancia en tensión. 2) La impedancia de entrada. 3) La impedancia de salida.



Problema XXIX-22-A.

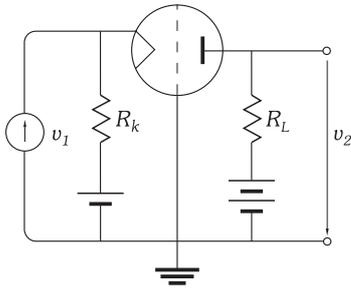


Problema XXIX-22-B.

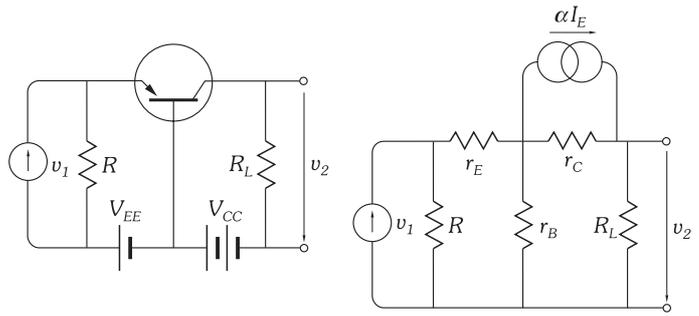
23. Responder a las mismas cuestiones del problema anterior para el circuito del triodo con rejilla a tierra de la figura.

24. Un transistor PNP se conecta como amplificador, en base común, en el circuito de la figura A. La fuente v<sub>1</sub> es un oscilador de baja frecuencia. El circuito equivalente para señales de baja frecuencia es el de la figura B, en la que r<sub>E</sub>, r<sub>B</sub> y r<sub>C</sub> son las resistencias propias del emisor, base y colector, respectivamente, y en la que se representa la corriente

de colector mediante un generador de corriente de valor  $\alpha I_E$ . 1) Calcular la ganancia en tensión de esta etapa amplificadora, en el caso de que  $r_C$  sea mucho mayor que  $r_B$  y  $r_E$ . 2) Aplicarlo a los valores:  $\alpha = 0,95$ ,  $r_E = 50 \Omega$ ,  $r_B = 0,5 \text{ k}\Omega$ ,  $r_C = 1 \text{ M}\Omega$  y  $R_L = 5 \text{ k}\Omega$ .



Problema XXIX-23.



Problema XXIX-24-A.

Problema XXIX-24-B.

**25.** En el circuito del problema anterior la resistencia  $R$ , de  $500 \Omega$ , se coloca en serie en el circuito de emisor. Si  $v_1$  tiene un valor máximo de  $1 \text{ V}$  y una frecuencia de  $200 \text{ Hz}$ , calcular: 1) La ganancia de tensión. 2) La ganancia de potencia. 3) La expresión de la tensión de salida.

www.yoquieroaprobar.com

# CAPÍTULO XXX

## EL NÚCLEO ATÓMICO

### A) CARACTERÍSTICAS DEL NÚCLEO

#### XXX – 1. Constitución del núcleo

A raíz de sus experiencias de dispersión de partículas  $\alpha$  por láminas delgadas de oro, de espesor del orden de  $10^{-7}$  m, Ernest Rutherford llegó a la conclusión de que el átomo está constituido por una corteza electrónica y un núcleo, de dimensiones muy pequeñas comparadas con las del átomo, con una gran densidad, y conteniendo la carga positiva y casi toda la masa atómica.

El núcleo atómico está constituido por *protones* y *neutrones*; a ambos se les da el nombre genérico de *nucleones*.

El número de protones de un núcleo se representa por  $Z$ , que se denomina número *atómico*, caracteriza a cada elemento químico y determina el orden que ocupa el elemento en el sistema periódico. Al número de nucleones se le llama número *másico* y se le representa por  $A$ . El número de neutrones,  $N$ , verifica evidentemente:  $N = A - Z$ .

Se llama *núclido* al conjunto de los núcleos caracterizados por los mismos números atómico y másico, y se le designa por  ${}^A_ZX$  donde  $X$  es el símbolo del elemento químico correspondiente. En los núclidos conocidos, salvo algunos como el  ${}^1_1\text{H}$  o  ${}^3_2\text{He}$ , se verifica que  $N \geq Z$ . La razón  $N/Z$  varía desde 1 para los ligeros hasta 1,6 para los más pesados.

#### XXX – 2. Características de los nucleones

**TAMAÑO:** Es del orden de magnitud de  $10^{-15}$  m.

**CARGA:** El protón tiene una carga positiva igual en magnitud a la del electrón, es decir,  $1,602189 \times 10^{-19}$  C. El neutrón carece de carga neta.

**MASA:** Es muy parecida la de ambos,  $m_p = 1,672\,648 \times 10^{-27}$  kg = 1,007 825 u (unidades de masa atómica),  $m_n = 1,674\,954 \times 10^{-27}$  kg = 1,008 665 u; o bien, expresadas en unidades de energía en virtud de la relación de Einstein:  $m_p = 938,79$  MeV y  $m_n = 939,57$  MeV. La diferencia entre ambas, a pesar de ser pequeña, es mayor que la masa del electrón, que es  $m_e = 9,10953 \times 10^{-31}$  kg = 0,000 549 u = 0,511 MeV.

**SPIN:** protones y neutrones tienen spin  $1/2$ , estén libres o ligados a otros nucleones en un núcleo. Según el principio de Pauli, el spin de magnitud  $\hbar/2$  solamente se puede orientar paralela o antiparalelamente respecto de otra dirección, en particular, respecto de la dirección del spin de otro nucleón, con lo que el spin de un núcleo de  $A$  par es, como se comprueba experimentalmente, un múltiplo entero de  $\hbar$  o nulo, mientras que si  $A$  es impar el múltiplo es semientero.

**MOMENTO MAGNÉTICO:** El valor experimental del correspondiente al protón es casi tres veces mayor que el que cabría esperar si se considera al protón como una partícula esférica cargada y girando, lo que indica que el protón es una estructura constituida por partes acopladas. Otro tanto puede decirse del neutrón, el hecho de que tenga momento magnético no nulo a pesar de no tener carga neta, hace pensar en cargas positivas y negativas de la misma magnitud pero desigualmente distribuidas. El momento magnético del neutrón es de sentido contrario al del protón, es decir, que el efecto magnético debido a cargas negativas es más acusado que el de positivas; podemos imaginar estas últimas próximas al centro, mientras que las negativas ocuparían la zona exterior del neutrón.

#### XXX – 3. Radio y densidad de los núcleos

Si suponemos los núcleos esféricos, *el radio de la esfera en que se manifiestan las fuerzas nucleares es lo que se denomina RADIO NUCLEAR*, y su magnitud es del orden de  $10^{-15}$  m.

Experimentalmente se comprueba que el volumen del núcleo es proporcional al número másico:  $V = KA$ , además  $V = 4\pi R^3/3$ , con lo que el radio nuclear resulta:

$$R = \left( \frac{3KA}{4\pi} \right)^{1/3} = R_0 A^{1/3}$$

donde  $R_0$  es una constante que tiene el mismo valor para todos los núcleos y que es igual al radio del núcleo de  ${}^1_1\text{H}$ , por tener éste  $A = 1$ .

El valor experimental de  $R_0$  depende de la naturaleza del experimento. Así, si se mide el espacio ocupado por la carga nuclear se obtiene  $R_0 = (1,2 \pm 0,1) \times 10^{-15}$  m, y si el fenómeno sobre el que se experimenta depende sólo de las fuerzas nucleares, se obtiene  $R_0 = (1,5 \pm 0,1) \times 10^{-15}$  m.

Como los radios atómicos son del orden de  $10^{-8}$  cm la materia, que está prácticamente condensada en los núcleos, presenta enormes espacios «vacíos». Así ya no es de extrañar que los neutrones que carecen de carga y por lo tanto no son afectados por los electrones, puedan atravesar espesores muy grandes, de cuerpos materiales, sin ser desviados, hasta que por azar chocan con un núcleo.

Para el protón  $R = 1,2 \times 10^{-13}$  cm, como su masa es  $1,7 \times 10^{-24}$  g su densidad será

$$d = \frac{M}{V} = \frac{1,7 \times 10^{-24} \text{ g}}{\frac{4}{3} \pi (1,2 \times 10^{-13})^3 \text{ cm}^3} \approx \frac{10^{-24}}{10^{-39}} = 10^{15} \text{ g/cm}^3$$

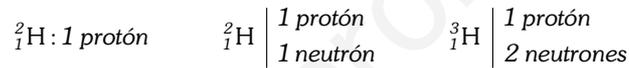
que equivale a MIL MILLONES DE TONELADAS CADA CENTÍMETRO CUBICO.

Fácilmente puede calcularse, que una persona de 80 kg de masa tiene menos de una diezmilmillonésima de  $\text{cm}^3$  de «materia nuclear pesante», pues la masa de los electrones es despreciable.

**XXX - 4. Elementos isótopos, isótonos e isobaros**

ELEMENTOS ISÓTOPOS son los que tienen el mismo número atómico y distinta masa atómica, debido a un desigual número de neutrones en su núcleo. El carácter químico de estos elementos es idéntico.

El hidrógeno tiene tres isótopos, cuyos núcleos contienen:



Tales isótopos del hidrógeno se llaman respectivamente: *protio*, *deuterio* y *tritio*; sus núcleos son: *protón*, *deuterón* y *tritón*.

Los cuerpos de masa atómica fraccionaria están constituidos por mezclas de isótopos; así el Cl de masa atómica aproximada, 35,5 es una mezcla de dos isótopos de masa 35 y 37 en proporciones adecuadas.

Se llaman ISÓTONOS a los elementos con el mismo número de neutrones pero distinto número atómico, por ejemplo  ${}^{13}_6\text{C}$  y  ${}^{14}_7\text{N}$ .

Son ISOBAROS los que tienen el mismo número masico pero distinto número atómico, y, por tanto, distinto número de neutrones; son isobaros el  ${}^{14}_6\text{C}$  y el  ${}^{14}_7\text{N}$ . Los núcleos de isobaros tienen características interesantes, una de las cuales es que se conocen más de 60 parejas en las que la diferencia de Z es de dos unidades, sin embargo, solamente hay dos parejas con diferencia de Z de una unidad, son:  ${}^{113}_{48}\text{Cd} - {}^{113}_{49}\text{In}$  y  ${}^{123}_{51}\text{Sb} - {}^{123}_{52}\text{Te}$ .

**XXX - 5. Defecto de masa y energía de ligadura**

DEFECTO DE MASA de un núcleo es la diferencia que existe entre la suma de las masa de los nucleones que lo forman y la masa de tal núcleo.

Llamando M a la masa del núcleo, el defecto de masa,  $\Delta m$ , viene dado por la expresión:

$$\Delta M = Z m_p + N m_n - M$$

que es siempre positiva.

Esta cantidad representa la pérdida de masa que se produciría en la formación del núcleo a partir de sus constituyentes. En realidad, es más correcto hablar de la masa que se convertirá en energía en tal formación ( $E = mc^2$ ). Esa misma cantidad de energía será la que haya que aportarle al núcleo para disgregarlo en nucleones aislados, podemos por tanto denominarla ENERGÍA DE ENLACE o de LIGADURA. Si las masas se expresan en unidades de masa atómica, la energía de enlace viene dada por:

$$E_B = 931,5 (Z m_p + N m_n - M) \text{ MeV}$$

En la práctica no se mide la masa del núcleo sino la del átomo, por ello en las expresiones anteriores se puede sustituir  $m_p$  por la masa  $m_H$ , del átomo de hidrógeno, y M por la masa atómica del elemento; con ello en las fórmulas sumamos la masa de los electrones en  $Zm_H$  y la restamos con la masa atómica. Se comete así un error al no

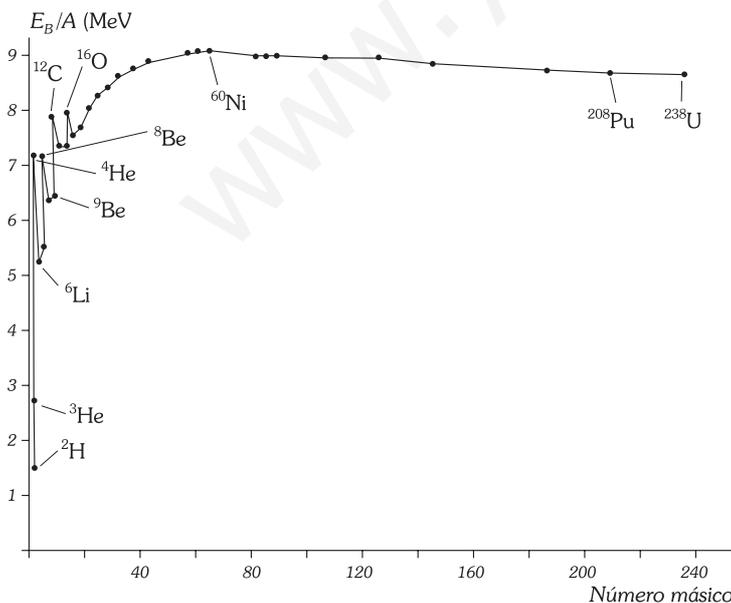


Fig. XXX-1.- La energía de enlace por nucleón alcanza máximos relativos, en la izquierda de la gráfica, cuando A es múltiplo de cuatro; el máximo absoluto se encuentra entre los elementos centrales del sistema periódico.

considerar la energía de enlace de los electrones, aunque, por ser del orden de electrón-voltios, es despreciable.

Entre núclidos distintos se observan grandes diferencias en la energía de enlace, que aumenta casi linealmente con el número másico, sin embargo, al dividirla por el número másico, es decir, al calcular la ENERGÍA DE ENLACE POR NUCLEÓN resulta que la mayoría la tienen próxima a 8 MeV. En la Fig. XXX-1 se pone de manifiesto este hecho; se observa que en los elementos más ligeros  $E_B/A$  es muy baja, pero en un gran intervalo de valores del número másico esa energía es muy próxima a los citados 8 MeV. La curva crece inicialmente, presenta un máximo hacia  $A = 60$  ( $Z = 28$ ) y para números de masa mayores disminuye, hasta un valor de 7,6 MeV para el uranio.

Como se verá más adelante el aumento inicial y la disminución final de  $E_B/A$  permiten explicar el desprendimiento de energía en la fusión de núcleos ligeros para dar uno más pesado, y en la fisión de los núcleos más pesados para dar dos intermedios.

**PROBLEMAS: 1 al 18.**

**XXX - 6. Fuerzas Nucleares**

El hecho de que pueda ser estable un sistema como el núcleo atómico en el que se aglomeran cargas positivas a distancias muy pequeñas, pone de manifiesto que entre los nucleones existen *fuerzas nucleares*, mucho más intensas que las de repulsión colombiana, y que involucran a protones y neutrones.

La estabilidad del núcleo de deuterio demuestra la existencia de una fuerza atractiva protón-neutrón ( $p-n$ ) y la del núcleo de He-3 pone de manifiesto que existe una fuerza, también atractiva, protón-protón ( $p-p$ ). Aunque se acepta la existencia de tales fuerzas ( $p-p$ ,  $p-n$ ,  $n-n$ ), su formulación matemática no es conocida y, por tanto, los razonamientos sobre la estructura y estabilidad nucleares se han de hacer a base de modelos y de aproximaciones semiempíricas basadas en medidas de masas nucleares, como las mencionadas en el apartado anterior, y a través de experimentos de dispersión de partículas de alta energía.

La energía de enlace por nucleón es muy aproximadamente la misma en la inmensa mayoría de los núcleos; esto implica que las fuerzas nucleares SE SATURAN, es decir, que cada nucleón actúa solamente sobre unos pocos a su alrededor, y no sobre todos los del núcleo, pues en este caso la energía debería ser proporcional al número de nucleones. Como la repulsión electrostática no se satura, los núcleos con un número grande de protones resultan inestables.

Las fuerzas nucleares tienen un alcance de aproximadamente 2 fm ( $2 \times 10^{-15}$  m) y son ATRACTIVAS, con una intensidad del orden de 100 veces mayor que la repulsión electrostática de dos protones a la misma distancia, sin embargo, a distancias menores de  $0,5 \times 10^{-15}$  m se vuelven REPULSIVAS; todo ocurre como si los nucleones tuviesen un «corazón» muy duro que no pudiese ser penetrado. Los datos anteriores se reflejan en la gráfica de la Fig. XXX-2, en la que se representa el potencial de interacción entre un neutrón y un protón frente a la distancia mutua.

Una propiedad de las fuerzas nucleares es que las tres mencionadas son iguales. Esto se conoce con los nombres de INDEPENDENCIA DE CARGA: en idénticas condiciones la fuerza  $p-n$  es igual a los  $p-p$  y  $n-n$ , y de SIMETRÍA DE CARGA: la fuerza nuclear  $p-p$  es igual a la  $n-n$ , en idénticas condiciones. La simetría de carga se demuestra con cálculos sobre energía de enlace en *núcleos espejos*, que son dos núcleos con el mismo número másico y los números de protones y neutrones intercambiados, por ejemplo H-3 ( $1p, 2n$ ) y He-3 ( $2p, 1n$ ). En el núcleo de tritio hay dos fuerzas  $p-n$  y una  $n-n$ , y su energía de ligadura es de 8,48 MeV; en el de He-3 hay dos  $p-n$  y una  $p-p$ , siendo su energía de ligadura de 7,72 MeV. Parece pues que la interacción  $n-n$  es 0,76 MeV más intensa que la  $p-p$ , sin embargo, si se tiene en cuenta la repulsión electrostática entre protones y la diferencia de masa de protones y neutrones, los cálculos conducen con gran exactitud a la igualdad de ambas fuerzas nucleares.

Otra propiedad interesante de estas fuerzas es que DEPENDEN DE LA DIRECCIÓN. Se llaman fuerzas centrales a las que son función exclusivamente de la distancia entre los dos cuerpos que interaccionan, como las gravitaciones y las electrostáticas. Son *fuerzas tensoriales* las que actúan con distinta intensidad en distintas direcciones, como en el caso, por ejemplo, de un dipolo magnético. Las fuerzas nucleares son una combinación de centrales y tensoriales, y esta última condición se manifiesta en su dependencia de la orientación relativa del spin de los nucleones entre sí y respecto al momento angular orbital. Si el spin del núcleo (se llama así en realidad a la composición del spin y del momento angular orbital, o sea, el momento angular total) es nulo, entonces las fuerzas nucleares son solamente centrales, como ocurre en el núcleo de He-4, en el que los dos protones tienen spines opuestos, lo mismo que los neutrones (Fig. XXX-3).

Unos ejemplos con gráficas de energía potencial nos ilustrarán sobre la actuación de las fuerzas nucleares. La energía potencial de un protón (Fig. XXX-4), fuera del núcleo de número atómico  $Z$ , se puede expresar como  $U = KZe^2/r$ ; la fuerza sobre el protón es repulsiva. No se conoce exactamente la forma de la curva en las proximidades del núcleo, pero, una vez dentro de él, las fuerzas son atractivas y el protón se encuentra dentro de un pozo de potencial de valor  $U_0$  constante. Para penetrar en el núcleo (sin efecto túnel) el protón tiene que superar una barrera de potencial, que en el caso del uranio es de 15 MeV.

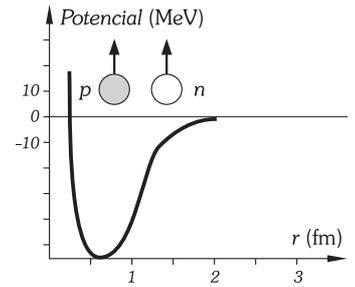


Fig. XXX-2.- Potencial de interacción entre protón y neutrón, con spines paralelos, en función de la distancia.

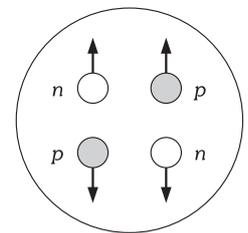


Fig. XXX-3.- En el núcleo de He-4 los spines de los nucleones se compensan dando spin nuclear nulo.

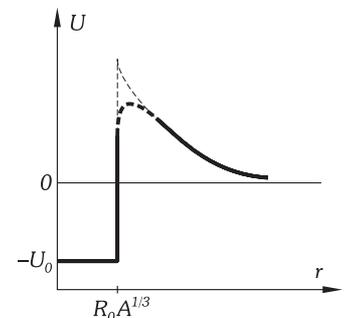


Fig. XXX-4.- Energía potencial de interacción de un núcleo y una partícula con carga positiva.

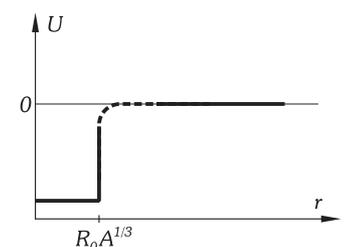


Fig. XXX-5.- Para un neutrón no existe la barrera de potencial coulombiana.

Si se trata de un neutrón no existe esa barrera de potencial (Fig. XXX-5), ya que no experimenta repulsión eléctrica por parte del núcleo, y podrá penetrar en él sin impedimento.

De la misma forma, una partícula del interior del núcleo debe salvar también la barrera de potencial para salir de él. Este aspecto se discutirá más adelante, a propósito de la radiación  $\alpha$  de núcleos radiactivos.

**XXX – 7. La fuerza nuclear como intercambio de partículas virtuales.**

El concepto de PARTÍCULA VIRTUAL nace de la relación de incertidumbre tiempo-energía:  $\Delta E \Delta t \geq h$ . La sonda que empleamos para medir la energía de una partícula deberá interactuar con ella durante un tiempo finito  $\Delta t$ , con lo que tendremos una indeterminación en el valor de la energía de  $\Delta E > h/\Delta t$ , que, de la relación de Einstein  $E = mc^2$ , se puede poner de la forma

$$\Delta m > \frac{h}{c^2 \Delta t}$$

Esta relación supone que durante el tiempo  $\Delta t$  no podemos saber si en ese lugar hay una partícula de masa  $m$  o un conjunto de partículas de masa  $m + \Delta m$ . Es lícito suponer que durante  $\Delta t$  la partícula se ha desdoblado en un par de partículas, y al objeto adicional que ha aparecido lo llamaremos *partícula virtual*. Si suponemos que ésta es reabsorbida antes de transcurrido el tiempo  $\Delta t$ , en ese desdoblamiento no se puede observar la violación de ninguna ley de conservación.

Veamos, por ejemplo, el tiempo  $\Delta t$  durante el que un protón aislado puede fluctuar entre él mismo y el sistema protón más una partícula adicional de masa igual a la décima parte de la de un protón. La indeterminación en el valor de la masa es:  $\Delta m = m_p/10 = 1,67 \times 10^{-28}$  kg, con lo que:

$$\Delta t > \frac{h}{c^2 \Delta m} \approx \frac{6,67 \times 10^{-34}}{9 \times 10^{16} \times 1,67 \times 10^{-28}} = 4,4 \times 10^{23} \text{ s}$$

Durante este tiempo la partícula virtual puede recorrer como máximo una distancia:

$$d = c \Delta t \approx 3 \times 10^8 \times 4,4 \times 10^{-23} = 1,3 \times 10^{-14} \text{ m}$$

es decir, una distancia del orden de diez veces el tamaño del protón.

Supongamos ahora que tenemos dos nucleones a una distancia  $d$ . Puede ocurrir que uno de ellos emita una partícula virtual, y si la masa de ésta última es tal que le permite alcanzar al otro nucleón antes de transcurrir  $\Delta t$  segundos, puede ser absorbida por el segundo antes de ser detectada.

Este intercambio de una partícula virtual puede dar lugar a una fuerza si admitimos que durante el breve tiempo de su existencia, la partícula ejerce una fuerza atractiva sobre los nucleones. El resultado final es la atracción mutua entre ambos.

En 1934 el físico japonés Hideki Yukawa (1907-1981) demostró que si dos protones intercambian una partícula virtual el resultado neto del intercambio es una fuerza atractiva entre ambos, y que si la masa de esa partícula es de aproximadamente  $1/9$  de la masa del protón, la fuerza resultante es lo suficientemente grande como para vencer la repulsión eléctrica y mantener a los protones unidos dentro del núcleo. Postuló la existencia de partículas con una masa unas 200 veces mayor que la del electrón, a las que se denominó *mesones*.

En 1937 se detectó en la radiación cósmica la presencia de partículas de masa unas 210 veces la electrónica, a las que se denominó *mesones  $\mu$*  o *muones* y de las que en principio se supuso que eran las postuladas por Yukawa. Como veremos al hablar de las partículas elementales, hoy se considera a los muones como leptones, partículas ligeras del grupo del electrón. Diez años más tarde, también en los rayos cósmicos, se descubrieron los *mesones  $\pi$*  o *piones*, con una masa unas 270 veces superior a la del electrón, a los que se considera responsables de las fuerzas entre nucleones, uno de carga positiva,  $\pi^+$ , y otro de carga negativa,  $\pi^-$ . En 1950 se descubrió también un mesón  $\pi^0$  neutro.

De acuerdo con la teoría de Yukawa, las fuerzas nucleares se pueden describir como un intercambio de piones entre nucleones. La figura XXX-6 representa este proceso referido a un protón y un neutrón. El protón emite un pión positivo convirtiéndose en un neutrón, el neutrón original absorbe el pión y se transforma en un protón.

En la transformación inversa (Fig. XXX-7) un neutrón se transforma en protón al emitir un pión  $\pi^-$ , y el protón en neutrón al captarlo. Esta transformación se pone de manifiesto experimentalmente lanzando un haz de neutrones muy rápidos ( $\approx 90$  MeV) sobre una sustancia; en el haz emergente se observa la presencia de protones igualmente rápidos, que sólo pueden haberse originado por intercambio de piones de los neutrones con los protones de la sustancia.

El pión neutro  $\pi^0$  es el responsable de las fuerzas  $p-p$  y  $n-n$ . Las interacciones entre nucleones se representan:

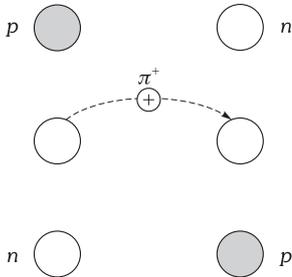


Fig. XXX-6.- El protón se transforma en neutrón emitiendo un pión positivo. El neutrón al captarlo se transforma en protón. Los «núcleos» del protón y del neutrón son indistinguibles.

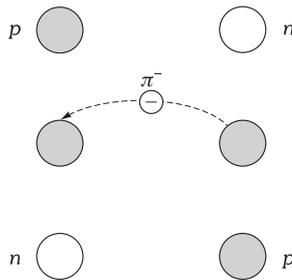


Fig. XXX-7.- Transformación inversa de la representada en la figura anterior. En este caso el pión intercambiado es negativo.

Desde el punto de vista mesónico, *el protón y el neutrón dentro del núcleo son dos estados distintos de la misma partícula, el nucleón*; o dicho de otro modo, un protón es la mayor parte del tiempo un protón pero durante un breve tiempo es también un neutrón; y algo semejante le ocurre al neutrón. *El núcleo es un sistema dinámico en el cual los mesones se crean y se absorben continuamente, y este proceso es el que lo mantiene unido.*

Es importante señalar que la explicación dada por Yukawa de la fuerza entre nucleones, la llamada *fuerza fuerte*, como intercambio de partículas, es hoy extendida por los físicos a cualquier tipo de fuerzas. La electromagnética se explica por el intercambio de fotones virtuales y la gravitatoria por intercambio de gravitones, aún sin detectar. Esta teoría sugiere una forma de entender las fuerzas naturales íntimamente ligada a la estructura de la materia y a las partículas elementales (como se comentará en las últimas cuestiones de este capítulo).

**XXX – 8. Modelos nucleares**

El desconocimiento de una expresión para las fuerzas nucleares, hace imposible la deducción de las propiedades y estructura del núcleo refiriéndonos a un núcleo real. Por otra parte, aunque se conocieran exactamente las fuerzas nucleares no sería posible el tratamiento matemático completo para núcleos con más de dos nucleones; el movimiento de tres o más partículas con interacción mutua sólo se puede calcular teóricamente de una forma aproximada. Por ello, para relacionar entre sí los datos conocidos sobre el núcleo, se recurre a concepciones aproximadas que se conocen con el nombre de **MODELOS NUCLEARES**. Ninguno de ellos explica al mismo tiempo todos los hechos observados, sino que la validez de cada uno queda restringida a un campo concreto.

Los modelos actualmente en uso se pueden clasificar en dos grupos: (1) Modelos de partículas independientes, que son aquellos en los que se considera que entre los nucleones no existe interacción, o ésta es muy débil, pero que cada nucleón se encuentra sometido a un potencial central producido por todos ellos. El más representativo es el *modelo de capas*. (2) Modelos de fuerte interacción en los que el movimiento de un nucleón está acoplado fuertemente al del resto; el más desarrollado de ellos es el *modelo de la gota líquida*, que nos permite comprender con cierta claridad la fusión nuclear y otras propiedades colectivas del núcleo.

En los dos grupos de modelos se considera a los nucleones no relativistamente ya que sus velocidades son pequeñas comparadas con las de la luz, pero en cualquier caso se ha de utilizar la mecánica cuántica en el cálculo del movimiento de los nucleones.

Ambos tipos de representaciones consideran al núcleo desde dos puntos de vista contradictorios, es por tanto razonable pensar que ambos son partes incompletas de un modelo más general. Éste, que está siendo desarrollado y a cuyas últimas versiones se les llama *modelo unificado*, va desplazando progresivamente a los anteriores a medida que se superan sus dificultades matemáticas.

**XXX – 9. Modelo de capas**

Es un modelo que supone interacción muy débil entre nucleones, y cuya concepción se inspiró en la estructura electrónica de la corteza atómica. En él los nucleones poseen niveles de energía que se agrupan en capas.

Sin embargo los niveles nucleares se diferencian de los electrónicos en que: 1) en todas las capas nucleares la energía de ligadura es aproximadamente la misma; 2) no hay un centro atractivo común sino un potencial cuyo valor es proporcional a la densidad nuclear; 3) los nucleones pueden experimentar frecuentes colisiones entre sí; 4) existe un fuerte acoplamiento spin-momento angular orbital.

No puede hablarse, por tanto, de un modelo planetario del núcleo, y solamente en la medida en que se desprecien las colisiones entre nucleones, se puede establecer una analogía con la corteza atómica. Por otra parte, esta analogía viene avalada por el hecho de que los núcleos cuyo número de protones *Z* o de neutrones *N* es uno de los llamados *números mágicos* (2, 8, 20, 28, 50, 82 ó 126), tienen una energía de ligadura muy alta y son más estables que los restantes. Esto hace pensar en que, en estos casos, los nucleones ocupan capas completas, de manera similar a los electrones en los gases nobles.

Otros datos remarcables son que: 1) el isótopo de un elemento con número mágico de neutrones es siempre mucho más abundante que los restantes, 2) un elemento con número mágico de protones tiene mayor número de isótonos que sus elementos vecinos, 3) la energía mínima de excitación de los núcleos par-par con número mágico de neutrones es apreciablemente mayor que la de los otros núcleos de igual tamaño.

Todos estos hechos recuerdan a las recurrencias que se dan en el sistema periódico, y, por tanto, es razonable suponer en los núcleos un llenado de niveles análogo al de las capas electrónicas de la corteza atómica. Los niveles energéticos se caracterizan mediante tres números cuánticos y se ordenan en estados *1s, 2s, 2p*, etc. En cada estado, según el principio de exclusión de Pauli, sólo puede encontrarse un nucleón, es decir, en los estados *1s* hay sitio para dos nucleones, en los *3d* para 10, etc. Así, en el núcleo de deuterio el protón y el neutrón se encuentran en el estado *1s*; en el de  $^4_2\text{He}$ , (Fig. XXX-8) el estado *1s* de los protones está doblemente ocupado, así como el estado

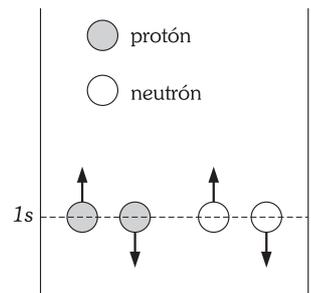


Fig. XXX-8.- En el He-4 el estado *1s* está ocupado.

1s de los neutrones (un protón y un neutrón pueden tener cuatro números cuánticos iguales pues difieren en la carga), la primera capa de protones y la de los neutrones está completa. El siguiente núcleo con capas completas es el  $^{16}_8\text{O}$ , con los estados  $2p$  totalmente ocupados.

Frecuentemente el modelo de capas permite predecir el spin de un núcleo: los núcleos con capas completas tienen spin cero; el tritio tiene spin  $1/2$  debido a su número impar de nucleones; la observación muestra que el deuterio tiene spin 1.

Debe señalarse que la interacción del spin nuclear con el spin de los electrones corticales origina un desdoblamiento de las rayas del espectro de un átomo a la que se denomina *estructura hiperfina*. La medida de la separación entre rayas permite determinar el spin nuclear.

### XXX – 10. Modelo de la gota líquida

Las fuerzas nucleares son de corto alcance y se saturan, de forma que cada nucleón interactúa solamente con sus vecinos, con lo que el volumen nuclear se origina prácticamente por la adición de los volúmenes de los protones y neutrones que lo contienen. Además, a muy cortas distancias los nucleones se repelen lo que los hace mantenerse a una distancia media constante y disponer de un volumen por nucleón también constante. De ahí que en muchos aspectos el núcleo se pueda comparar con una gota de líquido incompresible, y hacer uso de las propiedades conocidas de un sistema de ese tipo, como sugirió por primera vez Bohr.

Sobre la base de este modelo se ha desarrollado una útil relación semiempírica entre la energía de ligadura por nucleón y el número de nucleones de un núcleo, cuya expresión es:

$$\frac{E_B}{A} = 14,0 - \frac{13,1}{A^{1/3}} - 0,6 \frac{Z^2}{A^{4/3}} - 19,3 \left( \frac{N - Z}{A} \right)^2 \pm \frac{130}{A^2} \text{ MeV/nucleón}$$

que consta de: 1) un sumando constante que representa la energía de ligadura media de los nucleones interiores que están rodeados de otros nucleones en todas las direcciones; 2) un sumando que tiene en cuenta que los nucleones de la superficie están menos ligados, es de la forma  $A^{-1/3}$ ; 3) la repulsión electrostática entre los protones, en la forma  $Z^2 A^{-4/3}$ ; 4) un sumando que tiene en cuenta que la energía de ligadura es máxima cuando el número de protones y de neutrones es el mismo, estando, por tanto, los neutrones excedentes menos ligados, tiene la forma  $(N-Z)^2 A^{-2}$  y 5) un término que tiene en cuenta la dependencia de la energía de enlace con el spin de los nucleones; la posibilidad de los spines de yuxtaponerse conduce a un reforzamiento del enlace. Este término, de la forma  $\pm 130 A^{-2}$ , es positivo para núcleos par-par, negativo para impar-impar y nulo para par-impar.

Este modelo permite entender la fisión nuclear como una rotura del equilibrio entre las fuerzas atractivas de corto alcance de los nucleones, que puede considerarse que originan una tensión superficial, y la fuerza repulsiva de Coulomb entre protones. Si el núcleo está sin excitar será de forma esférica, pero al ser excitado experimenta oscilaciones que hacen aumentar el área de su superficie. Cuando este aumento sea suficientemente grande la repulsión coulombiana superará a la tensión superficial y el núcleo experimentará la fusión (Fig. XXX-28).

### B) RADIOACTIVIDAD NATURAL

#### XXX – 11. Estabilidad de los núcleos

Con el sistema periódico se consiguió disponer los elementos de una forma óptima para relacionarlos en función de sus propiedades. Desafortunadamente no existe para los núclidos estables una disposición tan clara que nos permita poner de manifiesto las regularidades que se presentan. No obstante, de la clasificación representada en la Fig. XXX-9, denominada *diagrama de Segré*, se pueden obtener algunas relaciones útiles; en ella se representan los núclidos por puntos tomando el número atómico  $Z$  en un eje y el número de neutrones  $N$  en el otro.

Hay que señalar en primer lugar que se entiende por *núclido estable* aquel que no experimenta transmutaciones radiactivas espontáneamente, es decir, que no se transforma en otro por emisión de partículas. Está claro que la estabilidad de un núclido es una propiedad relativa ya que depende de nuestra capacidad de medir su actividad radiactiva; es posible que mejorando la instrumentación de medida, algunos de los que ahora se consideran estables resultan radiactivos de vida muy larga.

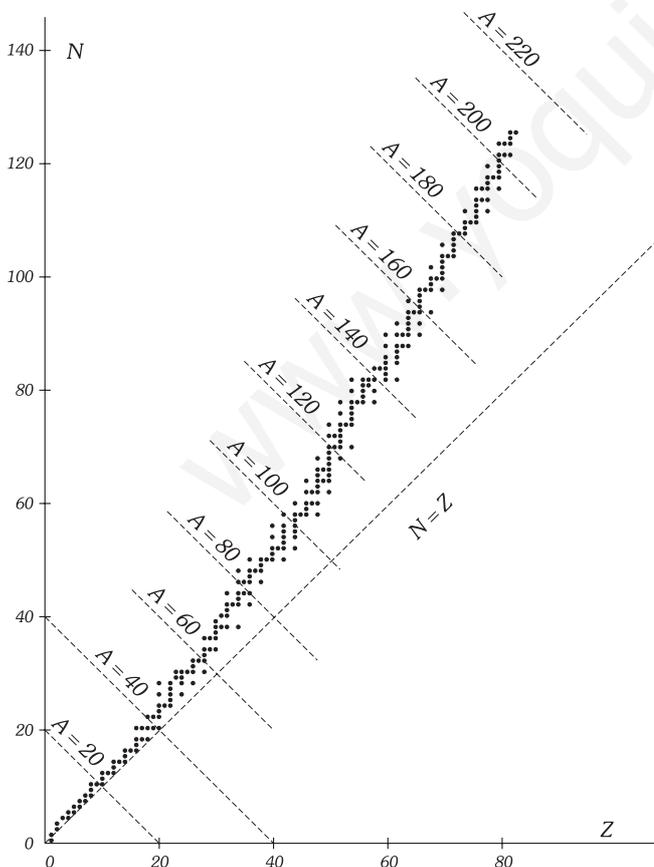


Fig. XXX-9.- Diagrama de Segré de núclidos estables. Las rectas discontinuas corresponden a diversos valores de número másico constante. La bisetriz corresponde a núclidos con  $Z=N$ .

En el diagrama de Segrè, la bisectriz del cuadrante indica la posición de los núclidos con igual número de protones y de neutrones; se observa que en los más ligeros la relación  $N/Z$  es muy próxima a la unidad, pero a partir del Ca-40 ( $Z = 20$ ) esa relación aumenta hasta valer algo más de 1,5 en el Pb 208 ( $Z = 82$ ). La razón de este aumento del exceso de neutrones frente a protones es que la fuerza nuclear es saturada mientras que la de repulsión coulombiana no lo es. Así, si se añaden a un núclido el mismo número de protones que de neutrones, esta última crece más rápidamente que la primera; por el contrario, una proporción mayor de neutrones supone fuerzas  $n-n$  y  $n-p$  atractivas adicionales que sirven para compensar la repulsión creciente  $p-p$ .

Si clasificamos los núclidos estables atendiendo a si tienen  $Z$  y  $N$  par o impar, nos encontramos con el siguiente resultado:

$Z$	$N$	$A$	NÚMERO DE NÚCLIDOS ESTABLES
par	par	par	164
par	impar	impar	55
impar	par	impar	50
impar	impar	par	4

Resulta evidente que la configuración par-par es la más estable, mientras que la impar-impar es altamente inestable; esta última sólo se da en los cuatro núclidos ligeros:  ${}^2_1\text{H}$ ,  ${}^6_3\text{Li}$ ,  ${}^{10}_5\text{B}$  y  ${}^{14}_7\text{N}$ . Hay poca diferencia entre las configuraciones con número másico impar, y su estabilidad será intermedia entre las dos citadas.

Señalemos para terminar, dos reglas deducibles de la Fig. XXX-9. *Proposición de Mattauch:* para un  $Z$  dado sólo puede haber con  $A$  impar un núclido estable. *Reglas de Aston:* los núclidos con  $Z$  impar pueden tener dos isótopos estables, los de  $Z$  par pueden tener más de dos.

**XXX - 12. Radiactividad natural**

*La radiactividad es la emisión de partículas o fotones por núcleos inestables.*

Es una propiedad de ciertos núcleos, que se presenta con independencia de que se hallen aislados o estén rodeados de otros iguales o distintos.

Como se aprecia en el diagrama de núclidos estables (Fig. XXX-9), todos ellos se agrupan en una franja estrecha. Existen además un gran número de núclidos (unas cinco veces más que los representados en la gráfica) cuya proporción  $N/Z$  no es la adecuada para una configuración estable, son por tanto inestables o radiactivos; todos ellos tienden a aproximarse más o menos rápidamente a la zona de estabilidad, liberando ciertas partículas y cambiando así su relación  $N/Z$ .

Las partículas emitidas fueron observadas por primera vez por Becquerel en 1896 al comprobar que una placa fotográfica, dejada al lado de una muestra de sulfato de potasio y uranio, resultaba ennegrecida aún estando envuelta en papel para protegerla de la luz. Sus trabajos fueron seguidos por Pierre y Marie Curie, quienes, en 1898, aislaron el polonio y el radio, también productores de partículas que se llamaron  $\alpha$  y  $\beta$ .

Desde ese momento el progreso fue rápido y se reconocieron prontamente los tres tipos básicos de procesos radiactivos: la radiación  $\alpha$ , la radiación  $\gamma$ , y la radiación  $\beta$ , que comprende la emisión de electrones ( $\beta^-$ ), la de positrones ( $\beta^+$ ) y el proceso llamado captura electrónica.

La naturaleza de las citadas radiaciones fue puesta de manifiesto con los dispositivos de las figuras XXX-10 y XXX-11, utilizados por Rutherford, en los que se les somete a campos eléctricos y magnéticos, y se mide el sentido y la magnitud de las desviaciones producidas. Las conclusiones obtenidas se enumeran a continuación.

Las partículas  $\alpha$  son núcleos de helio compuestos por dos protones y dos neutrones, que se emiten con velocidades de unos 10 000 km/s (Fig. XXX-12). Cuando un núcleo emite una partícula  $\alpha$  se transforma en otro con 4 unidades menos de número másico y 2 unidades menos de número atómico (Fig. XXX-13); por consiguiente, el «núcleo hijo» corresponde a un elemento químico situado en el sistema periódico dos lugares antes que el «padre» (LEY DE SODDY).

Las partículas  $\beta$  son electrones (si no se especifica signo se sobreentiende que se trata de  $\beta^-$ ); se emiten en toda la gama de velocidades, pudiendo llegar a 0,9995 c. La emisión  $\beta$  lleva consigo, como comentaremos más adelante, la transformación de un neutrón en protón, y el núcleo que emite una partícula  $\beta$  mantiene su número másico y aumenta en una unidad su número atómico (Fig. XXX-13); el nuevo elemento está en el lugar posterior al original en el sistema periódico (LEY DE SODDY).

El positrón,  $\beta^+$ , es una partícula de igual masa que el electrón pero con una carga elemental positiva; es la antipartícula del electrón. La emisión de una partícula  $\beta^+$  supone la transformación de un protón en neutrón y, por tanto, el núcleo que la emite conserva el número másico y disminuye en una unidad el número atómico (Fig. XXX-13). El elemento resultante ocupa en el sistema periódico el lugar anterior al elemento original.

La radiación  $\gamma$ , que no es desviada por campos eléctricos o magnéticos, está constituida por fotones muy energéticos, de frecuencia superior a la de los rayos X. Con la radiación  $\gamma$  el núcleo no

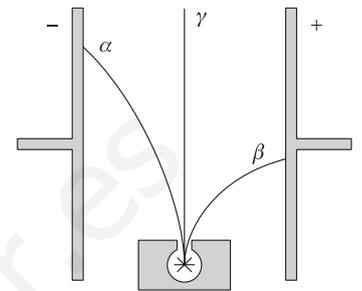


Fig. XXX-10.- Desviación eléctrica de las emisiones de sustancias radioactivas.

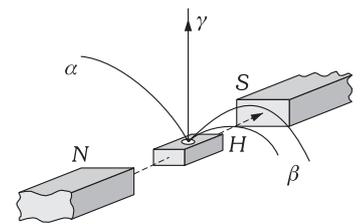


Fig. XXX-11.- Desviación magnética de las partículas emitidas.

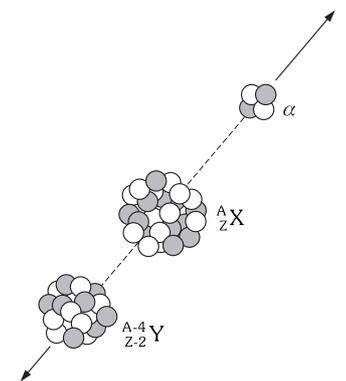


Fig. XXX-12.- Desintegración alfa.

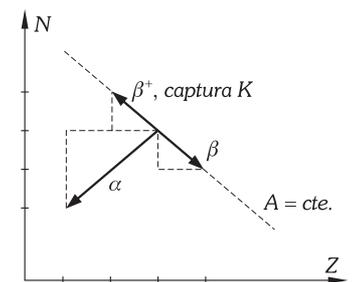


Fig. XXX-13.- Leyes de Soddy.

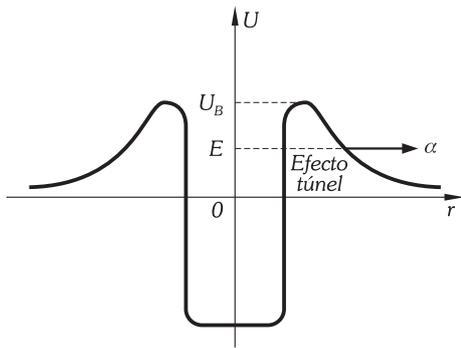


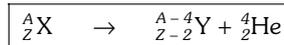
Fig. XXX-14.- La partícula  $\alpha$  es emitida con una energía  $E (< U_B)$  tras atravesar la barrera de potencial por efecto túnel.

cambia ni el número másico ni el atómico, solamente cede energía electromagnética como consecuencia de ajustes energéticos. Para que se produzca, el núcleo ha de estar inicialmente excitado, lo que suele ocurrir tras una desintegración  $\alpha$  o  $\beta$ . La medida de la energía de los fotones y emitidos por los núcleos es uno de los métodos más importantes para el estudio de la naturaleza de las fuerzas nucleares.

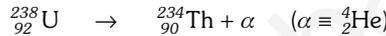
Dentro de la radiación  $\beta$  se incluye el proceso de *captura electrónica*, que se produce cuando un electrón de la corteza es atrapado por el núcleo, y que se da sobre todo en átomos pesados, en los que la capa electrónica K está muy próxima al núcleo. Se conoce también como *captura K*. Tras una captura electrónica el número atómico disminuye en una unidad sin variar el número másico (Fig. XXX-13). El hueco dejado por el electrón capturado es ocupado por otro electrón exterior, que al pasar a la capa K emite un fotón X del espectro característico del átomo.

**XXX - 13. Desintegración alfa**

Es la emisión de partículas  $\alpha$  por un núcleo. El proceso se puede representar de la forma (Fig. XXX-12):



Un ejemplo es la desintegración del U-238:



Los núcleos pesados al desintegrarse emiten siempre partículas  $\alpha$  y nunca otras partículas, como podrían ser protones o núcleos de berilio. La razón de esto radica en la gran energía de ligaduras de las partículas  $\alpha$ , no en vano tienen un número mágico de protones y de neutrones (son doblemente mágicas). La relación que deben verificar las energías de enlace de los núcleos que intervienen en este tipo de desintegración, se puede expresar de la forma:

$$E_B(Z, N) \leq E_B(Z - 2, N - 2) + E_B(\alpha)$$

y de derecho, todas las desintegraciones a que cumplen esta relación se dan realmente.

El que un núcleo emita una partícula  $\alpha$  no significa que ésta exista permanentemente en su interior; las interacciones de los nucleones hacen que, esporádicamente, dos protones y dos neutrones se agrupen durante un corto tiempo, y si tal agrupamiento se verifica en la superficie del núcleo, entonces existe la posibilidad de que salga de él como partícula independiente. Para que esto se produzca, la partícula  $\alpha$  ha de vencer una barrera de potencial como la de la figura XXX-14, que en núcleos emisores  $\alpha$  es de aproximadamente 30 MeV; sin embargo, los valores experimentales de la energía que poseen las partículas emitidas están entre 4 y 7 MeV. Con esta energía la partícula debería permanecer indefinidamente en el interior del núcleo.

Esta contradicción fue aclarada en 1928 por Gamow gracias a la mecánica cuántica: la partícula  $\alpha$  tiene una cierta probabilidad de atravesar la barrera por efecto túnel (Párrafo XXVII-41).

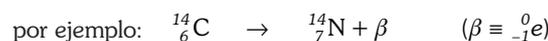
Una prueba de la existencia de niveles energéticos en el núcleo es el hecho de que el espectro de energías de la radiación  $\alpha$  es discreto; un núclido determinado emite siempre partículas con una serie de valores de energía determinados, y nunca con los intermedios. Por ejemplo, el Ra-226 puede emitir, desde su estado fundamental, con energías de 5,784, 5,597 ó 5,334 MeV, lo que significa que el Rn-222 tiene al menos tres niveles discretos de energía: el fundamental y dos excitados, con energías de  $5,784 - 5,597 = 0,187$  MeV y de  $5,784 - 5,334 = 0,450$  MeV por encima del fundamental. Si en una emisión  $\alpha$  del radio, el núcleo de radón, queda en estado excitado, éste emitirá a continuación un fotón  $\gamma$  pasando así a su estado fundamental (Fig. XXX-15).

Las medidas experimentales de las energías de la partícula  $\alpha$  y del fotón emitidos concuerdan con las esperadas a partir de las energías de enlace de los núcleos padre e hijo.

**XXX - 14. Desintegración beta. El neutrino**

Se entiende por desintegración nuclear beta aquella la en que el número másico permanece constante y el número atómico cambia en una unidad.

En la desintegración beta negativa se emite un electrón, pudiendo representarse el proceso en la forma:



La razón  $N/Z$  disminuye, es por tanto la forma de ganar estabilidad que tienen los núcleos situados inmediatamente por encima de la zona de estabilidad del diagrama de Segrè (Fig. XXX-16). En la desintegración beta positiva ( $\beta^+$ ) la partícula emitida es un positrón:

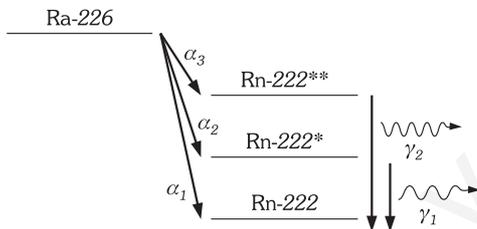


Fig. XXX-15.- En una desintegración  $\alpha$ , estas partículas se emiten con un espectro discreto de energías. Si el núcleo hijo queda excitado, puede pasar al estado fundamental por emisión de fotones  $\gamma$ .

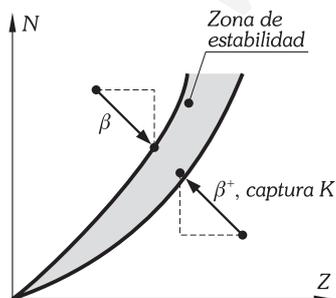


Fig. XXX-16.- La desintegración beta negativa ( $Z' = Z + 1, N' = N - 1$ ) y las beta positiva y captura electrónica ( $Z' = Z - 1, N' = N + 1$ ) son formas de transmutación de núcleos próximos a la zona de estabilidad.



Por aumentar la razón N/Z será ésta la forma de desintegración de los núcleos que se encuentran por debajo de la zona de estabilidad (Fig. XXX-16). El proceso de captura electrónica (Fig. XXX-16) obedece la ecuación:



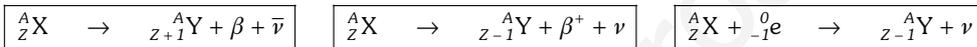
El espectro de energías de las partículas  $\beta$  emitidas por un material radiactivo no es discreto como el de las partículas  $\alpha$ , sino que presenta una distribución continua entre cero y un valor máximo igual a la energía de desintegración, es decir, a la diferencia de energías de enlace de los núcleos padre e hijo.

Puesto que muchas partículas  $\beta$  son emitidas con energía menor que la de desintegración, parece que hay una pérdida de energía que viola el principio de conservación. Para explicar esta desaparición de energía se pensó en principio que todas las partículas  $\beta$  son emitidas con la energía máxima y que en su paso a través de la muestra emisora le cedían a esta, en mayor o menor grado, parte de esa energía. Cálculos calorimétricos demostraron que esto no era así.

Esta situación la resolvió Pauli, en 1930, postulando la existencia de una partícula adicional que se emite junto con la partícula  $\beta$ . Esta partícula nueva debía ser neutra para cumplir con la conservación de la carga, y tener una masa nula o muy pequeña puesto que la masa inicial estaba esencialmente contenida en las dos partículas producto de la desintegración. Además la conservación del momento angular exige que su spin sea 1/2. Por estas razones, el físico italiano Enrico Fermi le dio el nombre de NEUTRINO (neutrón pequeño).

Hay dos tipos de neutrinos asociados con la desintegración  $\beta$ , el neutrino electrónico ( $\nu$ ) y el antineutrino electrónico ( $\bar{\nu}$ ). Las propiedades de ambos, carga nula y masa muy pequeña o nula, hicieron que su observación no se verificase hasta 26 años después de que se postulase su existencia.

Las expresiones (1), (2), y (3) deben ser escritas ahora de la forma:



Puesto que en el núcleo no existen electrones ni positrones, en una desintegración beta deben producirse a partir de los nucleones. Los procesos se escriben:



Es importante señalar que la pérdida de masa en este segundo proceso es positiva, en unidades de energía vale 0,78 MeV; por ello el neutrón fuera del núcleo no es estable y se desintegra en las partículas indicadas.

### XXX - 15. Ley de las transmutaciones radiactivas (Rutherford)

El número de átomos de un elemento radiactivo que se desintegra por unidad de tiempo es proporcional al número total de tales átomos existentes en la muestra de material.

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = -\lambda N}$$

$N$  = número de átomos sin desintegrar.

$dN$  = número de átomos que se desintegran en el tiempo  $dt$ .

$\lambda$  = tanto por 1 de átomos desintegrados en cada unidad de tiempo (*constante radiactiva*).

El signo *menos* indica que, con el tiempo, *disminuye* el número de átomos de la especie estudiada. La fórmula anterior se puede expresar:  $dN/N = -\lambda dt$  cuya integración conduce a:  $\ln N = -\lambda t + \ln K$

Si en el instante inicial el número de átomos sin desintegrar es  $N_0$ :  $\ln N_0 = \ln K$  la fórmula anterior se transforma en:  $\ln N = -\lambda t + \ln N_0 \Rightarrow \ln N/N_0 = -\lambda t$

o bien:

$$\boxed{N = N_0 e^{-\lambda t}} \quad (4)$$

«Cuando el tiempo crece en progresión aritmética el número de átomos del elemento radiactivo original, disminuye en progresión geométrica».

Tanto las expresiones anteriores como las magnitudes que se definen a continuación, tienen sentido solamente si se refieren a una cantidad de elemento radiactivo que contenga un gran número de átomos. Nunca se puede predecir cuándo se va a desintegrar un núcleo dado; todos los núcleos de la misma clase tienen exactamente la misma probabilidad de desintegrarse en el segundo siguiente, sea cual sea su historia anterior.

**XXX – 16. Período de semidesintegración y vida media**

PERÍODO DE SEMIDESINTEGRACIÓN, es el tiempo necesario para que se desintegren la mitad de los átomos de un elemento.

Si en la fórmula (4) hacemos  $N = N_0/2$ , se obtiene:

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda t} \Rightarrow 1 = 2e^{-\lambda t} \Rightarrow 0 = \ln 2 - \lambda T \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}$$

El período de los átomos radiactivos es muy variable de unos a otros; el período del U-238 es de 4 470 millones de años, mientras que el del Po-214 es de  $1,64 \times 10^{-4}$  segundos.

La VIDA MEDIA,  $\nu$ , de los átomos de una muestra es el tiempo de vida promedio de todos ellos.

Aunque ya se ha dicho que la validez de los razonamientos está supeditada a la presencia de un gran número de átomos, para obtener valores promedios podemos referirnos a un solo átomo con la siguiente proporcionalidad directa:

$$\left. \begin{array}{l} \text{fracción } \lambda \text{ de átomo}^n \text{ se desintegra en } 1 \text{ segundo} \\ 1 \text{ átomo se desintegra en } \nu \end{array} \right\} \nu = \frac{1}{\lambda}$$

que es la vida media de la muestra, relacionada con el período de semidesintegración por la expresión:

$$\nu = \frac{1}{\lambda} = \frac{T}{\ln 2}$$

**XXX – 17. Actividad. El curie**

La ACTIVIDAD de una muestra radiactiva es el número de desintegraciones que se producen en ella cada segundo.

Según lo visto en las cuestiones anteriores, para una muestra inicial dada, la actividad decrece exponencialmente con el tiempo:

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \quad \wedge \quad A_0 = \lambda N_0 \Rightarrow A = A_0 e^{-\lambda t}$$

La unidad de actividad es el *becquerel* (Bq), que corresponde a una desintegración por segundo:  $1 \text{ Bq} = 1 \text{ s}^{-1}$ . Sin embargo, por resultar una unidad muy pequeña, en 1910 se adoptó como unidad de actividad la de un gramo de radio, que corresponden a  $3,62 \times 10^{10}$  desintegraciones cada segundo y a la que se denominó *curie* (Ci). Actualmente se considera que:

Una muestra radiactiva tiene una actividad de un curie cuando experimenta  $3,70 \times 10^{10}$  desintegraciones cada segundo.

Otra unidad, menos usada, es el *rutherford*: es la actividad de una muestra en la que se producen  $10^6$  desintegraciones por segundo. Por tanto:  $1 \text{ Ci} = 3,70 \times 10^4$  rutherford.

**XXX – 18. Series radiactivas**

Cuando un elemento radiactivo se desintegra puede ocurrir que el elemento hijo sea también radiactivo, con lo que se desintegrará en otro, y así sucesivamente hasta que se produzca un elemento estable. Según esto, en una muestra inicial pueden coexistir el elemento original y todos a los que ha dado origen. Se llama FAMILIA O SERIE RADIATIVA al conjunto de elementos ligados entre sí por desintegración natural.

Puesto que las desintegraciones tienen lugar por emisión de partículas  $\alpha$  o  $\beta$ , los números másicos de los elementos de una serie difieren en múltiples enteros de cuatro. Existen en consecuencia cuatro series radiactivas, que se clasifican como:  $4n$ ,  $4n + 1$ ,  $4n + 2$ ,  $4n + 3$  donde  $n$  es un número entero y la fórmula de la serie da el número de nucleones de sus elementos.

La serie  $4n$  es la del torio  ${}_{90}^{239}\text{Th}$  empieza en dicho elemento y acaba en el estable  ${}_{82}^{208}\text{Pb}$ .

La serie  $4n + 1$  del neptunio, comienza en el  ${}_{98}^{237}\text{Np}$  y acaba en el  ${}_{83}^{209}\text{Bi}$  que tiene una actividad muy débil. Sus miembros no aparecen en minerales naturales porque todos ellos tienen períodos de semidesintegración relativamente cortos (2 millones de años el neptunio de  $A = 237$ ).

La serie  $4n + 2$ , del uranio, empieza en el  ${}_{92}^{238}\text{U}$  y llega hasta el  ${}_{82}^{206}\text{Pb}$ ; y la serie  $4n + 3$  del actinio, que comienza con el  ${}_{96}^{235}\text{U}$  acaba en el  ${}_{82}^{207}\text{Pb}$ .

No todos los elementos radiactivos naturales pertenecen a una serie, existen algunos cuyo hijo es estable y que permanecen activos por tener un período de semidesintegración muy grande. Un caso de emisor  $\alpha$  de este tipo es el  ${}_{62}^{147}\text{Sm}$  que se transforma en  ${}_{60}^{143}\text{Nd}$  estable, y que tiene un período de  $1,3 \times 10^{11}$  años. Casos de emisores  $\beta$  son el  ${}_{37}^{87}\text{Rb}$  ( $T = 4,7 \times 10^{10}$  años) y el  ${}_{19}^{40}\text{K}$  ( $T = 1,3 \times 10^9$  años), que es el único de cierta importancia por estar presente en un 0,01% en el potasio natural y ser este un elemento muy abundante en la corteza terrestre y en el cuerpo humano. Por desintegración  $\beta$  produce  ${}_{20}^{40}\text{Ca}$ .

### XXX – 19. Equilibrio radiactivo

La velocidad de desintegración de un elemento es  $\lambda_1 N_1$ , donde  $\lambda_1$ , es la constante radiactiva y  $N_1$  el número de átomos presentes. Por cada núcleo que se desintegra aparece un núcleo hijo, así que  $\lambda_1 N_1$  es la velocidad de formación del hijo. Si éste es estable se acumula progresivamente con el tiempo, pero si es inestable se desintegrará también a una velocidad  $\lambda_2 N_2$  y se estará formando y desintegrando continuamente.

*Cuando la velocidad de producción de un elemento es igual a su velocidad de desintegración, éste habrá alcanzado una concentración de equilibrio radiactivo.*

Si toda la serie se encuentra en equilibrio, se verifica:

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 = \lambda_3 N_3 = \dots$$

la actividad de cada elemento de la serie es la misma y cada uno se halla en la muestra en una proporción constante, salvo el original, que disminuye continuamente, y el último miembro, que es estable y aumenta en número constantemente.

En una serie en equilibrio se puede obtener la relación entre el número de átomos presentes de cada miembro, ya que, para dos cualesquiera de ellos, la expresión anterior se puede escribir en función de los períodos de semidesintegración de la forma:

$$\frac{N_a}{N_b} = \frac{\lambda_b}{\lambda_a} = \frac{T_a}{T_b}$$

Por otra parte, esta expresión permite calcular el período de semidesintegración de un elemento cuando, por ser muy grande, no puede obtenerse de forma fiable por medida directa. Para ello es necesario conocer el período de otro elemento de la serie y medir, mediante un espectrógrafo de masas, la proporción de ambos en la muestra en equilibrio.

### XXX – 20. Detectores de radiación

Los conocimientos que se tienen actualmente en el campo de la física nuclear y de partículas elementales se deben fundamentalmente al desarrollo de los métodos de detección de la radiación.

Todos los detectores se basan en la interacción de partículas cargadas con los átomos del detector; por tanto, los rayos  $\gamma$  y los neutrones sólo pueden ser detectados a través de las partículas con carga que originen.

Los fotones  $\gamma$  producen electrones a través de tres mecanismos: el efecto fotoeléctrico (cuestión XXVIII-2), el efecto Compton (cuestión XXVIII-3) y la generación de pares electrón-positrón. En cuanto a los neutrones, es posible su detección por varios efectos: cuando chocan elásticamente con un núcleo ligero éste recibe la suficiente energía como para ser detectado como una carga en movimiento; un neutrón puede provocar una reacción nuclear en la que se emitan partículas con carga, como partículas alfa; además, la absorción de neutrones puede originar isótopos radiactivos, cuya actividad es una medida del número de neutrones que han sido absorbidos por el material.

Los detectores de partículas cargadas se clasifican en función de las magnitudes que permiten medir. Así, los DOSÍMETROS se emplean para medir la intensidad total de radiación durante un tiempo largo mediante los cambios que ésta origina en la materia, como por ejemplo, variación de la conductividad eléctrica o de la composición química. Los DETECTORES DE REGISTRO permiten determinar únicamente cuándo el dispositivo es atravesado por una partícula; en los ESPECTRÓMETROS es también posible la medida de la energía de la partícula, y en los DETECTORES DE TRAZA se pueden determinar sus posiciones sucesivas.

El único detector de registro que aún se usa es el contador de Geiger-Müller, cuyo fundamento se comentará en esta misma cuestión. Por otra parte, es evidente que un espectrómetro puede usarse como detector de registro sin más que prescindir de la información relativa a la energía de la partícula.

ESPECTRÓMETROS:

Entre los espectrómetros se encuentran la cámara de ionización, el contador proporcional, los contadores de semiconductores y los contadores de centelleo y Cherenkov. Tanto los dos primeros como el contador Geiger-Müller tienen una estructura similar a la de la Fig. XXX-17, constituida por una cámara con dos electrodos, llena de un gas que es ionizado por la partícula cargada que penetra a través de una delgada ventana.

En ausencia de partículas ionizantes no existe circulación de corriente por la resistencia exterior, pero el paso de una de ellas produce iones que son recogidos por los electrodos, ocasionando una pequeña variación de la tensión entre los extremos de la resistencia; este pulso de tensión es detectado y amplificado convenientemente. Cuando la tensión entre los electrodos tiene el valor adecuado para que los iones sean recogidos rápidamente evitando su recombinación, pero no es aún lo suficientemente alta como para que éstos puedan producir iones secundarios por choques, entonces el pulso de tensión se debe únicamente a los iones producidos por la partícula ionizante,

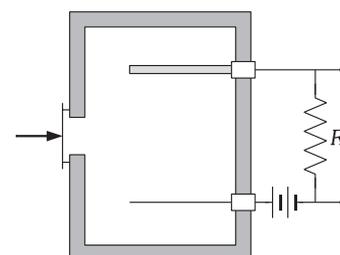


Fig. XXX-17.– Cámara de ionización.

y se dice que el detector funciona como CÁMARA DE IONIZACIÓN. En estas condiciones, este dispositivo es capaz de distinguir entre distintas partículas debido a su diferente poder ionizante ya que el tamaño del pulso depende de la cantidad de carga recolectada por los electrodos.

De funcionamiento análogo a la cámara de ionización son los CONTADORES SEMICONDUCTORES, constituidos por una unión PN en la que la partícula incidente provoca la formación de pares electrón-hueco.

Al elevar más la tensión entre electrodos los iones producidos por la partícula en la cámara adquieren energía suficiente para producir iones secundarios por choques, y éstos a su vez puede provocar una nueva ionización, estableciéndose así un efecto de avalancha. Si la tensión tiene los valores adecuados, el tamaño del pulso de tensión es proporcional al número de iones primarios y el dispositivo funciona como un CONTADOR PROPORCIONAL, en el cual los pulsos tienen tamaños del orden de  $10^4$  veces más grandes que los producidos en la cámara de ionización y precisan, por tanto, de menor amplificación.

Una variante de este detector, introducida por el físico francés Georges Charpak en 1968, consta de un gran número de hilos conductores paralelos situados entre dos placas metálicas conectadas a potencial negativo respecto de los hilos y separadas un centímetro; de esta forma, cada hilo constituye un contador proporcional individual. El CONTADOR PROPORCIONAL DE HILOS es hoy uno de los más usados por la gran cantidad de información que proporciona y por la rapidez en obtenerla que permite. La contribución de los detectores ideados por Charpak al desarrollo de la física de las partículas le supuso la concesión del premio Nobel de Física de 1992.

Al seguir aumentando la tensión se alcanza una zona, zona Geiger, en que el tamaño del pulso aumenta con la tensión, pero es independiente del número de iones primarios; en el CONTADOR GEIGER-MÜLLER ese tamaño es lo suficientemente grande como para no precisar amplificación exterior. Este contador no permite distinguir entre unas partículas cargadas y otras ya que su respuesta es independiente del número inicial de iones (no se trata pues de un espectrómetro sino de un detector de registro).

Los CONTADORES DE CENTELLEO se basan en la existencia de sustancias luminiscentes en las que, al disipar en ellas su energía una partícula cargada, se produce la emisión de cortos impulsos luminosos cuya intensidad depende de la energía cedida por la partícula. La luz producida es enfocada sobre el cátodo de un tubo fotomultiplicador (cuestión XXIX-22) que transforma los impulsos luminosos en pulsos de tensión; el dispositivo se completa con un amplificador y un contador electrónico.

Los CONTADORES CHERENKOV utilizan la radiación *cherenkov* originada cuando una partícula cargada penetra en un medio con una velocidad mayor que la de la luz en él. Por un efecto de interferencias, similar a la amplificación de sonido en el caso supersónico (cuestión XXVII-13), se produce la emisión de radiación en una dirección que forma con la incidente un ángulo característico que depende del índice de refracción del medio y de la velocidad de la partícula. Eligiendo adecuadamente el material, en función de la velocidad aproximada de las partículas a detectar, se obtiene radiación en la zona del espectro visible; ésta es focalizada sobre el cátodo de un tubo fotomultiplicador cuya salida se amplifica y se envía a un contador electrónico.

DETECTORES DE TRAZA:

En cuanto a los detectores de traza, existen dos tipos: eléctricos (cámara de chispas y hodoscopio) y no eléctricos (emulsiones nucleares, cámara de niebla y cámara de burbujas).

La CÁMARA DE CHISPAS es un recinto herméticamente cerrado, con helio o neón en su interior, en el que hay además placas metálicas conectadas alternativamente a una pequeña diferencia de potencial que mantiene todo el volumen entre placas libre de electrones (Fig. XXX-18). Cuando un contador Geiger-Müller exterior detecta el paso de una partícula cargada, se provoca entre las placas un corto impulso de alta tensión que origina, entre cada par de placas, una chispa en el lugar por el que ha pasado la partícula. La fotografía de las chispas producidas revela la trayectoria de la partícula.

En el HODOSCOPIO, entre los dos electrodos se colocan unos globos de cristal aislados ópticamente unos de otros y rellenos de neón, en este caso no se produce chispa, sino que lo que se fotografía es la luminiscencia que se produce en los globos, en los que el paso de la partícula y la alta tensión establecida provocan la formación de una avalancha de iones.

Los detectores de traza no eléctricos son los más utilizados ya que en ellos es posible medir fácilmente tanto la longitud de la traza como su grosor, y su curvatura si había un campo magnético durante el paso de la partícula. De estos datos se pueden deducir la masa, el signo de la carga y la energía de la partícula ionizante.

Las EMULSIONES NUCLEARES son emulsiones fotográficas de cristales de bromuro de plata disueltos en gelatina. Una vez reveladas muestran una traza oscura de átomos de plata a lo largo de la trayectoria seguida por la partícula. Normalmente se disponen una gran cantidad de ellas superpuestas.

La CÁMARA DE NIEBLA de expansión es un dispositivo ideado por H. A. Wilson, de estructura similar a la de la figura XXX-19. Una partícula cargada en movimientos produce iones en el aire, los cuales sirven de núcleos de condensación de vapor de agua, dejando las partículas eléctricas tras

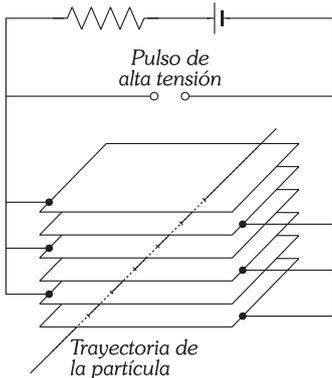


Fig. XXX-18.- Esquema de la cámara de chispas.

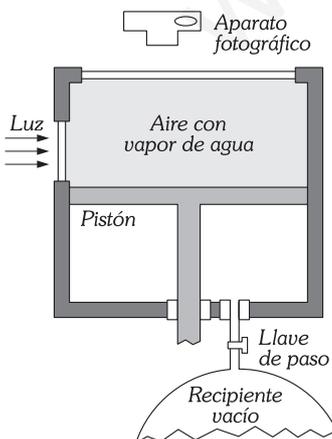
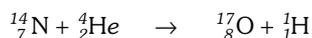


Fig. XXX-19.- Esquema de la cámara de niebla de expansión.

sí, estelas de gotitas de agua, que iluminadas lateralmente, pueden ser fotografiadas quedando, de esta forma, determinada la trayectoria de la partícula.

En el recinto que se indica en la figura se provoca un alto vacío. Abierta la llave de paso cuando un contador exterior indica la incidencia de una partícula, el pistón sufre un brusco retroceso y el gas cargado de vapor de agua experimenta una expansión que lo enfría, quedando sobresaturado (cuestión XX-41), y formándose la estela de gotitas de agua antes descrita.

La fotografía de la figura XXX-20 corresponde a la reacción:



El gas que llena la cámara de Wilson es nitrógeno. Cada vez que una partícula provoca la reacción nuclear descrita, su trayectoria se escinde en dos divergentes; la más gruesa señala la trayectoria del núcleo de oxígeno y la más fina la del protón. La interpretación de la fotografía se aclara en el esquema de la figura XXX-21.

La CÁMARA DE BURBUJAS tiene un funcionamiento análogo a la de niebla; en lugar de un vapor sobreenfriado, utiliza un líquido sobrecalentado (cuestión XX-41), en el que el paso de una partícula ionizante provoca la formación de pequeñas burbujas. Se suele utilizar hidrógeno líquido, que hierve a  $-225^\circ\text{C}$  a presión normal, pero que lo hace a  $-246^\circ\text{C}$  si se mantiene a 6 atmósferas. Para registrar una traza se hace disminuir rápidamente la presión un instante antes del paso de la partícula, y el líquido inicia la ebullición en los iones dejados por ésta. Inmediatamente después se vuelve a aumentar la presión para evitar que ebulle todo el líquido de la cámara, y se fotografía la traza de burbujas obtenida.

**PROBLEMAS: 19 al 59.**

### C) REACCIONES NUCLEARES

#### XXX – 21. Reacciones nucleares. Clasificación

Son reacciones nucleares las que se verifican entre núcleos, o entre un núcleo y una partícula o fotón  $\gamma$ .

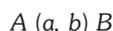
De la misma forma que los átomos pueden reaccionar químicamente entre sí, también los nucleones y los mismos núcleos pueden reaccionar y formar uno o varios núcleos nuevos. Sin embargo las reacciones nucleares son distintas de las atómicas fundamentalmente por dos motivos.

Por un lado, el diámetro del átomo es del orden de  $10^5$  veces el de núcleo, con lo que las reacciones entre núcleos son muchos menos frecuentes que entre átomos; y por otro lado, entre los núcleos existe siempre la repulsión electrostática debida a sus cargas positivas.

Para facilitar las reacciones nucleares existen dos procedimientos. El primero es aumentar la temperatura para que los núcleos adquieran la energía cinética que les permita vencer la repulsión coulombiana; ahora bien, las energías involucradas en estas reacciones son generalmente de varios MeV, sin embargo un aumento de  $3000^\circ$  en la temperatura supone un aumento de la energía del núcleo de  $0,4$  eV; por tanto, las reacciones nucleares sólo pueden provocarse de esta forma elevando la temperatura en millones de grados. Estas reacciones se denominan *termonucleares* y son las que tienen lugar en las estrellas.

El segundo procedimiento consiste en el bombardeo de núcleos, generalmente fijos en un material sólido, por neutrones o por partículas cargadas, como  $\alpha$ , protón  $p$  ( ${}^1_1\text{H}$ ) o deuterón  $d$  ( ${}^2_1\text{H}$ ), que han sido dotadas de gran energía cinética en un acelerador. Por el mismo procedimiento, en los actuales aceleradores se provocan choques frontales entre haces de partículas y entre una partícula y su antipartícula.

Una reacción nuclear simboliza abreviadamente de la forma:



donde  $A$  es el núcleo que hace de blanco,  $\alpha$  el proyectil,  $B$  el núcleo residual y  $b$  una partícula emitida.

El estudio de las reacciones nucleares comenzó en 1919 cuando Rutherford bombardeó nitrógeno con partículas  $\alpha$ , y observó la formación de oxígeno; esta reacción, mencionada en la cuestión anterior, se puede escribir abreviadamente de la forma:  ${}^{14}_7\text{N} (\alpha, p) {}^{17}_8\text{O}$

Es posible expresar la ecuación de una reacción sin hacer constar el número atómico ya que basta con el símbolo del elemento; por ejemplo, la primera reacción de transmutación de un elemento en otro obtenida mediante partículas aceleradas artificialmente, realizada por Cockcroft y Walton, es:



Se pueden clasificar las reacciones nucleares en dos grandes grupos: dispersión y transmutación.

La DISPERSIÓN se produce cuando el blanco captura el proyectil y en un corto intervalo de tiempo emite una partícula idéntica a la capturada, aunque no necesariamente la misma; es decir, los

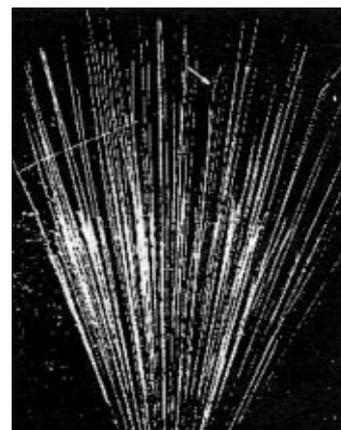


Fig. XXX-20.– Fotografía obtenida en una cámara de niebla. Los tramos rectos divergentes son trazas dejadas por partículas  $\alpha$ .

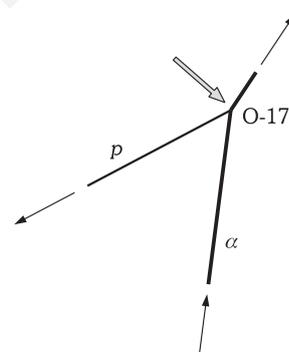


Fig. XXX-21.– Las trazas que emergen del punto señalado en la figura XXX-20 corresponden al oxígeno, la más gruesa, y al protón la más fina.

reactivos, y los productos de la reacción son idénticos. Si además la energía cinética es la misma antes y después de la reacción, la dispersión es *elástica*, en caso contrario se denomina *inelástica*. En una dispersión inelástica en la que la energía cinética final es menor que la inicial, el núcleo blanco queda en un estado excitado del que generalmente pasa al estado fundamental emitiendo un fotón  $\gamma$ .

La reacción se denomina de TRANSMUTACIÓN cuando todos o algunos de los productos son distintos de los reaccionantes. Dentro de esta clase se encuentran las *fotonucleares*, en las que el proyectil es un cuanto  $\gamma$ , y las de *captura radiactiva*, en las que se emite exclusivamente un cuanto  $\gamma$ . El nombre de transmutación se reserva normalmente a aquellas reacciones en las que el núcleo blanco cambia de número másico en unas pocas unidades; en caso contrario reciben nombres específicos, como el de *fisión* si el núcleo se rompe en dos fragmentos principales, de masas parecidas, y en algunas partículas, como neutrones o partículas  $\alpha$ ; o el de *fragmentación* si uno de los fragmentos es menor que los de la fisión pero mucho mayor que una partícula  $\alpha$ .

### XXX – 22. Tipos de reacciones de transmutación en función del proyectil

Si el proyectil de una reacción nuclear tiene carga positiva, para poder alcanzar la región de actuación de las fuerzas nucleares atractivas necesita una energía mínima que le permita vencer la fuerza electrostática de repulsión, que empieza a actuar a distancias mucho mayores que las fuerzas nucleares. Puesto que la repulsión electrostática es proporcional al producto de las cargas del proyectil y del blanco, los proyectiles utilizados son, o bien núcleos de número atómico lo menor posible, es decir, protones, deuterones y partículas  $\alpha$ , o bien rayos gamma o neutrones. Estos últimos presentan la ventaja de no experimentar ninguna repulsión y ser por tanto muy eficaces en la producción de reacciones nucleares, incluso los de muy baja energía.

En el cuadro siguiente se da una lista de diversos tipos de reacciones de transmutación (las reacciones de fisión y de fusión se tratan en cuestiones posteriores):

PROYECTIL	TIPO DE REACCIÓN	EJEMPLO	NOTACIÓN ABREVIADA
$p$	$p-n$	${}^{18}_6\text{O} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^{18}_9\text{F} + {}^1_0n$	${}^{18}_6\text{O} (p, n) {}^{18}_9\text{F}$
	$p-d$	${}^9_4\text{Be} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^8_4\text{Be} + {}^2_1\text{H}$	${}^9_4\text{Be} (p, d) {}^8_4\text{Be}$
	$p-\alpha$	${}^7_3\text{Li} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^4_2\text{He}$	${}^7_3\text{Li} (p, \alpha) {}^4_2\text{He}$
	<i>captura radiactiva</i>	${}^{12}_6\text{C} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^{13}_7\text{N} + \gamma$	${}^{12}_6\text{C} (p, \gamma) {}^{13}_7\text{N}$
$d$	$d-n$	${}^9_4\text{Be} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^{10}_5\text{B} + {}^1_0n$	${}^9_4\text{Be} (d, n) {}^{10}_5\text{B}$
	$d-p$	${}^{23}_{11}\text{Na} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^{24}_{11}\text{Na} + {}^1_1\text{H}$	${}^{23}_{11}\text{Na} (d, p) {}^{24}_{11}\text{Na}$
	$d-\alpha$	${}^{16}_8\text{O} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^{14}_7\text{N} + {}^4_2\text{He}$	${}^{16}_8\text{O} (d, \alpha) {}^{14}_7\text{N}$
$\alpha$	$\alpha-n$	${}^9_4\text{Be} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{12}_6\text{C} + {}^1_0n(*)$	${}^9_4\text{Be} (\alpha, n) {}^{12}_6\text{C}$
	$\alpha-p$	${}^{14}_7\text{N} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{17}_8\text{O} + {}^1_1\text{H}$	${}^{14}_7\text{N} (\alpha p) {}^{17}_8\text{O}$
$n$	$n-p$	${}^{14}_7\text{N} + {}^1_0n \rightarrow {}^{14}_6\text{C} + {}^1_1\text{H}$	${}^{14}_7\text{N} (n, p) {}^{14}_6\text{C}$
	$n-\alpha$	${}^{19}_9\text{F} + {}^1_0n \rightarrow {}^{14}_7\text{N} + {}^4_2\text{He}$	${}^{19}_9\text{F} (n, \alpha) {}^{14}_7\text{N}$
	$n-2n$	${}^{27}_{13}\text{Al} + {}^1_0n \rightarrow {}^{26}_{13}\text{Al} + 2{}^1_0n$	${}^{27}_{13}\text{Al} (n, 2n) {}^{26}_{13}\text{Al}$
	<i>captura radiactiva</i>	${}^{238}_{92}\text{U} + {}^1_0n \rightarrow {}^{239}_{92}\text{U} + \gamma$	${}^{238}_{92}\text{U} (n, \gamma) {}^{239}_{92}\text{U}$
$\lambda$ ( <i>fotodesintegración</i> )	$\gamma-n$	${}^2_1\text{H} + \gamma \rightarrow {}^2_1\text{H} + \gamma$	${}^2_1\text{H} (\gamma, n) {}^1_1\text{H}$
		${}^9_4\text{Be} + \gamma \rightarrow {}^8_4\text{Be} + {}^1_0n$	${}^9_4\text{Be} (\gamma, n) {}^8_4\text{Be}$

(\*) Permitió el descubrimiento del neutrón.

### XXX – 23. Balance de masa y energía en las reacciones nucleares

Para estudiar el comportamiento de la materia nuclear a través de las reacciones nucleares, y el posible mecanismo por el que se realizan estas últimas, es preciso caracterizarlas cuantitativamente

mediante medidas de los valores de las diversas magnitudes que intervienen en ellas. Entre esas magnitudes se encuentran la carga, la masa y la energía cinética de las partículas, la frecuencia de los fotones gamma, la sección eficaz de la reacción (cuestión siguiente), los ángulos en que son emitidos los productos, etc.

Consideremos la reacción  $A + a \rightarrow B + b$ , o bien  $A(a, b)B$ . Normalmente las masas de los núcleos antes y después de la reacción son distintas (esto no ocurre si se trata de una dispersión elástica), y la diferencia de masa aparece como una energía consumida o liberada en la reacción, de acuerdo con la relación de Einstein  $E = mc^2$ . Para caracterizar los cambios energéticos ocurridos se emplea el valor de la «Q» de la reacción, definida como la diferencia entre las energías cinéticas finales y las iniciales.

Si estudiamos nuestra reacción en coordenadas de laboratorio, tendremos el blanco en reposo, con lo que su energía cinética  $T_A$  será nula; en estas condiciones la expresión de Q es:

$$Q = T_B + T_b - T_a$$

La expresión relativista de la energía  $E = T + mc^2$  (donde  $m$  es la masa en reposo de la partícula) y la conservación de la energía en la reacción conducen a:

$$m_A c^2 + (T_a + m_a c^2) = (T_B + m_B c^2) + T_b + m_b c^2$$

de donde:  $Q = T_B + T_b - T_a = (m_A + m_a - m_B - m_b) c^2 = -\Delta m c^2$

donde  $\Delta m$  representa el incremento de masa producido en la reacción. Esta última relación expresa el hecho de que cualquier cambio que pueda tener lugar en la energía cinética debe estar compensado por una variación equivalente, y de signo contrario, de las masas en reposo de los participantes en la reacción.

Se llaman *reacciones exotérmicas* a aquellas en que tiene lugar liberación de energía ( $Q > 0$ ), es decir, en las que la masa de los reaccionantes es mayor que la de los productos. En estas reacciones la energía liberada se invierte en energía cinética de los productos, o si se trata de una reacción de captura, en energía de excitación del núcleo resultante, que se emitirá en forma de radiación gamma.

Aquellas reacciones que requieren energía ( $Q < 0$ ) se denominan *endotérmicas*, y la energía requerida ha de ser aportada por la partícula proyectil en forma de energía cinética,  $T_a$ . El valor mínimo de  $T_a$  necesario para producir la reacción es la ENERGÍA UMBRAL, que debe ser algo mayor que el valor Q de la reacción debido a la energía de retroceso comunicada al núcleo que hace de blanco; su valor es:

$$T_{a, \text{umbral}} = -Q \frac{m_a + m_A}{m_A}$$

Como resulta evidente de esta expresión, cuanto más pesado sea el núcleo blanco más próxima es la energía umbral al valor de Q.

### XXX - 24. Sección eficaz

Es una magnitud que *caracteriza la probabilidad de que tenga lugar una determinada reacción nuclear*. Es igual al número de reacciones por segundo que tienen lugar, dividido por el flujo de partículas incidentes (flujo = número de partículas incidentes por centímetro cuadrado y por segundo). De acuerdo con esta definición, la sección eficaz,  $\sigma$ , tiene dimensiones de superficie; su unidad es el barn:  $1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2$

Para un blanco dado, la sección eficaz de un determinado proceso (dispersión, captura, etc.) depende de la naturaleza y de la energía del proyectil; en un proceso endotérmico vale cero para energías menores que la umbral, y crece rápidamente a partir de ella.

La sección eficaz puede imaginarse como la superficie eficaz que presenta un núcleo blanco dado a un determinado proyectil, lo que significa que a cada blanco le asignamos una hipotética área, y cualquier proyectil que se dirija a ella interactuará con el blanco. Es solamente una medida gráfica de la probabilidad de una interacción, y no tiene nada que ver con la superficie real del blanco (Fig. XXX-22); mientras que la sección geométrica de un núcleo es de aproximadamente 1 barn, la sección eficaz para la captura de neutrones en algunos elementos puede alcanzar, a ciertas energías, los  $10^5$  barns.

Se puede obtener una expresión de la relación existente entre la sección eficaz y el número de reacciones que se producen en una muestra que contiene a los núcleos blanco, de la forma siguiente:

Supongamos una plancha de material de  $1 \text{ cm}^2$  de área y espesor  $dx$  (Fig. XXX-23); si existen  $n$  núcleos blanco por unidad de volumen, el número total de núcleos en la plancha es de  $n dx$ . Cada núcleo tiene para la reacción en cuestión una sección eficaz  $\sigma$ , con lo que la sección eficaz que presentan todos ellos es  $n \sigma dx$ . Si inciden sobre el área de la muestra  $N$  proyectiles cada segundo, la variación de su número después de atravesar el espesor  $dx$  será  $-dN$ , con lo que, de la definición inicial, tenemos:

$$n \sigma dx = -\frac{dN}{N}$$

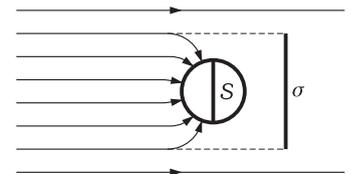


Fig. XXX-22.- La sección eficaz  $\sigma$  es distinta del área S de una sección del núcleo.

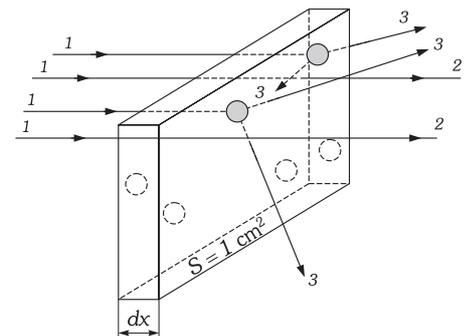


Fig. XXX-23.- 1. Partículas incidentes. 2. Partículas que emergen sin reaccionar. 3. Productos de reacción.

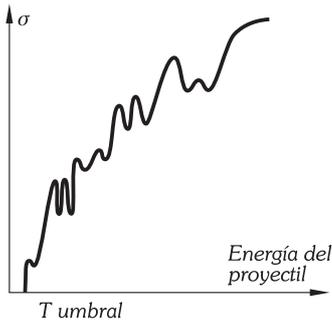


Fig. XXX-24.- Aspecto de una función de excitación, en la que se aprecian los picos de resonancia. Por debajo de la energía umbral la sección eficaz es nula.

Para calcular el número de reacciones en una plancha de espesor  $x$  finito, integramos la expresión anterior designando por  $N_0$  el número de partículas incidentes:

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -n\sigma \int_0^x dx \Rightarrow \ln \frac{N}{N_0} = -n\sigma x$$

es decir:

$$N = N_0 e^{-n\sigma x}$$

expresión que da el número de proyectiles que emergen sin reaccionar, cuya detección permite el cálculo de  $\sigma$ , y que, como se aprecia, decrece exponencialmente con el espesor. El número de reacciones que se han producido es:

$$R = N_0 - N \Rightarrow R = N_0 (1 - e^{-n\sigma x})$$

Si en la reacción los proyectiles quedan absorbidos por el material, el producto  $\alpha = n\sigma$  determina el *coeficiente de absorción* del medio.

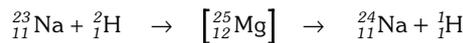
Sobre un tipo de núcleo blanco se pueden provocar distintos tipos de reacciones, en cuyo caso se define una *sección eficaz parcial* para cada reacción concreta, siendo la suma de todas ellas la *sección eficaz total*.

La representación gráfica de la sección eficaz en función de la energía del proyectil, para una reacción dada constituye la llamada *función de excitación* de esa reacción. En algunos rangos de energía del proyectil la gráfica es muy irregular (Fig. XXX-24); presenta máximos que se denominan *picos de resonancia*, para cuya energía el número de procesos es mucho más elevado que para las energías próximas. Para explicar este fenómeno se utiliza el modelo de núcleo compuesto, que se comenta a continuación.

### XXX - 25. Modelo del núcleo compuesto

Fue propuesto por Bohr en 1936 y explica satisfactoriamente los datos observados en reacciones nucleares de baja energía, entendiéndose como tales aquellas en que el proyectil lleva una energía por debajo de 50 MeV, es decir, de hasta unas pocas veces la energía media de enlace por nucleón. El límite de 50 MeV no es absolutamente preciso, conforme aumenta la energía el modelo de núcleo compuesto compite con otros tipos de proceso, que se describen en la cuestión siguiente, sin embargo, por debajo de la energía mencionada está en perfecto acuerdo con la experiencia.

Según este modelo, el proceso de una reacción nuclear se verifica en dos fases, en primer lugar el núcleo blanco captura el proyectil y forma un *núcleo compuesto*, cuya vida es del orden de  $10^{-14}$ s, mucho mayor que el tiempo que tardaría el proyectil en atravesar el blanco (del orden de  $10^{-21}$  s); después de ese tiempo el núcleo compuesto se desintegra emitiendo una partícula y quedando otro *núcleo residual*. Por ejemplo:



En algunas reacciones de captura de un neutrón por un núcleo pesado, el núcleo compuesto es muy inestable y se divide en dos núcleos de masa parecidas; es el proceso de fisión.

Cuando el blanco, en su estado fundamental de energía, captura el proyectil, el núcleo compuesto resultante tiene una *energía de excitación*, que, en el sistema de referencia de laboratorio, es igual a la diferencia de energías cinéticas inicial y final más la energía de ligadura,  $\Delta E$ , del proyectil en el interior del nuevo núcleo (Fig. XXX-25):

$$E = \Delta E + T_0 - T_f$$

que, aplicando la conservación del momento lineal:  $m_a v = m_C V \Rightarrow V = \frac{m_a}{m_C} v$

se puede poner de la forma:  $E = \Delta E + \frac{1}{2} m_a v^2 - \frac{1}{2} m_C V^2 = \Delta E + T_0 \left(1 - \frac{m_a}{m_C}\right)$

Esta energía puede considerarse inicialmente concentrada en el proyectil recién capturado, pero con el paso del tiempo se distribuye de forma estadística mediante interacciones entre nucleones, estando concentrada en un instante determinado en uno sólo o en unos pocos nucleones, que si están cerca de la superficie del núcleo pueden ser emitidas como partícula independiente.

La forma en que un núcleo compuesto se desintegra depende exclusivamente de la energía de excitación, y no del modo como se formó, es decir, una vez formado, el núcleo compuesto no guarda información sobre su origen. Este hecho se expresa diciendo que el *CANAL DE SALIDA* es independiente del *CANAL DE ENTRADA*. Se llama canal de entrada a la pareja proyectil-núcleo blanco  $(a, A)$ , y canal de salida al conjunto partícula emitida-núcleo residual  $(b, B)$ . En la figura XXX-26, cualquiera de los primeros puede dar origen a cualquier canal de salida. La probabilidad de una salida u otra depende de la estructura del núcleo compuesto y de su energía de excitación.

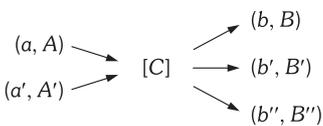


Fig. XXX-26.- Cualquiera de los canales de entrada que originan el núcleo compuesto C, pueden dar a cualquiera de los canales de salida.

Cuando la energía de excitación no es suficiente para emitir uno o varios nucleones, el núcleo compuesto se desexcita por emisión de fotones gamma, y se dice que su energía corresponde a un nivel ligado; si dicha energía sí que es suficiente podrá emitir un nucleón, al nivel correspondiente se le denomina nivel virtual. Precisamente cuando la energía del proyectil es la justa para dar un núcleo compuesto en un nivel virtual, la sección eficaz presenta, a esa energía, un pico de resonancia.

Especificación de los canales de entrada y de salida para las reacciones representadas en la figura XXX-27:

CANAL DE ENTRADA	NÚCLEO COMPUESTO	CANALES DE SALIDA
$n, {}^{27}_{13}\text{Al}$	${}^{28}_{13}\text{Al}$	$\alpha, {}^{24}_{11}\text{Na} / p, {}^{27}_{12}\text{Mg} / \gamma, {}^{28}_{13}\text{Al}$
$p, {}^{27}_{13}\text{Al}$	${}^{28}_{14}\text{Si}$	$\alpha, {}^{24}_{12}\text{Mg} / n, {}^{27}_{14}\text{Si} / \gamma, {}^{28}_{14}\text{Si} / n, 3p, {}^{24}_{11}\text{Na}$
$d, {}^{27}_{13}\text{Al}$	${}^{29}_{14}\text{Si}$	$\alpha, {}^{24}_{12}\text{Mg} / p, {}^{28}_{13}\text{Al} / n, {}^{28}_{14}\text{Si} / p, \alpha, {}^{24}_{11}\text{Na}$
$\alpha, {}^{27}_{13}\text{Al}$	${}^{31}_{15}\text{P}$	$n, {}^{30}_{15}\text{P} / p, {}^{30}_{14}\text{Si}$
$\gamma, {}^{27}_{13}\text{Al}$	${}^{27}_{13}\text{Al}$	$n, {}^{26}_{13}\text{Al} / 2p, {}^{25}_{11}\text{Na} / n, 2p, {}^{24}_{11}\text{Na}$

**XXX – 26. Reacciones nucleares de alta energía**

En los procesos a baja energía que acabamos de ver la energía del proyectil puede concentrarse en un instante u otro en cualquiera de los nucleones del blanco, en este sentido el proyectil interacciona con todo el núcleo. Cuando la energía es elevada el proyectil interacciona directamente con un solo nucleón, que puede ser expulsado o retroceder, permaneciendo en el interior del núcleo; el proyectil, desviado, interaccionará con otros nucleones dando lugar en definitiva a la emisión de varias partículas en el proceso denominado CASCADA. Acabado éste, el núcleo queda en un estado de energía muy alta a partir del cual se desexcitará bien por fisión o bien emitiendo nuevas partículas o fotones  $\gamma$ , en una fase llamada de EVAPORACIÓN.

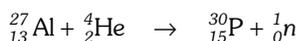
Otros dos procesos típicos de este rango de energía son los de DESPOJO (*stripping*) y CAPTURA (*pick-up*). Una reacción de despojo se produce, por ejemplo, cuando un deuterón de alta energía al pasar cerca de un núcleo es roto en los fragmentos, el protón es atrapado por el núcleo y el neutrón (reacción  $d,n$ ) sale muy poco desviado respecto de la dirección de incidencia. La captura es el proceso inverso (reacción  $n,d$  o  $p,d$ ), el proyectil es el que en este caso atrapa un nucleón del blanco. En estos procesos, la partícula emergente tiene la mayor parte de su momento lineal en la misma dirección que el proyectil, lo que indica que no se llega a formar un núcleo compuesto ya que éste, por no retener información sobre su origen, al desintegrarse emite partículas en cualquier dirección.

Cuando la energía del proyectil supera los 300 MeV se puede producir una reacción de FRAGMENTACIÓN, en la cual esa energía se concentra en zonas locales del núcleo, que se rompe, expulsando un fragmento de masa atómica entre 20 y 40, antes de que la energía haya tenido tiempo de repartirse por el resto del blanco.

**XXX – 27. Radiactividad artificial**

En las reacciones provocadas por bombardeo de núcleos con determinadas partículas, se producen, en ocasiones, núcleos radiactivos, es decir, núcleos que emiten partículas espontáneamente y se transmutan en otros. Al fenómeno se le llama RADIATIVIDAD ARTIFICIAL, y a los núcleos obtenidos ISÓTOPOS RADIATIVOS.

Joliot y Curie (1934) durante una investigación de la reacción nuclear que ocurre cuando se bombardea aluminio con partícula  $\alpha$ , observaron emisión de positrones que continuaba incluso después de dejar de ser irradiado el metal. La actividad en la emisión de positrones decaía de acuerdo con la ley normal de desintegración radiactiva, con un periodo de semidesintegración de 3,2 min. Todo ello evidenció que se había provocado una radiactividad artificial en el aluminio. Posteriormente se comprobó que este hecho era debido a la reacción:



con la posterior desintegración del fósforo radiactivo por emisión de positrones, según la ecuación:

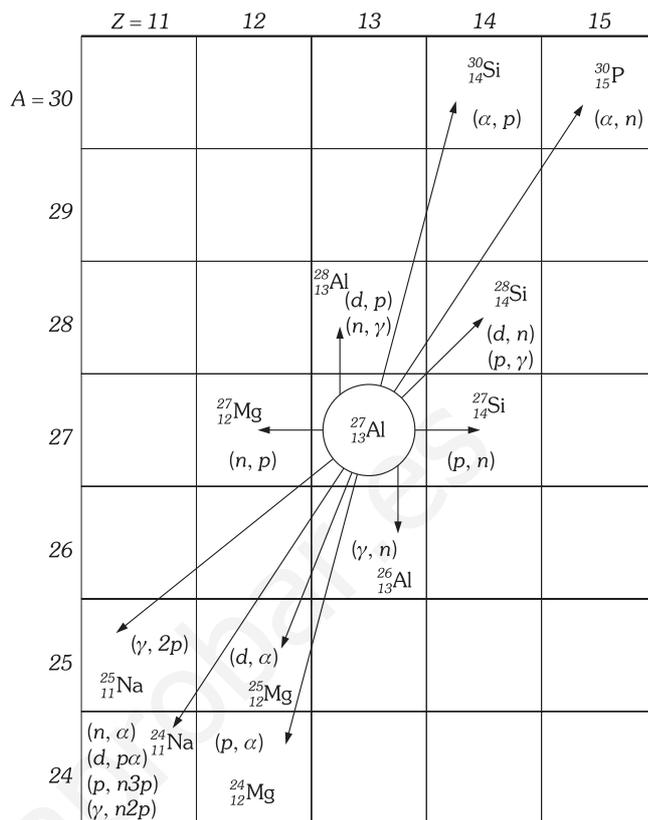
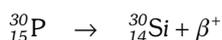


Fig. XXX-27.- Reacciones obtenidas bombardeando Al-27 con partículas de diferente energía.

En la actualidad se han producido isótopos radiactivos de casi todos los elementos, en particular del tecnecio y del promecio que no existen en la naturaleza por carecer de isótopos estables. Los isótopos se originan por bombardeo con neutrones, protones, deuteronos, rayos  $\gamma$ , partículas  $\alpha$ , en incluso con núcleos más pesados.

### XXX – 28. Aplicaciones de los isótopos radiactivos.

Aparte de sus muchas aplicaciones industriales, en medicina se utilizan como:

1º. *Indicadores*: Para observar el comportamiento de una sustancia en el interior del cuerpo humano; tal sustancia se radiactiva permitiendo sus radiaciones localizarla en el interior del cuerpo, es decir: como si dentro de éste hubiese un emisor de rayos  $\gamma$  (exploración del tiroides con yodo radiactivo, radiocardiografías con Na radiactivo inyectado en solución salina).

2º. *Agentes terapéuticos interiores*: Aprovechando el poder destructor de las radiaciones en relación con determinados tejidos; se puede llegar, así, al tratamiento de lesiones profundas (empleo del P radiactivo en el tratamiento del cáncer).

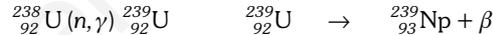
3º. *Agentes terapéuticos exteriores*: Sustituyendo a la radioterapia, es decir, tratamiento para rayos X o rayos  $\gamma$  del radio (tratamiento de lesiones cutáneas con P radiactivo).

Una de las aplicaciones más conocidas es la *DATAción* de restos arqueológicos a través del carbono-14. Este isótopo se produce en la alta atmósfera por bombardeo de átomos de  $^{14}\text{N}$  con neutrones de la radiación cósmica, según la reacción:  $^{14}_7\text{N} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{14}_6\text{C} + {}^1_1\text{H}$ . está presente en el dióxido de carbono en una proporción constante de  $1,3 \times 10^{-12}$  frente al isótopo estable  $^{12}\text{C}$ ; las plantas (y los animales al comerlas) lo asimilan, manteniendo constante esa proporción, pero al morir dejan de renovar su contenido de carbono y el isótopo radiactivo se va desintegrando y disminuyendo en relación al isótopo estable. La medida de la actividad del  $^{14}\text{C}$  permite calcular la antigüedad de un resto biológico.

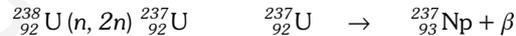
### XXX – 29. Elementos transuránidos

Son los obtenidos por reacciones nucleares y cuyo número atómico es superior al del uranio (92) último cuerpo simple en la clasificación periódica de los elementos naturales.

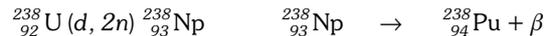
El primero producido, en 1940, fue el neptunio de masa atómica 239, obtenido mediante bombardeo con neutrones del U-238, según las reacciones:



En 1942 se obtuvo otro isótopo más estable, de período  $2,25 \times 10^6$  años:



También en 1940 se produjo el segundo elemento transuránico, el plutonio:



Los actualmente descubiertos son: 93 neptunio; 94 plutonio; 95 americio; 96 curio; 97 berkeleio; 98 californio; 99 einstenio; 100 fermio; 101 mendelevio; 102 nobelio; 103 lawrencio; 104 khourchatowio; 105 hahnio; 106 seaborgio; 107 bohrio; 108 hassio; 109 meitnerio.

### XXX – 30. Medida de los efectos biológicos de la radiación

Se emplean para ellos diversas magnitudes que se definen a continuación.

La *EXPOSICIÓN* ( $J$ ) expresa la capacidad de la radiación electromagnética de ionizar el aire. Se define mediante la relación  $J = Q/m$ , donde  $Q$  es la carga total de los iones producidos en una masa  $m$  de aire. Se mide en C/Kg de aire o en *röntgen* (R):

$$1\text{R} = 2,58 \times 10^{-4} \text{ C/Kg de aire} = 1,610 \times 10^{15} \text{ iones/Kg de aire.}$$

La *DOSIS ABSORBIDA* ( $D$ ) es la fracción de la energía de la radiación absorbida por cada kilogramo del material irradiado:  $D = E/m$ . La unidad del sistema internacional es el *gray* (Gy), también se emplea el *rad*:

$$1 \text{ Gy} = 1 \text{ J/Kg} = 100 \text{ rad}$$

La relación entre la exposición y la dosis absorbida depende del material. Esta dependencia se especifica a través del *factor de proporcionalidad*  $f$ :  $D_{\text{mat}} = fJ$ , donde:

$$f = 33,68 \frac{(\eta/\rho)_{\text{mat}}}{(\eta/\rho)_{\text{aire}}} \frac{\text{Gy} \cdot \text{Kg}}{\text{C}}$$

en esta expresión  $\rho$  es la densidad y  $\eta$  el coeficiente de absorción de energía, dado por  $\eta = \mu E_a/h\nu$  donde  $h\nu$  es la energía del fotón  $\gamma$ ,  $E_a$  es la parte de la energía del fotón que se transforma en calor en el material, y  $\mu$  es el coeficiente de absorción lineal ( $I = I_0 e^{-\mu x}$ ).

El efecto biológico de la radiación se especifica mediante la DOSIS EQUIVALENTE ( $DE$ ) que es proporcional a la dosis absorbida. El factor de proporcionalidad se denomina *factor de calidad* ( $QF$ ) y depende del tipo y energía de la radiación:  $DE = QF \cdot D$ . Los valores aproximados del factor de calidad para distintas radiaciones son: 1 para rayos X,  $\gamma$  y  $\beta$ , 10 para neutrones y 15 y 20 para otras partículas según que su carga sea la de uno o varios electrones, respectivamente.

La dosis equivalente se mide en *sievert* (Sv) o en *rem* (röntgen equivalente man):

$$1 \text{ Sv} = 1 \text{ J/Kg} = 100 \text{ rem}$$

Se denomina DOSIS MÁXIMA PERMISIBLE ( $DMP$ ) aquella dosis de radiación ionizante que no causa lesiones corporales «apreciables» a una persona. Hay que entender, sin embargo, que *toda radiación produce un daño biológico*; un cromosoma que ha sufrido una mutación debida a la radiación se reproducirá afectado por dicha mutación.

La tabla siguiente recoge los valores recomendados de la  $DMP$  para diversos tejidos y órganos según que el receptor esté sometido o no a control continuo de la radiación absorbida.

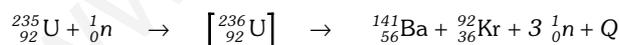
ÓRGANOS AFECTADOS	DMP	
	PERSONAL CONTROLADO	PERSONAL NO CONTROLADO
Cuerpo entero, médula ósea, gónadas, cristalino	3 rem/13 semanas 5 rem/año	0,5 rem/año
Hueso, piel, Tiroides	8 rem/13 semanas 30 rem/año	3 rem/año
Otros órganos	4 rem/13 semanas 15 rem/año	1,5 rem/año

## D) REACCIONES DE FISIÓN Y DE FUSIÓN

### XXX – 31. Fisión nuclear

Desde que en 1932 Chadwick descubriera el neutrón, éste ha sido empleado profusamente para producir reacciones nucleares debido a su ausencia de carga. En 1939, O. Hahn y F. Strassman, bombardeando uranio con neutrones térmicos (energía de aproximadamente 0,03 eV) encontraron, mediante una serie de experimentos radioquímicos, que en la muestra bombardeada aparecían átomos de bario inexistentes inicialmente.

L. Meitner y O. R. Frisch describieron el proceso, al que denominaron *fisión*, como la absorción de un neutrón por el núcleo de uranio con la posterior ruptura de éste en dos fragmentos de masas aproximadamente iguales. Si uno de los núcleos resultantes es de bario ( $Z = 56$ ) el otro debe ser de kriptón ( $Z = 36$ ), de acuerdo con la reacción:



Así pues, se denomina FISIÓN NUCLEAR al proceso de desintegración en el que un núcleo pesado se escinde en dos núcleos de masas aproximadamente iguales. (La fisión ternaria, en tres fragmentos, sólo ocurre en el uranio en un  $5 \times 10^{-4}$  % de las fisiones).

La *fisión espontánea* se produce cuando un núcleo se fisiona sin necesidad de absorber previamente una partícula; es la fisión del núcleo desde su estado fundamental. Este tipo de fisión se da en átomos muy pesados, en los que la energía de enlace por nucleón es menor que la correspondiente a los núcleos que origina si éstos son aproximadamente iguales, es decir, en la fisión espontánea se produce liberación de energía, es un proceso exotérmico.

La *fisión inducida* tiene lugar en núcleos excitados; ocurre cuando el núcleo pesado captura una partícula, generalmente un neutrón, y el núcleo compuesto excitado se desintegra en fragmentos. El neutrón capturado puede ser de muy baja energía ya que su energía de enlace en el núcleo es ya suficiente para producir la fisión. La reacción de fisión inducida más conocida es la del U-235 que se escinde con neutrones térmicos, al igual que el Pu-239; en cambio, el U-238 y el Th-232 precisan neutrones rápidos, de al menos 1 MeV, para escindirarse.

Debemos recordar que se denomina neutrón térmico a aquél cuya energía cinética corresponde a la temperatura del medio, ( $\approx 0,03$  eV) y neutrón rápido al que tiene energía del orden de 1 MeV. El paso de un neutrón de rápido a térmico se denomina *moderación* y se consigue por sucesivos choques del neutrón con un material *moderador* poco absorbente de neutrones, como comentaremos a propósito de los reactores nucleares.

## XXX – 32. Mecanismo de la fisión nuclear

La masa de un núcleo pesado, uranio por ejemplo, es mayor que la suma de las masas de cualquier par de fragmentos de fisión, con lo que la fisión espontánea es un proceso exotérmico. Sin embargo, aunque hay evidencia de que se verifica, la proporción de núcleos que se fisiónan espontáneamente es extremadamente pequeña. La inmersa mayoría de los casos de escisión nuclear corresponden a fisión inducida de un núcleo excitado.

Se puede construir una imagen razonablemente aproximada del proceso de fisión utilizando el modelo nuclear de la gota líquida (ver cuestión XXX-10) según el cual se considera al núcleo como una gota de fluido incompresible, de densidad del orden de  $10^{14}$  g/cm<sup>3</sup>, con una tensión superficial originada por las fuerzas nucleares.

Una gota líquida no excitada tiene forma esférica como resultado del equilibrio entre el efecto de la tensión superficial y la repulsión electrostática entre protones. Cuando se añade energía a la gota en la forma, por ejemplo, de la excitación resultante de la captura de un neutrón, aparecen oscilaciones en la misma que tienden a hacerle perder su esfericidad. La captura del neutrón da origen a un núcleo compuesto excitado que existe durante  $10^{-14}$  s, aproximadamente; durante este tiempo la energía de excitación se distribuye entre los grados de libertad posibles del núcleo (vibraciones y rotaciones), de forma que si se concentra suficiente energía en uno de éstos se puede llegar a una forma de la gota alargada con un estrechamiento en su parte central (Fig. XXX-28). Si la separación entre los dos lóbulos es suficiente, las fuerzas de repulsión electrostática, que son de alcance mayor que las nucleares, pueden provocar la ruptura en dos gotas esféricas de tamaño parecido.

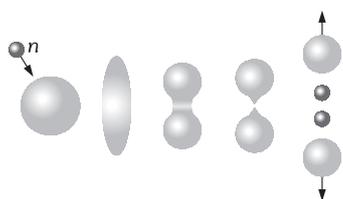


Fig. XXX-28.– Fisión nuclear según el modelo de la gota líquida.

El que la gota se rompa o no, depende de la energía de excitación. Si ésta no es suficientemente elevada, después de la distorsión la gota recupera la forma esférica liberando el exceso de energía en forma de radiación gamma; en este caso se habrá producido una reacción  $(n, \gamma)$  de captura radiactiva. Para llegar a la fisión la energía de excitación debe superar un valor mínimo, que se denomina ENERGÍA CRÍTICA o ENERGÍA DE ACTIVACIÓN, y que se puede definir como la menor energía que hay que comunicar al núcleo original para que la gota consiga la forma de estrangulamiento crítico, a partir del cual la repulsión coulombiana pueda vencer las fuerzas de ligadura hasta romper el núcleo en dos fragmentos.

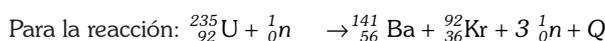
Por medio de cálculos basados en la expresión de la cuestión XXX-10 de la energía de ligadura por nucleón, se llega a la conclusión de que si el cociente  $Z^2/A$  es mayor de 45 no se precisa energía de activación para que se produzca la fisión. Valores de este cociente son 37,0 para el Pu-239, 36,0 para el U-235, 35,6 para el U-238, que, a pesar de ser altos, están bastante lejos del límite teórico, lo que está en buen acuerdo con la observación de la escasez de fisiones espontáneas en estos núcleos. La bondad del modelo de la gota líquida para explicar el proceso de fisión viene también ratificada por el acuerdo entre cálculos teóricos y experiencia en las fisiones del U-235 y del U-238. El modelo proporciona para la energía crítica de ambos los valores de 6,1 MeV y 7,0 MeV, respectivamente; la diferencia de 0,9 MeV está de acuerdo con el hecho de que la fisión del primero se produzca con neutrones térmicos y la del segundo con neutrones de energía del orden del megaelectrón-voltio.

## XXX – 33. Energía liberada en la fisión

Consideremos la fisión del U-235 por un neutrón lento. La energía de ligadura por nucleón para el uranio es de 7,6 MeV, (Fig. XXX-1), mientras que para los productos estables de la fisión situados hacia el centro de la figura, es de 8,5 MeV.

El núcleo compuesto U-236 tiene por tanto una energía total de  $236 \times 7,6$  MeV, y la de los fragmentos de la fisión es de  $236 \times 8,5$  MeV. Así, la fisión va acompañada de una liberación de energía del orden de 200 MeV. De esta cantidad, el 85%, aproximadamente, corresponde a la energía cinética de los fragmentos de fisión, que se transforma en calentamiento del material fisiónable si el proceso se verifica dentro de un bloque de éste. El 15% restante se invierte en la energía cinética de los neutrones emitidos en la escisión y en la energía de excitación de los fragmentos, la cual se traduce en la emisión de partículas beta, gamma o de nuevos neutrones.

En los núcleos pesados la energía de ligadura por nucleón es menor que en los ligeros debido al aumento de la repulsión electrostática conforme aumenta el número de protones del núcleo. Desde el punto de vista eléctrico podemos obtener el valor aproximado de la energía liberada en la fisión, mediante el cálculo de la energía potencial electrostática de los dos fragmentos en el instante de la escisión.



suponiendo los radios nucleares del bario y del kriptón dados por la expresión (cuestión XXX-3)  $R = 1,5 \times 10^{-15} A^{1/3}$  m, y sustituyendo los valores mencionados en la relación

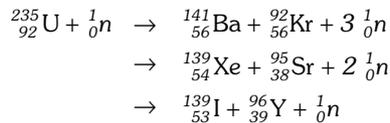
$$U = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_1 + R_2}$$

obtenemos para la energía potencial el resultado de  $3,19 \times 10^{-11}$  J = 199,1 MeV.

Los valores obtenidos en esta cuestión son sólo aproximaciones, pero nos dan el orden de magnitud de la energía que realmente se desprende en la fisión de un átomo de uranio de 235 nucleones.

**XXX – 34. Distribución de masa de los fragmentos de fisión**

Al producir la escisión de núcleos por bombardeo con neutrones aparecen muchas parejas de núcleos diferentes. En la fisión del U-235 aparecen núcleos con número de masa comprendido entre 72 y 160, es decir, más de 80 posibilidades para el valor de A, lo que da un número de más de 40 formas de fisionarse. Así, por ejemplo:



El modo más frecuente de representar la distribución de las masas de los productos es en forma de una *curva de rendimiento de fisión* (Fig. XXX-29) en la que, frente al número de masa A en el eje de abscisas, se representa en el eje de ordenadas el tanto por ciento de veces que aparece un núcleo con un A determinado.

Para el U-235 los rendimientos varían entre el 10<sup>-5</sup>% para los núcleos de número másico más diferente, y el 6,6 % para los productos I-139 e Y-96. Sólo el 0,01% de las fisiones producen dos fragmentos iguales mientras que el 97% de las veces los productos pertenecen a dos grupos, uno ligero con números másicos entre 85 y 104, y otro pesado con valores entre 130 y 149. La curva de la figura es simétrica respecto de A = 117, de manera que los fragmentos de las ramas izquierda y derecha del grupo ligero se corresponden, respectivamente, con los de las ramas derecha e izquierda del grupo pesado.

La pérdida de masa en la fisión se traduce en una velocidad de salida de los fragmentos muy alta, siendo sus energías cinéticas inversamente proporcionales a sus masas; en efecto: si despreciáramos la contribución de los posibles

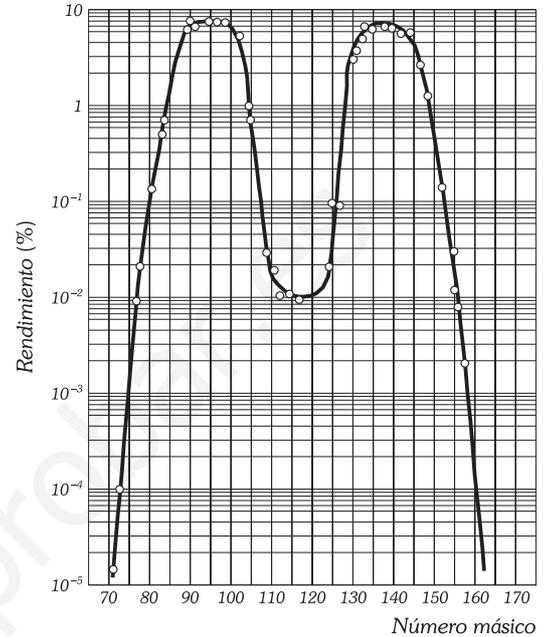


Fig. XXX-29.- Curva de rendimiento en la fisión de U-235 por neutrones térmicos.

neutrones emitidos en la fisión y consideramos el núcleo blanco en reposo, la conservación del momento lineal impone  $m_1 v_1 = m_2 v_2$ , con lo que la relación de energías cinéticas es:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m_1 v_1^2 / 2}{m_2 v_2^2 / 2} = \frac{m_2}{m_1}$$

los cálculos consiguientes para los distintos pares de fragmentos dan valores de la velocidad de salida del orden de 10<sup>7</sup> m/s.

**XXX – 35. Emisión de neutrones**

La relación entre el número de neutrones y protones, N/Z, en núcleos estables aumenta conforme se incrementa el número másico; en los más pesados es mayor de 1,5, mientras que en los de la mitad del sistema periódico, a la que pertenecen los productos de fisión, está entre 1,34 y 1,4. Por tanto, si un núcleo pesado se escinde en dos, la relación N/Z en éstos últimos es mayor que la compatible con la estabilidad, es decir, como consecuencia de la fisión resulta un exceso de neutrones.

Estas razones justifican el hecho de que simultáneamente a la fisión se emitan *neutrones inmediatos de reacción*; además, los fragmentos de fisión pueden emitir en un tiempo muy pequeño nuevos neutrones, llamados *neutrones inmediatos de desintegración*. Y por fin, esos fragmentos experimentan desintegraciones beta y emiten, eventualmente, nuevos neutrones. Estos últimos, posteriores a una radiación beta, se producen durante varios minutos después de ocurrida la fisión con intensidad exponencialmente decreciente, se denominan *neutrones retardados*, superan el 1% aproximadamente del número total de los emitidos y juegan un importante papel en el control de los reactores nucleares (cuestión XXX-37).

La figura (Fig. XXX-30) muestra un posible esquema de desintegración con emisión de neutrones retardados. El I-137 puede desintegrarse emitiendo una partícula beta de poca energía, y dando lugar a Xe-137 en estado excitado, que emite un neutrón para pasar a Xe-136 estable y en estado fundamental. Paralelamente a este proceso se da otro de desintegración beta, pero en este caso el electrón es emitido con una energía grande, dando Xe-137 en un estado de energía muy bajo. Este último produce Ba-137 estable según el esquema de la figura.

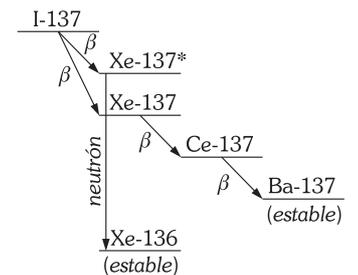


Fig. XXX-30.- Desintegración del I-137 con emisión de un neutrón retardado, en el proceso Xe-137\* → n + Xe-136.

Los neutrones emitidos en la fisión pueden ser uno, dos, tres e incluso más, con lo que el número medio de ellos no es entero; así en las fisiones que se utilizan normalmente en la industria, como son las del U-235 y del Pu-239 con neutrones lentos y la del U-238 con neutrones rápidos,

ese número es de 2,47, 2,91 y 2,55 respectivamente. La energía de la mayoría de estos neutrones se encuentra entre 1 y 2 MeV.

**XXX - 36. Reacción de fisión en cadena**

El estudio de la fisión ha conducido al desarrollo de dos dispositivos de aplicaciones bien distintas, los reactores nucleares y la bomba atómica. Ambos se basan en el fenómeno de la *reacción de fisión en cadena*.

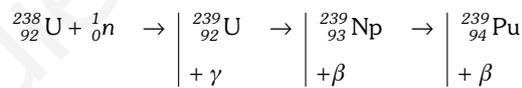
En el proceso de fisión del U-235, este núcleo, además de escindirse en otros dos de masa intermedia, libera en promedio 2,47 neutrones rápidos que, convenientemente frenados, pueden dar lugar a otros tantos procesos de fisión. Se originará así un enorme desprendimiento de energía que se liberará de forma explosiva si el proceso es incontrolado. Sin embargo, los neutrones productos de una fisión son rápidos, tienen una energía cinética demasiado alta, y, antes de ser capaces de provocar una nueva fisión, han de perder velocidad por choques dentro del dispositivo en el que se verifica la reacción. En este proceso algunos serán absorbidos sin producir fisión y otros escaparán a través de la superficie, con el resultado final de que el número de fisiones secundarias será menor que el de neutrones primarios emitidos.

La condición para que una reacción de fisión se automantenga es que al menos uno de los neutrones liberados produzca una nueva fisión. El número de los que en promedio producen la nueva fisión se denomina *factor de multiplicación, k*, y según sea su valor, la reacción puede extinguirse ( $k < 1$ ), automantenerse ( $k = 1$ ) o desarrollarse multiplicativamente ( $k > 1$ ).

Uno de los factores que determina el valor de  $k$  es el volumen, o lo que es lo mismo, la masa, del material fisionable.

En efecto, si suponemos una esfera de uranio, el número de núcleos fisionables y, por tanto, la probabilidad de una fisión, aumenta con el cubo del radio mientras que la probabilidad de escape por la superficie lo hace con su cuadrado; así, para volúmenes pequeños predomina el escape sobre la captura y fisión. Se denomina **VOLUMEN CRÍTICO (O MASA CRÍTICA)** al menor valor del volumen (de la masa) de material fisionable capaz de soportar una reacción automantenida.

En el uranio natural la proporción de U-235 fisible es del 0,715%, siendo el resto U-238, de modo que en una masa del mineral lo más probable es que los neutrones sean captados por el U-238 y la cadena de reacciones no prosiga; ahora bien, si el uranio ha sido enriquecido en su isótopo 235, la presencia de U-238 no llega a impedir la reacción en cadena, y, además, al capturar neutrones da lugar a Pu-239, que también es fisionable, a través de la cadena de reacciones:



La figura XXX-31 representa el proceso de fisión en cadena, con captura de algunos neutrones por el U-238.

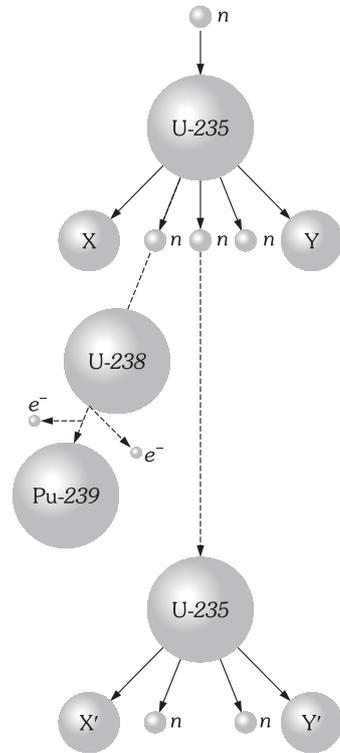


Fig. XXX-31.- Fisión en cadena del U-235.

**XXX - 37. Reactores nucleares**

*Una pila nuclear o reactor nuclear es un sistema capaz de provocar y automantener una reacción en cadena con un control de su velocidad.*

El valor del factor de multiplicación del reactor viene determinado por la probabilidad de que se produzcan cada uno de los cuatro procesos neutrónicos siguientes: 1) Pérdida de neutrones por fuga al exterior del sistema, 2) captura de neutrones por el combustible sin producir fisión, llamada *absorción resonante*, 3) captura por otros materiales distintos del combustible (moderador, estructuras, fragmentos de fisión, etc.), 4) fisión de núcleos de combustible.

Únicamente el último proceso es el que alimenta la reacción, y si en él se producen los suficientes neutrones para mantener el factor de multiplicación en  $k = 1$  el reactor es *crítico*; si es  $k < 1$  el número de neutrones, disminuye con el tiempo, el régimen de funcionamiento es *subcrítico* y la reacción se extingue; si  $k > 1$  el número de neutrones y de fisiones aumenta con el tiempo y el reactor es *supercrítico*.

Un reactor consta esencialmente de las siguientes partes: el núcleo, constituido por el combustible y el moderador, el reflector, las barras de control, el blindaje y el circuito de refrigeración (Fig. XXX-32).

Como **MATERIALES COMBUSTIBLES** para alimentar el reactor sirven exclusivamente aquellos en que la energía de ligadura de un neutrón es suficiente para provocar la fisión. Los utilizados actualmente son el U-235 obtenido por enriquecimiento del uranio natural, el Pu-239 que se obtiene en reactores de uranio por captura neutrónica del U-238 como ya se ha mencionado, y el U-233 que se produce también en reactores por captura neutrónica del Th-232 según las reacciones:

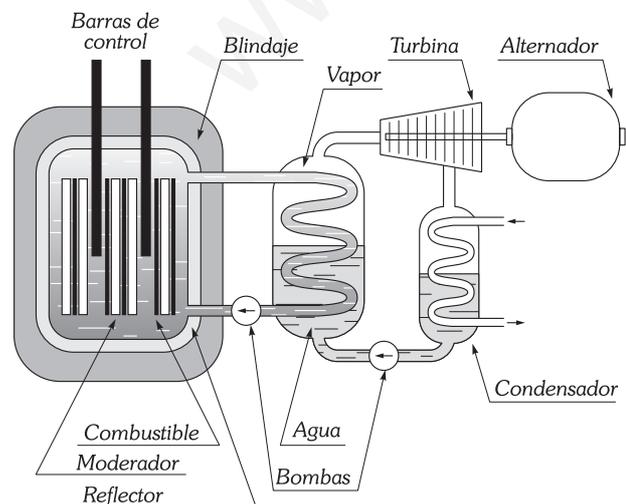
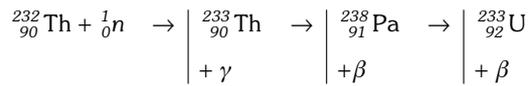


Fig. XXX-32.- Esquema de una central eléctrica de fisión.



Los materiales que sólo sufren fisión por neutrones rápidos no sirven como combustible único puesto que los neutrones, al perder energía por dispersión, quedan incapacitados para producir fisiones rápidas.

La finalidad del MODERADOR es transformar los neutrones rápidos en térmicos. Está constituido por elementos de poco peso atómico para que la pérdida de energía del neutrón sea la mayor posible en cada choque con uno de sus núcleos; además el material ha de ser poco absorbente de neutrones para no rebajar el factor de multiplicación. Los moderadores más utilizados son el agua, el agua pesada (D<sub>2</sub>O, agua con deuterio en lugar de hidrógeno normal) y el carbono en forma de grafito.

El REFLECTOR es una envoltura de material moderador que rodea al núcleo y tiene como función devolver la mayor parte de los neutrones que se fugan. Con la instalación del reflector se consigue disminuir el volumen crítico del reactor.

Las BARRAS DE CONTROL, están constituidas con cadmio o boro, que son grandes absorbentes de neutrones. Se distinguen: 1) *las barras de parada*, que durante el funcionamiento normal del reactor están fuera del núcleo y que se introducen completamente para frenar rápidamente la reacción en casos de emergencia; 2) *las barras de control fino*, que sirven para mantener constante la potencia del reactor mediante un control constante y 3) *las barras de control grueso*, que se emplean para compensar los cambios de potencia que se producen a largo plazo, entre otras causas por quemado del combustible o por su envenenamiento con fragmentos de fisión absorbentes de neutrones.

El BLINDAJE envuelve a los elementos anteriores y tiene como finalidad absorber las radiaciones ionizantes que se producen en el núcleo.

El CIRCUITO DE REFRIGERACIÓN extrae el calor generado en las fisiones en el núcleo. Se emplean para ello agua, gases, metales líquidos, etc. que circulan generalmente en un circuito primario que, en un intercambiador de calor, transfiere energía térmica a un circuito secundario en el que se produce vapor de agua, que mueve (energía mecánica) la turbina de un alternador produciendo así energía eléctrica.

El 2 de diciembre de 1942, en la Universidad de Chicago, Fermi y su equipo consiguieron la primera reacción automantenida, en su reactor instalado en un laboratorio improvisado bajo las gradas del estadio universitario. El moderador empleado fue grafito, y el reactor era un enorme esferoide de 6 metros de altura, construido de ladrillos de grafito (Fig. XXX-33), cada uno de los cuales contenía fragmentos de uranio. Atravesaban la pila una serie de barras de cadmio que se podían introducir más o menos y servían de reguladores de la reacción. Aparatos de control indicaban la energía desprendida.

El inicio de la reacción se realizaba con neutrones obtenidos al bombardear berilio con las partículas alfa emitidos por polonio. La energía desprendida correspondía a los cálculos realizados.

**XXX - 38. Tipos de reactores**

Se clasifican en función de la forma de combinar sus elementos. Existen gran cantidad de tipos, que pueden clasificarse en dos grandes grupos:

- 1) *Reactores homogéneos*, en los que el combustible está disuelto en el líquido que hace de moderador (Fig. XXX-34).
- 2) *Reactores heterogéneos*, en los que el combustible está separado físicamente del moderador; éste puede consistir en un entramado de grafito en cuyos huecos va alojado el combustible (Fig. XXX-35), aunque en otros tipos el combustible está sumergido en agua, natural o pesada, que hace de moderador y de refrigerante.

Ambos tipos se clasifican en *reactores de investigación*, que se emplean como fuente de radiación, y *de potencia*, utilizados para la obtención de energía eléctrica.

**XXX - 39. Fusión nuclear**

Se denomina FUSIÓN NUCLEAR al proceso en que dos núcleos ligeros se combinan para dar otro más pesado.

La reacción de fusión más sencilla es la unión de un protón y un neutrón para formar un deuterón (núcleo de deuterio),  $p + n = d$ , en la que se liberan 2,26 MeV de energía.

La observación de la gráfica de la Fig. XXX-1 muestra que la energía de ligadura por nucleón crece con el número másico para núcleos pequeños, de lo que se deduce que la fusión de dos de éstos es una reacción exotérmica. Además, el hecho de que la gráfica tenga pendiente mucho mayor en su parte izquierda indica que este tipo de reacciones son mucho más exotérmicas que las de fisión, es decir, liberan mucho mayor cantidad de energía que éstas últimas a igualdad de masa reaccionante.

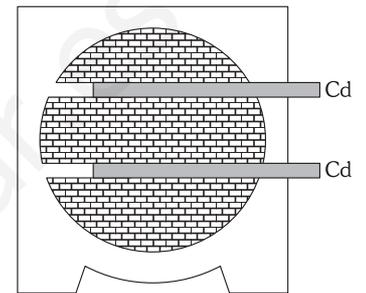


Fig. XXX-33.- La primera pila atómica.

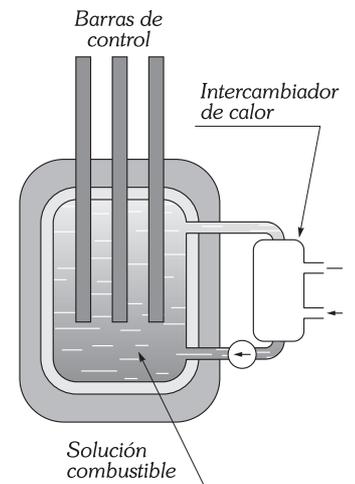


Fig. XXX-34.- Reactor homogéneo.

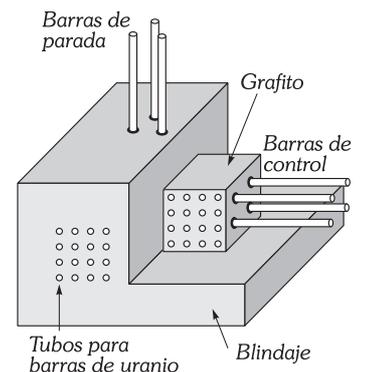


Fig. XXX-35.- Reactor heterogéneo.

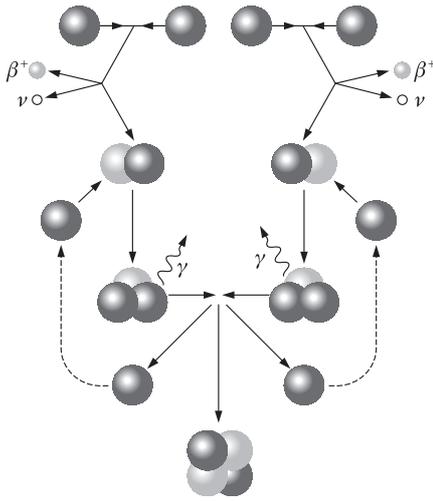
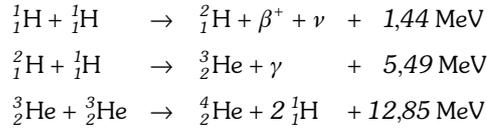
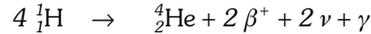


Fig. XXX-36.- Ciclo protón - protón.

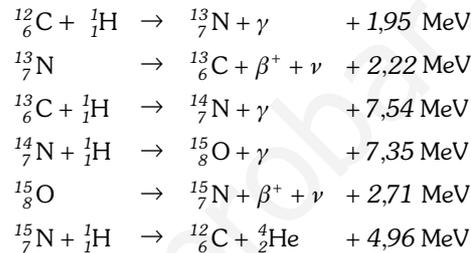
La producción de energía en las estrellas se debe a procesos de fusión que siguen el ciclo protón-protón en estrellas jóvenes y el ciclo del carbono o ciclo de Bethe en las antiguas. El primero es el que se realiza actualmente en nuestro sol y responde a las siguientes ecuaciones:



Si multiplicamos por dos las dos primeras y sumamos miembro a miembro como ecuaciones algebraicas, el ciclo completo se reduce a la reacción de cuatro protones para dar un núcleo de He-4 y dos positrones, además de neutrinos y radiación gamma (Fig. XXX-36):



En el ciclo del carbono, propuesto por Hans Bethe en 1939, las reacciones se inician con un núcleo de carbono y un protón; son las siguientes, todas ellas exotérmicas:



Se observa, (Fig. XXX-37) que los núcleos obtenidos en una reacción son consumidos en la siguiente; el C-12 consumido en la primera es regenerado en la última, con lo que este ciclo da el mismo resultado neto que el anterior, es decir, la producción de un núcleo de He-4 a partir de cuatro de hidrógeno.

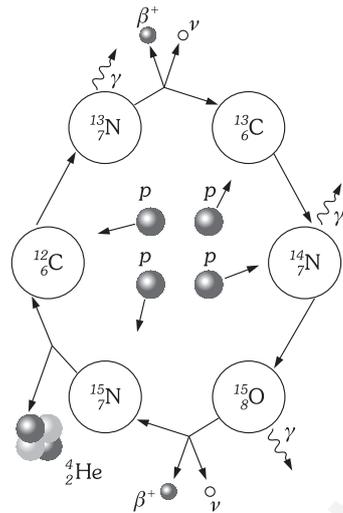


Fig. XXX-37.- Ciclo del carbono.

En las reacciones de fusión, para que dos núcleos se aproximen hasta que sean efectivas las fuerzas nucleares, han de vencer su repulsión coulombiana, esto supone que han de chocar uno con otro a gran velocidad, proporcionada, por ejemplo, por un acelerador de partículas. Sin embargo, si lo que se pretende es aprovechar económicamente la energía producida, se debe conseguir que la energía cinética de los núcleos reaccionantes provenga de reacciones anteriores lo que implica que el material a fusionar tenga una temperatura lo suficientemente elevada para que la agitación térmica de los núcleos baste para vencer su repulsión electrostática.

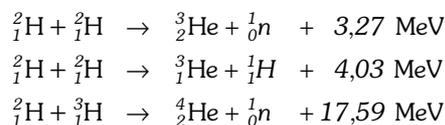
Podemos obtener un valor aproximado de esa temperatura calculando la energía potencial electrostática de dos núcleos; en el caso de dos protones a una distancia de 2 fm, se tiene:  $U = Ke^2/r = 1,15 \times 10^{-13} \text{ J} = 0,72 \text{ MeV}$ , con lo que cada protón debe tener una energía de 0,36 MeV. Si este valor representa la energía cinética media de los protones, lo podemos relacionar con la temperatura mediante la expresión  $\langle E_c \rangle = 3kT/2$ , donde  $k$  es la constante de Boltzman, igual a  $1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ . Todo ello conduce al valor de la temperatura de  $2,8 \times 10^9 \text{ K}$ , 2800 millones de grados. En realidad la fusión se produce también a temperatura inferior debido en primer lugar a que, aunque la energía cinética media sea menor, existen núcleos con energía mayor que la media, y en segundo lugar a la perforación de la barrera de potencial coulombiana por efecto túnel; de hecho, la temperatura interior del sol es de aproximadamente  $1,5 \times 10^7 \text{ K}$ .

Debido a este orden de magnitud de la temperatura se da a estas reacciones el nombre de reacciones termonucleares de fusión.

**XXX - 40. Reactores nucleares de fusión. Confinamiento del plasma**

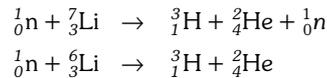
La enorme cantidad de energía liberada en las reacciones de fusión y la abundancia natural de algunos combustibles, hace pensar que una vez que se puedan controlar estas reacciones en un reactor, se dispondrá de una fuente de energía prácticamente inagotable. Inicialmente, la inutilidad más espectacular de una reacción nuclear ha sido en forma incontrolada en la bomba de hidrógeno (cuestión siguiente), la primera de las cuales se hizo explotar en 1952.

Las reacciones de fusión más prometedoras para obtener energía en un reactor son:



El deuterio se encuentra en el agua a razón de 0,017 gramos por litro y es, además, de extracción muy barata. El tritio es radioactivo con un período de semidesintegración de 12,3 años, por

lo que no se encuentra de forma natural; sin embargo, se puede obtener por bombardeo del Li-7 (92,58% en el litio natural) con neutrones rápidos, o del Li-6 (7,42%) con neutrones lentos, según las reacciones:



en la primera de ellas el neutrón liberado es lento y puede provocar la segunda reacción.

Además de la mayor energía que se desprende por gramo de combustible en la fusión respecto de la fisión, la primera tiene otras grandes *ventajas*, como son, *la imposibilidad de que un reactor de fusión explote y la ausencia de residuos radiactivos*. Para lograr la fusión hay que alcanzar unos niveles críticos de temperatura y densidad, y si uno de estos parámetros falla, la reacción se extingue. En cuanto a residuos, el helio producido es inerte, mientras que el uranio no quemado o el plutonio producido es un reactor de fisión permanecen radiactivos durante miles de años y requieren cuidadosas medidas de almacenamiento y control. El mayor peligro que puede presentar un reactor de fusión es que los neutrones liberados en la reacción puedan producir materiales radiactivos pesados si inciden en la estructura del reactor, sin embargo, este efecto puede ser minimizado con una selección adecuada de esos materiales.

A las elevadas temperaturas que requiere la fusión la agitación térmica es suficiente para que los átomos se ionicen por choques y todo el material está formado por núcleos y electrones libres, es decir, en ESTADO DE PLASMA. Si la temperatura del plasma es suficiente se produce la reacción de fusión, pero para que se mantenga es preciso que la energía ganada supere a las pérdidas. Estas se originan por varias causas, como son el calentamiento de nuevos núcleos para su fusión, la fuga de núcleos y de neutrones hacia el exterior del plasma o la radiación de frenado de electrones libres.

La temperatura que hay que sobrepasar para que la generación de energía supere a las pérdidas se denomina *temperatura crítica de ignición*, y su valor aproximado es de  $4 \times 10^8$  K en la reacción deuterio-deuterio y de  $4,5 \times 10^7$  K en la reacción deuterio-tritio.

Además de la temperatura, hay otros dos factores que influyen en el balance de energía producida y perdida, son la *densidad de iones*,  $n$ , y el *tiempo de confinamiento*,  $\tau$ , que es el tiempo que se mantienen los núcleos en la zona de reacción a una temperatura igual o mayor que la de ignición. El tiempo de confinamiento es inversamente proporcional a la densidad del plasma, por lo tanto, el producto  $n\tau$  debe ser mayor que un valor mínimo, fijado por el criterio de Lawson:

$$n\tau = 10^{16} \text{ s/cm}^3 \text{ para la reacción deuterio-deuterio.}$$

$$n\tau = 10^{14} \text{ s/cm}^3 \text{ para la reacción deuterio-tritio.}$$

Para satisfacer el criterio de Lawson es necesario mantener junto al plasma durante un tiempo suficiente, pero, a las temperaturas que se requieren, esto no puede conseguirse con medios mecánicos. Por esta razón, para producir la reacción se usan dos procedimientos, el primero es calentar un sólido ( $n \approx 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ ) que contenga el material fusionable, como en la bomba de hidrógeno, y el segundo es el CONFINAMIENTO DEL PLASMA ( $n \approx 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ) mediante campos magnéticos.

Comentamos en primer lugar un tipo de confinamiento no magnético que es en realidad una pequeña bomba de hidrógeno. Se trata del *confinamiento inercial* que se consigue lanzando simultáneamente varios pulsos de láser sobre una esfera de deuterio-tritio de aproximadamente 1 mm de diámetro (Fig. XXX-38). La energía del láser evapora la superficie de la esfera, las partículas que escapan producen una reacción de compresión sobre las restantes, que se concentran aumentando con ello la temperatura hasta el valor de ignición, momento en el cual se produce la fusión y la esfera explota.

El *confinamiento magnético* se basa en que, al estar el plasma constituido por partículas cargadas, éstas se mueven en trayectorias helicoidales alrededor de las líneas de campo; si se intensifica el campo magnético, las líneas de campo se juntan y el plasma se comprime. En este comportamiento se basa la *botella magnética* comentada en la cuestión XXI-9. Más empleado es el *tokamak* (Fig. XXX-39), un dispositivo de forma toroidal en el que el confinamiento se produce por una combinación de dos campos, uno en la dirección del eje del toroide, producido por bobinas exteriores, y otro, que rodea el plasma, producido por una corriente eléctrica de intensidad muy elevada que se establece a lo largo del propio plasma, el cual tiene una gran conductividad eléctrica y es calentado óhmicamente por dicha corriente.

Se han conseguido avances definitivos en el control de la fusión nuclear en el reactor experimental europeo instalado en Oxfordshire, en Gran Bretaña. En el *JET (Joint European Torus)*, el 9 de noviembre de 1991 se mantuvo una reacción de fusión, en una mezcla con el 15% de tritio, durante unos dos segundos, desarrollándose una potencia de 1,9 MW. Para calentar la mezcla de gases deuterio y tritio se hizo pasar a su través una corriente de siete millones de amperios y se inyectaron haces de partículas energéticas hasta alcanzar los  $2 \times 10^8$  K.

Dado el éxito de las pruebas realizadas, los científicos que colaboran en el *JET* esperan que el programa se prolongue con la investigación de la contaminación y purificación del plasma y con nuevas pruebas en las que se emplee la mezcla idónea con un 50% de tritio.

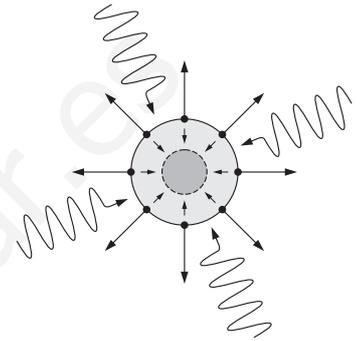


Fig. XXX-38.- Desarrollo del confinamiento inercial producido por pulsos de láser de gran intensidad.

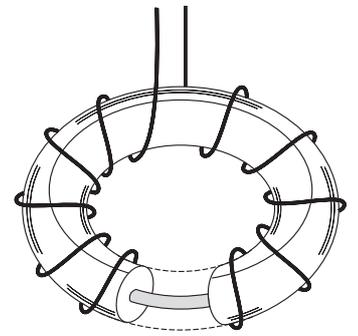


Fig. XXX-39.- Confinamiento magnético del plasma en un tokamak.

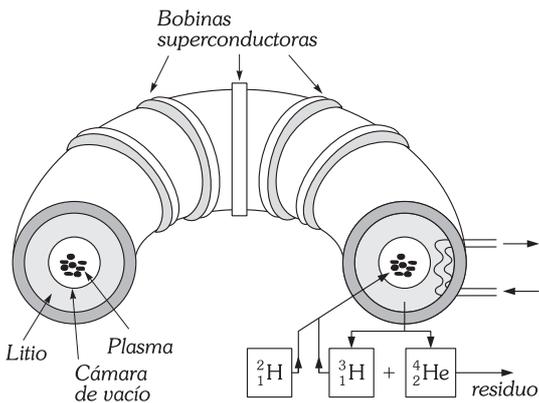


Fig. XXX-40.- Esquema del JET (Joint European Torus).

A pesar del éxito del *JET* faltan algunos años (para la década del 2030) hasta que funcione la primera central eléctrica de fusión; el trabajo a realizar es de tal magnitud que sus costes van a ser sufragados por la Unión Europea, Canadá, la Federación Rusa y Japón, que han acordado construir un laboratorio para investigar en común, el *ITER* (*International Thermonuclear Experimental Reactor*).

Es muy posible que el esquema del *JET* (Fig. XXX-40) sea el mismo que el de las futuras centrales. La mayor parte de la energía desprendida en las reacciones de fusión es transportada por neutrones rápidos que, al no ser confinados por el campo magnético, alcanzan la cubierta de litio, cediendo energía cinética en forma de calor. Este es absorbido por un circuito refrigerador y, siguiendo a continuación un proceso similar al de los reactores de fisión, se transformará en energía eléctrica en la turbina de un alternador. En la reacción de los neutrones con litio se producen tritio, que se inyecta en el reactor para mantener la reacción, y helio, que se separa como residuo.

## XX - 41. Bombas atómicas

Se distinguen dos tipos de bombas que corresponden a los procesos de fisión de uranio o plutonio (*bomba atómica* o *bomba A*) y de fusión (*bomba de hidrógeno* o *bomba H*).

El problema de la bomba atómica se centraba a fines de 1942 en obtener plutonio o en separar del metal uranio el isótopo U-235. En el año 1945, en la ciudad de Hanford, de 60 000 habitantes, construida y dedicada expresamente a la resolución del problema expuesto, la producción de U-235 y plutonio se había conseguido en la escala necesaria. La fabricación de la bomba se realizó en Los Álamos (Nuevo Méjico) bajo la dirección del profesor de la Universidad de California Robert Oppenheimer, de 38 años. A sus órdenes trabajaron Fermi, Bohr, Chadwick, etc.

Una posible estructura de esta bomba es la de la figura XXX-41; el material fisionable debe disponerse inicialmente de forma que sea subcrítico, lo que se consigue repartiendo la masa total en partes separadas.

Mediante un explosivo químico convencional se comprime el material fisionable formando una masa total superior a la crítica, a la vez que se hace entrar en acción una fuente de neutrones que inician la reacción en cadena. Esta se desarrolla en unos  $10^{-7}$  s, a partir de los cuales el conjunto se hace subcrítico; la potencia generada después proviene de la desintegración de los productos de fisión. El material de la bomba se expande rápidamente y calienta el aire circundante formando una bola de fuego y una onda explosiva de efectos devastadores.

En la bomba de hidrógeno la mayor parte de la energía se produce mediante una reacción termonuclear activada por la explosión inicial de una bomba de fisión. La energía generada por la fisión calienta el material fisionable hasta una temperatura superior a la de ignición, la energía producida a continuación es mucho mayor que en la bomba de fisión debido a que la masa fusionable no está limitada por la condición de que sea subcrítica antes de la explosión.

## XXX - 42. El origen de los elementos

EL fenómeno de la fusión, que suministra energía a las estrellas, es el responsable de la formación de los distintos elementos químicos.

Tanto en distintos puntos de la corteza terrestre como en meteoritos, la proporción en que se encuentran los distintos elementos es la misma; esto sugiere que todos ellos se han formado mediante el mismo proceso, que tiene lugar en las estrellas y que comienza cuando una gran masa de hidrógeno se contrae gravitacionalmente formando una de ellas. La transformación de energía potencial gravitatoria en energía cinética comunica al hidrógeno la agitación térmica suficiente para iniciar fusiones termonucleares. Este estado se alcanza cuando la densidad es del orden de  $10^5$  kg/m<sup>3</sup> y la temperatura se ha elevado a  $10^7$  K; se verifica el ciclo protón-protón y se libera energía que tiende a hacer expansionarse el gas contrarrestando así la contracción gravitacional. Paralelamente a la formación de helio se produce un número proporcionalmente pequeño de otras reacciones que dan origen a elementos como litio, berilio o boro.

El helio producido, más pesado que el hidrógeno, se concentra en la zona central, en la que la temperatura se eleva hasta  $10^8$  K debido a la nueva pérdida de energía potencial producida por dicha concentración. En esta zona, dos núcleos de He-4 al fusionarse producirán uno de Be-8, el cuál es muy inestable y se desintegrará al cabo de  $10^{-16}$  s dando de nuevo He-4; sin embargo, debido a la alta concentración de helio, es posible que durante su corta vida el berilio-8 reaccione con un núcleo de helio-4, en cuyo caso se forma un núcleo de carbono-12, que es estable. El C-12 producido interviene en la formación de helio a partir de hidrógeno, según el ciclo de Bethe, contribuyendo por tanto al incremento de la temperatura.

Conforme aumenta la temperatura, núcleos cada vez más pesados tienen la energía cinética suficiente para vencer la barrera electrostática y fusionarse, en choques cuya frecuencia se incrementa al aumentar la densidad. Así, por sucesivas capturas de He-4, se van formando, a partir de

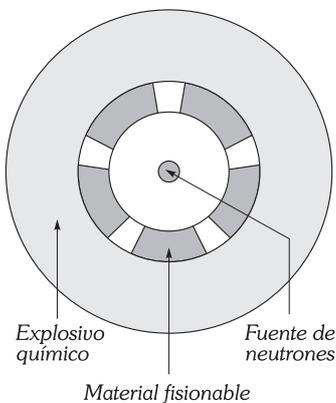


Fig. XXX-41.- Posible estructura de una bomba atómica de fisión.

C-12, núcleos de O-16, Ne-20 y Mg-24. Los núcleos de carbono se unen y el resultado se desintegra de formas muy distintas, dando elementos como el magnesio o el sodio. Dos núcleos de oxígeno pueden reaccionar y formar azufre o fósforo.

Todos los procesos mencionados, al ser exotérmicos, van incrementando la temperatura y por tanto la energía cinética de los núcleos. Al llegar al rango de los  $10^9$  K ya son posibles reacciones que dan núcleos de Fe-56 o similares (de  $A = 60$  ó  $70$ ), pero a partir de aquí ya no se pueden formar núcleos de número másico mayor porque las necesidades de energía son demasiado elevadas y la reacción correspondiente es endotérmica.

La formación de núcleos pesados no se realiza por fusión, sino por captura de neutrones liberados en algunas reacciones de fusión entre núcleos ligeros. Muchas de las capturas neutrónicas van seguidas de una desintegración beta, con la emisión de un electrón y el incremento del número atómico en una unidad; de esta forma se va avanzando gradualmente hacia valores mayores de Z.

Un proceso en el que también se sintetizan núcleos pesados son las reacciones nucleares que acompañan a una *explosión de supernova*. La evolución de una estrella hasta explotar en supernova puede ser distinta según su masa inicial; una de las posibles formas enlaza con lo expuesto hasta aquí en esta cuestión. En una estrella de masa diez o más veces la de nuestro sol, se llega a un estadio en el que contiene hidrógeno en su periferia, y helio, carbono, etc, dispuestos concéntricamente en capas. La región central está compuesta por gas de hierro muy denso, y su estabilidad se mantiene gracias a que la atracción gravitatoria está compensada por la presión gaseosa, causada principalmente por electrones circulando a gran velocidad.

Cuando la zona central contiene aproximadamente 1,5 masas solares la presión y la densidad son tan grandes que todos los protones y electrones acaban uniéndose y formando neutrones; la presión gaseosa desaparece y la inmensa fuerza gravitacional concentra los aproximadamente  $3 \times 10^{30}$  kg de esa zona en una estrella de neutrones de unos 10 Km de diámetro (lo que equivale a una densidad de  $6 \times 10^{12}$  kg/cm<sup>3</sup>). Este colapso libera tal cantidad de energía que el resto de la estrella es proyectado hacia el exterior a gran velocidad; la estrella explota, quedando finalmente una estrella de neutrones en el centro de una gran nube explosiva en expansión.

Posiblemente, todos los átomos más pesados que el helio presentes en la Tierra se han formado en una gran estrella anterior a nuestro sol, bien en su fase de fusión normal o bien en el breve tiempo de una explosión de supernova.

**PROBLEMAS: 60 al 78.**

## E) PARTÍCULAS ELEMENTALES

### XXX – 43. Partículas elementales

El descubrimiento del neutrón dejó la imagen del átomo de Rutherford y Bohr bastante completa, con la existencia de dos partículas elementales, protón y neutrón, que formaban el núcleo atómico y una tercera partícula, el electrón, orbitando alrededor. Había que añadir una cuarta partícula, el fotón, para describir la radiación electromagnética. Sin embargo, este sencillo panorama se complicó con la aparición de nuevas partículas elementales.

Las medidas realizadas en experiencias de desintegración de neutrones, demuestran que aunque en distintos procesos el protón resultante tenga la misma energía, no ocurre lo mismo con el electrón. El principio de conservación de la energía (además del momento lineal y del angular) se satisface solamente si en la desintegración beta se admite la existencia de una nueva partícula, de la que ya hemos hablado en este capítulo, el neutrino. Su existencia, postulada por Fermi, fue detectada experimentalmente por Cowman y Reines en 1956; las reacciones en las que toma parte son muy lentas, y se denominan interacciones débiles, para distinguirlas de las interacciones nucleares fuertes que ocurren en tiempos mucho más cortos y originan fuerzas mucho más intensas.

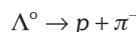
La interacción fuerte es transmitida por los piones (ver cuestión XXX-7), postulados por Yúka-wa en 1935 y descubiertos por Powell en la radiación cósmica en 1946. Paralelamente a estos descubrimientos se produjo el del positrón en 1932 por Anderson.

Todas estas partículas: fotón, protón, neutrón, electrón, positrón, neutrino y pión, parecían suficientes para dar una imagen completa del universo y para explicar las fuerzas nucleares e incluso los procesos estelares; además su aparición histórica era plenamente satisfactoria, primero se postula su existencia y después se detecta experimentalmente.

A partir de aquí el proceso se invierte, empiezan a descubrirse nuevas partículas que hay que acomodar en los modelos teóricos. La primera de ellas, descubierta en los rayos cósmicos por Anderson y Neddermeyer, fue el muón, del que se pensó en principio que era el cuanto de la fuerza fuerte, idea que se desechó al comprobar experimentalmente que no interaccionaba fuertemente con los nucleones; la única interacción que experimenta con ellos es la debida a su carga. Por ahora, el muón no es esencial para la comprensión del núcleo, y de hecho no está nada claro su papel en la naturaleza.

En fotografías realizadas en la cámara de niebla, en la que se había introducido una placa de plomo, se observaron en 1947 una serie de líneas en forma de V que parecían surgir de la nada. La interpretación de este hecho fue que una partícula al chocar con un núcleo de plomo había

producido, aparte de otros residuos, una partícula sin carga que al no producir iones no dejaba rastro de gotas de niebla en la cámara, pero que en un momento dado se desintegraba en la posición del vértice de la V produciendo otras dos partículas cargadas, cuyo rastro quedaba registrado en las fotografías; estas dos partículas resultaron ser un protón y un mesón  $\pi$  negativo. La partícula sin carga se denominó con la letra griega lambda, con un cero como superíndice,  $\Lambda^0$ , para recalcar su ausencia de carga; su desintegración se representa:



Lo primero que sorprendió de esta partícula fue que tuviese una masa mayor que la del protón, una característica que no se esperaba encontrar en ninguna partícula; pero, sobre todo, el que su vida media fuese de  $2,6 \times 10^{-10}$  s, un tiempo muy grande comparado con los  $10^{-23}$  s típico de las partículas que participan en la interacción fuerte. Se habían medido tiempos de vida largos en partículas que se desintegraban débilmente, pero la partícula  $\Lambda^0$  proviene de la desintegración fuerte de un núcleo y se desintegra, a su vez, en otras dos que experimentan interacción fuerte, por tanto debería desintegrarse en tiempos del orden de  $10^{-23}$  s, cosa que realmente no ocurre. Esta peculiaridad, común a otras partículas, se designa con el nombre de EXTRAÑEZA. Otra *partícula extraña* es el mesón  $K$  que se presenta con carga positiva, negativa o nula.

El descubrimiento de las inesperadas partículas extrañas hizo cambiar el enfoque en la investigación en este campo, de esperar a que los rayos cósmicos produjesen un fenómeno registrable en una cámara de niebla, se pasó a la producción de partículas en el laboratorio con aceleradores cada vez más potentes. La aceleración de protones hasta una energía de 5,6 GeV permitió provocar la reacción  $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$ , en la que aparece el antiprotón,  $\bar{p}$ .

Un último tipo de partículas que consideraremos son las denominadas *resonancias* o *resones*, de las que se conocen alrededor de cien. Si en experiencias de dispersión de piones por protones se representa gráficamente la sección eficaz de dispersión frente a la energía, se obtiene una curva, en forma de U invertida, que presenta un máximo de la sección eficaz para energías del pión próximas a 200 MeV y una anchura de unos 100 MeV. La existencia de ese pico se interpreta como que, cuando el pión tiene la energía conveniente, el pión y el protón puede unirse durante un corto espacio de tiempo, mientras que a otras energías ambas se repelen. Durante el corto tiempo en que los dos permanecen unidos podemos hablar de una nueva partícula que se denomina *resonancia* y cuya corta vida impide que pueda ser detectada en una cámara de niebla ya que su recorrido máximo es del orden del tamaño nuclear. La resonancia pión-nucleón se designa con la letra griega delta,  $\Delta$ , y presenta cuatro estados de carga según sean las del pión y del nucleón:  $\Delta^{++}$ ,  $\Delta^+$ ,  $\Delta^0$  y  $\Delta^-$ .

En la tabla de la página siguiente se especifican propiedades de algunas de entre los centenares de partículas conocidas. En ella se clasifican según su masa en tres grupos: *leptones*, *mesones* y *bariones*. El fotón no se incluye en ninguno de los tres.

Los mesones son de masa intermedia entre la del electrón y la del protón; los bariones (partículas pesadas), se dividen en dos grupos, *los nucleones* (protón y neutrón) y *los hiperones*, de masa mayor que la del protón.

Los mesones y bariones están sujetos a interacciones fuertes y se les clasifica con el nombre común de *hadrones*. Los leptones (partículas ligeras) interactúan entre sí y con los hadrones mediante interacción débil.

#### XXX – 44. Leyes de conservación en las reacciones de las partículas elementales

Conocemos ya cuatro leyes de conservación que se aplican con carácter general, son las de la energía, del momento lineal, del momento angular y de la carga eléctrica.

La conservación de la energía, considerando la masa como una forma de energía, tiene como consecuencia que una partícula única no puede desintegrarse en dos partículas más pesadas que ella. Esto nos confirma que la partícula más ligera, el neutrino, es estable.

El hecho de que la energía y el momento lineal se conserven nos indica que ninguna partícula aislada puede transformarse en otra partícula única, pues el cambio de masa de una a otra es incompatible con las leyes mencionadas. Si una partícula se transforma ha de hacerlo en otras dos como mínimo.

La partícula libre cargada más ligera, el electrón, es estable porque no puede transformarse en otras de menor masa con carga sin violar el principio de conservación de la carga eléctrica.

Además de las mencionadas existen otras, que todavía no se han logrado explicar, pero que son aplicables a las partículas elementales. Son:

*Leyes de conservación del NÚMERO BARIÓNICO y de los NÚMEROS ELECTRÓNICO, MUÓNICO Y TAUÓNICO: la suma de cualquiera de ellos antes de una reacción nuclear o de una desintegración es igual a la suma después del proceso.*

El número bariónico es  $B = +1$  para los bariones,  $B = -1$  para los antibariones (antipartículas) y cero para el resto de partículas (fotones, leptones y mesones). Su conservación implica que siem-

CARACTERÍSTICAS DE ALGUNAS PARTÍCULAS ELEMENTALES

FAMILIA	NOMBRE	SÍMBOLO PARTÍCULA ANTIPARTÍCULA	MASA (MeV)	CARGA	SPIN	EXTRAÑEZA	VIDA MEDIA (segundos)	MODOS DE DESINTEGRACIÓN TÍPICOS			
	Fotón	$\gamma$ $\gamma$	0	0	1	0	Estable				
LEPTONES	Electrón	$e^-$ $e^+$	0,51	$\mp 1$	1/2	0	Estable	$e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ $\mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau$			
	Muón	$\mu^-$ $\mu^+$	105,7	$\mp 1$	1/2	0	$2,2 \times 10^{-6}$				
	Tauón	$\tau^-$ $\tau^+$	1784	$\mp 1$	1/2	0	$2,2 \times 10^{-12}$				
	Neutrino electrónico	$\nu_e$ $\bar{\nu}_e$	0	0	1/2	0	Estable				
	Neutrino muónico	$\nu_\mu$ $\bar{\nu}_\mu$	0	0	1/2	0	Estable				
	Neutrino tauónico	$\nu_\tau$ $\bar{\nu}_\tau$	0	0	1/2	0	Estable				
HADRONES	MESONES	PiÓN	$\pi^+$ $\pi^-$	139,6	$\pm 1$	0	0	$2,6 \times 10^{-8}$	$\mu^+ + \nu_\mu; \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ $\gamma + \gamma$ $\mu^+ + \nu_\mu; \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ $\pi^+ + \pi^-$ $3\pi^0$ $\gamma + \gamma$		
		Mesón K	$\pi^0$ $\pi^0$	135	0	0	0	$8,3 \times 10^{-17}$			
			$K^+$ $K^-$	493,7	$\pm 1$	0	$\pm 1$	$1,2 \times 10^{-8}$			
		$K^0$ $K^0$	497,7	0	0	$\pm 1$	$8,9 \times 10^{-11}$				
	Mesón eta	$\eta^0$ $\bar{\eta}^0$	548,8	0	0	0	$5,2 \times 10^{-8}$ $\approx 10^{-22}$				
	BARIONES	NUCLEONES	Protón	$p$ $\bar{p}$	938,3	$\pm 1$	1/2	0	Estable	$p + e^- + \bar{\nu}_e$	
			Neutrón	$n$ $\bar{n}$	939,6	0	1/2	0	930		
		HIPERONES	Lambda	$\Lambda^0$ $\bar{\Lambda}^0$	1116	0	1/2	$\mp 1$	$2,6 \times 10^{-10}$		$p + \pi^-; n + \pi^0$ $p + \pi^0; n + \pi^+$ $\Lambda^0 + \gamma$ $n + \pi^-$ $\Lambda^0 + \pi^-$ $\Lambda^0 + \pi^0$ $\Xi^0 + \pi^-; \Lambda^0 + K^-$
			Sigma	$\Sigma^+$ $\bar{\Sigma}^+$	1189	$\mp 1$	1/2	$\mp 1$	$8 \times 10^{-11}$		
				$\Sigma^0$ $\bar{\Sigma}^0$	1192	0	1/2	$\mp 1$	$10^{-14}$		
$\Sigma^-$ $\bar{\Sigma}^-$				1197	$\mp 1$	1/2	$\mp 1$	$1,5 \times 10^{-10}$			
Xi	$\Xi^-$ $\bar{\Xi}^-$	1321	$\mp 1$	1/2	$\mp 2$	$1,6 \times 10^{-10}$					
	$\Xi^0$ $\bar{\Xi}^0$	1315	0	1/2	$\mp 2$	$3 \times 10^{-10}$					
Omega	$\Omega^-$ $\bar{\Omega}^-$	1672	$\mp 1$	3/2	$\mp 3$	$8,2 \times 10^{-11}$					

pre que en una reacción se forma un barión, ha de aparecer necesariamente un antibarión; la diferencia entre la cantidad de bariones y antibariones ha de conservarse en toda reacción.

Como ejemplo de reacciones permitidas y prohibidas por el número bariónico, podemos citar:

$$\begin{array}{l}
 \text{Permitidas} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Lambda^0 \rightarrow p + \pi^- \quad (1 = 1 + 0) \\ p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p} \quad (1 + 1 = 1 + 1 + 1 - 1) \end{array} \right. \\
 \text{Prohibidas} \quad \left\{ \begin{array}{l} p \rightarrow \pi^+ + \pi^0 \quad (1 \neq 0 + 0) \\ p + n \rightarrow p + p + \bar{p} \quad (1 + 1 \neq 1 + 1 - 1) \end{array} \right.
 \end{array}$$

Respecto de los números muónico, electrónico y tauónico, las leyes correspondientes se aplican de la misma forma que la anterior. El número muónico +1 se afina al muón  $\mu^-$  y al neutrino muónico  $\nu_\mu$ , y el -1 a las partículas  $\mu^+$  y  $\bar{\nu}_\mu$ . Tienen número electrónico +1 el electrón  $e^-$  y el neutrino

electrónico  $\nu_e$ , y -1, el positrón  $e^+$  y el antineutrino electrónico  $\bar{\nu}_e$ . El número tauónico es +1 para  $\tau^-$  y  $\nu_\tau$  y -1 para  $\tau^+$  y  $\bar{\nu}_\tau$ .

Hay posibles desintegraciones de partículas que podrían darse sin violar ninguna de las leyes anteriores y que, sin embargo, unas no suceden y otras lo hacen de forma mucho más lenta de lo esperado. Estas partículas suelen desintegrarse en tiempos que oscilan entre  $10^{-10}$  y  $10^{-17}$  segundos, son partículas extrañas, y para sus reacciones de desintegración se introduce una ley de conservación relativa al NÚMERO CUÁNTICO DE EXTRAÑEZA; este número vale,  $S = +1$  para los mesones  $K^+$  y  $K^0$ ,  $S = -1$  para los hiperones,  $\Sigma^+$ ,  $\Sigma^0$ ,  $\Sigma^-$  y  $\Lambda^0$ ,  $S = -2$  para los hiperones  $\Xi^0$ ,  $\Xi^-$  y  $S = -3$  para el  $\Omega^-$ , cambiando el signo para las correspondientes antipartículas (ver tabla de la cuestión anterior).

El principio de conservación establece que:

La suma de los números de extrañeza se conserva en las interacciones fuertes y electromagnéticas, y cambia en una unidad en interacciones débiles.

Como ejemplo de aplicación tenemos las siguientes reacciones:

$$\begin{aligned} \text{Permitida: } n + \pi^0 &\rightarrow K^+ + \Sigma^- & \begin{cases} B: 1 + 0 = 0 + 1 \\ S: 0 + 0 = 1 - 1 \end{cases} \\ \text{Prohibida: } p + \pi^- &\rightarrow \pi^- + \Sigma^+ & \begin{cases} B: 1 + 0 = 0 + 1 \\ S: 0 + 0 \neq 0 - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Una última ley de conservación es la del SPIN ISOTÓPICO o ISOSPÍN. Entre las partículas existen familias de miembros con la misma masa e iguales tipos de interacción pero distinta carga; estas familias se llaman *multipletes* y se considera a sus miembros como distintos estados de carga de una entidad fundamental. Se asigna a cada familia un número cuántico  $I$  tal que el número de estados de carga viene dado por el valor  $2I + 1$ . Así, por ejemplo, al multiplete del nucleón le corresponde  $I = 1/2$  con lo que resulta  $2I + 1 = 2$ , dos estados que son el protón y el neutrón; al multiplete del pión le corresponde  $I = 1$  ya que  $2I + 1 = 3$ , los tres estados de carga son  $\pi^+$ ,  $\pi^-$  y  $\pi^0$ . Una partícula con un solo estado tiene  $I = 0$  para que  $2I + 1$  sea igual a 1. Debido a la analogía con el desdoblamiento de un nivel electrónico de momento angular  $l$  en  $2l + 1$  subniveles, se denomina  $I$  NÚMERO CUÁNTICO DE ISOSPÍN.

El isospín puede representarse por un vector  $\mathbf{I}$  caracterizado por su magnitud y su componente  $I_z$  en una dirección que, a diferencia del spin, no tiene nada que ver con las direcciones espaciales comunes. Su componente en la llamada dirección  $z$  del espacio de isospín adopta los valores  $I, I-1, \dots, +1, 0, -1, -I+1, -I$ , que son enteros o semienteros según lo sea  $I$ . De esta forma, por ser para el nucleón  $I = 1/2$ ,  $I_z$  puede valer  $1/2$  (protón) y  $-1/2$  (neutrón); para el pión, por ser  $I = 1$ , se tiene  $I_z = +1$  para el  $\pi^+$ ,  $I_z = 0$  para el  $\pi^0$  e  $I_z = -1$  para el  $\pi^-$ .

Cada orientación permitida al vector de isospin  $\mathbf{I}$  está directamente relacionada con la carga de la partícula representada.

La ventaja de esta representación es que basta un número cuántico,  $I$ , para designar a todos los miembros de un multiplete, y que el desdoblamiento en varios estados de carga se puede describir mediante los valores de la componente  $I_z$ .

Si expresamos la carga  $q$  de una partícula como  $q = Qe$ , el número de carga  $Q$  puede determinarse en función del isospín, del número bariónico y de la extrañeza, mediante la expresión:

$$Q = I_z + \frac{B}{2} + \frac{S}{2}$$

La carga y el número bariónico se conservan en todas las interacciones, por lo tanto:

$I_z$  se conserva en las reacciones en que lo hace  $S$ , es decir, en las interacciones electromagnéticas y fuertes, mientras que cambia con las débiles.

### XXX – 45. EL modelo de los quarks

En la década de 1960 el número de partículas supuestamente elementales creció constantemente en un proceso que parecía no tener fin; con cada construcción de un acelerador capaz de alcanzar mayor energía que el anterior se producía un auténtica avalancha de nuevas partículas. La situación era parecida a la que se dio entre mediados de los siglos XVIII y XX, en que el número de elementos químicos pasó de una docena a más de cien.

La búsqueda de los constituyentes últimos del universo parecía resuelta cuando con el protón, el neutrón y el electrón se podía explicar la estructura de todos los elementos químicos. Sin embargo, el sueño de haber llegado a esos constituyentes se vino abajo cuando empezaron a aparecer neutrinos, positrones, antiprotones y un gran número de mesones e hiperones. Ante esta proliferación los físicos se dedicaron a la búsqueda de componentes de la materia de un nivel inferior al de las partículas elementales.

Los leptones son realmente partículas fundamentales; el electrón, los leptones  $\mu$  y  $\tau$  y sus neutrinos correspondientes, son los seis conocidos hasta ahora. La proliferación de hadrones hizo pensar que no eran partículas fundamentales y, en 1964, Murray Gell-Mann y Gerge Zweig llegaron independientemente a formular la teoría sobre su composición (la del primero resultó ser más completa y le valió el premio Nobel de Física de 1969).

Según Gell-Mann, los hadrones están formados por la unión de dos o de tres partículas a las que llamó QUARKS, de los que propuso dos clases distintas que actualmente se conocen como  $u$  y  $d$  (up: arriba, down: abajo), con sus correspondientes antiquarks, el antiarriba  $\bar{u}$  y el antiabajo  $\bar{d}$ .

Más tarde ha sido preciso introducir otros cuatro, además de sus antiquarks, que son los quarks extraño  $s$  (extrange), encantado  $c$  (charmed), belleza o fondo  $b$  (beauty o botton) y verdad o cima  $t$  (truth o top).

Al igual que las partículas de las que forman parte, los quarks tienen propiedades como masa, carga, spin, etc., y otras nuevas que se han llamado *encanto*, *belleza* y *verdad*. Lo que distingue a un tipo de quark de otro se denomina *sabor*; así pues, existen quarks con seis sabores distintos.

La tabla siguiente especifica las características de los quarks:

QUARK	MASA (MeV)	CARGA (e)	SPIN	NÚMERO BARIÓNICO	EXTRAÑEZA	ENCANTO	BELLEZA	VERDAD
<i>u</i>	310	2/3	1/2	1/3	0	0	0	0
<i>d</i>	310	-1/3	1/2	1/3	0	0	0	0
<i>s</i>	505	-1/3	1/2	1/3	-1	0	0	0
<i>c</i>	1 500	2/3	1/2	1/3	0	1	0	0
<i>b</i>	5 000	-1/3	1/2	1/3	0	0	-1	0
<i>t</i>	> 22 500	2/3	1/2	1/3	0	0	0	1

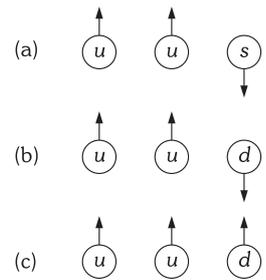


Fig. XXX-42.- Combinaciones de quarks y sus spines en las partículas (a)  $\Sigma^+$ , (b) protón, (c)  $\Delta^+$ .

Los antiquarks correspondientes tienen los valores de tabla cambiados de signo, salvo la masa. Respecto de su tamaño no se puede afirmar nada rotundamente, pero parecen comportarse como si su tamaño efectivo fuese del orden de  $10^{-18}$  m, lo que da un volumen de  $10^{-9}$  veces el del protón. Por tanto, *el protón y el neutrón*, que con sus tres quarks cada uno tienen casi toda la masa del átomo, *están prácticamente vacíos*.

De acuerdo con la teoría de Gell-Mann solamente son posibles tres tipos de combinaciones: un quark y un antiquark forman un mesón, tres quarks dan un barión y tres antiquarks forman un antibarión.

Para saber qué combinación de quarks compone cada barión debemos ver cuál es la adecuada para dar la carga, el spin y la extrañeza deseados. Consideremos algunos ejemplos:

El barión  $\Sigma^+$  tiene extrañeza  $S = -1$ , carga  $Q = +1$  y spin  $1/2$ . Para tener  $S = -1$  debe contener un quark *s*; si la carga es  $+1$ , los otros dos quarks han de ser *u* con carga  $2/3$  cada uno; y para spin  $1/2$  las orientaciones de los de cada uno deben ser como en la figura XXX-42-a.

El protón, por tener  $S = 0$  no puede contener un solo quark *s*, que haría  $s = -1$ , ni un par  $s\bar{s}$ , de  $S = -1 + 1 = 0$ , ya que esta pareja da  $B = 1/3 - 1/3 = 0$  y no podríamos obtener  $B = 1$  para el protón. La carga  $Q = +1$  impone para esta partícula la combinación *uud*, que efectivamente proporciona  $Q = 2/3 + 2/3 - 1/3 = 1$ . El spin  $1/2$  se consigue con una configuración como la de la figura XXX-42b.

La partícula  $\Delta^+$ , de  $S = 0$ ,  $Q = +1$  y spin  $3/2$ , se puede esquematizar como en la figura XXX-42-c.

El modelo de los quarks nos permite además representar desintegraciones, como la  $\Delta^+ \rightarrow p + \pi^0$ , por ejemplo, de la figura XXX-43. El quark *d* invierte su spin de arriba a abajo, emitiendo a la vez un pión neutro.

Una desintegración parecida es  $\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0$  que se puede representar como en la figura XXX-44. Un quark *s* debe cambiar aquí, no de spin sino de identidad (de sabor), un proceso que debe ser más lento que el de la figura anterior, y de hecho así ocurre.

*Una desintegración se efectúa rápidamente solamente si no hay cambio de sabor de ningún quark.*

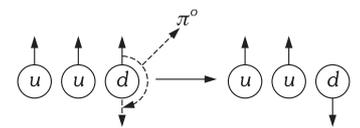


Fig. XXX-43.- Desintegración rápida  $\Delta^+ \rightarrow p + \pi^0$ .

La tabla adjunta indica la composición de mesones y bariones a partir de quarks:

MESÓN	COMPOSICIÓN	BARIÓN	COMPOSICIÓN
$\pi^0$	$u\bar{u}$ ó $d\bar{d}$	<i>p</i>	<i>uud</i>
$\pi^+$	$u\bar{d}$	<i>n</i>	<i>udd</i>
$K^+$	$u\bar{s}$	$\Lambda^0$	<i>uds</i>
$K^0$	$d\bar{s}$	$\Sigma^+$	<i>uus</i>
$\eta^0$	$s\bar{s}$	$\Sigma^0$	<i>uds</i>
		$\Sigma^-$	<i>dds</i>
		$\Xi^0$	<i>uss</i>
		$\Xi^-$	<i>dss</i>
		$\Omega^-$	<i>sss</i>

En la composición de los bariones se observa un hecho fundamental: los quarks, por tener spin  $1/2$  son fermiones y deben por tanto verificar el principio de exclusión de Pauli, sin embargo, los quarks *u* del protón o los *d* del neutrón son idénticos. En consecuencia, estas partículas deben tener una propiedad adicional que haga diferentes los dos *u* o los dos *d* mencionados como ejemplo; se ha designado esta propiedad con el nombre de COLOR, y así se dice que un quark puede te-

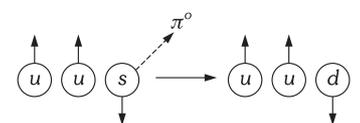


Fig. XXX-44.- Desintegración lenta  $\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0$ .

ner tres colores fundamentales: rojo, verde o azul, mientras que el antiquark puede tener uno de los tres colores complementarios: antirrojo, antiverde o antiazul.

Los quarks se unen dando partículas blancas, sin color. El quark y el antiquark de un mesón tiene un color y su complemento, y los tres quarks de un barión tienen cada uno de los tres colores. El nombre de color como propiedad de los quarks es completamente arbitrario (aunque muy descriptivo) y evidentemente no tiene ninguna relación con sensaciones visuales.

### XXX – 46. Cromodinámica cuántica. El confinamiento de los quarks

El concepto de color en el modelo de los quarks, concebido originalmente para satisfacer el principio de exclusión de Pauli, ha dado lugar a una teoría sobre la interacción de esas partículas que se conoce como CROMODINÁMICA CUÁNTICA, QCD. En esta teoría se dice que los quarks transportan una carga de color, debido a la cual interaccionan con una fuerza de color de comportamiento análogo a la fuerza eléctrica, es decir, colores iguales se repelen y colores opuestos o distintos se atraen, haciéndolo en este último caso con menor intensidad que si se trata de dos opuestos como el rojo y el antirrojo, por ejemplo.

La fuerza de color da explicación al hecho de que hasta la fecha aún no se haya obtenido un quark aislado en el laboratorio.

La interpretación del fenómeno del CONFINAMIENTO DE LOS QUARKS en el interior de los hadrones se basa en la suposición de que la fuerza fuerte de color no disminuye con la distancia sino que permanece constante, de forma que la situación más estable de dos o tres quarks es estar juntos; el color los une de tal manera que es imposible separarlos.

Si intentamos separar un quark de un barión (Fig. XXX-45-a), el aumento de energía potencial del sistema es tal que rápidamente alcanza el valor suficiente para producir un par quark-antiquark (Fig. XXX-45-b); el nuevo quark permanece en el barión y el antiquark y el quark desalojado son expulsados formando un mesón (Fig. XXX-45-c). De la misma manera, la ruptura del enlace en un mesón produce dos mesones, pero nunca un quark libre.

Una teoría más simple del confinamiento de los quarks supone que si no se han aislado es porque no se han producido todavía partículas con la energía suficiente para arrancar un quark de un hadrón, y, de hecho, uno de los primeros experimentos que se realizan cada vez que se pone en funcionamiento un nuevo acelerador es precisamente la búsqueda de quarks libres.

Hay distintas versiones de la teoría del confinamiento, sin embargo, el modelo de los quarks ha alcanzado un punto en que el fracaso en la búsqueda de uno aislado no obligaría a su abandono.

Por otra parte, este modelo tiene un aspecto inquietante que siembra el desasosiego entre los físicos, siempre amantes de las teorías y de los modelos con el mayor grado de simplificación posible en su formulación. La existencia de seis sabores con tres posibles colores cada uno, da un total de dieciocho quarks; tampoco se puede asegurar que en experimentos futuros no aparezcan más leptones o haya que postular más quarks. Seis leptones y dieciocho quarks no son realmente un número pequeño de constituyentes básicos del universo.

Se ha propuesto que estas partículas podrían ser manifestaciones de otros entes más elementales, los *prequarks*. Jogesh Pati y Abdus Salam han propuesto la teoría de los *preones*, y Haim Harari la de los *rishones*, ambas sin desarrollar aún suficientemente.

### XXX – 47. Las cuatro fuerzas fundamentales. Su unificación

Como ya se han indicado, con los leptones y los quarks se puede explicar la constitución de todos los componentes materiales del universo, sin embargo, no completan la lista de partículas conocidas. Existen otras que, como el fotón, no se incluyen entre los componentes materiales pero que están relacionadas con el «pegamento» que los mantiene unidos, es decir, que son los responsables de las cuatro fuerzas fundamentales.

Los fotones son partículas de masa en reposo cero y carga nula, cuyo intercambio entre partículas cargadas origina la fuerza electromagnética. Los responsables de esta interacción se denominan *fotones virtuales* (con el sentido dado a esta expresión en la cuestión XXX-7), para distinguirlos de los fotones reales, detectables, que son los cuantos de una onda electromagnética.

La interacción gravitatoria es transmitida mediante *gravitones*. El gravitón es una partícula, aún sin detectar, que, como los fotones, viaja a la velocidad de la luz, por consiguiente tiene una masa en reposa nula. Así mismo carece de carga eléctrica. También podemos distinguir dos variedades: real y virtual. Un gravitón real es un cuanto de onda gravitatoria que, en principio, podría ser detectado, no obstante, se acopla a otras partículas tan débilmente que la probabilidad de localizarlo es extremadamente pequeña.

Los transmisores de la fuerza débil son tres bosones (partículas de spin entero) predichos por Steven Weinberg y Abdus Salam, y descubiertos en 1983 por Carlo Rubbia y Simon Van der Meer, lo que les valió a estos últimos (junto con Lee Glasow) el premio Nobel de 1984. Weinberg y Salam lo habían recibido en 1979. Los tres bosones se designan como  $W^+$ ,  $W^-$  y  $Z$ , los dos primeros con carga y el tercero neutro. Son partículas de gran masa en reposo que, en virtud del principio de incertidumbre, pueden existir durante un tiempo muy corto, lo que determina el corto alcance de la fuerza débil.

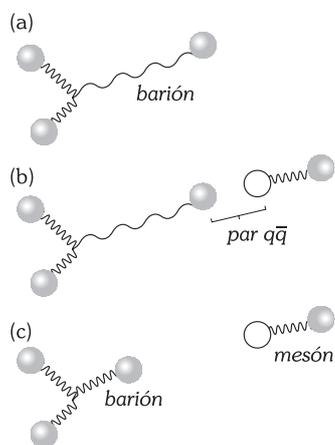


Fig. XXX-45.– El intento de desconfinamiento de un quark produce la aparición de un mesón.

Las partículas que viajan entre los quarks transmitiendo la fuerza fuerte de color son los *gluones*, también carentes de masa y de carga eléctrica como el fotón y el gravitón. Su intercambio entre dos quarks produce el cambio de color de ambos, y, dadas las posibilidades de ese cambio, el número de gluones distintos es de ocho.

La fuerza que actúa entre dos nucleones no es más que un residuo de la fuerza de color. En el choque de dos nucleones, cada uno de los seis quarks que intervienen interacciona con los otros cinco; la mayor parte de la fuerza de color se invierte en mantener unida cada terna de quarks de cada nucleón, pero una pequeña cantidad de ella se emplea en ligar los dos nucleones entre sí.

Al desasosiego, mencionado en la cuestión anterior, que produce en los físicos la existencia de veinticuatro leptones y quarks, hay que añadir, para completar el cuadro, trece bosones y las cuatro fuerzas. El panorama global no tiene nada de sencillo.

Por lo que respecta a las fuerzas, ya se han consolidado algunas unificaciones de los marcos teóricos de distintos tipos de ellas. De hecho, antes de llegar a las cuatro fuerzas mencionadas, hubo tres grandes síntesis debidas a Newton, Maxwell y Einstein, como se comentó en la cuestión V-3.

En 1967, Weimber y Salam llegaron independientemente a una formulación única para las interacciones electromagnética y débil. La fundamentación matemática de la *teoría electrodébil* ha sido realizada por Martinus J. G. Veltman y Gerardus't Hoof (premio Nobel de física de 1999); una predicción de esta teoría es la existencia de una partícula, el bosón de Higgs, que dota de masa al resto de partículas, y que se espera que sea detectada cuando en el año 2007 entre en funcionamiento el nuevo acelerador del CERN, el Large Hadron Collider (LHC).

Existen por otro lado teorías, denominada *teorías de gran unificación*, que engloban la fuerza electrodébil y la fuerte. Algunas incluyen leptones y quarks en una sola familia reduciendo las interacciones a dos, la gravitatoria y la unificación del resto. Han de ser contrastadas con el resultado experimental de sus previsiones, una de las cuales es el carácter no estable del protón, cuya vida media se estima del orden de  $10^{31}$  años.

La fuerza gravitatoria es la que más se ha resistido a la unificación. Sin embargo, se está desarrollando una *teoría cuántica de la gravitación* que parece pueda llegar a ser la culminación de la búsqueda de la unidad de las fuerzas. Su aparato matemático es muy complejo pero la confianza en ella es grande entre científicos como Stephen Hawking, que la consideran como la culminación de la física teórica. A pesar de ello presenta el inconveniente de las pocas posibilidades que se vislumbran actualmente de verificarla experimentalmente; en palabras de Weinberg: «*La gravitación cuántica parece inaccesible a todo experimento imaginable... aunque creo que el ingenio de los experimentadores hallará una salida*».

## PROBLEMAS

### A) CARACTERÍSTICAS DEL NÚCLEO

1. Determinar la estructura del núcleo de los siguientes núclidos:  $^{16}_8\text{O}$ ,  $^{17}_8\text{O}$ ,  $^{18}_8\text{O}$ ,  $^{234}_{92}\text{U}$ ,  $^{238}_{92}\text{U}$ , Deuterio, Carbono-14, Estroncio-90, Plomo-206.

2. El boro natural consta del 18,83 % del isótopo de número de masa 10 y del 81,17 % del de número másico 11. Suponiendo que las masas isotópicas son iguales a los correspondientes números másicos, determinar la masa atómica media del boro.

3. Determinar la masa atómica del silicio a partir de la siguiente tabla:

Isótopo:	Si-28	Si-29	Si-30
Masa isotópica:	27,977 u	28,976 u	29,974 u
Abundancia:	92,20 %	4,70 %	3,10 %

4. Calcular la abundancia relativa de los isótopos de litio y de potasio a partir de la tabla siguiente:

Masas isotópicas: Li-6 = 6,015; Li-7 = 7,016; K-39 = 38,976; K-41 = 40,962. Masas atómicas medias: Li = 6,904 u; K = 39,100 u.

5. Expresar en MeV, megaelectrón-voltios, la energía equivalente a la unidad de masa atómica.

6. Calcular el número de metros cúbicos de agua que se podrían calentar de 0 °C a 100 °C con la energía proporcionada por 1 g de materia al desintegrarse totalmente.

7. Calcular el tiempo que podrían estar alumbrando un millón de lámparas de 100 W con la energía producida al desintegrarse completamente 1 kg de materia.

8. La masa del Sol se estima en  $1,98 \times 10^{30}$  kg y la radiación que emite en  $3,90 \times 10^{26}$  J/s. Calcular el porcentaje de masa que pierde el Sol cada año.

9. Las masas de protón, neutrón y deuterón son, respectivamente, 938,281, 939,576 y 1 875,622 MeV. Calcular la energía necesaria para descomponer el deuterón en protón y neutrón, expresándola en julios.

10. A partir de los datos que se dan a continuación, calcular la energía necesaria para disociar en sus partículas constituyentes 1 mol de núcleos de Ca-40, expresándola en kilocalorías. DATOS: masa isotópica del Ca-40 = 39,962 60 u; masa del protón = 1,007 28 u; masa del neutrón = 1,008 67 u; masa del electrón = 0,000 549 u.

11. La masa nuclear del Mn-55 ( $Z = 25$ ) es 54,924 32 u, siendo las del protón, neutrón y electrón las dadas en el problema anterior. Calcular: 1) La masa atómica del Mn-55. 2) La energía mínima que habría que consumir para disgregar su núcleo en protones y neutrones, expresada en kcal.

12. Un núcleo radiactivo emite un fotón  $\gamma$  de una energía de 2 MeV. El fotón se materializa a continuación en un par electrón-positrón. Calcular: 1) La frecuencia del fotón  $\gamma$ . 2) Las energías cinéticas del positrón y del electrón, supuestas iguales. DATOS:  $m_e = m_{e^+} = 9,109 \times 10^{-31}$  kg;  $h = 6,626 \times 10^{-34}$  J·s;  $q_e = 1,602 \times 10^{-19}$  C;  $c = 2,998 \times 10^8$  m/s.

13. Partiendo de los datos que se especifican al final, obtener una expresión que nos permita calcular la energía de ligadura del núcleo de un átomo, expresada en MeV. DATOS:  $M$  = masa atómica (u),  $m_e$  = masa del electrón (u),  $m_p$  = masa del protón (u),  $Z$  = Número atómico,  $m_n$  = masa del neutrón (u),  $A$  = número másico.

14. La masa isotópica del Cr-52 ( $Z = 24$ ) es 51,940 51 u. Si las masas del protón, neutrón y electrón son 1,007 28, 1,008 67 y 0,000 549 u, respectivamente, calcular: 1) La energía de enlace del núcleo. 2) La energía de enlace por nucleón, expresadas en MeV.

15. El cloro natural está constituido por el 75,79 % del isótopo Cl-35 y el 24,21 % del isótopo Cl-37, siendo su masa atómica media 35,448 6 u. Suponiendo que en ambos isótopos la energía de enlace por nucleón es la misma, calcular sus correspondientes masas isotópicas.

16. Las masas isotópicas de  $^{12}_6\text{C}$ ,  $^7_3\text{Li}$  y  $^{16}_8\text{O}$  son, respectivamente, 12,000 00, 7,016 01 y 15,994 91; y las masas del protón, neutrón y

electrón son 1,007 28, 1,008 67 y 0,000 549, todas ellas expresadas en unidades de masa atómica. 1) Obtener la energía de enlace de los núcleos de los átomos citados. 2) ¿De cuál de ellos es más fácil y de cuál más difícil arrancar un nucleón?

17. Establecer un orden de estabilidad entre los núcleos de  $^{24}_{12}\text{Mg}$ ,  $^{56}_{26}\text{Fe}$ ,  $^{230}_{90}\text{Th}$ . Las masas nucleares respectivas son 23,978 45, 55,920 66 y 229,983 7 u, y las del protón y neutrón 1,007 28 y 1,008 67 u.

18. La energía de enlace por nucleón en el núcleo de  $^4_2\text{He}$  es 7,079 4 MeV. Si las masas del protón y neutrón son 1,007 28 y 1,008 67 u, calcular la masa del núcleo de He-4.

## B) RADIOACTIVIDAD NATURAL

19. Con la ayuda de la tabla periódica, indicar los núclidos que aparecen cuando el  $^{235}_{92}\text{U}$  se desintegra, emitiéndose sucesivamente las siguientes partículas:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$  y  $\alpha$ .

20. Calcular el número total de emisiones  $\alpha$  y  $\beta$  que permitirían completar las siguientes transmutaciones: 1) De  $^{235}_{92}\text{U}$  a  $^{207}_{82}\text{Pb}$  2) De  $^{232}_{90}\text{Th}$  a  $^{208}_{82}\text{Pb}$  3) De  $^{238}_{92}\text{U}$  a  $^{206}_{82}\text{Pb}$  4) De  $^{228}_{88}\text{Ra}$  a  $^{212}_{82}\text{Po}$ .

21. Las cuatro familias radiactivas se forman por las desintegraciones que se citan a continuación. Con ayuda de la tabla periódica: 1) Identificar directamente el núcleo estable en que acaba cada serie. 2) Representarlas en un diagrama (Z, A).

22. Teniendo en cuenta que en los núcleos más estables de los elementos ligeros del sistema periódico, el número de neutrones y protones es sensiblemente igual, predecir el tipo de emisión,  $\beta$  o  $\beta^+$  que experimentarán los siguientes núclidos, y escribir la ecuación que representa la desintegración correspondiente: 1)  $^{14}_6\text{C}$ ; 2)  $^{16}_7\text{N}$ ; 3)  $^{12}_7\text{N}$ ; 4)  $^{28}_{15}\text{P}$

23. Mediante el correspondiente balance de masa, calcular si el Al-26 y el Si-28 se desintegrarán espontáneamente por emisión de positrones. Masas nucleares:  $^{26}_{13}\text{Al} = 25,979 77$ ,  $^{28}_{14}\text{Si} = 27,969 24$ ,  $^{26}_{12}\text{Mg} = 25,976 00$ ,  $^{28}_{13}\text{Al} = 27,974 77$ ,  $\beta = 0,000 549$ .

24. Una muestra de 0,1 moles de  $^{224}_{88}\text{Ra}$  al desintegrarse completamente dio lugar a 0,2 moles de partículas  $\beta$  y 8,96 litros de helio medidos en condiciones normales. Identificar el producto final de la desintegración del radio-224.

25. El  $^{232}_{90}\text{Th}$  se desintegra radiactivamente mediante emisiones sucesivas, todas ellas mucho más rápidas que la primera, estabilizándose como Pb-208. Una muestra de mineral contiene 2,370 gramos de plomo. Calcular el volumen de helio que se ha formado a partir de la muestra original de torio puro. Masa atómica: Pb-208 = 207,976 7.

26. El período de semidesintegración de una muestra de polonio es de 3 minutos. Calcular la fracción de una masa inicial  $m$  de la muestra que quedará al cabo de: 1) 6 minutos, 2) 12 minutos, 3) 21 minutos.

27. Los períodos de semidesintegración de  $^{104}_{45}\text{Rh}$ ,  $^{66}_{29}\text{Cu}$ ,  $^{166}_{67}\text{Ho}$  y  $^{60}_{19}\text{K}$ , son, respectivamente, de 43 s, 5,1 min, 26,9 h y  $1,28 \times 10^9$  años. Calcular sus correspondientes constantes de desintegración y sus vidas medias.

28. Calcular el número de átomos de U-239 que permanecerán como tales, de una muestra de un mol de átomos, al cabo de un día. Su período de semidesintegración es de 24 minutos.

29. El período de semidesintegración del cobalto-60 es de 5,27 años. ¿Cuántos gramos de cobalto habrá dentro de 20 años en una muestra que tiene actualmente 2 gramos de dicho elemento?

30. El período de semidesintegración del isótopo  $^{110}_{47}\text{Ag}$  es de 24,2 segundos. Calcular el tiempo que tardan en desintegrarse las 4/5 partes de una muestra inicial

31. Una muestra de  $^{220}_{86}\text{Rn}$  se desintegra radiactivamente en un 80 % al cabo de 127,7 segundos. Calcular su período de semidesintegración.

32. El Na-24 tiene un período de semidesintegración de 15 horas, ¿qué porcentaje de una muestra inicial quedará como Na-24 al cabo de 24 horas?, ¿y al cabo de un mes?

33. El  $^{226}_{88}\text{Ra}$  se desintegra según la ecuación  $^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow ^{222}_{86}\text{Rn} + ^4_2\text{He}$ . Si se parte de un mol de Ra-226, calcular el volumen de helio, medido en condiciones normales, que se habrá obtenido al cabo de un tiempo igual a tres veces el período de semidesintegración del radio-226.

34. El Bi-212 se desintegra emitiendo partículas  $\alpha$  con un período de semidesintegración de 60 minutos. Si partimos de 0,50 moles de Bi-212, calcular el tiempo transcurrido hasta que se hayan formado 2,00 litros de helio, medidos en condiciones normales.

35. De una muestra de 1 gramo de Am-241, de masa atómica 241,056 8u, se produjeron en un año  $3,78 \times 10^{18}$  emisiones  $\alpha$ . Su

período de semidesintegración es de 458 años. Con estos datos, calcular el valor del número de Avogadro.

36. El Pb-209 se desintegra por emisiones  $\beta$  dando Bi-209, que es estable. El período de semidesintegración del Pb-209 es de 3,3 horas. Si tenemos una muestra de Pb-209 puro, calcular el porcentaje de átomos de plomo y de bismuto que habrá al cabo de: 1) Una hora. 2) Un día. 3) Una semana.

37. El S-35, elemento radiactivo que se desintegra emitiendo partículas  $\beta$ , con un período de semidesintegración de 87 días, tiene una masa atómica de 34,969 0 u. Si tenemos una muestra de 5 gramos de S-35, ¿cuántas emisiones  $\beta$  podremos contar en un día?

38. La actividad inicial de una muestra, que era de 700 desintegraciones cada segundo, se ha reducido en 5 horas a 120 Bq. Calcular su período de semidesintegración.

39. Si en la atmósfera se hubiera dispersado uniformemente un isótopo radiactivo de 80 años de período de semidesintegración, ¿qué fracción de la actividad actual padecerían dentro de 40 años?

40. Calcular en mCi la actividad de una muestra de  $^{14}\text{C}$ . (Masa atómica: 14,003242 u; período de semidesintegración: 5 730 a.)

41. Una sustancia radiactiva, de período de semidesintegración 10 días, emite partículas con una energía media de  $5 \times 10^{-14}$  J, que se aprovechan para generar energía eléctrica, con un rendimiento del 10 %. Si se precisa una potencia de 50 vatios, ¿cuántos moles de átomos de la sustancia deberán emplearse?

42. Una muestra de  $^{90}_{38}\text{Sr}$  procedente de la explosión de una bomba atómica, tenía en un cierto instante una actividad de 2 197 Bq. Al cabo de 6 meses su actividad había descendido a 2 170 Bq. Calcular el período de semidesintegración del estroncio-90.

43. Se dan los siguientes períodos de semidesintegración y masas atómicas: Na-22 = 2,58 años, 21,994 4 u; U-234 =  $2,44 \times 10^5$  años, 234,041 0 u; Pr-144 = 17,4 min, 143,913 3 u. Calcular, en Ci (curies), la actividad de las siguientes muestras: 1) 2g de Na-22. 2) 1g de U-234. 3) 1mg de Pr-144.

44. El  $^{100}_{40}\text{Tc}$  se desintegra por emisión  $\beta$ , con un período de semidesintegración de 16 segundos. Calcular el número de átomos de Tc-100 existentes en una muestra cuya actividad es de 4 microcuries.

45. Si el período de semidesintegración del Po-210 es de 138,4 días, 1) calcular la cantidad del elemento necesaria para tener una intensidad de radiación de 5 mCi. 2) ¿En qué tanto por ciento habrá disminuido su actividad al cabo de un año, respecto de la inicial? La masa atómica del Po-210 es de 209,982 9 u.

46. Cuando un núcleo de  $^{55}_{25}\text{Mn}$  captura un neutrón lento se transforma en un isótopo radiactivo, de masa atómica 55,938 9 u, que emite una partícula  $\beta$ , con un período de semidesintegración de 2,58 horas. 1) Escribir las reacciones mencionadas. 2) ¿Cuántos gramos del isótopo serán necesarios para que la muestra tenga una actividad de 10 Ci?

47. El  $^{32}_{15}\text{P}$  es un isótopo radiactivo emisor de partículas  $\beta$ . Calcular el número de calorías que desprende en un segundo una muestra de 1 mCi de actividad, si se transforma en calor toda la energía de la desintegración  $\beta$ . Masas atómicas: P-32 = 31,973 91; S-32 = 31,972 07;  $e = 0,000 549$  u.

48. El  $^{212}_{83}\text{Bi}$  se desintegra radiactivamente en un 64 % por emisión  $\beta$  pasando a Po-212, y en un 36 % por emisión  $\alpha$ , pasando a Tl-208. Si el período de semidesintegración del Bi-212 es de 60,6 minutos, calcular las constantes de desintegración para cada una de las dos transmutaciones.

49. El uranio natural está constituido por los tres isótopos U-234, U-235 y U-238. Sus abundancias relativas son 0,005 5 %, y 0,720 % y 99,28 %, y sus períodos de semidesintegración  $2,44 \times 10^5$  años,  $7,04 \times 10^8$  años y  $4,47 \times 10^9$  años, respectivamente. Los tres se desintegran emitiendo partículas  $\alpha$ . Calcular el porcentaje de dichas partículas que proviene de cada isótopo en la desintegración del uranio natural.

50. Un recipiente de 10 cm<sup>3</sup> contiene una mezcla de kriptón, en condiciones normales, compuesta por Kr-84 estable y Kr-85 radiactivo de período de semidesintegración 10 años. Si la actividad de la mezcla es de 100 mCi, calcular el tanto por ciento de átomos de Kr-85 presentes.

51. Se tiene una muestra de azufre que contiene una determinada cantidad del isótopo S-35 radiactivo, de período de semidesintegración 87 días. Si la masa total de muestra es de 0,01 g y su actividad 50 Ci, ¿cuál es el porcentaje de átomos de S-35 presentes? Masa atómica media de la muestra: 32,064 u.

52. Se dispone de un contador Geiger-Müller y de una muestra de material radiactivo. Se mide su actividad en los instantes  $0, t_1, t_2, \dots, t_n$ , y se obtienen los valores  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ . Diseñar un método gráfico para obtener el valor del período de semidesintegración.

53. Del análisis de una muestra tomada de una botella de brandy, se obtiene que la actividad debida al tritio es el 40 % de la que presenta el agua, en la que la parte expuesta a la atmósfera mantiene una proporción de tritio constante. Si el período de semidesintegración del tritio es de 12,3 años, calcular cuántos años hace que se elaboró el brandy de la muestra.

54. La actividad radiactiva, debida al C-14, de los tejidos encontrados en una tumba egipcia, es el 53 % de la que presentan tejidos similares actuales. El período de semidesintegración del carbono 14 es de 5 730 años. Calcular la edad de dichos tejidos.

55. El  $^{14}\text{C}$  está presente en el dióxido de carbono en una proporción constante de  $1,3 \times 10^{-12}$  frente al  $^{12}\text{C}$  y su período de semidesintegración es de 5 730 años. Calcular la antigüedad de una masa de 1 000 gramos de carbón vegetal cuya actividad es de 40 Bq.

56. Un mineral de uranio contiene 1,120 g de Pb-206 por cada 2,740 g de U-238. Si todo el Pb-206 se ha formado por desintegración radiactiva del U-238, cuyo período de semidesintegración es de  $4,47 \times 10^9$  años, determinar la edad del mineral. Masas atómicas: U-238 = 238,050 8, Pb-206 = 205,974 5 u.

57. Se tienen dos muestras de rocas formadas por U-238 y Pb-206. En la primera la razón de moles de uranio a Amoles de plomo es 1,10, y en la segunda la proporción en peso de U-238 a Pb-206 es de 1,10. El período de semidesintegración del U-238 es de  $4,47 \times 10^9$  años, y tras diversas transformaciones se transmuta a Pb-206. Calcular las edades de las muestras. Masas atómicas: U-238 = 238,050 8, Pb-206 = 205,974 5 u.

58. El Ra-224, por emisión de una partícula  $\alpha$ , se transforma en Rn-220, que también es radiactivo. Los períodos de semidesintegración son, para el radio  $T_1 = 3,64$  días, y para el radón  $T_2 = 55,3$  segundos. Si partimos de una muestra inicial de un miligramo de Ra-224, de masa atómica 224,020 2 u, calcular la actividad del radón cuando este gas alcance el equilibrio.

59. El Ra-223 se transmuta por emisión alfa a Rn-219, con un período de semidesintegración de 11,43 días. Por su parte, el Rn-219, también por emisión alfa, se convierte en Po-215, siendo el período de esta transmutación de 4,00 segundos. Calcular el volumen de Rn-219, medido en condiciones normales, que estará en equilibrio con 200 mg de Ra-223. Masa atómica: Ra-223 = 223,085 3 u.

C) REACCIONES NUCLEARES. FISIÓN Y FUSIÓN

60. Calcular la energía cinética mínima que ha de tener un protón lejos de un núcleo de Pa-234 ( $Z = 91$ ) para alcanzar la zona de actuación de las fuerzas nucleares de ese núcleo.

61. Completar las siguientes reacciones nucleares:

- 1)  $^{238}_{92}\text{U} \rightarrow ^4_2\text{He} + \text{X}$
- 2)  $^{14}_6\text{C} \rightarrow \text{X} + ^0_{-1}\text{e}$
- 3)  $^{30}_{15}\text{P} \rightarrow ^{30}_{14}\text{Si} + \text{X}$
- 4)  $^{12}_6\text{C} + ^1_1\text{H} \rightarrow ^{13}_7\text{N} + \text{X}$
- 5)  $\text{X} \rightarrow ^{30}_{14}\text{Si} + \beta^+$
- 6)  $^{54}_{26}\text{Fe} + ^1_1\text{H} \rightarrow ^{55}_{27}\text{Co} + \text{X}$
- 7)  $^7_3\text{Li} + ^1_1\text{H} \rightarrow 2 \text{X}$
- 8)  $^{235}_{92}\text{U} + ^1_0\text{n} \rightarrow ^{94}_{38}\text{Sr} + ^{139}_{54}\text{Xe} + \text{X}$
- 9)  $^{246}_{96}\text{Cm} + ^{12}_6\text{C} \rightarrow ^{254}_{102}\text{No} + \text{X}$

62. Completar las siguientes reacciones nucleares, y escribir en forma abreviada las que no lo estén:

- 1)  $^{14}_7\text{N} + \text{X} \rightarrow ^{11}_6\text{C} + ^4_2\text{He}$
- 2)  $^{55}_{25}\text{Mn} + ^1_0\text{n} \rightarrow ^{56}_{25}\text{Mn} + \text{X}$
- 3)  $^{238}_{92}\text{U} + ^4_2\text{He} \rightarrow ^{239}_{94}\text{Pu} + \text{X}$
- 4)  $^{98}_{42}\text{Mo} + ^2_1\text{H} \rightarrow \text{X} + ^1_0\text{n}$
- 5)  $^{39}_{19}\text{K} (p, n) \text{X}$
- 6)  $^{39}_{19}\text{K} (p, \text{X}) ^{36}_{18}\text{Ar}$
- 7)  $^4_2\text{He} (\text{X}, d) ^8_4\text{Be}$
- 8)  $\text{X} (\alpha, p) ^{30}_{14}\text{Si}$
- 9)  $^{250}_{98}\text{Cf} (^{11}_5\text{B}, 4n) \text{X}$

63. A partir de las siguientes masas nucleares:  $^{235}_{92}\text{U} = 234,99$ ;  $^{144}_{56}\text{Ba} = 143,90$ ;  $^{90}_{36}\text{Kr} = 89,92$  y  $^1_0\text{n} = 1,01$  u, calcular la masa, en gramos, que se transforma en energía, cuando un núcleo de U-235 captura un neutrón y se fisiona en Ba-144 y Kr-90.

64. Calcular la energía liberada en las reacciones nucleares siguientes: 1)  $^7_3\text{Li} + ^1_1\text{H} \rightarrow 2 ^4_2\text{He}$  2)  $^2_1\text{H} + ^2_1\text{H} \rightarrow ^3_2\text{He} + ^1_0\text{n}$   
Masas nucleares:  $^1_1\text{H} = 1,007 28$ ;  $^2_1\text{H} = 2,013 55$ ;  $^3_2\text{He} = 3,014 93$ ;  $^4_2\text{He} = 4,001 50$ ;  $^7_3\text{Li} = 7,014 36$ ;  $^1_0\text{n} = 1,008 67$  u.

65. En una hipotética reacción nuclear se disgrega un núcleo de  $^{40}_{20}\text{Ca}$  en protones y neutrones separados, y a continuación los nucleones se unen formando deuterones. Calcular la energía total liberada o absorbida en ese proceso, expresándola en calorías. Masas: Ca-40 = 39,951 62, p = 1,007 28, n = 1,008 67, d = 2,013 55 u.

66. Dada la siguiente reacción nuclear:  $^7_3\text{Li} (p, \gamma) ^8_3\text{Be}$ , y suponiendo que toda la pérdida de masa que se produce en ella se convierte en energía de los rayos  $\gamma$ , calcular la longitud de onda y la frecuencia de estos últimos. Masas nucleares: Li-7 = 7,014 36, Be-8 = 8,003 10, p = 1,007 28 u.

67. En la desintegración espontánea del He-6 se emite una partícula  $\beta$ . Calcular la energía cinética que tiene esa partícula, sin considerar la energía del neutrino. Masas nucleares: He-6 = 6,017 25, Li-6 = 6,013 48,  $\beta = 0,000 549$  u

68. Suponiendo que en la reacción de fusión de dos núcleos de deuterio y tritio la cantidad de movimiento inicial es nula, calcular los tantos por ciento de la energía cinética final que corresponden al núcleo de He-4 y al neutrón resultantes. Las masas nucleares son: d = 2,01355 u; t = 3,015 50 u; He-4 = 4,002 05 u; n = 1,008 67 u.

69. La radiación gamma emitida en la reacción  $^{14}_7\text{N} (n, \gamma) ^{15}_7\text{N}$  es de  $2,636 \times 10^{21}$  Hz de frecuencia. Si despreciamos la energía cinética del neutrón incidente, y dado que la masa nucleónica del N-14 es 14,003 07 u y la del neutrón, 1,008 67 u: 1) ¿Cuál es la masa nucleónica del N-15? 2) Si la masa del electrón es de 0,000 549 u, ¿cuál es la masa de un mol de gas N-15?

70. La reacción nuclear  $^{10}_5\text{B} + ^1_0\text{n} \rightarrow ^7_3\text{Li} + ^4_2\text{He} + \text{Q}$  es provocada por neutrones lentos al ser capturados por núcleos de boro. La energía liberada aparece en forma de energía cinética de los núcleos de litio y helio. La de este último resulta ser de 1,83 MeV. Calcular la masa nucleónica del Li-7, si las restantes son: B-10 = 10,016 99 u; He-4 = 4,001 50 u; n = 1,008 67 u.

71. En la fisión de un átomo de U-235 se liberan aproximadamente 200 MeV de energía. Calcular la cantidad de U-235 consumido cada día en una central que proporciona 900 MW y cuyo rendimiento en la producción de energía eléctrica es del 25 %. Masa atómica del U-235: 235,044 u.

72. Una hipotética central eléctrica aprovecha la energía liberada en la reacción de fusión de dos núcleos de deuterio en un núcleo de He-4, para obtener una potencia eléctrica de 100 MW. Si el rendimiento neto de todo el proceso es del 20 %, calcular el número de moles de núcleos de deuterio que consume en cada hora de funcionamiento. Masas nucleares: H-2 = 2,013 55 u, He-4 = 4,001 50 u.

73. Dada la reacción,  $^{235}_{92}\text{U} + ^1_0\text{n} \rightarrow ^{144}_{58}\text{Ce} + ^{87}_{35}\text{Br} + ^0_{-1}\text{e} + 5 ^1_0\text{n}$ , calcular, en kWh, la energía desprendida por gramo de U-235 fisionado. Masas nucleares: U-235 = 234,993 4, Ce-144 = 143,881 6, Br-87 = 86,902 8; e = 0,000 549, n = 1,008 67 u.

74. Al bombardear con neutrones térmicos núcleos de U-235 éstos se fisionan en  $^{95}_{42}\text{Mo}$  y  $^{139}_{57}\text{La}$ . 1) Escribir la ecuación completa de esta reacción. 2) Se fisionan de la forma indicada 235,043 9 gramos de U-235, es decir, un mol de átomos. Calcular las toneladas de TNT que harían falta para liberar la misma cantidad de energía, sabiendo que un kilogramo de TNT libera 660 kcal. Masas nucleares: U-235 = 234,993 4, Mo-95 = 94,892 3, La-139 = 138,877 8, n = 1,008 67 u, e = 0,000 549 u.

75. La serie de reacciones que producen la energía solar se resumen en la transformación de cuatro protones en un núcleo de He-4, cuyas masas respectivas son 1,007 28 y 4,001 50 u. 1) La radiación total emitida por el Sol se estima en  $3,90 \times 10^{26}$  vatios. Calcular la masa de helio que debe formarse cada segundo para producir esa radiación. 2) Diariamente llegan a la Tierra aproximadamente  $1,5 \times 10^{18}$  kcal procedentes del Sol. ¿A qué cantidad de helio formado por segundo equivale esa energía?

76. Si la reacción de fusión  $2 ^2_1\text{H} \rightarrow ^4_2\text{He}$  fuese ya industrialmente aprovechable en centrales nucleares, a las que supondremos un rendimiento en la producción de energía eléctrica del 25 %, y dado que la presencia de deuterio en el hidrógeno del agua es de 0,015 %, calcular la cantidad de agua que habría que procesar para obtener el deuterio necesario para abastecer los requerimientos energéticos mundiales, que son anualmente de unas  $6 \times 10^{16}$  kcal. Masas nucleares: d = 2,013 55, He-4 = 4,001 50 u.

77. Comprobar si una reacción de fusión de cuatro núcleos de He-4 en un núcleo de O-16 es exotérmica o endotérmica, y calcular la energía desprendida o absorbida en el proceso. Masas nucleares: He-4 = 4,001 50, O-16 = 15,990 52 u.

78. Cuando dos núcleos de deuterio se fusionan dando He-3, se liberan  $5,223 \times 10^{-13}$  julios de energía. Si las masas nucleares del deuterio y del He-3 son 2,013 55 y 3,014 93 u, respectivamente, calcular la masa del neutrón.

## SIMBOLOGÍA Y NOMENCLATURA UTILIZADAS EN EL TEXTO

A .....	Amperio.	cos .....	Coseno.
	Amperímetro.	cosec .....	Cosecante.
A .....	Amplitud.	CV .....	Caballo de vapor ( $1 \text{ CV} = 75 \times 9,8 \text{ W}$ ).
	Aumento visual de un aparato óptico.	D .....	Diámetro.
	Coefficiente absorbente específico.		Dispersión de una red.
	Constante de Richardson-Dushman.		Factor de semiabsorción.
	Dimensión de una intensidad de corriente.		Longitud de la división de la regla de un nonius.
	Masa atómica.		Paso de rosca de un nonius circular.
	Poder absorbente integral.	<b>D</b> .....	Vector desplazamiento eléctrico.
<b>A</b> .....	Vector área o superficie.	d .....	Día.
Å .....	Angstrom ( $1 \text{ Å} = 10^{-10}$ ).		Como prefijo es deci... ( $10^{-1}$ ).
a .....	Año.	d .....	Carga del deuterón.
	Área ( $1a = 10^2 \text{ m}^2$ ).		Derivada.
	Como prefijo es Alto... ( $10^{-18}$ ).		Diámetro.
a .....	Distancia objeto en lentes.		Distancia.
	Semieje mayor de una elipse.		Flecha.
a' .....	Distancia imagen en lentes.		Longitud de una división del nonius.
$\alpha_i$ .....	Poder absorbente para las OEM de longitud de onda $\lambda$ .	<b>d</b> .....	Vector desplazamiento.
<b>a</b> .....	Vector aceleración.	$d_N$ .....	Distancia entre nodos.
$\mathbf{a}_a$ .....	Vector aceleración de arrastre.	$d_V$ .....	Distancia entre vientres.
$\mathbf{a}_c$ .....	Vector aceleración de Coriolis.	da .....	Como prefijo de deca... (10).
$\mathbf{a}_n$ .....	Vector aceleración normal.	db .....	Decibel.
$\mathbf{a}_r$ .....	Vector aceleración relativa.	div .....	Operador divergencia.
$\mathbf{a}_t$ .....	Vector aceleración tangencial.	dp .....	Dioptría.
$\bar{\mathbf{a}} = \langle \mathbf{a} \rangle$ .....	Vector aceleración media.	dyn .....	Dina ( $1 \text{ dyn} = 10^{-5} \text{ N}$ ).
arc. ....	Arco...	E .....	Como prefijo de exa... ( $10^{18}$ ).
atm .....	Atmósfera ( $1 \text{ atm} = 101\,325 \text{ Pa}$ ).	<b>E</b> .....	Emisor de un transistor.
a (x, y, z) .....	Campo escalar.		Empuje.
B .....	Base de un transistor.		Energía mecánica total.
	Módulo de compresibilidad.		Error relativo.
	Perveancia.		Espejo.
<b>B</b> .....	Vector inducción del campo magnético.		Humedad relativa.
b .....	Baria ( $1 \text{ b} = 1 \text{ dyn/cm}^2 = 10^{-1} \text{ Pa}$ ).		Iluminación.
b .....	Distancia.		Módulo de Young.
	Parámetro de impacto.		Poder emisor integral.
	Semieje de una elipse.		Punto blanco.
Bq .....	Una desintegración por segundo (1/s).	<b>E</b> .....	Vector campo eléctrico.
bar .....	Bar ( $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 10^6 \text{ b}$ ).	e .....	Eón ( $1 \text{ eón} = 10^9 \text{ años}$ ).
C .....	Culombio ( $1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$ ).	e .....	Base de los ln ( $2,718\,281\,828$ ).
°C .....	Grado celsius.		Carga del electrón ( $-1,602\,1892 \times 10^{-19} \text{ C}$ ).
C .....	Camino óptico.		Coefficiente de restitución.
	Capacidad calorífica.		Electrón.
	Capacidad eléctrica.		Entrehierro.
	Centro de curvatura de un espejo o dioptrio.		Espesor.
	Colector de un transistor.	<b>e</b> .....	Vector unitario en la dirección de un eje e.
	Precio, costo.	$E_c$ .....	Energía cinética.
c .....	Como prefijo es centi... ( $10^{-2}$ ).	$E_e$ .....	Valor eficaz del campo eléctrico.
	Ciclo.	$E_F$ .....	Energía del nivel de Fermi.
c .....	Calor específico.	$E_q$ .....	Equivalente químico.
	Coefficiente de reflexión.	$E_w$ .....	Trabajo de extracción.
	Concentración molar.	$e_\lambda$ .....	Poder emisor para las OEM de longitud de onda $\lambda$ .
	Velocidad de la luz.	erg .....	Ergio ( $1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$ ).
	Velocidad de la onda.	eV .....	Electrovoltio ( $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$ ).
	Velocidad del sonido.	<b>E</b> (x, y, z) .....	Campo vectorial.
$\bar{c}$ .....	Velocidad cuadrática media.	F .....	Faradio ( $1 \text{ F} = 1 \text{ A} \cdot \text{s/V}$ ).
$c_p$ .....	Calor específico a presión constante.	<b>F</b> .....	Constante de Faraday ( $9,648\,455 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$ ).
$c_v$ .....	Calor específico a volumen constante.		Dimensión de una fuerza.
$c_o$ .....	Velocidad de la luz en el vacío.		Energía libre.
$c_\lambda$ .....	Factor de reflexión de las OEM para una determinada longitud de onda.		Foco emisor de ondas.
cal .....	Caloría ( $1 \text{ cal} = 4,18 \text{ J}$ ).		Foco objeto.
cd .....	Candela ( $1 \text{ cd} = 1 \text{ lm/sr}$ ).	°F .....	Grados Fahrenheit.
CG .....	Centro de gravedad.	F' .....	Foco imagen.
CGS .....	Sistema cegesimal.	<b>F</b> .....	Vector fuerza.
CM .....	Centro de Masa.	f .....	Como prefijo es femto... ( $10^{-15}$ ).
CN .....	Condiciones normales.	f .....	Distancia focal objeto.
cm .....	Centímetro ( $1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$ ).		Flecha del esferómetro.
	Unidad de capacidad en UEE ( $1 \text{ cm} = 1/9 \times 10^{11} \text{ F}$ ).		Tensión máxima de vapor.
c.q.d. ....	Como queríamos demostrar.	f' .....	Distancia focal imagen.

$f$ .....	Fuerza.	$J$ .....	Vector densidad de corriente.
$F_B$ .....	Fuerza debida al campo magnético.		Vector momento angular.
$F_c$ .....	Fuerza centrípeta y centrífuga.	$j$ .....	Vector unitario en la dirección del eje $OY$ .
	Fuerza de Coriolis.	$J_D$ .....	Densidad de corriente de desplazamiento.
$F_E$ .....	Fuerza debida al campo eléctrico.	$J_M$ .....	Densidad de corriente equivalente de magnetización.
$F_p$ .....	Fuerza propulsora.	$j_C$ .....	Densidad superficial de corriente de conducción.
$F_{ext}$ .....	Fuerzas exteriores.	$J_M$ .....	Densidad superficial de corriente de magnetización.
$F_{int}$ .....	Fuerzas interiores.		
FEM .....	Fuerza electromotriz.	K .....	Grados Kelvin.
fm .....	Fermi o femtómetro ( $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ ).	K .....	Coefficiente de conductividad.
ft .....	Pie ( $1 \text{ ft} = 0,3048 \text{ m}$ ).		Coefficiente de solubilidad.
			Coefficiente de variación de la resistencia con la temperatura.
G .....	Como prefijo de giga... ( $10^9$ ).		Conductividad térmica.
	Galvanómetro.		Constante.
G .....	Constante de gravitación universal		Constante de la ley de Coulomb.
	( $6,672 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ ).		Constante de la ley de Hooke.
	Gasto, caudal.		Constante de tiempo en un circuito.
	Módulo de deslizamiento, cizalladura o torsión.		Eficiencia de un frigorífico.
g .....	Gramo ( $1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$ ).		Número entero.
$g$ .....	Intensidad del campo gravitatorio.	k .....	Como prefijo es kilo... ( $10^3$ ).
$g_s$ .....	Coefficiente giromagnético.	k .....	Coefficiente de velocidad.
$g_m$ .....	Conductancia mutua o transconductancia.		Constante de Boltzman ( $1,380662 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ ).
$g_0$ .....	Intensidad del campo gravitatorio terrestre en la superficie.		Número de ondas.
gf .....	Gramos fuerza o gramospondio.	$k$ .....	Vector unitario en la dirección del eje $OZ$ .
gp .....	Gramospondio.	$K_0$ .....	Constante de la ley de Coulomb para el vacío
<b>grad</b> .....	Operador gradiente.		( $9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ ).
			Radio de giro.
H .....	Henrio ( $1 \text{ H} = 1 \text{ Wb/A}$ ).	kg .....	Kilogramo.
H .....	Función térmica o entalpia.	kgm .....	Kilogramo fuerza ( $1 \text{ kgm} = 9,8 \text{ J}$ ).
	Presión atmosférica.	kp .....	Kilopondio o kilogramo fuerza ( $1 \text{ kp} = 9,8 \text{ N}$ ).
	Punto principal objeto.	kW · h .....	Kilovatio por hora ( $1 \text{ kW} \cdot \text{h} = 3,6 \times 10^6 \text{ J}$ ).
	Rapidez de transferencia de calor.		
H' .....	Punto principal imagen.	L .....	Autoinducción.
$H$ .....	Excitación. Vector intensidad del campo magnético.		Brillo o luminancia.
h .....	Como prefijo es hecto... ( $10^2$ ).		Dimensión de una longitud.
	Hora.		Lente.
h .....	Altura.	$L$ .....	Momento angular orbital.
	Coefficiente de radiación de una sustancia.	l .....	Litro. ( $1 \text{ l} = 10^{-3} \text{ m}^3$ ).
	Quantum de acción de Planck	l .....	Ángulo límite o de reflexión total.
	( $6,626176 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ).		Arco sobre una circunferencia.
$\hbar$ .....	Constante de Planck reducida ( $\hbar/2\pi$ ).		Calor latente de cambio de estado.
$h_F$ .....	Pérdida de carga.		Número cuántico orbital.
$h_G$ .....	Altura del centro de gravedad.	$l$ .....	Vector longitud.
Hz .....	Herz ( $1 \text{ Hz} = 1 \text{ revolución/segundo}$ ).	lb .....	Libra-masa ( $1 \text{ lb} = 0,4526 \text{ kg}$ ).
		lm .....	Lumen ( $1 \text{ lm} = 1 \text{ cd} \cdot \text{sr}$ ).
I .....	Intensidad.	ln .....	Logaritmo neperiano.
	Intensidad de corriente.	log .....	Logaritmo decimal.
	Intensidad luminosa.	lx .....	Lux ( $1 \text{ lx} = 1 \text{ lm/m}^2$ ).
	Momento de inercia.	LHI .....	Lineal, homogéneo e isotropo.
	Rayo incidente.		
$\bar{I}$ .....	Expresión fasorial de la intensidad.	M .....	Como prefijo es mega... ( $10^6$ ).
$I$ .....	Impulso mecánico.	M .....	Dimensión de una masa.
i .....	Ángulo de incidencia.		Coefficiente de Inducción Mutua.
	Intensidad de corriente.		Fuerza magnetomotriz.
	Unidad imaginaria $\sqrt{-1}$ .		Masa.
$i$ .....	Vector unitario en la dirección del eje $OX$ .	M .....	Vector imanación.
$I_0$ .....	Intensidad máxima.		Vector impulso angular.
$I_c$ .....	Intensidad de corriente a la capacitancia.	m .....	Como prefijo es mili... ( $10^{-3}$ ).
	Intensidad de corriente de conducción.		Metro.
$I_p$ .....	Corriente de desplazamiento.	m .....	Masa.
$I_{CM}$ .....	Momento de inercia respecto a un eje que pasa por el CM.	$m$ .....	Vector momento magnético.
$I_e$ .....	Intensidad de corriente eficaz.	$m_e$ .....	Masa del electrón en reposo ( $9,10953 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ).
$I_L$ .....	Intensidad de corriente a la inductancia.	$m_n$ .....	Número cuántico magnético.
$I_M$ .....	Corriente de magnetización.	$m_n$ .....	Masa del neutrón en reposo ( $1,674954 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ).
in .....	Pulgada ( $1 \text{ in} = 2,54 \times 10^{-2} \text{ m}$ ).	$m_p$ .....	Masa del protón en reposo ( $1,672648 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ).
[I] .....	Forma compleja de la intensidad de corriente.	$m_s$ .....	Número cuántico de spin.
		$M_0$ .....	Masa de la tierra.
J .....	Julio ( $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$ ).	$M_{At}$ .....	Masa atómica.
J .....	Constante de Joule ( $4,18 \text{ J/cal}$ ).	$M_m$ .....	Masa molecular.
	Dimensión de intensidad luminosa.	min. ....	Minuto ( $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$ ).
		mμ .....	Milimicra ( $1 \text{ mμ} = 1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$ ).
		mB .....	Milibar ( $1 \text{ mB} = 10^{-3} \text{ bar} = 10^3 \text{ b}$ ).

mile .....	Milla ( $1 \text{ mile} = 1\,609 \text{ m}$ . Una milla marina = $1\,852 \text{ m}$ ).	proy. ....	Proyección.
MAS .....	Movimiento vibratorio armónico simple.	ptas. ....	Pesetas.
MU .....	Movimiento uniforme.	Q .....	Calor.
MUA .....	Movimiento uniformemente acelerado.		Carga eléctrica.
MUD .....	Movimiento uniformemente decelerado.	q .....	Carga eléctrica.
		$Q_0$ .....	Factor de calidad.
N .....	Newton ( $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$ ).	R .....	Coefficiente de ruptura.
$N$ .....	Dimensión de cantidad de sustancia.		Constante de gases perfectos ( $0,082 \text{ atm} \cdot \text{l/K} \cdot \text{mol}$ ).
	Número de neutrones del núcleo.		Constante de Rydberg ( $109\,677,58 \text{ cm}^{-1}$ ).
	Número de rendijas por unidad de longitud.		Factor de reflexión.
<b>N</b> .....	Vector momento.		Flujo radiante integral de las OEM o potencia integral.
	Vector momento de una fuerza.		Número de Reynolds.
	Fuerza normal a una superficie.		Poder reflector.
n .....	Como prefijo es nano... ( $10^{-9}$ ).		Poder separador cromático de una red.
n .....	Concentración de electrones en semiconductores.		Radio.
	Índice de refracción.		Reluctancia.
	Neutrón.		Resistencia.
	Número cuántico principal.	<b>R</b> .....	Fuerza de rozamiento.
	Número de divisiones del nonius.		Resultante de un sistema de vectores deslizantes.
	Número de espiras de un solenoide.		Vector de posición del CM.
	Número de moles.		Vector radio de circunferencia y esfera con origen en el centro.
	Número de protones del núcleo.	r .....	Ángulo de reflexión.
$n^a$ .....	Número.		Ángulo de refracción.
<b>n</b> .....	Vector unitario en la dirección de la normal.		Coordenada polar.
$N_A$ .....	Concentración de impurezas aceptoras.		Coefficiente de reflexión.
	Número de Avogadro ( $6,022\,045 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ).		Radio.
$N_D$ .....	Concentración de impurezas donadoras.	<b>r</b> .....	Vector de posición.
$N_e$ .....	Momento de un vector con respecto a un eje.	$^{\circ}\text{R}$ .....	Grados Reaumur.
$N_{CM}$ .....	Momento de las fuerzas respecto al CM.	$R_0$ .....	Radio terrestre.
$N_{ext}$ .....	Momento de fuerzas exteriores.	$R_\lambda$ .....	Flujo radiante para una determinada longitud de onda.
$N_{int}$ .....	Momento de fuerzas interiores.	$R_{\lambda_1, \lambda_2}$ .....	Potencia de las OEM correspondiente al intervalo comprendido entre $\lambda_1$ y $\lambda_2$ .
$N_R$ .....	Momento del par de rodadura.	<b><math>R_e</math></b> .....	Fuerza de rozamiento estático.
	Momento mínimo de un sistema de vectores deslizantes.	<b><math>R_d</math></b> .....	Fuerza de rozamiento dinámico.
$n_i$ .....	Concentración de portadores intrínsecos.	$r_\lambda$ .....	Flujo radiante referido a un intervalo unidad de longitudes de onda próximo a $\lambda$ .
	Frecuencia de un dato.	$r_p$ .....	Resistencia de placa de un triodo.
O .....	Origen de un sistema de referencia.	<b><math>r_0</math></b> .....	Vector de posición del origen de los tiempos.
	Centro geométrico.	rad. ....	Radián.
ob .....	Observador.	<b>rot</b> .....	Operador rotacional.
Oe .....	Oersted ( $1 \text{ Oe} = 10^3/4\pi \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ ).	S .....	Siemens ( $1 \text{ S} = 1 \text{ A/V}$ ).
OXYZ .....	Sistema de ejes cartesianos ortogonales.	S .....	Coefficiente de seguridad.
AEM .....	Onda electromagnética.		Centro óptico.
			Entropía.
P .....	Como prefijo en penta... ( $10^{15}$ ).	<s> .....	Valor medio del Vector de Poynting o flujo de energía de la OEM.
	Poise ( $1 \text{ P} = 0,1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ).	<b>S</b> .....	Momento angular interno (spin).
P .....	Grado de polarización.		Vector área o superficie.
	Potencia mecánica.		Vector de Poynting.
	Pureza o grado de saturación de un color.	s .....	Segundo.
<b>P</b> .....	Peso de un cuerpo.	s .....	Espacio.
	Vector polarización eléctrica.		Distancia objeto.
p .....	Como prefijo es pico... ( $10^{-12}$ ).		Número cuántico de spin.
p .....	Carga del protón ( $1,602\,189\,2 \times 10^{-19} \text{ C}$ ).	$s'$ .....	Distancia imagen.
	Concentración de huecos.	$s_0$ .....	Espacio inicial.
	Esfuerzo de tracción.	sec .....	Secante.
	Poder separador.	sen .....	Seno.
	Precisión de un aparato.	sr .....	Estereorradián.
	Presión.	SI .....	Sistema internacional.
	Protón.	ST .....	Sistema técnico.
	Tensión de vapor.	T .....	Tesla ( $1 \text{ T} = 1 \text{ Wb/m}^2 = 1 \text{ kg/A} \cdot \text{s}^2$ ).
<p> .....	Presión de radiación.		Como prefijo es tera... ( $10^{12}$ ).
<b>p</b> .....	Vector momento dipolar.	T .....	Coefficiente de refracción.
	Vector momento lineal o cantidad de movimiento.		Dimensión del tiempo.
$P_A$ .....	Potencia activa.		Energía cinética.
$P_M$ .....	Potencia motor.		Período.
$P_R$ .....	Potencia reactiva.		Temperatura absoluta.
$P_T$ .....	Potencia teórica.		
$P_U$ .....	Potencia útil.		
<b>P<sub>A</sub></b> .....	Peso aparente.		
Pa .....	Pascal ( $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ ).		
pc .....	Parsec ( $1 \text{ pc} = 3,07 \times 10^{16} \text{ m}$ ).		
pF .....	Picofaradio ( $1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$ ).		

	Término espectral.	X	Color primario.
	Poder de transmisión.		Reactancia.
<b>T</b>	Tensión mecánica.	$\bar{X}$	Valor de conversión o valor triestímulo.
t	Tonelada ( $1 \text{ t} = 10^3 \text{ kg}$ ).	x	Abscisa de un punto.
t	Temperatura centígrada.		Coefficiente tricromático.
	Tiempo.		Elongación.
$T_0$	273 K.	$\bar{x}$	Media aritmética.
$T_{int}$	Energía cinética interna.	$X_C$	Capacitancia.
tg	Tangente.	$X_L$	Inductancia.
		$x_{CM}$	Abscisa del CM.
<b>U</b>	Energía potencial.	$x_i$	Dato número $i$ .
u	Unidad de masa atómica ( $1 \text{ u} = 1,661 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ).	<b>Y</b>	Color primario.
u	Energía de la unidad de volumen.	$\bar{Y}$	Valor de conversión o valor triestímulo.
$\langle u \rangle$	Densidad de energía volumétrica media de un OEM.	y	Coefficiente tricromático.
<b>u</b>	Vector unitario en la dirección $r$ .		Ordenada de un punto.
$u_x$	Vector unitario en la dirección del eje X.		Tamaño del objeto en óptica.
$u_y$	Vector unitario en la dirección del eje Y.	$y'$	Tamaño de la imagen óptica.
$u_z$	Vector unitario en la dirección del eje Z.	$y_{CM}$	Ordenada del CM.
$u_\theta$	Vector unitario en coordenadas esféricas.	yd	Yarda ( $1 \text{ yd} = 0,9144 \text{ m}$ ).
$u_\rho$	Vector unitario en coordenadas cilíndricas.	<b>Z</b>	Color primario.
$u_\varphi$	Vector unitario en coordenadas polares.		Conjunto de números enteros.
$u_\lambda$	Energía radiante referida a la unidad de tiempo existente en la unidad de volumen para una $\lambda$ determinada.		Impedancia.
$U(\mathbf{r})$	Energía potencial de punto.		Número atómico.
utm	Unidad técnica de masa. ( $1 \text{ utm} = 9,8 \text{ kg}$ ).	$\bar{Z}$	Valor de conversión o Valor triestímulo.
uX	Unidad X ( $1 \text{ uX} = 10^{-13} \text{ m}$ ).	z	Coefficiente tricromático.
$U(x, y, z)$	Energía potencia de punto.		Coordenada cilíndrica (altura).
UEE	Sistema de unidades electrostático.		Coordenada cartesiana eje OZ.
			Distancia Foco-objeto.
<b>V</b>	Voltio ( $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$ ).	$z'$	Distancia Foco-imagen.
	Voltímetro.	$Z_{eq}$	Impedancia equivalente.
<b>V</b>	Función potencial.	$z_{CM}$	Coordenada de CM.
	Tensión eléctrica.	$\alpha$	Ángulo.
	Volumen.		Ángulo del prisma o de refrigencia.
<b>V</b>	Forma fasorial de la potencia.		Ángulo de torsión.
<b>V</b>	Vector velocidad.		Coefficiente de dilatación lineal.
v	Vida media.		Coefficiente de temperatura ( $1/273,16$ ).
	Volumen molar.		Ganancia en corriente de un transistor.
<b>v</b>	Vector velocidad.		Núcleo de helio. Partícula.
$V_0$	Potencial máximo de una corriente alterna.		Poder rotatorio.
$v_a$	Velocidad de arrastre.		Polarizabilidad atómica.
$v_0$	Vector velocidad inicial.	$\alpha$	Aceleración angular.
$\bar{v}$	Vector velocidad media.	$[\alpha]$	Poder rotatorio específico.
$v_{12}$	Velocidad relativa del sistema 1 respecto del 2.	$\beta$	Ángulo
$V_C$	Potencial a la capacitancia.		Aumento lateral.
$V_e$	Potencial eficaz.		Coefficiente de absorción de las ondas.
$V_L$	Potencial a la inductancia.		Coefficiente absorbente específico.
$V_S$	Volumen sumergido.		Coefficiente de dilatación superficial.
$V_W$	Potencial de extracción.		Partícula.
$V_X$	Potencial a la Reactancia.		Ganancia en tensión de un transistor.
$V_\lambda$	Factor de eficiencia o luminosidad relativa.		Relación $v/c$ .
$V_A$	Velocidad areolar.		Sección eficaz de captura.
$v_0$	Volumen de 1 mol en condiciones normales (22,4 l).		Sensación sonora o sonoridad.
$V(P)$	Potencial en un punto.	$\beta$	Aceleración areolar.
$V(\mathbf{r})$	Potencial en un punto.	$\beta^+$	Positrón.
$V(x, y, z)$	Potencial en un punto.	$\Gamma$	Circulación.
[V]	Forma compleja de potencial.	$\gamma$	Ángulo.
<b>W</b>	Vatio ( $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$ ).		Aumento angular.
<b>W</b>	Trabajo, energía.		Coefficiente de dilatación cúbica.
$W_c$	Trabajo de las fuerzas conservativas.		Coefficiente de las adiabáticas ( $c_p/c_v$ J).
$W_{ext}$	Trabajo de las fuerzas exteriores.		Módulo de Coulomb.
$W_{int}$	Trabajo de las fuerzas interiores.		Relación: $\sqrt{1 - \beta^2}$ .
$W_M$	Trabajo motor.	$\gamma_L$	Razón girométrica o magnetomecánica.
$W_{NC}$	Trabajo de las fuerzas no conservativas.	$\Delta$	Diferencia de camino óptico.
$W_R$	Trabajo de la fuerza de rozamiento.		Incertidumbre o indeterminación.
	Trabajo resistente.		Incremento, variación.
$W_u$	Trabajo útil.		Intervalo óptico (distancia $F'_1 F'_2$ ).
$W_\lambda$	Trabajo de una determinada longitud de onda.		Operación laplaciana.
<b>Wb</b>	Weber ( $1 \text{ Wb} = 1 \text{ V} \cdot \text{s} = 1 \text{ N} \cdot \text{m/A}$ ).		

$\delta$ .....	Ángulo. Ángulo de desviación del prisma óptico. Constante de una red de difracción (1/N). Desplazamiento del rayo luminoso en láminas planoparalelas. Desviación en un prisma. Profundidad de penetración de la OEM.	$\langle \rho \rangle$ .....	Densidad volumétrica media de momento lineal.
$\delta_m$ .....	Ángulo de mínima desviación en un prisma.	$\rho_r$ .....	Densidad relativa.
$\partial$ .....	Derivada parcial.	$\Sigma$ .....	Sumatorio.
$\mathcal{E}$ .....	Fuerza electromotriz.	$\sigma$ .....	Constante de tensión superficial. Densidad superficial. Módulo de Poisson. Sección eficaz del número atómico. Sensibilidad de la balanza.
$\mathcal{E}$ .....	Factor de la FEM.	$\tau$ .....	Tiempo. Volumen.
$\varepsilon$ .....	Ángulos de incidencia, reflexión y refracción. Base de los ln. Constante dieléctrica de un medio. Error absoluto. Error relativo.	$\tau$ .....	Vector unitario en la dirección de la tangente.
$\varepsilon'$ .....	Constante dieléctrica relativa al vacío.	$v$ .....	Valencia química.
$\mathcal{E}_e$ .....	Fuerza electromotriz, eficaz.	$\phi$ .....	Diámetro. Flujo. Flujo luminoso de un foco puntual.
$\varepsilon_0$ .....	Constante dieléctrica del vacío ( $1/4 \pi 9 \times 10^9 \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$ ).	$\varphi$ .....	Ángulo. Convergencia de un sistema óptico. Coordenada polar plana, cilíndrica y esférica. Corrección de fase o fase inicial.
$\eta$ .....	Coefficiente de viscosidad. Rendimiento.	$\Phi_\lambda$ .....	Flujo de energía o flujo radiante. Flujo radiante de la ECM para una determinada $\lambda$ . Flujo reflejado para las OEM y una $\lambda$ determinada.
$\boldsymbol{\eta}$ .....	Vector unitario en la dirección de la normal.	$\Psi$ .....	Función de onda dependiente del tiempo.
$\theta$ .....	Ángulo. Coordenada esférica. Dimensión de la temperatura.	$\Psi$ .....	Elongación de la onda. Función de onda.
$\chi$ .....	Susceptibilidad eléctrica.	$\Psi^*$ .....	Función de onda conjugada.
$\chi_M$ .....	Susceptibilidad magnética.	$\Psi_0$ .....	Amplitud de onda.
$\lambda$ .....	Constante radiactiva. Densidad lineal. Longitud de onda o período espacial.	$\Omega$ .....	Ohmio ( $1 \Omega = 1 \text{ V/A}$ ).
$\lambda_C$ .....	Longitud de onda Compton.	$\omega$ .....	Ángulo sólido. Pulsación o frecuencia angular.
$\lambda_0$ .....	Longitud de onda de la luz en el vacío.	$\boldsymbol{\omega}$ .....	Velocidad angular.
$\mu$ .....	Coefficiente de absorción. Como prefijo es micro... ( $10^{-6}$ ).	$\dot{a}$ .....	Derivada de $a$ respecto del tiempo.
$\mu$ .....	Densidad lineal y superficial. Factor de amplificación de una válvula. Masa reducida. Mesón, partícula. Micra ( $10^{-6} \text{ m}$ ). Movilidad de los portadores de carga. Velocidad de propulsión de los gases.	$\ddot{a}$ .....	Derivada segunda de $a$ respecto del tiempo.
$\mu'$ .....	Permeabilidad relativa al vacío.	$\bar{b}$ .....	Antipartícula de $b$ .
$\mu_0$ .....	Permeabilidad del vacío ( $4\pi/10^7 \text{ N/A}^2$ ).	$\mathbf{0}$ .....	Vector nulo.
$\mu_B$ .....	Magnetón de Bohr ( $9,282 \times 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ ).	$^\circ$ .....	Grado.
$\mu_d$ .....	Coefficiente dinámico de rozamiento.	' .....	Minutos de arco.
$\mu_e$ .....	Coefficiente estático de rozamiento.	" .....	Segundos de arco.
$\mu_s$ .....	Momento magnético de spin.	- .....	Fasor de una magnitud en alternas.
$\nu$ .....	Frecuencia. Neutrino. Poder dispersivo o número de Abbe. Vida media.	% .....	Tanto por ciento.
$\bar{\nu}$ .....	Frecuencia espectroscópica.	[ ] .....	Concentración. Ecuación de dimensiones. Magnitud compleja.
$\pi$ .....	Número (3,141 592 654).	.....	Módulo de un vector. Valor absoluto de una cantidad.
$\pi^0, \pi^+, \pi^-$ .....	Piones neutro, positivo y negativo.	· .....	Producto escalar.
$\rho$ .....	Coefficiente de resistencia. Coordenada cilíndrica. Densidad volumétrica. Radio de curvatura.	× .....	Producto vectorial.
		≥ .....	Mayor o igual.
		≤ .....	Menor o igual.
		⇒ .....	Entonces, luego, por tanto, implica que...
		⇔ .....	Equivalente.
		$\langle a \rangle \Leftrightarrow \bar{a}$ .....	Media o valor promedio de $a$ .
		∈ .....	Pertenece a...
		$\nabla$ .....	Operador gradiente.
		$\Delta \Leftrightarrow \nabla^2 \Leftrightarrow \nabla^2$ ..	Operador Laplaciana.
		∫ .....	Integral.
		∫ <sub>C</sub> .....	Integral.
		∫ <sub>C</sub> .....	Integral de línea cerrada.
		∫ <sub>A</sub> .....	Integral de área.
		∫ <sub>A</sub> .....	Integral de área cerrada.
		∫ <sub>V</sub> .....	Integral de volumen.