CINEMÁTICA:
MOVIMIENTO TRIDIMENSIONAL:
TIRO PARABÓLICO

Encontrar el radio de curvatura en el punto más alto de la trayectoria de un proyectil disparado haciendo un ángulo α con la horizontal.

Solución: **I.T.I. 93**

Texto solución

Un pateador debe golpear el balón desde un punto a 36 m de la portería y quiere pasarlo por encima del travesaño de ésta, el cual está a 3.05 m de altura. Cuando chuta la pelota sale con una velocidad de 20.0 m/s formando un ángulo de 53˚ con la horizontal. a) ¿Por cuánto salva la pelota el travesaño de la portería? b) ¿Lo hace mientras está subiendo o bajando?

Solución: **I.T.T. 95**

Texto solución

Un barco enemigo está en el lado este de una isla montañosa como se muestra en la figura. El barco enemigo puede maniobrar dentro de los 2500 m de distancia horizontal a la montaña de la isla que tiene 1800 m de altura y puede lanzar proyectiles a una velocidad inicial de 250 m/s. Si la orilla de la playa al oeste está a 300 m horizontalmente de la montaña ¿cuáles son las posiciones en el lado oeste en las que un barco estaría a salvo del barco enemigo?

Solución: **I.T.T. 95**

Texto solución

De un cañón fueron disparados dos proyectiles seguidos con una velocidad v_0 = 250 m/s y un ángulo con la horizontal de 60° y 45° respectivamente. Hallar el intervalo de tiempo entre los disparos que asegure que los proyectiles choquen.

Solución: **I.T.T. 97, 03**

Tomemos el origen de coordenadas en la posición del cañón y pongamos a cero nuestro cronómetro en el instante en que se lanza el primer proyectil. Llamemos τ al intervalo de tiempo transcurrido entre el lanzamiento de los dos proyectiles. Las ecuaciones de movimiento de éstos serán:

$$x_1(t) = v_0 \cos\theta_1 t \qquad y_1(t) = v_0 \operatorname{sen}\theta_1 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$x_2(t) = v_0 \cos\theta_2 (t-\tau) \qquad y_2(t) = v_0 \operatorname{sen}\theta_2 (t-\tau) - \frac{1}{2} g (t-\tau)^2$$

Si en el instante t_{choque} se produce el choque entre los dos proyectiles tenemos que:

$$x_1(t_{choque}) = x_2(t_{choque}) \quad \Rightarrow \quad (t_{choque} - \tau) = \left(\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}\right) t_{choque}$$

$$y_1(t_{choque}) = y_2(t_{choque}) \quad \Rightarrow \quad v_0 \operatorname{sen}\theta_2 (t_{choque} - \tau) - \frac{1}{2} g (t_{choque} - \tau)^2 = v_0 \operatorname{sen}\theta_1 t_{choque} - \frac{1}{2} g t_{choque}^2$$

Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas t_{choque} y τ. Sustituyendo la primera ecuación en la segunda tenemos que:

$$v_0 \operatorname{sen}\theta_2 \left(\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}\right) t_{choque} - \frac{1}{2} g \left(\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}\right)^2 t_{choque}^2 = v_0 \operatorname{sen}\theta_1 t_{choque} - \frac{1}{2} g t_{choque}^2$$

Esta ecuación tiene dos soluciones. La solución: $t_{choque} = 0$, que sustituida en la primera ecuación del sistema de ecuaciones conduce a $\tau = 0$, no es la solución que nos interesa, ya que nos está diciendo algo tan trivial como que si lanzamos los dos proyectiles sin intervalo de tiempo entre sus lanzamientos los dos van a chocar en el instante inicial del lanzamiento. La solución que nos interesa es la segunda:

$$t_{choque} = \left(\frac{2v_0}{g}\right) \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2) \left(\frac{\cos\theta_2}{\cos^2\theta_2 - \cos^2\theta_1}\right) = 37 \text{ s}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tau = \left(\frac{2v_0}{g}\right) \left[\frac{\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)}{\cos\theta_2 + \cos\theta_1}\right] = 11 \text{ s}}$$

Una pelota resbala por un tejado que forma un ángulo de 30º con la horizontal y al llegar a su extremo queda en libertad con una velocidad de 10 m/s. La altura del edificio es de 60 m y la anchura de la calle a la que vierte el tejado es de 30 m. Calcular: a) las ecuaciones paramétricas de la trayectoria, b) componentes cartesianas de la velocidad, c) ¿llegará directamente al suelo o chocará antes con la pared?, d) posición en la que se encuentra cuando la velocidad forma un ángulo de 45º con la horizontal.

Solución: I.T.I. 00

Texto solución

Desde el pie de un plano inclinado un ángulo α sobre la horizontal se dispara un proyectil con velocidad inicial v_0 y ángulo de tiro β ($\beta > \alpha$). a) ¿Cuál es el alcance R medido a lo largo del plano inclinado? b) Valor de R para $\alpha = 0$.

Solución: **I.T.I. 93, 96, 97**

Texto solución

Se dispara un proyectil de manera que su alcance horizontal es 3 veces su altura máxima. ¿Cuál es el ángulo de tiro?. ¿Dónde es mínimo el radio de curvatura?

Solución: **I.T.I. 94, 98, 01, 03, 04, I.T.T. 01**

Si ponemos el origen de coordenadas en la posición de lanzamiento, y en ese momento ponemos a cero el cronómetro, las ecuaciones del movimiento parabólico del proyectil serán:

$$x(t) = v_0 \cos\theta\, t \qquad v_x(t) = v_0 \cos\theta$$

$$y(t) = v_0 \operatorname{sen}\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad v_y(t) = v_0 \operatorname{sen}\theta - gt$$

En el momento en que la altura es máxima ($t = t_a$):

$$v_y(t_a) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 \operatorname{sen}\theta - g t_a = 0 \quad \Rightarrow \quad t_a = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$$

$$y_{máx.} = y(t_a) = v_0 \operatorname{sen}\theta\, t_a - \frac{1}{2} g t_a^2 = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{g}$$

En el momento en que regresa al suelo ($t = t_b$) el alcance R será:

$$y(t_b) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 \operatorname{sen}\theta\, t_b - \frac{1}{2} g t_b^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_b = \frac{2 v_0 \operatorname{sen}\theta}{g} \quad , \quad \cancel{t_b = 0}$$

(La solución $t_b = 0$ representa el instante de lanzamiento y no el instante de llegada al suelo que es el que nos interesa)

$$R = x(t_b) = v_0 \cos\theta\, t_b = \frac{2 v_0^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{g}$$

Si imponemos la condición que nos dan:

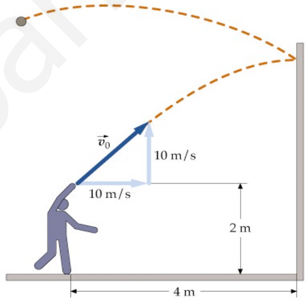
$$R = 3 y_{máx.} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = 53^{\circ} 8'}$$

Para una trayectoria curvilínea el radio de curvatura, el módulo de la velocidad y la aceleración normal están relacionados por la expresión:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{v^2}{a_n}$$

En el vértice de la parábola se verifica que la velocidad del móvil es mínima, ya que se anula su componente vertical, mientras que la horizontal permanece constante en todo el movimiento. También se verifica en dicho punto que la aceleración normal adquiere su máximo valor: $a_n = g$, por lo que al combinar ambos factores podemos deducir **<u>que el punto de mínimo radio de curvatura de la trayectoria parabólica es su vértice</u>**.

Una muchacha que está a d = 4m de una pared vertical lanza contra ella una pelota. La pelota sale de su mano a h = 2m por encima del suelo con una velocidad inicial $\vec{v} = 10\hat{i} + 10\hat{j}$ m/s. Cuando la pelota choca en la pared se invierte la componente horizontal de su velocidad mientras que permanece sin variar su componente vertical. ¿Dónde caerá la pelota al suelo?



Solución: **I.T.I. 01, 04, I.T.T. 01**

Si colocamos el origen de coordenadas en la posición de la persona a ras del suelo, y en el instante del lanzamiento ponemos en marcha el cronómetro, las ecuaciones del movimiento de la pelota en su movimiento antes de chocar con la pared serán:

$$t_0 = 0\ , \quad x_0 = 0\ , \quad y_0 = h = 2\,\text{m}\ , \quad v_{0,x} = 10\,\text{m/s}\ , \quad v_{0,y} = 10\,\text{m/s}$$

$$x(t) = v_{0,x}\,t\ , \quad y(t) = h + v_{0,y}\,t - \frac{1}{2}gt^2\ , \quad v_x(t) = v_{0,x}\ , \quad v_y(t) = v_{0,y} - gt$$

En el instante $t = t_a$ la pelota choca contra la pared:

$$x(t_a) = d = 4\,\text{m} \quad \Rightarrow \quad v_{0,x}\,t_a = d \quad \Rightarrow \quad t_a = \frac{d}{v_{0,x}} = 0.4\,\text{s}$$

$$y(t_a) == h + v_{0,y}\,t_a - \frac{1}{2}gt_a^2 = 5.216\ \text{m}$$

$$v_x(t_a) = v_{0,x} = 10\ \text{m/s}\ , \quad v_y(t_a) = v_{0,y} - gt_a = v_{0,y} - \frac{gd}{v_{0,x}} = 6.08\ \text{m/s}$$

En el choque la componente horizontal de la velocidad cambia de signo, y a partir de ese instante la pelota realiza un nuevo movimiento parabólico donde:

$$t_0' = t_a = 0.4\,\text{s}\ , \quad x_0' = d = 4\,\text{m}\ , \quad y_0' = y(t_a) = 5.216\,\text{m}$$

$$v_{0,x}' = -10\,\text{m/s}\ , \quad v_{0,y}' = 6.08\,\text{m/s}$$

$$x'(t) = x'_0 + v'_{0,x}\left(t - t_a\right), \quad y'(t) = y'_0 + v'_{0,y}\left(t - t_a\right) - \frac{1}{2}g\left(t - t_a\right)^2$$

$$v'_x(t) = v'_{0,x}, \quad v'_y(t) = v'_{0,y} - g\left(t - t_a\right)$$

En el instante $t = t_b$ en que llegue al suelo:

$$y'\left(t_b\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad y'_0 + v'_{0,y}\left(t_b - t_a\right) - \frac{1}{2}g\left(t_b - t_a\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_b = 2.224\,\mathrm{s}$$

$$\Rightarrow \quad x'\left(t_b\right) = x'_0 + v'_{0,x}\left(t_b - t_a\right) = \boxed{-14.24\,\mathrm{m}}$$

La pelota golpea el suelo 18.24 m a la izquierda de la pared.
De no existir la pared, el movimiento de la pelota sería una parábola. Dadas las condiciones que se dan en el impacto de la pelota con la pared (inversión de la componente horizontal de la velocidad), el efecto de ésta sobre la trayectoria es doblarla como si se obtuviese la imagen especular de la misma, no afectando al movimiento vertical. Se puede comprobar esto verificando que si la pelota pudiese atravesar la pared caería a 18.24 m a la derecha de ésta.

Un transporte supersónico está volando horizontalmente a una altura de 20 km y con una velocidad horizontal de 2500 km/h cuando se desprende un motor. a) ¿Cuánto tardará el motor en chocar contra el suelo? b) ¿A qué distancia horizontal está el motor de donde se produjo el desprendimiento cuando choca contra el suelo? c) ¿A qué distancia se encuentra el motor del transporte en dicho momento? Despreciar la resistencia del aire.

Solución: I.T.I. 94

Texto solución

Un bombardero vuela horizontalmente a una altura de 1.2 km con una velocidad de 180 km/h. a) ¿Cuánto tiempo antes de que el avión esté sobre el objetivo deberá soltar la bomba? b) ¿Cuál es la velocidad de la bomba cuando llega a tierra? c) ¿Cuál es la velocidad de la bomba 10 s después de soltarla? d) ¿Cuál es la velocidad de la bomba cuando se encuentra a 200 m de altura? e) ¿Cuál es el ángulo que forma con el eje horizontal la velocidad de la bomba al llegar al suelo? f) ¿Cuál es la distancia horizontal recorrida por la bomba?

Solución: I.T.I. 93

Texto solución

Un bombardero vuela horizontalmente a una altura de 1.2 km con una velocidad de 360 km/h. a) ¿Cuánto tiempo antes de que el avión esté sobre el objetivo deberá soltar la bomba?

b) ¿Cuál es la velocidad de la bomba cuando llega a tierra? c) ¿Cuál es la distancia horizontal recorrida por la bomba?

Solución: I.T.I. 95

Texto solución

Un aeroplano vuela horizontalmente a una altura h de 1 km y con una velocidad de 200 km/h. Deja caer una bomba que debe dar en un barco que viaja en el mismo sentido a una velocidad de 20 km/h. Demostrar que la bomba debe dejarse caer cuando la distancia d horizontal entre el aeroplano y el barco es de 715 m. Resolver el mismo problema para el caso en el cual el barco se está moviendo en sentido opuesto.

Solución: I.T.I. 99, 02, 05, I.T.T. 99, 02, 05

Coloquemos nuestro origen de coordenadas a nivel del mar, justo debajo del aeroplano cuando éste suelta la bomba, el eje X horizontal, con el mismo sentido que la velocidad v_a del aeroplano, y el eje Y vertical hacia arriba. Si ponemos en marcha el cronómetro cuando se suelta la bomba, las ecuaciones del movimiento para ésta y para el barco serán:

$$\left.\begin{array}{r} x_{bomba}(t) = v_a t \\ y_{bomba}(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{array}\right\} \qquad x_{barco}(t) = d + v_{barco}\, t$$

El tiempo t_{mar} que tarda la bomba en llegar a nivel del mar será:

$$y_{bomba}(t_{mar}) = 0 \quad \Rightarrow \quad h - \frac{1}{2} g t_{mar}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{mar} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 14.29 \text{ s}$$

Para que incida en ese momento en el barco se debe de cumplir que:

$$x_{bomba}(t_{mar}) = x_{barco}(t_{mar}) \quad \Rightarrow \quad v_a t_{mar} = d + v_{barco}\, t_{mar}$$

$$\Rightarrow \quad d = (v_a - v_{barco})\, t_{mar} = (v_a - v_{barco})\sqrt{\frac{2h}{g}} = \boxed{714.3 \text{ m}}$$

Esta ecuación para la distancia es válida para cualquier velocidad del barco a lo largo del eje X (dirección de movimiento del aeroplano). En este primer caso v_{barco} = 20 km/h, ya que se mueve en el sentido positivo del eje X (mismo sentido de movimiento que el aeroplano). Cuando el barco se mueve en sentido opuesto $v'_{barco} = -20 \text{ km/h}$, y en este caso tenemos para la nueva distancia:

$$d' = \left(v_a - v'_{barco}\right)\sqrt{\frac{2h}{g}} = \boxed{873.0\ \text{m}}$$

Un proyectil es disparado haciendo un ángulo de 35°. Llega al suelo a una distancia de 4 km del cañón. Calcular: a) la velocidad inicial, b) el tiempo de vuelo, c) la altura máxima, d) la velocidad en el punto de altura máxima.

Solución: I.T.I. 99, 02, 05, I.T.T. 99, 02, 05

Si colocamos el origen de coordenadas en la posición inicial del proyectil, ponemos a cero el cronómetro en dicho momento y orientamos el eje X horizontal y el eje Y vertical de forma que la velocidad inicial esté contenida en el plano XY, tenemos que las ecuaciones del movimiento parabólico serán:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cos\theta\, t \\ y(t) &= v_0 \operatorname{sen}\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} v_x(t) &= v_0 \cos\theta \\ v_y(t) &= v_0 \operatorname{sen}\theta - g t \end{aligned}\right\}$$

a) Cuando llega al suelo, $t = t_{vuelo}$, la altura del proyectil es nula:

$$y(t_{vuelo}) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 \operatorname{sen}\theta\, t_{vuelo} - \frac{1}{2} g t_{vuelo}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{vuelo} = \frac{2 v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$$

Sustituyendo este tiempo en la coordenada x del proyectil obtenemos el alcance R:

$$R = x(t_{vuelo}) = v_0 \cos\theta\, t_{vuelo} = \frac{2 v_0^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}2\theta}{g}$$

$$\Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{gR}{\operatorname{sen}2\theta}} = \boxed{204\ \text{m/s}}$$

b) El tiempo de vuelo será: $t_{vuelo} = \dfrac{2 v_0 \operatorname{sen}\theta}{g} = \boxed{23.9\ \text{s}}$

c) En el punto de altura máxima la componente vertical de la velocidad se anula, entonces en dicho momento:

$$v_y(t_{máx.alt.}) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 \operatorname{sen}\theta - g t_{máx.alt.} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{máx.alt.} = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$$

La máxima altura del proyectil será:

$$h = y(t_{máx.alt}) = v_0 \operatorname{sen}\theta\, t_{máx.alt} - \frac{1}{2} g t_{máx.alt}^2 = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g} = \boxed{700\ \text{m}}$$

d) La velocidad en el momento de máxima altura tendrá, como hemos comentado, sólo componente x:

$$v_x\left(t_{máx.alt.}\right) = v_0 \cos\theta = \boxed{167\ \mathrm{m/s}}$$

Se dispara un proyectil con una velocidad de 100 m/s y un ángulo de 60º con la horizontal. Calcular: a) el alcance horizontal, b) la altura máxima, c) el tiempo de vuelo, d) la velocidad y altura después de 10 s. Calcular en función del tiempo: e) la velocidad y su módulo, f) la aceleración, g) las aceleraciones tangencial y normal.

Solución: I.T.I. 96

Texto solución

Un proyectil es disparado con una velocidad de 600 m/s haciendo un ángulo de 60º con la horizontal. Calcular: a) el alcance horizontal, b) la altura máxima, c) la velocidad y altura después de 30 s, d) la velocidad y el tiempo cuando el proyectil se encuentra a 10 km de altura.

Solución: I.T.I. 93, 99, 02, 05, I.T.T. 99, 02, 05

Si colocamos el origen de coordenadas en la posición inicial del proyectil, ponemos a cero el cronómetro en dicho momento y orientamos el eje X horizontal y el eje Y vertical de forma que la velocidad inicial esté contenida en el plano XY, tenemos que las ecuaciones del movimiento parabólico serán:

$$\left.\begin{array}{r} x(t) = v_0 \cos\theta\, t \\ y(t) = v_0 \operatorname{sen}\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} v_x(t) = v_0 \cos\theta \\ v_y(t) = v_0 \operatorname{sen}\theta - g t \end{array}\right\}$$

a) Cuando llega al suelo, $t = t_{vuelo}$, la altura del proyectil es nula:

$$y\left(t_{vuelo}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 \operatorname{sen}\theta\, t_{vuelo} - \frac{1}{2} g t_{vuelo}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{vuelo} = \frac{2 v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$$

Sustituyendo este tiempo en la coordenada x del proyectil obtenemos el alcance R:

$$R = x\left(t_{vuelo}\right) = v_0 \cos\theta\, t_{vuelo} = \frac{2 v_0^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g} = \boxed{31.8\ \mathrm{km}}$$

b) En el punto de altura máxima la componente vertical de la velocidad se anula, entonces en dicho momento:

$$v_y\left(t_{máx.alt.}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 \operatorname{sen}\theta - g t_{máx.alt.} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{máx.alt.} = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$$

La máxima altura del proyectil será:

$$h = y\left(t_{máx.alt}\right) = v_0 \operatorname{sen}\theta \, t_{máx.alt} - \frac{1}{2} g t^2_{máx.alt} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g} = \boxed{13.8 \text{ km}}$$

c) Para $t_1 = 30$ s tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x(t_1) = v_0 \cos\theta \, t_1 = \boxed{9.00 \text{ km}} \\ y(t_1) = v_0 \operatorname{sen}\theta \, t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = \boxed{11.2 \text{ km}} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} v_x(t_1) = v_0 \cos\theta = \boxed{300 \text{ m/s}} \\ v_y(t_1) = v_0 \operatorname{sen}\theta - g t_1 = \boxed{226 \text{ m/s}} \end{array}\right\}$$

d) Llamemos t_h al instante de tiempo en el que el proyectil se encuentra a $h = 10$ km de altura:

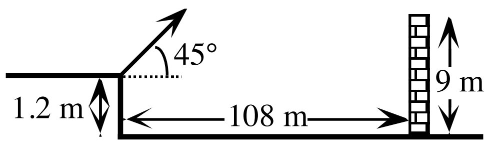
$$y(t_h) = h \quad \Rightarrow \quad v_0 \operatorname{sen}\theta \, t_h - \frac{1}{2} g t_h^2 = h$$

$$\Rightarrow \quad t_h = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta \pm \sqrt{\left(v_0 \operatorname{sen}\theta\right)^2 - 2gh}}{g} = \left\{\begin{array}{l} t_{h,1} = \boxed{25.3 \text{ s}} \\ t_{h,2} = \boxed{80.8 \text{ s}} \end{array}\right.$$

Sustituyendo en las ecuaciones de la velocidad:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{v}\left(t_{h,1}\right) = \left(300, 272\right) \text{m/s} \quad , \quad \vec{v}\left(t_{h,2}\right) = \left(300, -272\right) \text{m/s} \\ v\left(t_{h,1}\right) = v\left(t_{h,2}\right) = 405 \text{ m/s} \end{array}}$$

Se lanza una pelota desde una altura de 1.2 m por encima del suelo, formando un ángulo de 45˚ con la horizontal y con velocidad tal que el alcance horizontal hubiera sido 120 m. A la distancia de 108 m del lugar de lanzamiento se encuentra una valla de 9 m de altura ¿Pasará la pelota por encima de la valla?



Solución: **I.T.I. 94, 99, 02, 05, I.T.T. 99, 02, 05**

Si colocamos el origen de coordenadas a ras del suelo cuando es lanzado el proyectil, ponemos a cero el cronómetro en dicho momento y orientamos el eje X horizontal y el eje Y vertical de forma que la velocidad inicial esté contenida en el plano XY, tenemos que las ecuaciones del movimiento parabólico serán:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cos\theta\, t \\ y(t) &= v_0 \operatorname{sen}\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} v_x(t) &= v_0 \cos\theta \\ v_y(t) &= v_0 \operatorname{sen}\theta - g t \end{aligned}\right\}$$

Cuando llega al suelo, $t = t_{vuelo}$, la altura del proyectil es nula:

$$y(t_{vuelo}) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 \operatorname{sen}\theta\, t_{vuelo} - \frac{1}{2} g t_{vuelo}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{vuelo} = \frac{2 v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$$

Sustituyendo este tiempo en la coordenada x del proyectil obtenemos el alcance R:

$$R = x(t_{vuelo}) = v_0 \cos\theta\, t_{vuelo} = \frac{2 v_0^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g}$$

$$\Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{gR}{\operatorname{sen} 2\theta}} = \boxed{34.3 \text{ m/s}}$$

Si llamamos t_{valla} al momento en que el proyectil se ha desplazado horizontalmente hasta la posición de la valla:

$$x(t_{valla}) = d = 108 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad v_0 \cos\theta\, t_{valla} = d \quad \Rightarrow \quad t_{valla} = \frac{d}{v_0 \cos\theta} = 4.45 \text{ s}$$

Comparando la coordenada y del proyectil en dicho momento con la altura h de la valla :

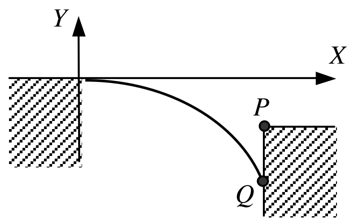
$$y(t_{valla}) = v_0 \operatorname{sen}\theta\, t_{valla} - \frac{1}{2} g t_{valla}^2 = 12 \text{ m} > h \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{SI PASA}}$$

La estrella del decatlón de los juegos olímpicos de Barcelona 92 es un brillante estudiante de física y está atrapado en el tejado de un edificio en llamas. Conservando su sangre fría y con ayuda de lápiz, papel, calculadora y su libro de física favorito (¡si necesitaba libro no debía de ser tan brillante!) tiene que decidir en 15 minutos si brinca al siguiente edificio ya sea corriendo con una velocidad horizontal hasta el borde o usando la técnica del salto de longitud. El edificio contiguo se encuentra a 10 m horizontalmente y 3 m hacia abajo. Su tiempo para una carrera de 100 m es de 10.3 s y su distancia en el salto de longitud es de 7.77 m. (Suponga que salta de forma óptima, es decir formando un ángulo de 45° con la horizontal). Serías tan brillante como este alumno como para decidir (en menos de 15 minutos ¡no lo olvides!) qué método (si es que lo hay) deberías usar para alcanzar el otro edificio a salvo?

Solución: I.T.I. 99, 02, 05, I.T.T. 95, 99, 02, 05

Tomemos el origen de coordenadas en el borde del edificio donde se encuentra el estudiante y pongamos a cero el cronómetro justo cuando salta. Las coordenadas de la terraza del otro edificio serán por lo tanto $x_P = 10 \text{ m}$, $y_P = -3 \text{ m}$.

Si utilizase la técnica de saltar horizontalmente, las ecuaciones de su movimiento serían:



$$\left.\begin{array}{l} x(t) = v_0\, t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g\, t^2 \end{array}\right\} \quad v_0 = \frac{100 \text{ m}}{10.3 \text{ s}} = 9.71 \text{ m/s}$$

En el instante t_Q que llega a la posición horizontal del otro edificio:

$$x(t_Q) = x_P \quad \Rightarrow \quad v_0\, t_Q = x_P \quad \Rightarrow \quad t_Q = \frac{x_P}{v_0}$$

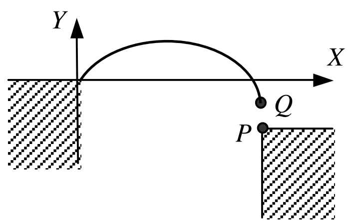
La altura en ese momento será:

$$y(t_Q) = -\frac{1}{2} g\, t_Q^2 = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x_P}{v_0}\right)^2 = -5.20 \text{ m} < y_P$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{NO ES UN MÉTODO VÁLIDO}}$

Si utilizase la técnica del salto de longitud (con un alcance de 7.77 m), las ecuaciones de su movimiento serían:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = v_0 \cos\theta\, t \\ y(t) = v_0 \operatorname{sen}\theta\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \theta = 45^\circ \ , \quad Alcance = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g} \\ \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{Alcance\ g}{\operatorname{sen} 2\theta}} = 8.73 \text{ m/s} \end{array}$$



En el instante t_Q que llega a la posición horizontal del otro edificio:

$$x(t_Q) = x_P \quad \Rightarrow \quad v_0 \cos\theta\, t_Q = x_P \quad \Rightarrow \quad t_Q = \frac{x_P}{v_0 \cos\theta}$$

La altura en ese momento será:

$$y(t_Q) = v_0 \operatorname{sen}\theta\, t_Q - \frac{1}{2} g t_Q^2 = v_0 \operatorname{sen}\theta \left(\frac{x_P}{v_0 \cos\theta}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x_P}{v_0 \cos\theta}\right)^2 = -2.87 \text{ m} > y_P$$

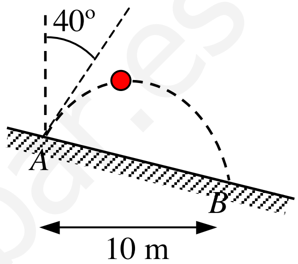
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{ES UN MÉTODO VÁLIDO}}$

Un arquero situado en la ladera de una colina lanza una flecha con una velocidad de 60 m/s formando un ángulo de 15º con la horizontal. Si la colina tiene una inclinación ascendente de 10º calcular la distancia horizontal recorrida por la flecha al impacto con el suelo.

Solución: **I.T.I. 95**

Texto solución

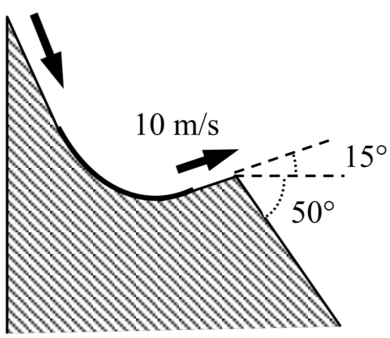
Desde la vertical se deja caer una pelota sobre el punto *A* de un plano inclinado 20º. La dirección del rebote forma un ángulo de 40º con la vertical. Sabiendo que el próximo rebote es en *B*, calcular. a) velocidad de la pelota al salir de *A*, b) tiempo de vuelo de la pelota entre *A* y *B*.



Solución: **I.T.I. 98**

Texto solución

Un esquiador deja una rampa de salto con una velocidad de 10 m/s formando 15° con la horizontal (ver figura). La inclinación del costado de la montaña es de 50° y la resistencia del aire es despreciable. Halle: a) la distancia a la que cae el esquiador a lo largo del costado de la montaña y b) las componentes de la velocidad justamente en el instante en el que cae. (¿En qué forma piensas que podría afectarse el resultado si se incluyera la resistencia del aire? Obsérvese que los esquiadores se inclinan hacia adelante para adoptar una forma aerodinámica con el fin de incrementar su distancia. ¿Porqué se toman ese trabajo?).



Solución: **I.T.T. 92, 96, 00**

Texto solución

Un cazador apunta a una pequeña ardilla que se encuentra en la rama de un árbol. En el momento que él dispara su rifle la ardilla se deja caer de la rama. Demostrar que la ardilla no debió moverse si deseaba seguir viviendo.

Solución: **I.T.I. 96, I.T.T. 96, 00**

Texto solución

Dos partículas se mueven en un campo de gravedad homogéneo con una aceleración igual a g. En el momento inicial ellas se encontraban en un mismo punto y sus velocidades dirigidas horizontalmente y en sentidos opuestos eran v_1 = 3.0 m/s y v_2 = 4.0 m/s. Hallar la distancia entre las partículas en el momento en que sus velocidades son mutuamente perpendiculares.

Solución: **I.T.T. 97, 03**

Si cogemos el eje X positivo en el sentido de movimiento de la partícula 1, tomamos el origen de coordenadas en la posición inicial, y ponemos a cero el cronómetro en dicho instante inicial las ecuaciones de movimiento de las partículas serán:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1(t) = v_1 t & y_1(t) = -\frac{1}{2} g t^2 \\ x_2(t) = -v_2 t & y_2(t) = -\frac{1}{2} g t^2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{ll} v_{1,x}(t) = v_1 & v_{1,y}(t) = -gt \\ v_{2,x}(t) = -v_2 & v_{2,y}(t) = -gt \end{array}\right\}$$

Llamemos $t_\perp$ al instante en que las velocidades de las dos partículas son perpendiculares entre sí. Tenemos que:

$$\vec{v}_1(t_\perp) \perp \vec{v}_2(t_\perp) \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1(t_\perp) \cdot \vec{v}_2(t_\perp) = 0$$

$$\Rightarrow \quad -v_1 v_2 + g^2 t_\perp^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_\perp = \frac{\sqrt{v_1 v_2}}{g}$$

El vector que va de la posición de la partícula 2 a la partícula 1 es:

$$\vec{r}_{12}(t) = \vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t) = \left[x_1(t) - x_2(t)\right]\hat{i} \quad \Rightarrow \quad r_{12}(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

Y en el instante calculado anteriormente la distancia entre las partículas será:

$$d(t_\perp) = r_{12}(t_\perp) = x_1(t_\perp) - x_2(t_\perp) = (v_1 + v_2)t_\perp = \boxed{(v_1 + v_2)\frac{\sqrt{v_1 v_2}}{g} = 2.5 \text{ m}}$$

Un jugador de baloncesto va a lanzar dos tiros libres. El centro de la canasta está a una distancia horizontal de 4.21 m de la línea de falta y a 3.05 m sobre el suelo. En el primer intento, lanza el balón a 35º sobre la horizontal con v_0=4.88 m/s. El balón se suelta a 1.83 m de altura. El tiro falla por mucho. a) ¿Qué altura máxima alcanzo el balón? b) ¿A qué distancia de la línea toca el balón el piso? En el segundo tiro, el balón pasa por el centro de la canasta. El ángulo y el punto de lanzamiento son los mismos. c)¿Con qué velocidad se lanzo? d) En el segundo tiro ¿Qué altura máxima alcanza el balón? En ese punto ¿a que distancia horizontal está la canasta?

Solución: I.T.I. 03, I.T.T. 04

Si ponemos el origen de coordenadas en la posición de lanzamiento del jugador, y en ese momento ponemos a cero el cronómetro, las ecuaciones del movimiento parabólico del balón serán:

$$x(t) = v_0 \cos\theta \, t \qquad\qquad v_x(t) = v_0 \cos\theta$$

$$y(t) = y_0 + v_0 \operatorname{sen}\theta \, t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad\qquad v_y(t) = v_0 \operatorname{sen}\theta - gt$$

a) Las condiciones iniciales para el primer tiro son: y_0 = 1.83 m, v_0 =4.88 m/s, θ = 35º. Cuando alcanza la altura máxima su velocidad vertical se anula:

$$v_y(t_{máx.}) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 \operatorname{sen}\theta - g\,t_{máx.} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{máx.} = 0.29 \text{ s}$$

y el valor de dicha altura será:

$$y_{máx.} = y(t_{máx.}) = y_0 + v_0 \operatorname{sen}\theta \, t_{máx.} - \frac{1}{2} g\, t_{máx.}^2 = \boxed{2.23 \text{ m}}$$

b) Cuando el balón toca el suelo su altura es nula:

$$y(t_{suelo}) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 + v_0 \operatorname{sen}\theta \, t_{suelo} - \frac{1}{2} g\, t_{suelo}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{suelo} = 0.96 \text{ s}$$

En ese instante su posición horizontal será:

$$x(t_{suelo}) = v_0 \cos\theta \, t_{suelo} = \boxed{3.84 \text{ m}}$$

c) Las condiciones iniciales para el segundo tiro son: $y_0 = 1.83$ m, $v_0 =?$ m/s, $\theta = 35^o$.
Si llamamos (x_c, y_c) a las coordenadas del centro de la canasta respecto de la línea de tiros libres y llamamos t_c al momento en que el balón la atraviesa tenemos que:

$$x_c = x(t_c) = v_0 \cos\theta \, t_c \quad \Rightarrow \quad t_c = \frac{x_c}{v_0 \cos\theta}$$

Sustituyendo en la expresión para la coordenada y tenemos que:

$$y_c = y(t_c) = y_0 + v_0 \operatorname{sen}\theta t_c - \frac{1}{2} g t_c^2 = y_0 + \operatorname{tg}\theta \, x_c - \frac{1}{2}\left(\frac{g}{v_0^2 \cos^2\theta}\right) x_c^2$$

Despejando en esta ecuación la velocidad inicial:

$$v_0 = \left(\frac{x_c}{\cos\theta}\right)\sqrt{\frac{g}{2(y_0 - y_c + \operatorname{tg}\theta \, x_c)}} = \boxed{8.65 \text{ m/s}}$$

d) Cuando alcanza la altura máxima su velocidad vertical se anula:

$$v_y(t_{máx.}) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 \operatorname{sen}\theta - g\, t_{máx.} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{máx.} = 0.51 \text{ s}$$

y el valor de dicha altura será:

$$y_{máx.} = y(t_{máx.}) = y_0 + v_0 \operatorname{sen}\theta \, t_{máx.} - \frac{1}{2} g\, t_{máx.}^2 = \boxed{3.09 \text{ m}}$$

En ese momento la distancia horizontal entre la canasta y el balón será:

$$d = x_c - x(t_{máx.}) = x_c - v_0 \cos\theta \, t_{máx.} = \boxed{0.62 \text{ m}}$$