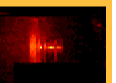
AJB



Lecciones de Física

FUNDAMENTOS FÍSICOS DE LA INGENIERÍA

PROBLEMAS DE EXAMEN RESUELTOS

CURSOS 2006-2007, 2007-2008 y 2008-2009

E.T.S. Agrónomos UCLM (Albacete)

Equipo docente: Antonio J. Barbero, Mariano Hernández, Alfonso Calera

Problemas de exámenes ECTS del curso	2006 / 2007	2007 / 2008	2008 / 2009
CINEMÁTICA	Problema 07.01… pag. 02	Problema 08.01… pag. 04	Problema 09.01… pag. 06
DINÁMICA/TRABAJO Y ENERGÍA	Problema 07.02… pag. 08	Problema 08.02… pag. 10 Problema 08.03… pag. 14	Problema 09.02… pag. 17
MOVIMIENTO ARMÓNICO	Problema 07.03… pag. 22	Problema 08.04… pag. 25	Problema 09.03… pag. 28
ESTÁTICA	Problema 07.04… pag. 31	Problema 08.05… pag. 32	Problema 09.04… pag. 35
SÓLIDO RIGIDO	Problema 07.05… pag. 38 Problema 07.06… pag. 41 Problema 07.07… pag. 45	Problema 08.06… pag. 49 Problema 08.07… pag. 51	Problema 09.05… pag. 57
FLUIDOS	Problema 07.08… pag. 60 Problema 07.09… pag. 63 Problema 07.10… pag. 65	Problema 08.08… pag. 69 Problema 08.09… pag. 71	Problema 09.06… pag. 74 Problema 09.07… pag. 77
TERMODINÁMICA	Problema 07.11… pag. 80 Problema 07.12… pag. 81	Problema 08.10… pag. 84 Problema 08.11… pag. 88	Problema 09.08… pag. 93

www.yoquieroaprobar.es

AJB Lecciones de Física

Un avión vuela horizontalmente a una altura h sobre el suelo, con velocidad constante v_0. En cierto instante deja caer un paquete, y en ese mismo momento un tirador situado exactamente debajo del avión realiza un disparo con el ángulo y velocidad apropiados para impactar en el avión en el mismo momento en que el paquete toque el suelo. Se supone que el rozamiento es despreciable. Usando los datos numéricos que aparecen abajo, se pide:

a) Determinar a qué distancia de la posición del tirador caerá el paquete.

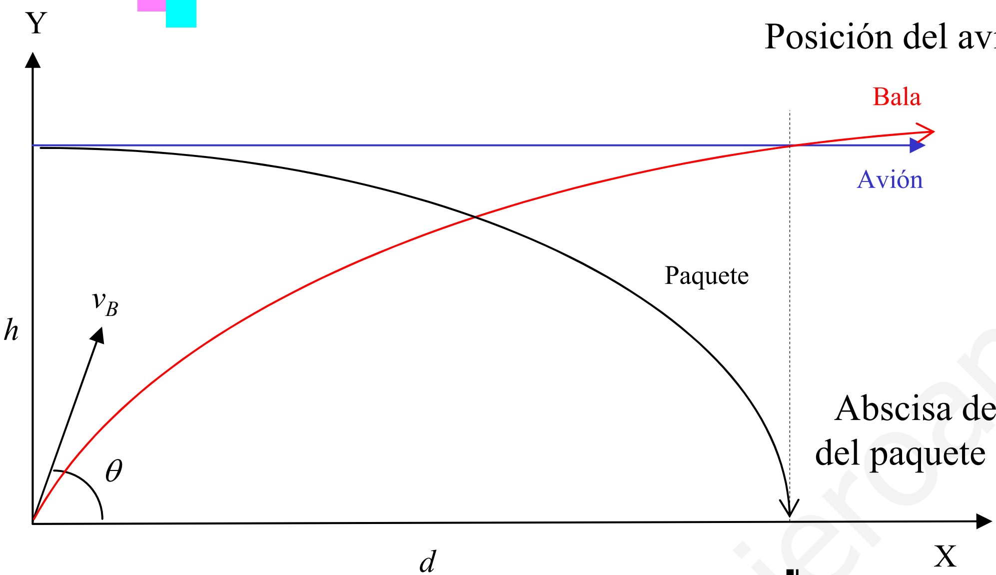
b) La altura del paquete sobre el suelo un segundo antes de estrellarse contra él.

c) Calcular con qué ángulo debe disparar el tirador, y cuál ha de ser la velocidad inicial de la bala para que haga blanco en el avión.

Datos numéricos: $h = 500$ m; $v_0 = 200$ m/s; $g = 9.8$ m/s^2

www.yoquieroaprobar.es

P07.01.EXAMEN A1. CURSO 2006/2007 (CONTINUACIÓN)



Posición del avión como función del tiempo $\begin{cases} x = v_0 t \\ y = h \end{cases}$

Posición del paquete como función del tiempo

$$x = v_0 t \qquad y = h - \frac{1}{2} g\, t^2$$

Ecuación de la trayectoria del paquete (eliminando el tiempo) $\quad y = h - \dfrac{g}{2v_0^2} x^2$

Abscisa del punto de choque del paquete con el suelo ($y = 0$) $\quad x_{(y=0)} = d = \sqrt{\dfrac{2v_0^2 h}{g}} = 2020.3\ \text{m}$

Tiempo que emplea el paquete en caer al suelo: $\quad t_s = \dfrac{d}{v_0}$

Posición del paquete 1 s antes de tocar el suelo ($t = t_s$-1):

$$x = v_0 (t_s - 1)$$
$$y = h - \frac{1}{2} g (t_s - 1)^2 = 94.1\ \text{m}$$

Trayectoria de la bala (son desconocidos θ, v_0)

$$y = x \tan\theta - \frac{g}{2v_B^2 \cos^2\theta} x^2$$

Movimiento vertical de la bala

$$y_B = v_B \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g\, t^2$$
$$v_B \sin\theta = \frac{1}{t_s}\left(h + \frac{1}{2} g\, t_s^2\right)$$

Movimiento horizontal de la bala

$$x_B = v_B \cos\theta\, t$$
$$v_B \cos\theta = \frac{d}{t_s}$$

$$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{v_B \sin\theta}{v_B \cos\theta} = \dfrac{\frac{1}{t_s}\left(h + \frac{1}{2} g\, t_s^2\right)}{d / t_s} = 0.4950 \qquad \theta = 26.3\,^{\circ} \\ v_B = \dfrac{d}{t_s \cos\theta} = 223.2\ \text{m/s} \end{cases}$$

(Nótese que la bala y el paquete están volando el mismo tiempo durante el que recorren la altura h y la distancia horizontal d)

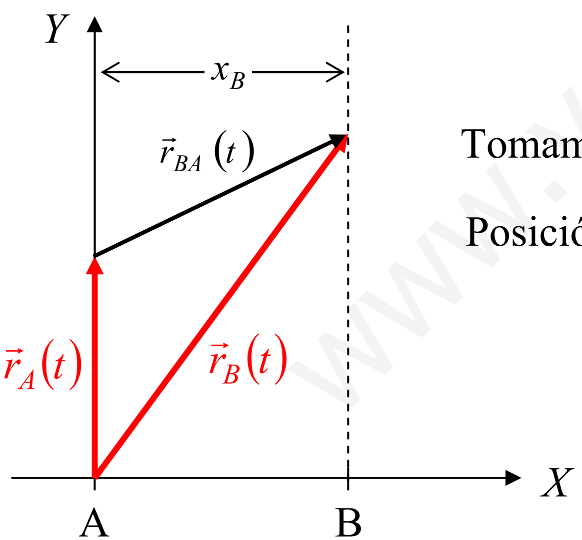
www.yoquieroaprobar.es

Dos pequeños objetos que se encuentran en un suelo horizontal separados por una distancia de 40 m son lanzados en el mismo instante verticalmente hacia arriba con velocidades de 120 y 180 m/s. Calcular la distancia entre los dos objetos cuando el más rápido se encuentra a la máxima altura que puede alcanzar. Si todos los datos se conocen con una precisión del 1%, calcular el error absoluto en el resultado obtenido.

Para facilitar los cálculos, tome g = 10 m/s^2. Se supone ausencia de rozamiento.

Objeto A: v_{0A}

Objeto B: $v_{0B} \; (> v_{0A})$



Tiempo invertido por B en alcanzar la altura máxima: cuando llega a la altura máxima su velocidad es nula

$$v_{0B} - g\, t_B = 0 \qquad t_B = \frac{v_{0B}}{g}$$

Tomamos la posición inicial del objeto A como origen de coordenadas.

Posición de ambos objetos en cualquier instante

$$\vec{r}_A(t) = (0, y_A) \qquad y_A(t) = v_{0A}\, t - \frac{1}{2} g\, t^2$$

$$\vec{r}_B(t) = (x_B, y_B) \qquad y_B(t) = v_{0B}\, t - \frac{1}{2} g\, t^2$$

P08.01. EXAMEN B1. CURSO 2007/2008 (CONTINUACIÓN)

Distancia *AB* en cualquier instante

$$\vec{r}_{BA}(t) = \vec{r}_B(t) - \vec{r}_A(t) = (x_B, y_B - y_A)$$

$$|\vec{r}_{BA}(t)| = +\sqrt{x_B^2 + (y_B - y_A)^2} = +\sqrt{x_B^2 + (v_{0B} - v_{0A})^2 t^2}$$

Cuando $t = t_B$

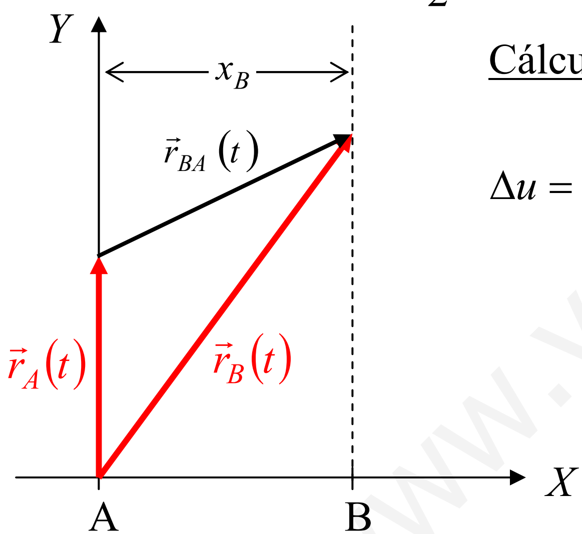
$$y_A(t_B) = v_{0A}\, t_B - \frac{1}{2} g\, t_B^2$$

$$y_B(t_B) = v_{0B}\, t_B - \frac{1}{2} g\, t_B^2$$

$$|\vec{r}_{BA}(t_B)| = +\sqrt{x_B^2 + (v_{0B} - v_{0A})^2 t_B^2}$$

Porcentaje error:		1
		Δ
v_{0A} (m/s) =	120	1,2
v_{0B} (m/s) =	180	1,8
x_B (m) =	40	0,4
g (m/s²) =	10	0,1
t_B (s) =	18	0,36
		Δ
r_{AB} (m) =	1081	76
		7,0%

$$|\vec{r}_{BA}(t_B)| = (1080 \pm 80)\,\mathrm{m}$$



$$t_B = \frac{v_{0B}}{g} \qquad \Delta t_B = \frac{1}{g}\Delta v_{0B} + \frac{v_{0B}}{g^2}\Delta g$$

<u>Cálculo de errores</u> Variable auxiliar $u = x_B^2 + (v_{0B} - v_{0A})^2 t_B^2$

$$\Delta u = \left|\frac{\partial u}{\partial x_B}\right|\Delta x_B + \left|\frac{\partial u}{\partial v_{0B}}\right|\Delta v_{0B} + \left|\frac{\partial u}{\partial v_{0A}}\right|\Delta v_{0A} + \left|\frac{\partial u}{\partial t_B}\right|\Delta t_B$$

$$|\vec{r}_{BA}(t_B)| = \sqrt{u} \qquad \Delta|\vec{r}_{BA}(t_B)| = \left|\frac{\partial\sqrt{u}}{\partial u}\right|\Delta u = \frac{1}{2\sqrt{u}}\Delta u$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_B}\right|\Delta x_B = 2x_B\Delta x_B \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial v_{0B}}\right|\Delta v_{0B} = 2(v_{0B} - v_{0A})t_B^2\,\Delta v_{0B}$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial v_{0A}}\right|\Delta v_{0A} = 2(v_{0B} - v_{0A})t_B^2\,\Delta v_{0A} \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial t_B}\right|\Delta t_B = 2(v_{0B} - v_{0A})^2\, t_B\,\Delta t_B$$

www.yoquieroaprobar.es

La velocidad de una partícula que se mueve en el plano *XY* está dada en función del tiempo por la relación $\vec{v} = 2\,\vec{i} + 24\,t^2\,\vec{j}$ donde *v* está en m/s y *t* en s.

La posición para $t = 0$ es $\vec{r}_0 = \vec{j}$

a) Determine la ecuación de la trayectoria de la partícula y dibuje su gráfica en el intervalo de tiempo entre $t = 0$ y $t = 1$ s.

b) Calcule el vector de posición y la aceleración para $t = 1$ s.

c) Calcule los módulos de las componentes de la aceleración cuando $t = 0.75$.

---

a) Cálculo de vector de posición y trayectoria

$$\vec{r} = \int \vec{v}\,dt + \vec{C} = \int \left(2\,\vec{i} + 24\,t^2\,\vec{j}\right)dt + \vec{C}$$

$$\vec{r} = 2\,t\,\vec{i} + 8\,t^3\,\vec{j} + \vec{C}$$

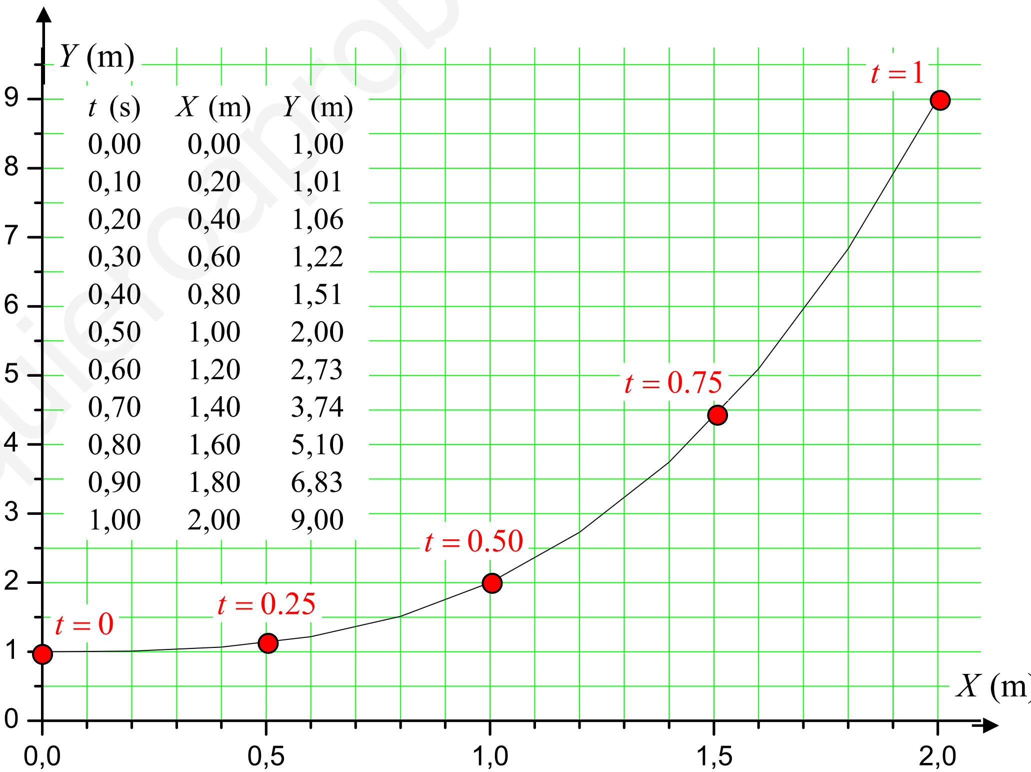
Condición inicial: $t = 0 \rightarrow \vec{r}_0 = \vec{j}$

$$\Rightarrow \vec{C} = \vec{j} \qquad \vec{r} = 2\,t\,\vec{i} + \left(1 + 8\,t^3\right)\vec{j}$$

$$\vec{r} = 2\,t\,\vec{i} + \left(1 + 8\,t^3\right)\vec{j} \qquad \boxed{x(t) = 2t} \qquad y(t) = 1 + 8t^3$$

$$\vec{r} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} \qquad y(t) = 1 + (2t)^3$$

Ecuación trayectoria $\quad y = 1 + x^3$



t (s)	X (m)	Y (m)
0,00	0,00	1,00
0,10	0,20	1,01
0,20	0,40	1,06
0,30	0,60	1,22
0,40	0,80	1,51
0,50	1,00	2,00
0,60	1,20	2,73
0,70	1,40	3,74
0,80	1,60	5,10
0,90	1,80	6,83
1,00	2,00	9,00

www.yoquieroaprobar.es

b) Calcule vector de posición y aceleración para $t = 1$ s.

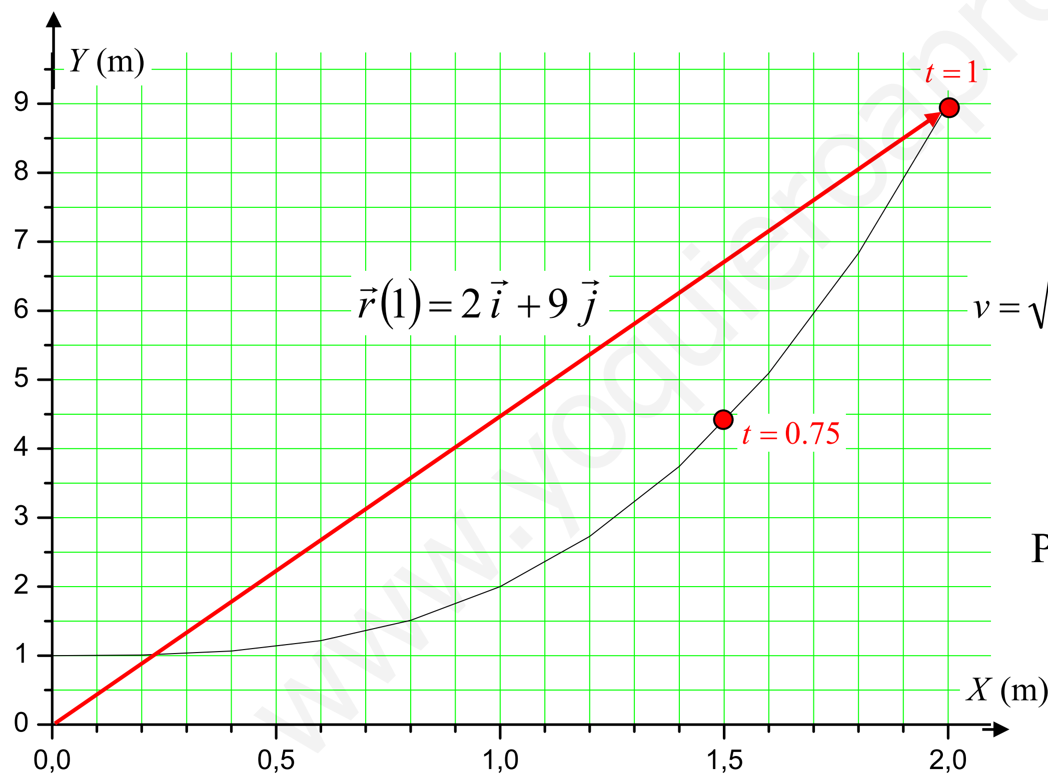
Ecuación trayectoria $y = 1 + x^3$

Posición $\vec{r} = 2\,t\,\vec{i} + \left(1 + 8\,t^3\right)\vec{j}$

Para $t = 1$ s $\quad \vec{r}(1) = 2\,\vec{i} + 9\,\vec{j}$ (m)

Aceleración $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(2\,\vec{i} + 24\,t^2\,\vec{j}\right) \qquad \vec{a} = 48\,t\,\vec{j}$

Para $t = 1$ s $\quad \vec{a}(1) = 48\,\vec{j}$ (m/s^2)



c) Calcule los módulos de las componentes de la aceleración cuando $t = 0.75$.

$$\vec{v} = 2\,\vec{i} + 24\,t^2\,\vec{j}$$

$$v = \sqrt{2^2 + \left(24\,t^2\right)^2} = \sqrt{4 + 576\,t^4} = 2\sqrt{1 + 144\,t^4}$$

Tangencial $\quad a_t = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{576\,t^3}{\sqrt{1 + 144\,t^4}}$

Para $t = 0.75$ s $\quad a_t = 35.61\ \text{m/s}^2$

$$\vec{a} = 48\,t\,\vec{j} \qquad a = 48 \cdot 0.75 = 36\ \text{m/s}^2$$

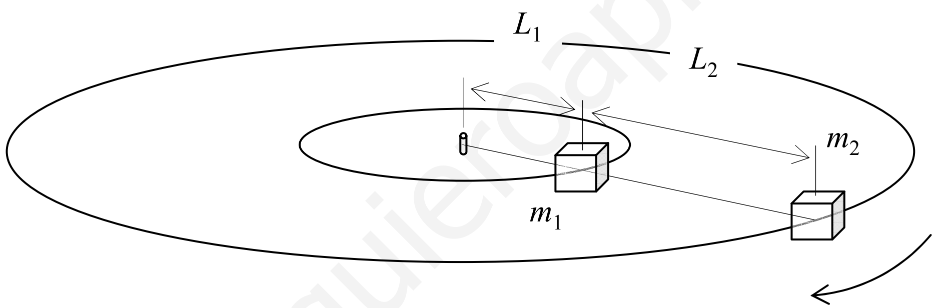
Normal $\quad a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}$

$$a_n = \sqrt{36^2 - 35.61^2} = 5.28\ \text{m/s}^2$$

www.yoquieroaprobar.es

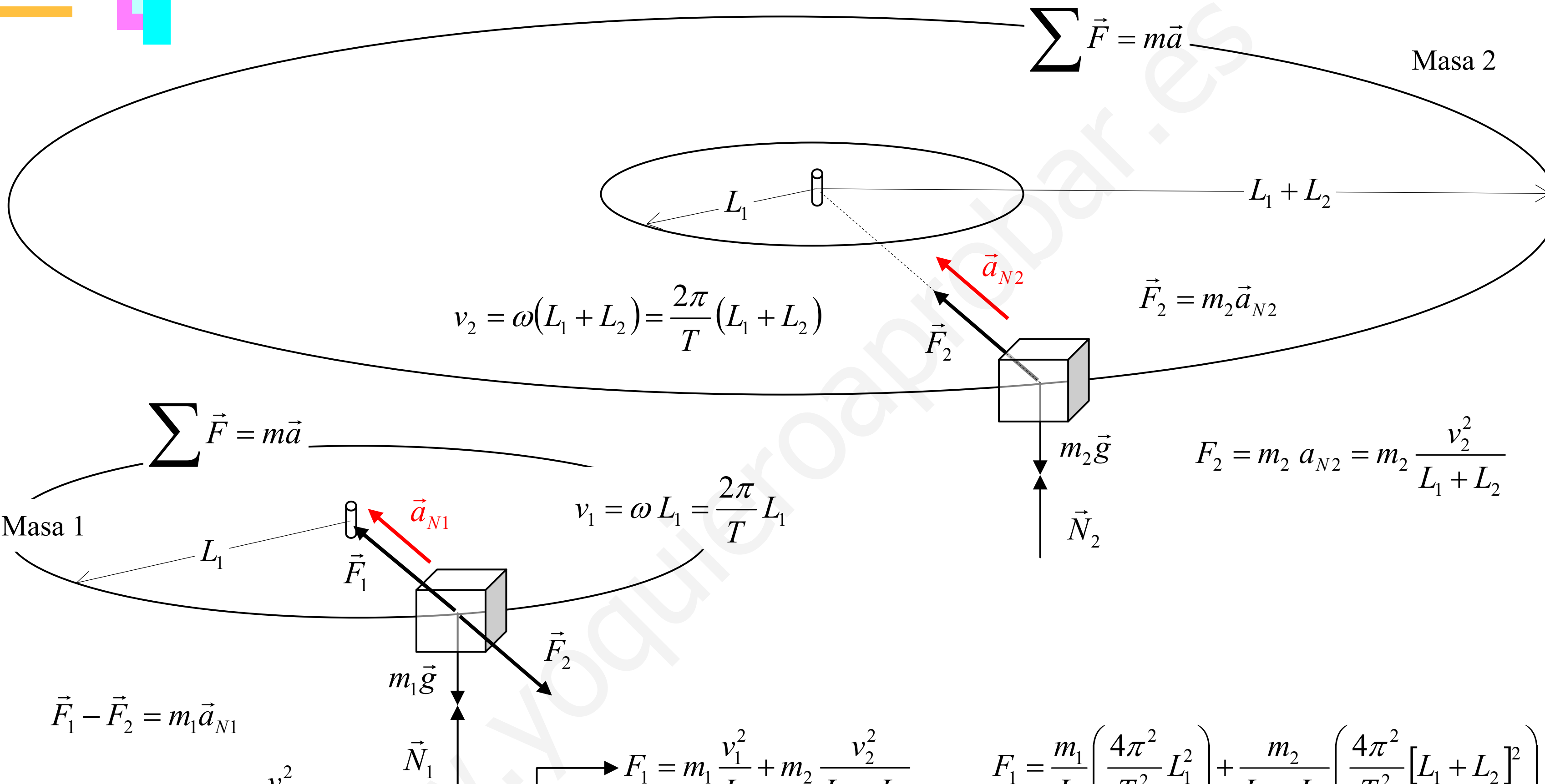
P07.02. EXAMEN A1. CURSO 2006/2007

Un bloque de masa m_1 está sujeto a una cuerda de longitud L_1 fija por un extremo. Este bloque está situado sobre una superficie plana horizontal muy bien pulida, en la que el rozamiento puede considerarse despreciable, y se mueve describiendo una trayectoria circular en torno al punto de sujeción. Un segundo bloque m_2 se une al primero mediante una cuerda de longitud L_2, y se mueve también en trayectoria circular concéntrica con la primera (véase esquema). Dibujar el diagrama fuerzas para cada masa y determinar la tensión en cada una de las cuerdas si el tiempo que los bloques tardan en describir una órbita completa (periodo) es T.



www.yoquieroaprobar.es

P07.02. EXAMEN A1. CURSO 2006/2007 (CONT)



$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F}_2 = m_2\vec{a}_{N2}$$

$$v_2 = \omega(L_1 + L_2) = \frac{2\pi}{T}(L_1 + L_2)$$

$$F_2 = m_2\, a_{N2} = m_2 \frac{v_2^2}{L_1 + L_2}$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$v_1 = \omega\, L_1 = \frac{2\pi}{T} L_1$$

$$\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = m_1\vec{a}_{N1}$$

$$F_1 - F_2 = m\, a_{N1} = m_1 \frac{v_1^2}{L_1}$$

$$\left.\begin{aligned} F_1 - F_2 &= m\, a_{N1} = m_1 \frac{v_1^2}{L_1} \\ F_2 &= m_2\, a_{N2} = m_2 \frac{v_2^2}{L_1 + L_2} \end{aligned}\right\} \rightarrow F_1 = m_1 \frac{v_1^2}{L_1} + m_2 \frac{v_2^2}{L_1 + L_2}$$

$$F_1 = \frac{m_1}{L_1}\left(\frac{4\pi^2}{T^2} L_1^2\right) + \frac{m_2}{L_1 + L_2}\left(\frac{4\pi^2}{T^2}[L_1 + L_2]^2\right)$$

$$F_1 = \frac{4\pi^2}{T^2}\left[m_1 L_1 + m_2(L_1 + L_2)\right]$$

$$F_2 = \frac{4\pi^2}{T^2} m_2 (L_1 + L_2)$$

www.yoquieroaprobar.es

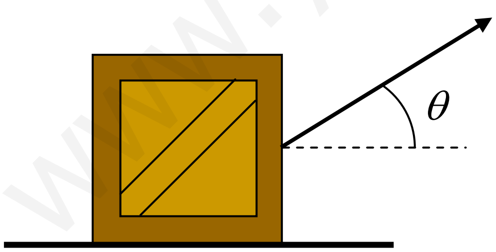
Tenemos un cajón de peso W situado sobre suelo horizontal. Pretendemos mover el cajón tirando de una cuerda enganchada en su parte anterior, que forma un ángulo θ con la horizontal. Los coeficientes de rozamiento estático y dinámico entre cajón y suelo son μ_E y μ_D respectivamente.

a) Determinar la fuerza mínima que debe aplicarse al tirar de la cuerda de manera que el cajón empiece a moverse. Dibuje el diagrama de sólido libre para el cajón a punto de moverse.

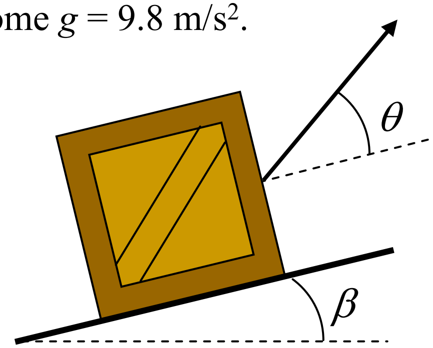
b) Si se tira de la cuerda con una fuerza 10% mayor que la calculada en el apartado anterior, determinar la aceleración del cajón, así como el trabajo realizado por esta fuerza y el trabajo disipado por la fuerza de rozamiento cuando se haya desplazado una distancia L. Dibuje el diagrama de sólido libre.

c) Repita los apartados a) y b) suponiendo que el cajón no se encuentra situado sobre suelo horizontal, sino que queremos moverlo hacia arriba en un plano inclinado β sobre la horizontal. El ángulo θ es en este caso el ángulo que la cuerda forma con la superficie del plano inclinado..

Exprese los resultados numéricos en unidades S.I. Tome $g = 9.8$ m/s^2.



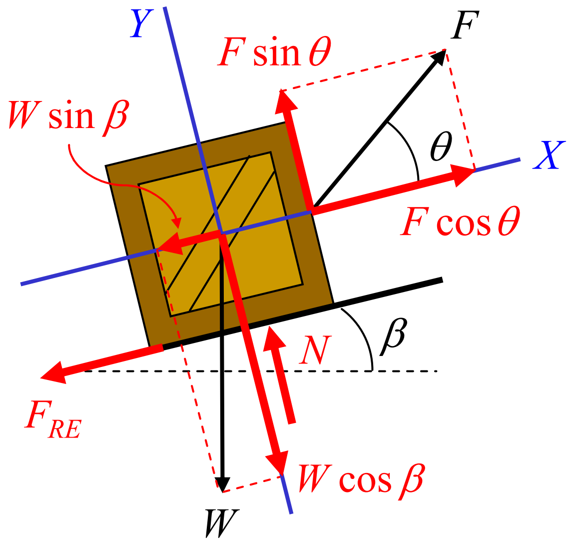
Apartados a) y b)



Apartado c)

AJB
Lecciones de Física

Haremos todos los cálculos necesarios siguiendo el enunciado del apartado c), cuando el cajón está situado sobre un plano inclinado β, y luego particularizaremos para el caso $\beta = 0º$, lo que nos dará el resultado para el caso de suelo horizontal.



Cajón a punto de moverse

La fuerza de rozamiento estática es $F_{RE} \leq \mu_E N$

Cuando el cajón está a punto de moverse, la fuerza de rozamiento estática alcanza su máximo valor $F_{RE\,\text{máx}}$

$$F_{RE\,\text{máx}} = \mu_E N$$

Aplicamos la 2ª ley de Newton cuando está a punto de moverse

<u>En el eje Y</u> $\quad N = W\cos\beta - F\sin\theta$

Véase que la normal N depende de la fuerza aplicada F. Dicha fuerza F es la que debemos determinar en el momento en que el cajón está a punto de moverse.

Por la relación existente entre la fuerza de rozamiento estática máxima y la normal tenemos que

$$F_{RE\,\text{máx}} = \mu_E\left(W\cos\beta - F\sin\theta\right)$$

<u>En el eje X</u> $\quad F\cos\theta = W\sin\beta + F_{RE\,\text{máx}}$

$$F\cos\theta = W\sin\beta + \overbrace{\mu_E W\cos\beta - \mu_E F\sin\theta}^{F_{RE\,\text{máx}}}$$

$$F\left(\cos\theta + \mu_E\sin\theta\right) = W\left(\sin\beta + \mu_E\cos\beta\right)$$

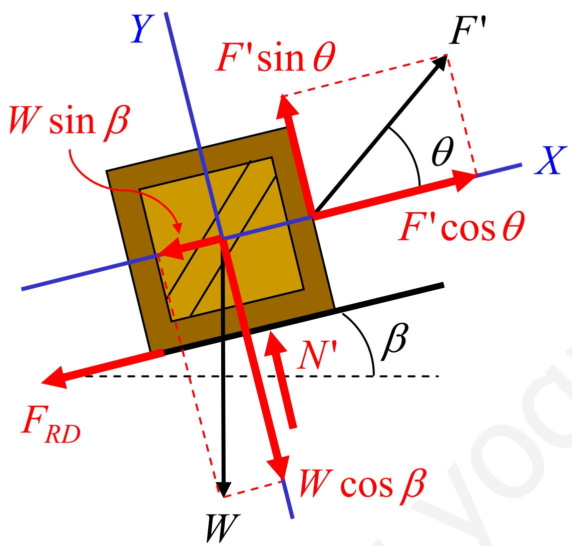
Fuerza mínima a aplicar para que empiece a moverse

$$F = W\,\frac{\sin\beta + \mu_E\cos\beta}{\cos\theta + \mu_E\sin\theta}$$

www.yoquieroaprobar.es

Llamamos F' a la fuerza que tira del cajón cuando se mueve a lo largo del plano inclinado. En este caso, las fuerzas que actúan sobre él son las mismas que hemos indicado antes, con la diferencia de que la fuerza de rozamiento ahora es el rozamiento dinámico F_{RD} en lugar del estático, y que la normal tendrá un nuevo valor N'.

$$F_{RD} = \mu_D N' = \mu_D (W\cos\beta - F'\sin\theta)$$



Cajón en movimiento

Si se tira del cajón con una fuerza 10% mayor que la calculada en el apartado anterior, F' es:

$$F' = 1.1 \cdot W \frac{\sin\beta + \mu_E \cos\beta}{\cos\theta + \mu_E \sin\theta}$$

La fuerza neta en sentido ascendente (eje X) es:

$$F_X = F'\cos\theta - F_{RD} - W\sin\beta$$

$$F_X = F'\cos\theta - \mu_D (W\cos\beta - F'\sin\theta) - W\sin\beta$$

$$F_X = F'(\cos\theta + \mu_D \sin\theta) - W(\sin\beta + \mu_D \cos\beta)$$

La aceleración a_X que dicha fuerza produce a lo largo del plano inclinado (eje X) es:

$$a_X = \frac{F_X}{W/g} = g\frac{F_X}{W}$$

$$a_X = 1.1g \frac{\sin\beta + \mu_E \cos\beta}{\cos\theta + \mu_E \sin\theta}(\cos\theta + \mu_D \sin\theta) - g(\sin\beta + \mu_D \cos\beta)$$

www.yoquieroaprobar.es

P08.02. EXAMEN A1. CURSO 2007/2008 (CONT)

Cuando el cajón se ha movido una distancia L a lo largo del plano inclinado, el trabajo disipado por la fuerza de rozamiento es:

$$T_{dis} = F_{RD} L = \mu_D N' L = \mu_D \left(W\cos\beta - F'\sin\theta\right) L$$

$$T_{dis} = 1.1\cdot\mu_D W\left(\cos\beta - \frac{\sin\beta + \mu_E\cos\beta}{\cot\theta + \mu_E}\right) L$$

$$T_{dis} = 1.1\cdot\mu_D W\,L\,\frac{\cot\theta\cos\beta - \sin\beta}{\cot\theta + \mu_E}$$

El trabajo hecho por la fuerza F' a lo largo de ese recorrido es:

$$T_{F'} = F' L\cos\theta = 1.1\cdot W\,L\,\frac{\sin\beta + \mu_E\cos\beta}{1 + \mu_E\tan\theta}$$

Resultados cuando el cajón se mueve en un plano horizontal: entonces $\beta = 0$

Fuerza mínima a aplicar para que empiece a moverse

$$F = W\frac{\sin 0 + \mu_E\cos 0}{\cos\theta + \mu_E\sin\theta} = W\frac{\mu_E}{\cos\theta + \mu_E\sin\theta}$$

$$F' = 1.1\cdot W\frac{\mu_E}{\cos\theta + \mu_E\sin\theta}$$

$$F_X = F'\left(\cos\theta + \mu_D\sin\theta\right) - \mu_D W$$

$$a_X = \frac{F_X}{W/g} = g\frac{F_X}{W}$$

Aceleración en un plano horizontal

$$a_X = 1.1g\frac{\sin 0 + \mu_E\cos 0}{\cos\theta + \mu_E\sin\theta}\left(\cos\theta + \mu_D\sin\theta\right) - g\left(\sin 0 + \mu_D\cos 0\right)$$

$$a_X = 1.1g\frac{\mu_E}{\cos\theta + \mu_E\sin\theta}\left(\cos\theta + \mu_D\sin\theta\right) - g\mu_D$$

Trabajo disipado

$$T_{dis} = 1.1\cdot\mu_D W\,L\,\frac{\cot\theta}{\cot\theta + \mu_E}$$

Trabajo realizado por F'

$$T_{F'} = 1.1\cdot W\,L\,\frac{\mu_E}{1 + \mu_E\tan\theta}$$

www.yoquieroaprobar.es

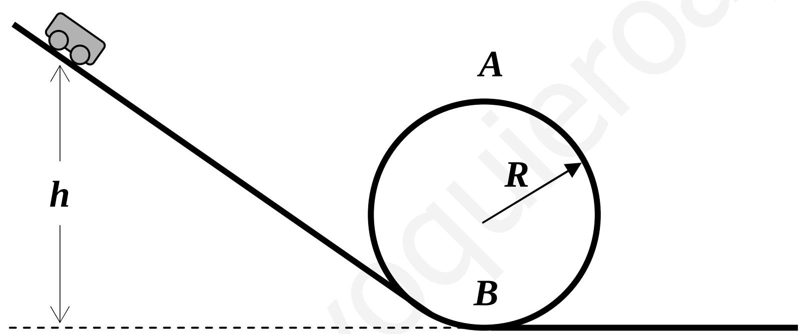
AJB Lecciones de Física

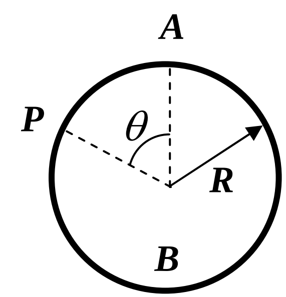
Un carrito de masa 12 kg se deja caer por un rail en pendiente que conduce a un rizo circular de radio 2 m.

A) Calcule la altura *h* mínima desde la que debe soltarse el carrito para que recorra el rizo entero sin desplomarse, y determine qué velocidad llevará en el punto más bajo *B* y en el más alto *A* (3 puntos).

B) Suponiendo que la velocidad del carrito cuando alcanza el punto A es la mínima necesaria para no desplomarse, calcule la reacción normal del rail en el punto *P* para el ángulo $\theta = 30º$ indicado en la figura (2 puntos).

Para facilitar los cálculos, tome $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$. Se supone ausencia de rozamiento.



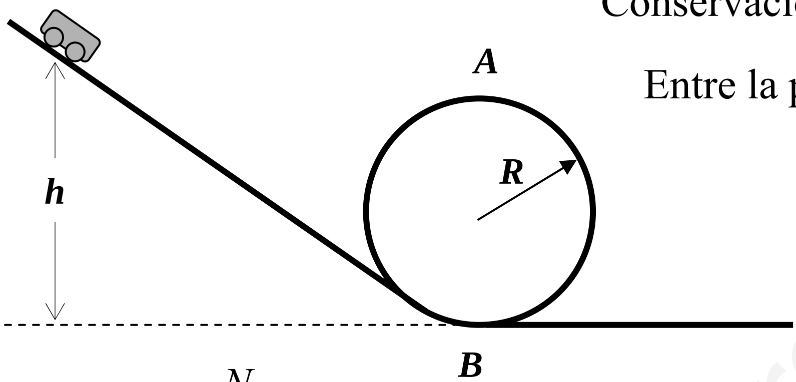


www.yoquieroaprobar.es

Resultados numéricos (véase solución del problema en hojas siguientes)

g (m/s^2) =	**10**	$v_{A\,\min}$ (m/s) =	4,47
m (kg) =	**12**	$v_{B\,\min}$ (m/s) =	10,00
R (m) =	**2**	$h_{\min}$ (m) =	5,00
θ (º) =	**30**	$N_{P\,\min}$ (N) =	48,23

Tomamos como referencia de energías potenciales el plano donde se encuentra el punto B.



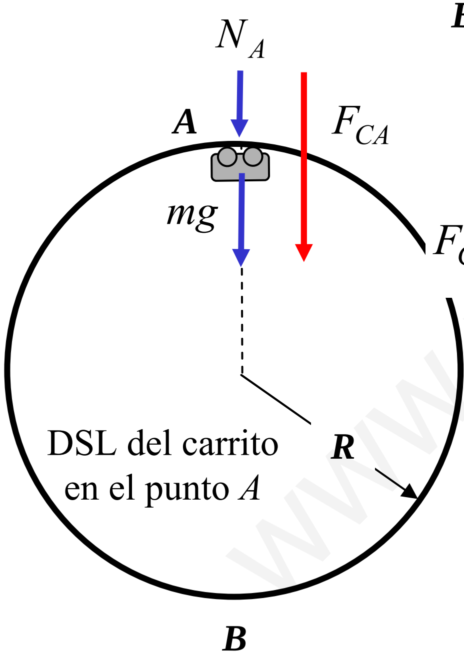
Conservación de la energía

Entre la posición inicial y B $\quad mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 \qquad gh = \frac{1}{2}v_B^2$

Entre A y B $\quad \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + mg(2R)$

$$\frac{1}{2}v_B^2 = \frac{1}{2}v_A^2 + 2gR$$

En este momento no son conocidos ni h, ni v_A ni v_B



DSL del carrito en el punto A

$$F_{CA} = \frac{mv_A^2}{R} = mg + N_A$$

Esta ecuación indica que a menor velocidad, menor debe ser la reacción normal del rail. Y puesto que el valor mínimo posible de la reacción normal es cero, hacer $N_A = 0$ nos da la condición de velocidad mínima necesaria.

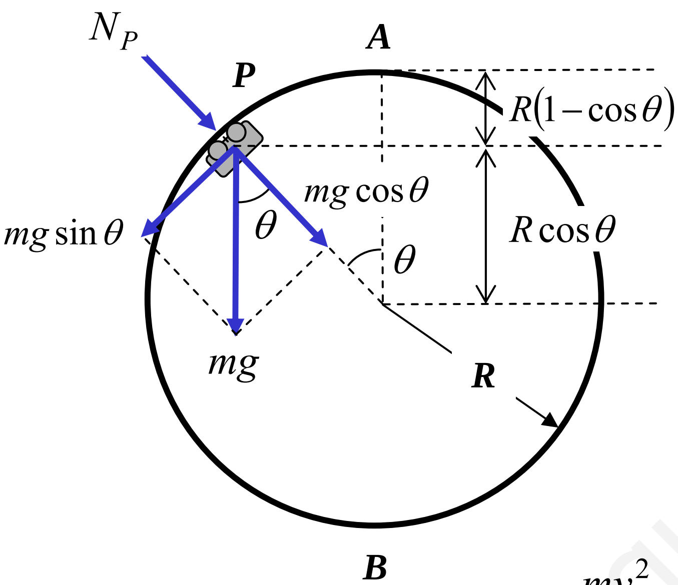
$$F_{CA\,\min} = \frac{mv_{A\,\min}^2}{R} = mg \qquad v_{A\,\min}^2 = gR \qquad \boxed{v_{A\,\min} = \sqrt{gR}}$$

$$v_{B\,\min}^2 = v_{A\,\min}^2 + 4gR \qquad \boxed{v_{B\,\min} = \sqrt{5gR}}$$

$$h_{\min} = \frac{1}{2g}v_{B\,\min}^2 \qquad \boxed{h_{\min} = \frac{5R}{2}}$$

www.yoquieroaprobar.es

Estudio en el punto P



Fuerza centrípeta en P $\quad F_{CP}=\dfrac{mv_P^2}{R}=mg\cos\theta+N_P$

Conservación energía entre A y P

$$\frac{1}{2}mv_P^2=\frac{1}{2}mv_A^2+mgR(1-\cos\theta)$$

Multiplicando ambos miembros por $2/R$ $\quad \dfrac{mv_P^2}{R}=\dfrac{mv_A^2}{R}+2mg(1-\cos\theta)=F_{CP}$

$$\frac{mv_A^2}{R}+2mg(1-\cos\theta)=mg\cos\theta+N_P$$

$$N_P=\frac{mv_A^2}{R}+2mg(1-\cos\theta)-mg\cos\theta \qquad N_P=\frac{mv_A^2}{R}+mg(2-3\cos\theta)$$

Según el enunciado, debe calcularse N_P para $v_A=v_{A\min}$ $\quad N_{P\min}=\dfrac{mv_{A\min}^2}{R}+mg(2-3\cos\theta)$

$$v_{A\min}=\sqrt{gR} \qquad N_{P\min}=mg+mg(2-3\cos\theta)=3mg(1-\cos\theta)$$

Nótese que cuando $\theta=0$ estamos en el punto A ($P=A$) y entonces $N_{A\min}=0$.

www.yoquieroaprobar.es

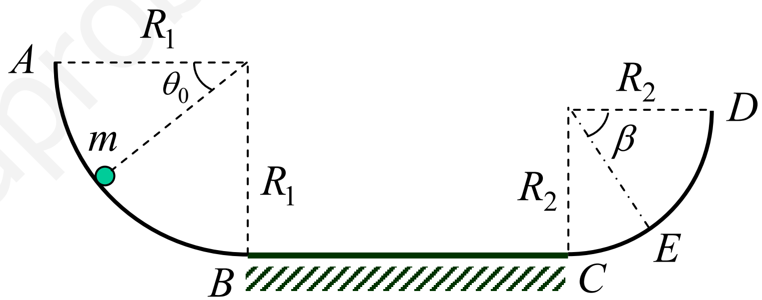
AJB Lecciones de Física

Una partícula de masa m = 50 g resbala partiendo del reposo a lo largo de un tramo de pista circular AB sin rozamiento cuyo radio es R_1 = 40 cm. El ángulo que indica su posición inicial es θ_0 = 45º (véase figura). Cuando llega al punto B se encuentra sobre un tramo horizontal cuya longitud es L = 50 cm y donde el coeficiente de rozamiento dinámico es μ = 0.08 (tramo BC de la figura). Finalmente entra en otro tramo de pista circular CD sin rozamiento y de radio R_2 = 30 cm Calcule a partir de argumentos de trabajo y energía, y explicando siempre los pasos intermedios que sea oportuno realizar, los valores de las siguientes magnitudes:

a) Cuál es el valor del ángulo β cuando la partícula se detiene en el tramo CD (punto E de la figura).

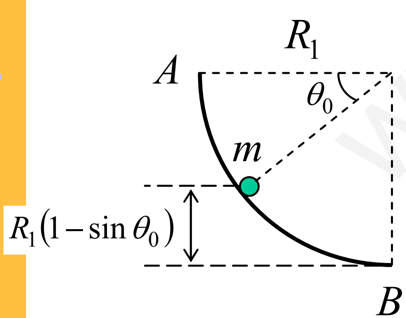
b) Determine si la partícula llega o no al punto B después de alcanzar el punto E. En caso afirmativo, calcule la velocidad que lleva en ese momento.

c) En caso de que la respuesta del apartado anterior sea que la partícula efectivamente alcanza el punto B en su viaje de regreso, calcule en qué posición a la derecha de B se detendrá finalmente.



<u>Apartado a)</u>

Tramo AB No hay rozamiento, por lo tanto cuando la partícula resbala en este tramo hacia abajo la energía potencial inicial (medida respecto al nivel del tramo horizontal BC) se convierte en energía cinética.



$$\Delta K = -\Delta U \qquad K_B - \cancelto{0}{K_{inicial}} = -\left(\cancelto{0}{U_B} - U_{inicial}\right)$$

$$\boxed{K_B = U_{inicial}} \boxed{= m\,g\,R_1\left(1-\sin\theta_0\right)}$$

www.yoquieroaprobar.es

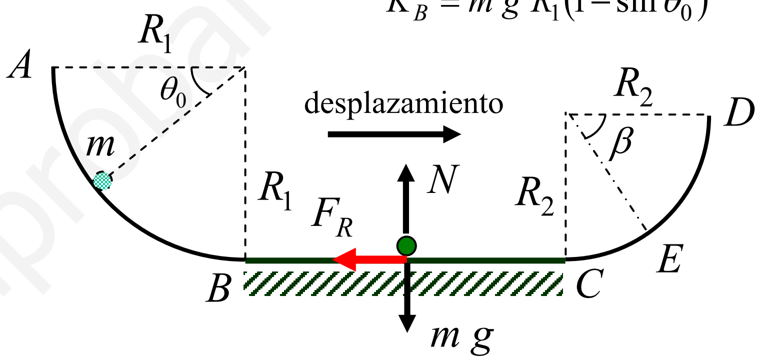
Apartado a)

Tramo *BC* Existe una fuerza de rozamiento dada por $F_R = \mu\, N = \mu\, m\, g$

De acuerdo con el teorema del trabajo y la energía

$$\sum W_{exteriores} = \Delta K$$

$$K_B = m\, g\, R_1 \left(1-\sin\theta_0\right)$$



Ni el peso ni la normal contribuyen al trabajo de las fuerzas exteriores $W_{exteriores}$, porque ambos son perpendiculares al desplazamiento. Sólo contribuye el trabajo de la fuerza de rozamiento, que es negativo por su sentido opuesto al desplazamiento.

$$K_C = K_B - \mu\, m\, g\, L$$

$$W_{exteriores} = W_R = -F_R \cdot L = -\mu\, m\, g\, L = \Delta K = K_C - K_B$$

$$\boxed{K_C = m\, g\, R_1\left(1-\sin\theta_0\right) - \mu\, m\, g\, L}$$

Tramo *CD* La partícula llega hasta el punto *E*, lo cual supone que se eleva una altura $R_2\left(1-\sin\beta\right)$

La energía cinética en C se va convirtiendo en energía potencial a medida que sube.

$$\Delta K = -\Delta U \qquad \cancelto{0}{K_E} - K_C = -\left(U_E - \cancelto{0}{U_C}\right)$$

$$U_E = K_C = m\, g\, R_1\left(1-\sin\theta_0\right) - \mu\, m\, g\, L$$

$$U_E = m\, g\, R_2\left(1-\sin\beta\right) \qquad 1-\sin\beta = \frac{U_E}{m\, g\, R_2}$$

$$\boxed{\sin\beta = 1 - \frac{R_1\left(1-\sin\theta_0\right) - \mu\, L}{R_2}}$$

www.yoquieroaprobar.es

AJB Lecciones de Física

Apartado a)

Valores numéricos

		Unidades SI
m (g) =	50,0	0,05
R_1(cm) =	40,0	0,40
R_2 (cm) =	30,0	0,30
L (cm) =	50,0	0,50
θ_0 (º) =	45,0	0,7854
μ =	0,08	0,08
g =		9,80
K_B =		0,0574
W_R =		0,0196
K_C =		0,0378
$\sin\beta$ =		0,7428
β (º) =	48,0	0,8373

$$\sin\beta = 1 - \frac{R_1(1-\sin\theta_0) - \mu L}{R_2}$$

$$\beta = 48^{\circ}$$

La energía cinética en B es igual a la energía potencial inicial (K_B = 0.0574 J). Véase que el trabajo de rozamiento a lo largo del tramo BC consume W_R = 0.0196 J: esta es la pérdida de energía que sufrirá la partícula cada vez que atraviese este tramo. Por lo tanto, la energía cinética en C la primera vez que la partícula llega allí es K_C = 0.0574-0.0196 = 0.0378 J.

Lo que ocurre una vez que la partícula llega a C: su energía cinética se va convirtiendo en energía potencial, hasta que su energía cinética se reduce a cero en el punto E. A partir de ahí la partícula retrocede hasta llegar de nuevo a C, reconvirtiendo en energía cinética la energía potencial, y desde C en adelante, hace el camino CB (en sentido inverso al de antes) sometida de nuevo a la fuerza de rozamiento.

www.yoquieroaprobar.es

Apartado b) Para saber si la partícula vuelve a alcanzar el punto *B*, hay que calcular la energía cinética que tendrá la segunda vez que pase por el mismo, aplicando de nuevo el teorema del trabajo y la energía e iguales consideraciones que en el apartado anterior.

(Si al hacer dicho cálculo el valor resultase negativo, esto indicaría que no se alcanza el punto *B*)

$$W_{exteriores} = W_R = -F_R \cdot L = -\mu\, m\, g\, L = \Delta K' = K'_B - K'_C$$

donde $K'_C = K_C = m\, g\, R_1 (1 - \sin\theta_0) - \mu\, m\, g\, L$

$$K'_B = K'_C - \mu\, m\, g\, L = m\, g\, R_1(1-\sin\theta_0) - 2\mu\, m\, g\, L$$

Sustituyendo numéricamente resulta $K'_B = +0.0182\ \text{J}$

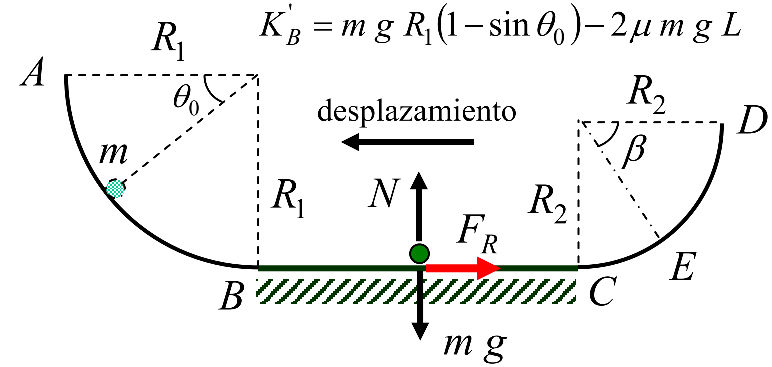
Conclusión: La partícula alcanza de nuevo el punto B en su viaje de vuelta

Velocidad que lleva la segunda vez que pasa por *B*:

$$K'_B = \frac{1}{2} m\, v'^2_B \qquad v'_B = \sqrt{\frac{2K'_B}{m}} = 0.85\ \text{m/s}$$

$$K_B = m\, g\, R_1(1-\sin\theta_0)$$

$$K'_B = m\, g\, R_1(1-\sin\theta_0) - 2\mu\, m\, g\, L$$



www.yoquieroaprobar.es

Apartado c) Una vez la partícula sobrepasa B, en su movimiento ascendente por la pista de radio R_1 sin rozamiento no se disipa energía, por lo que cuando regrese una tercera vez al punto B , ahora dirigiéndose hacia el punto C, su energía cinética seguirá siendo

$$K_B'' = K_B' = +0.0182 \text{ J}$$

Véase que este valor numérico es menor que el de la energía disipada por rozamiento en un trayecto completo BC (W_R = 0.0196 J), lo que nos indica que la partícula se detendrá antes de llegar a C.

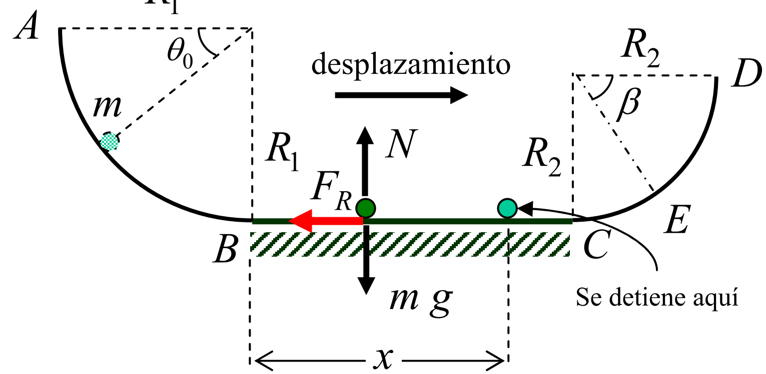
Para calcular en qué punto se detiene, aplicamos de nuevo el teorema del trabajo y la energía, siendo x la posición a la derecha del punto B en que la partícula queda en reposo.

$$W_{R\ final} = -\mu\, m\, g\, x = \overset{0}{K_{final}} - K_B'' = \overset{0}{K_{final}} - K_B'$$

$$\boxed{x = \frac{K_B'}{\mu\, m\, g} = 0.46 \text{ m}}$$

$$K_B = m\, g\, R_1 (1 - \sin\theta_0)$$

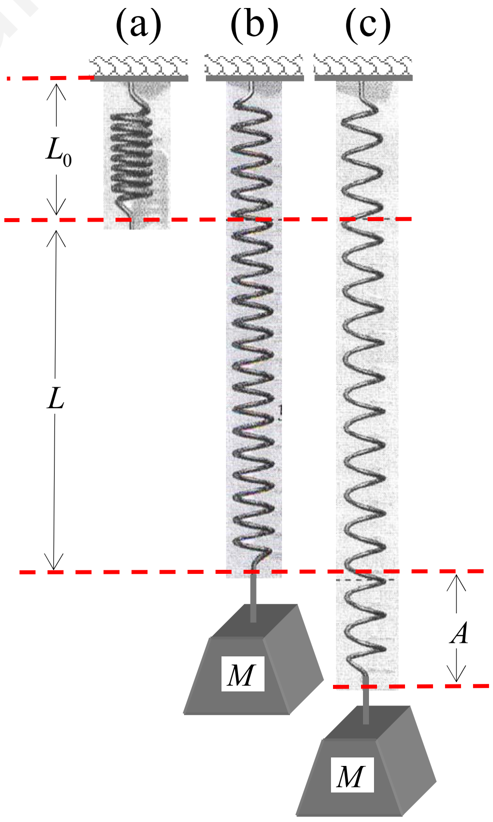
$$K_B' = m\, g\, R_1 (1 - \sin\theta_0) - 2\mu\, m\, g\, L$$



www.yoquieroaprobar.es

P07.03. EXAMEN B1. CURSO 2006/2007

Se dispone de un muelle de longitud natural L_0 = 20 cm -figura (a)-. Cuando una masa M = 400 g se cuelga del muelle, su longitud se incrementa en L = 50 cm –figura (b)-. Finalmente, la masa colgante se hace oscilar después de haber estirado el muelle una longitud A = 20 cm –figura (c)-. Conteste las siguientes preguntas:



a) ¿Cuál es la constante del muelle? 0.5 p

b) Calcular el periodo de la oscilación. 0.5 p

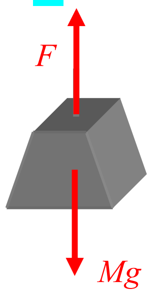
c) Calcular la posición de la masa 6.98 s después de comenzar las oscilaciones. 1.0 p

d) Calcular el periodo de oscilación si se hubiese colgado la misma masa M de dos muelles idénticos a éste colocados paralelamente entre si. 2.0 p

www.yoquieroaprobar.es

P07.03. EXAMEN B1. CURSO 2006/2007 (CONT)

a)



Ley de Hooke: $F = k\,L$

2ª ley de Newton: $F = Mg$

$$k = \frac{Mg}{L} = \frac{0.25 \cdot 9.8}{0.40} = 6.125 \ \text{N/m}$$

b)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.25}{6.125}} = 1.27 \ \text{s}$$

c) $y = A\cos(\omega t + \delta)$

$A = 0.10$ m

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{6.125}{0.25}} = 4.95 \ \text{rad/s}$$

$$y = 0.1\cos(4.95\,t)$$

Elegimos $t = 0$ cuando $y = A$

lo cual implica $\delta = 0$

$$y = 0.1\cos(4.95 \cdot 6.98) = -0.01 \ \text{m}$$

$y = -A$

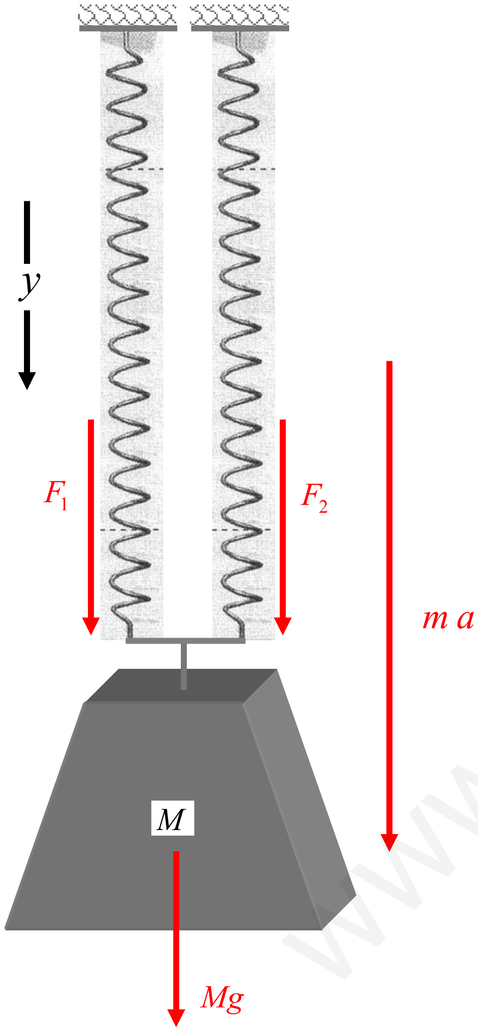
d)

2ª ley de Newton: $F_1 + F_2 + Mg = Ma$

Ley de Hooke: $F_1 = -k\,y$ $\quad F_2 = -k\,y$ (Los muelles son idénticos)

$$M\frac{d^2y}{dt^2} = -2k\,y + Mg \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{2k}{M}y + g$$

www.yoquieroaprobar.es



Ecuación de la oscilación con dos muelles:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{2k}{M}\,y=g$$

Escribamos la ecuación como

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2\,y=g$$

donde

$$\omega=\sqrt{\frac{2k}{M}}$$

La solución de esta ecuación es

$$y=\frac{M}{2k}g+A\cos(\omega\,t+\delta)$$

El periodo es

$$T'=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{M}{2k}}=2\pi\sqrt{\frac{0.25}{2\cdot 6.125}}=0.90\ \text{ s}$$

La pareja de muelles idénticos en paralelo se comporta como un único muelle de constante 2 *k*.

www.yoquieroaprobar.es

En el laboratorio de física se dispone de los siguientes equipos: 1º) Un péndulo simple consistente en una lenteja, que puede tratarse como masa puntual, sujeta del techo por un hilo inextensible de longitud L. 2º) Un bloque de masa M que puede desplazarse oscilando horizontalmente sobre un carril sin rozamiento, que está unido a un resorte ideal de constante k.

El péndulo se separa un ángulo θ_0 de la vertical, y el bloque sujeto por el muelle se separa una distancia x_0 de su posición de equilibrio. Ambos se liberan en el mismo instante iniciando las respectivas oscilaciones.

a) ¿Cuál debe ser la masa de la lenteja del péndulo para que la energía total de los dos osciladores sea la misma?.

b) Suponiendo que la masa del péndulo es la que verifica la solución correcta del apartado anterior, calcular (en m/s) la velocidad de la lenteja y del bloque cuando ambos pasan por su posición de equilibrio.

c) ¿Cuál es la tensión del hilo del péndulo cuando pasa por la posición de equilibrio?

Valores numéricos

g (m·s^{-2}) =	9,8
L (m) =	2,25
θ_0 (º) =	5
M (kg) =	0,125
k (N/m) =	20
x_0 (m) =	0,05

www.yoquieroaprobar.es

Ecuación del movimiento del bloque

$$x(t) = x_0 \cos \omega t \qquad \omega^2 = \frac{k}{M}$$

Velocidad $\dot{x}(t) = -\omega\, x_0 \sin \omega t$

Ecuación del movimiento del péndulo

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t \qquad \omega^2 = \frac{g}{L}$$

Vel. angular $\dot{\theta}(t) = -\omega\, \theta_0 \sin \omega t$

Velocidad $v(t) = L\, \dot{\theta}(t) = -\omega\, L\, \theta_0 \sin \omega t$

La velocidad es máxima al pasar por la posición de equilibrio, cual sucede por primera vez cuando

$$t = T/4 \;\Rightarrow\; \omega\, t = \pi/2 \;\Rightarrow\; \sin \omega t = 1$$

Velocidad máxima $|\dot{x}_{máx}| = \omega\, x_0$

Velocidad máxima $|v_{máx}| = \omega\, L\, \theta_0$

Energía total: tomando el nivel cero de energía potencial en el punto de equilibrio, la energía total coincide con la energía cinética correspondiente a la velocidad máxima.

$$E_{total} = \frac{1}{2} M |\dot{x}_{máx}|^2 = \frac{1}{2} M\, \omega^2\, x_0^2$$

$$\omega^2 = \frac{k}{M} \quad \Rightarrow \quad E_{total} = \frac{1}{2} k\, x_0^2$$

$$E_{total} = \frac{1}{2} m |v_{máx}|^2 = \frac{1}{2} m\, \omega^2\, L^2\, \theta_0^2$$

$$\omega^2 = \frac{g}{L} \quad \Rightarrow \quad E_{total} = \frac{1}{2} m\, g\, L\, \theta_0^2$$

$$m = \frac{k\, x_0^2}{g\, L\, \theta_0^2}$$

www.yoquieroaprobar.es

(b) Cálculo de las velocidades al pasar por la posición de equilibrio (hecho en el análisis anterior)

Bloque

Velocidad $\dot{x}(t) = -\omega\, x_0 \sin \omega t$

Velocidad máxima $\left|\dot{x}_{máx}\right| = \omega\, x_0$

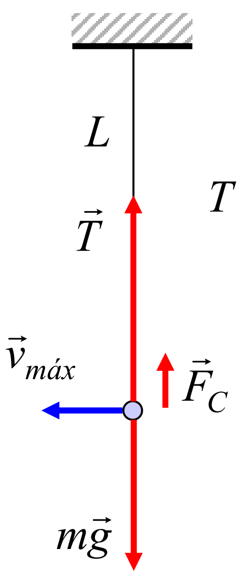
$$\omega^2 = \frac{k}{M} \qquad \left|\dot{x}_{máx}\right| = x_0 \sqrt{\frac{k}{M}}$$

Péndulo

Velocidad $v(t) = L\,\dot{\theta}(t) = -\omega\, L\, \theta_0 \sin \omega t$

Velocidad máxima $\left|v_{máx}\right| = \omega\, L\, \theta_0$

$$\omega^2 = \frac{g}{L} \qquad \left|v_{máx}\right| = \theta_0 \sqrt{g\, L}$$



DSL

(c) Tensión del hilo del péndulo cuando pasa por la posición de equilibrio

$$T - mg = F_C = \frac{m\left|v_{máx}\right|^2}{L} = \frac{m\,\omega^2\, L^2\, \theta_0^2}{L}$$

$$T = m\, g\left(1 + \theta_0^2\right)$$

(a)	$m = \dfrac{k\, x_0^2}{g\, L\, \theta_0^2}$	(kg)	0,298
(b) Bloque	$\left|\dot{x}_{máx}\right| = x_0 \sqrt{\dfrac{k}{M}}$	(m/s)	0,632
(b) Péndulo	$\left|v_{máx}\right| = \theta_0 \sqrt{g\, L}$	(m/s)	0,410
(c)	$T = m\, g\left(1 + \theta_0^2\right)$	(N)	2,94

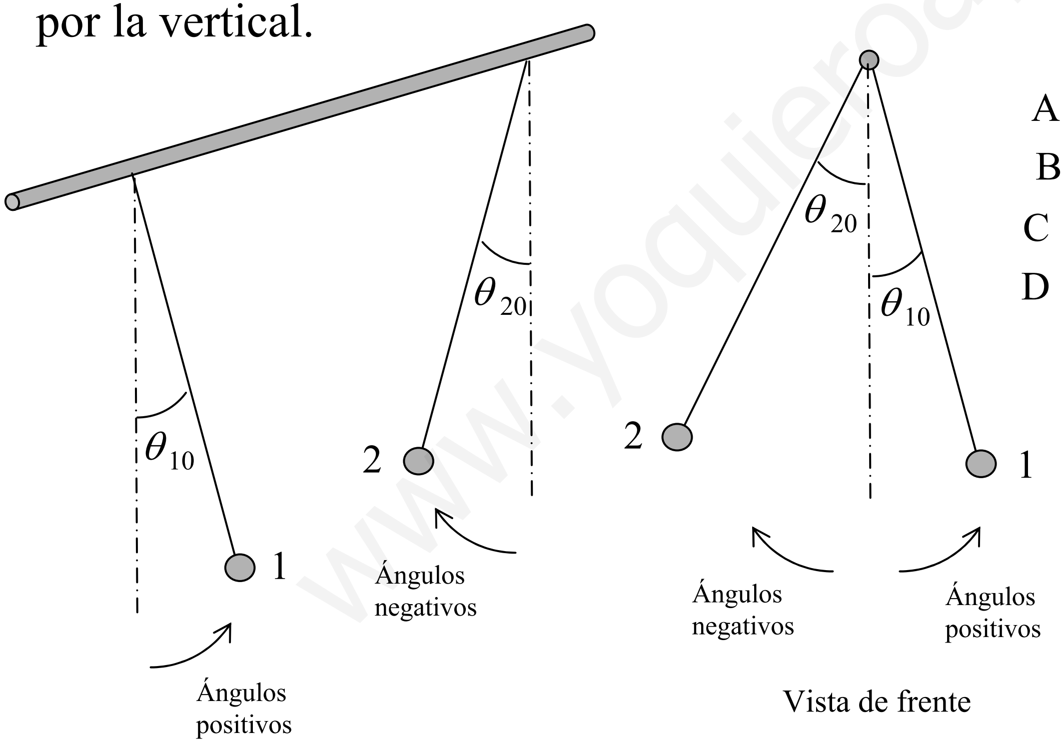
www.yoquieroaprobar.es

Dos péndulos simples de la misma longitud L que cuelgan de un eje horizontal se separan de la vertical los ángulos θ_{10} y θ_{20} en sentidos contrarios según se muestra en la figura, y después se liberan al mismo tiempo de modo que pueden oscilar libremente. Tómese la aceleración de la gravedad $g = 9.80$ m/s^2.

a) Determinar el periodo de los péndulos y escribir la ecuación $\theta = \theta(t)$ para cada uno.

b) Calcular la velocidad angular de cada péndulo cuando pasa por la vertical.

c) Si la masa del péndulo 1 es m, calcular la tensión del hilo cuando el péndulo pasa por la vertical.



Datos numéricos

A	$L = 559$ mm	$\theta_{10} = 10^\circ$	$\theta_{20} = 8^\circ$	$m = 50$ g
B	$L = 993$ mm	$\theta_{10} = 10^\circ$	$\theta_{20} = 8^\circ$	$m = 40$ g
C	$L = 1551$ mm	$\theta_{10} = 12^\circ$	$\theta_{20} = 10^\circ$	$m = 50$ g
D	$L = 2234$ mm	$\theta_{10} = 12^\circ$	$\theta_{20} = 10^\circ$	$m = 40$ g

www.yoquieroaprobar.es

a) Ambos péndulos tienen pequeña amplitud (< 15º), por lo que puede considerarse con buena aproximación que su movimiento es armónico simple.

	A	B	C	D
T (s) =	1,50	2,00	2,50	3,00
ω (rad/s) =	4,19	3,14	2,51	2,09
θ_{10} (º) =	10	10	12	12
θ_{10} (rad) =	0,1745	0,1745	0,2094	0,2094
θ_{20} (º) =	8	8	10	10
θ_{20} (rad) =	0,1396	0,1396	0,1745	0,1745

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\theta_1(t) = \theta_{10}\cos(\omega t + \delta_1) \qquad \theta_1(t) = \theta_{10}\cos\omega t$$

$$t = 0 \;\rightarrow\; \theta_1(0) = \theta_{10} \qquad \theta_{10} = \theta_{10}\cos\delta_1 \;\rightarrow\; \cos\delta_1 = 1 \;\rightarrow\; \delta_1 = 0$$

$$\theta_2(t) = \theta_{20}\cos(\omega t + \delta_2) \qquad \theta_2(t) = \theta_{20}\cos(\omega t + \pi) \qquad \theta_2(t) = -\theta_{20}\cos\omega t$$

$$t = 0 \;\rightarrow\; \theta_2(0) = -\theta_{20} \qquad -\theta_{20} = \theta_{20}\cos\delta_2 \;\rightarrow\; \cos\delta_2 = -1 \;\rightarrow\; \delta_2 = \pi \text{ rad}$$

b) Velocidad angular Cuando pasa por la vertical $t = T/4$

$$\theta_1(t) = \theta_{10}\cos\omega t \qquad \frac{d\theta_1(t)}{dt} = \dot{\theta}_1(t) = -\theta_{10}\omega\sin\omega t \qquad \frac{d\theta_1(T/4)}{dt} = \dot{\theta}_1(T/4) = -\theta_{10}\omega\sin\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4}\right) = -\theta_{10}\omega$$

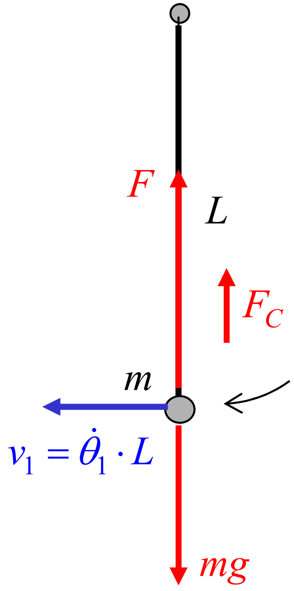
$$\theta_2(t) = -\theta_{20}\cos\omega t \qquad \frac{d\theta_2(t)}{dt} = \dot{\theta}_2(t) = \theta_{20}\omega\sin\omega t \qquad \frac{d\theta_2(T/4)}{dt} = \dot{\theta}_2(T/4) = \theta_{20}\omega\sin\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4}\right) = \theta_{20}\omega$$

	A	B	C	D
$\dot{\theta}_1(T/4) = -\theta_{10}\omega$	-0,7308	-0,5483	-0,5265	-0,4387
$\dot{\theta}_2(T/4) = \theta_{20}\omega$	0,5846	0,4386	0,4387	0,3656

www.yoquieroaprobar.es

AJB Lecciones de Física

c) Tensión del hilo



$$F_C = F - mg = m\frac{v_1^2}{L}$$

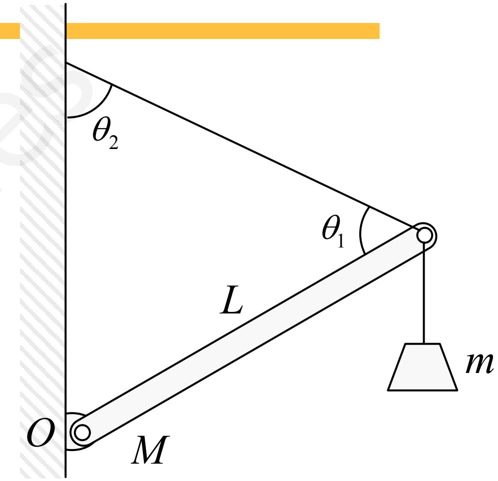
$$F = m\left(g + v_1^2 \cdot L\right)$$

	A	B	C	D
v_1(m/s)	-0,4085	-0,5445	-0,8165	-0,98
F(N)	0,4947	0,4038	0,5417	0,4778

www.yoquieroaprobar.es

P07.04. EXAMEN B2. CURSO 2006/2007

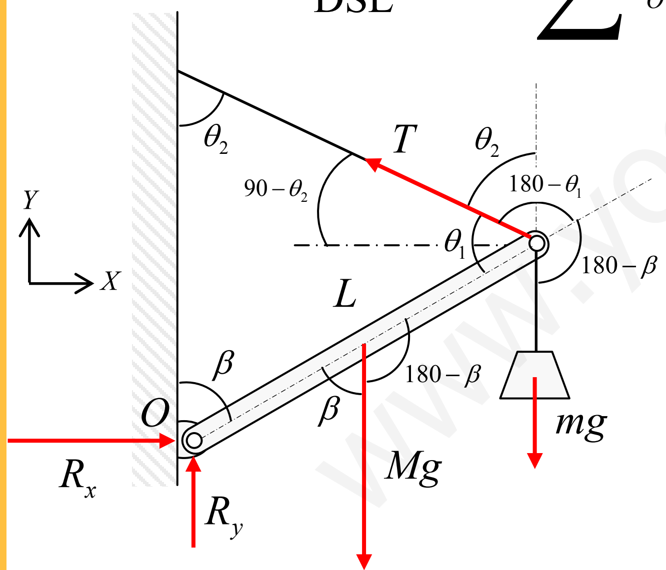
Una varilla rígida de longitud L = 1.80 m y masa M = 6 kg está unida a una articulación (punto O de la figura). La varilla se mantiene inclinada mediante un cable de acero unido a la pared. Los ángulos entre el cable, la varilla y la pared son θ_1 = 60º y θ_2 = 50º respectivamente. Un contrapeso m = 4 kg cuelga del extremo opuesto de la varilla.



a) Dibuje el diagrama de sólido libre para la varilla (2 p).

b) Calcular la tensión en el cable y las componentes rectangulares de la reacción en el punto O (2 p).

DSL



$$\beta = 180-\theta_1-\theta_2$$

$$\sum \tau_O = -Mg\frac{L}{2}\sin(180-\beta) - mgL\sin(180-\beta) + TL\sin(180-\theta_1) = 0$$

$$T = \frac{\sin\beta}{\sin\theta_1}\left(\frac{M}{2}+m\right)g$$

$$\sum F_x = R_x - T\cos(90-\theta_2) = 0$$

$$R_x = \frac{\sin\beta\sin\theta_2}{\sin\theta_1}\left(\frac{M}{2}+m\right)g$$

$$\sum F_y = R_y + T\sin(90-\theta_2) - Mg - mg = 0$$

$$R_y = (M+m)g - \frac{\sin\beta\cos\theta_2}{\sin\theta_1}\left(\frac{M}{2}+m\right)g$$

$T = 74.4$ N; $R_x = 57.0$ N; $R_y = 50.2$ N

www.yoquieroaprobar.es

P08.05. EXAMEN A3. CURSO 2007/2008

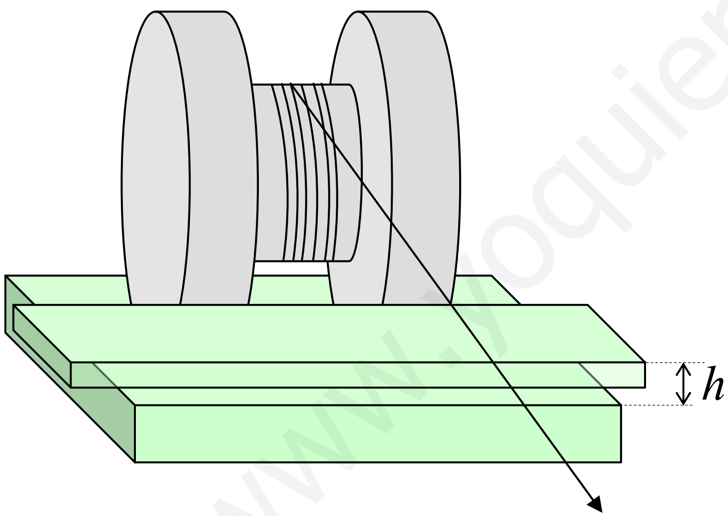
ESTÁTICA

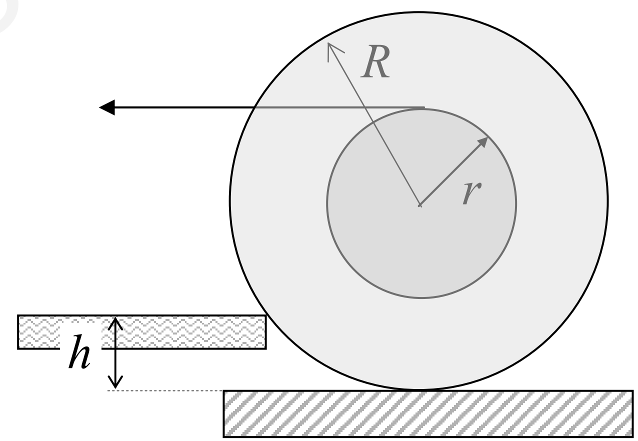
Un tambor de radio r que une simétricamente dos cilindros de radio R lleva arrollado un hilo del cual se tira horizontalmente según se muestra en las figuras. El conjunto de tambor y cilindros está colocado sobre una plataforma plana y apoyado sobre un escalón de altura h. El peso del conjunto es W, y se supone que el hilo arrollado sobre el tambor no se desliza cuando se somete a tensión. Se pide:

a) Calcule el ángulo que forma con la horizontal la fuerza que el escalón hace sobre el sólido.

b) Determine el valor de la reacción normal de la plataforma sobre el sólido cuando la tensión del hilo es T newton.

c) Calcule qué tensión mínima hay que aplicar al hilo para que el sólido remonte el escalón.





Valores numéricos

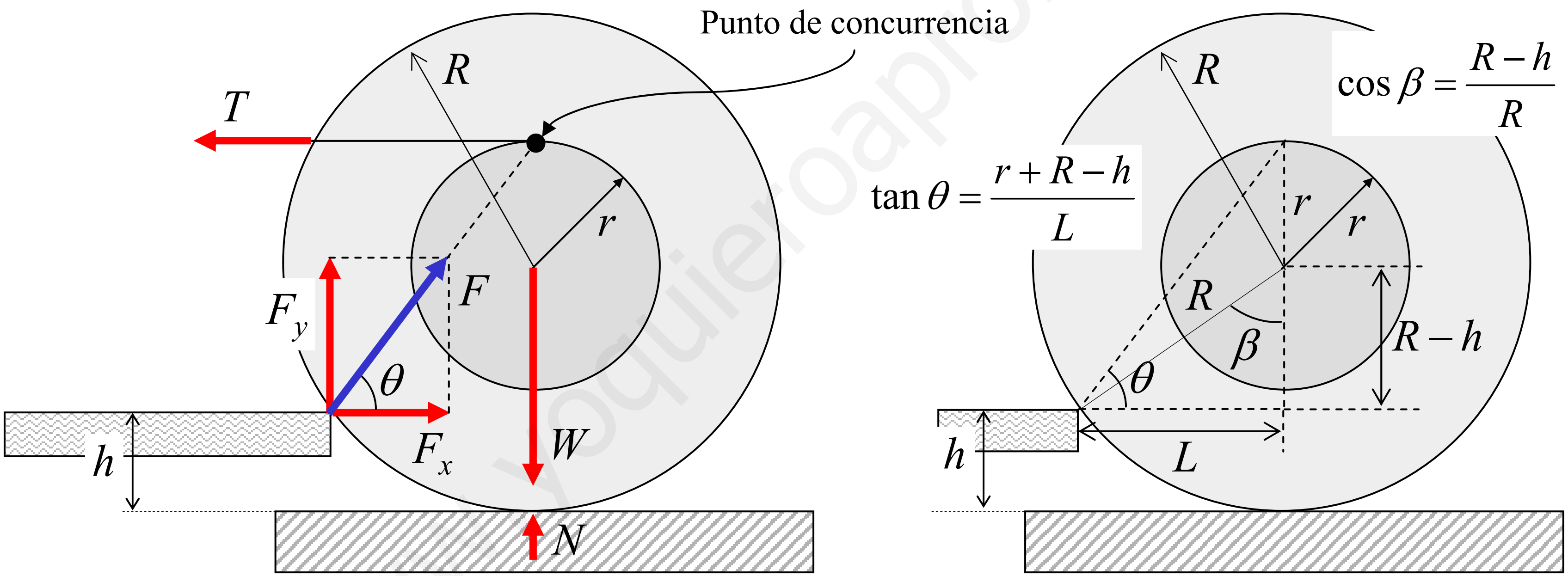
	A	/E
r (m) =	0,15	0,05
R (m) =	0,30	0,12
h (m) =	0,05	0,04
W (kp) =	0,200	0,200
T (kp) =	0,050	0,050

www.yoquieroaprobar.es

P08.05. EXAMEN A3. CURSO 2007/2008 (CONTINUACIÓN)

a) Calcule el ángulo que forma con la horizontal la fuerza que el escalón hace sobre el sólido.

Se trata de un sistema plano de fuerzas concurrentes que proceden de tres direcciones distintas (la vertical, la horizontal y la dirección de la fuerza que el escalón aplica sobre el sólido). Por tanto, habrá equilibrio estático cuando las tres direcciones sean concurrentes: el punto común es la parte superior del tambor, y a partir de ahí determinaremos la dirección de la fuerza F aplicada por el escalón sobre el sólido.



$$L = R\sin\beta = R\sqrt{1-\cos^2\beta} = R\sqrt{1-(R-h)^2/R^2} = \sqrt{R^2-\left(R^2+h^2-2R\cdot h\right)} = \sqrt{2R\cdot h-h^2}$$

$$\tan\theta = \frac{r+R-h}{\sqrt{2R\cdot h-h^2}}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{r+R-h}{\sqrt{2R\cdot h-h^2}}\right)$$

AJB Lecciones de Física

www.yoquieroaprobar.es

b) Determine el valor de la reacción normal de la plataforma sobre el sólido cuando la tensión del hilo es T newton.

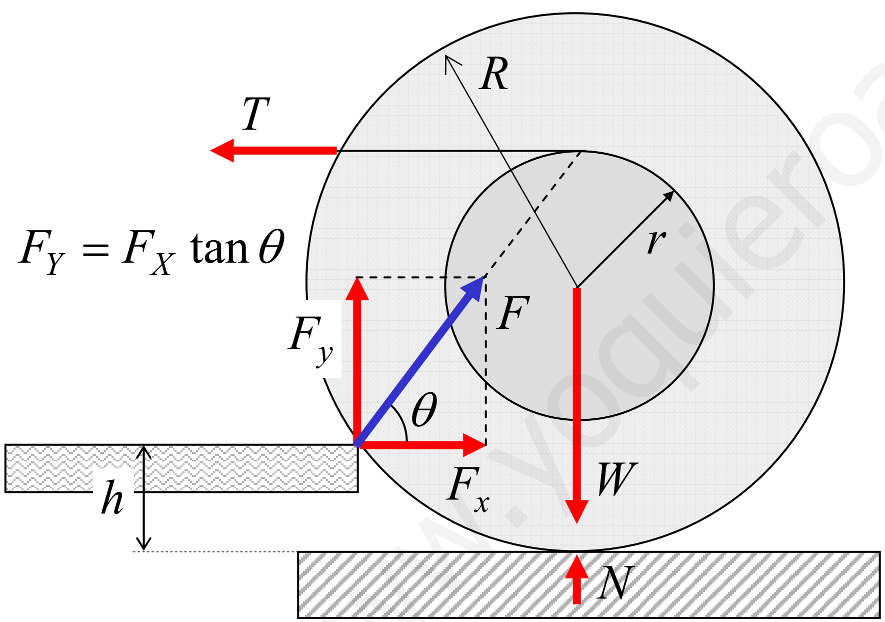
$$-T + F_X = 0 \qquad F_X = T$$

$$F_Y + N - W = 0 \qquad F_Y = W - N$$

$$W - N = \tan\theta \cdot T$$

$$\boxed{N = W - \tan\theta \cdot T}$$

$$F_Y = F_X \tan\theta$$



		A	'E
	r (m) =	0,15	0,05
	R (m) =	0,30	0,12
	h (m) =	0,05	0,04
	W (kp) =	0,200	0,200
	T (kp) =	0,050	0,050
	W (N) =	1,960	1,960
	T (N) =	0,490	0,490
a)	θ (rad) =	1,1778	0,9682
	θ (º) =	**67,5**	**55,5**
b)	**N (N) =**	**0,778**	**1,248**
	N (kp) =	0,079	0,127
c)	**T_{min} (N) =**	**0,813**	**1,349**
	T_{min} (kp) =	0,083	0,138

c) Calcule qué tensión mínima hay que aplicar al hilo para que el sólido remonte el escalón.

El sólido remonta cuando el módulo de la normal es nulo (en ese momento la componente vertical de la fuerza F equilibra al peso)

$$\boxed{T_{min} = \frac{W}{\tan\theta}}$$

www.yoquieroaprobar.es

Una pesa W = 0.50 kp está colgada de una anilla A sujeta por un muelle AB y un cable AC. El muelle sin tensión tiene una longitud natural l_0 = 32 cm, mientras que cuando sujeta la anilla en la situación mostrada en la figura 1.a su longitud es l = 36 cm. El cable AC es inextensible y su longitud es d = 40 cm. La anilla se encuentra situada una altura h = 20 cm por debajo de la línea horizontal BC. Se pide:

a) Determinar la tensión del cable AC y la constante elástica del muelle (en N/m).

b) Si la misma pesa W se cuelga de la anilla según muestra la figura 1.b, habiendo reemplazado el cable AC por un muelle idéntico al AB de tal manera que la anilla está ahora a una distancia h' = 25 cm por debajo de los puntos de fijación de ambos muelles ¿cuál será ahora la longitud de cada muelle y qué ángulo forman entre sí?

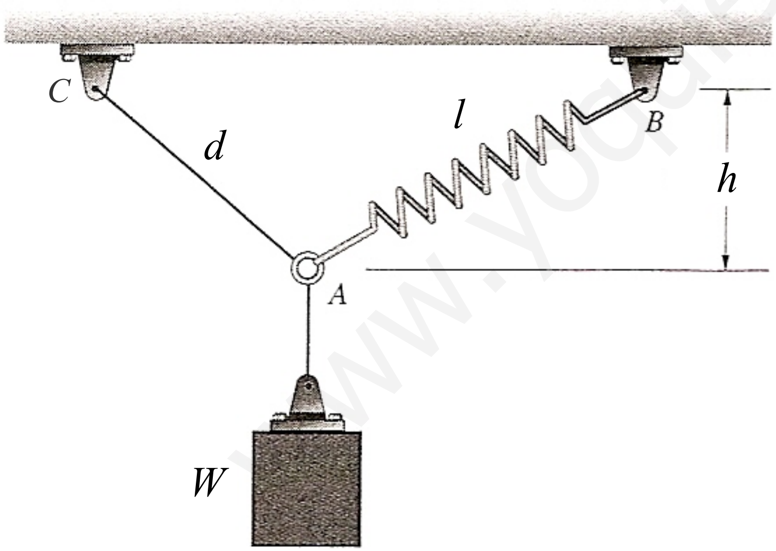


Figura 1.a

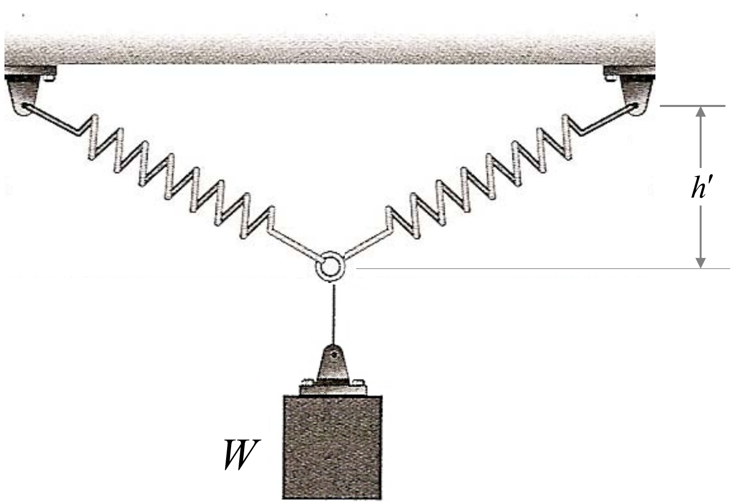
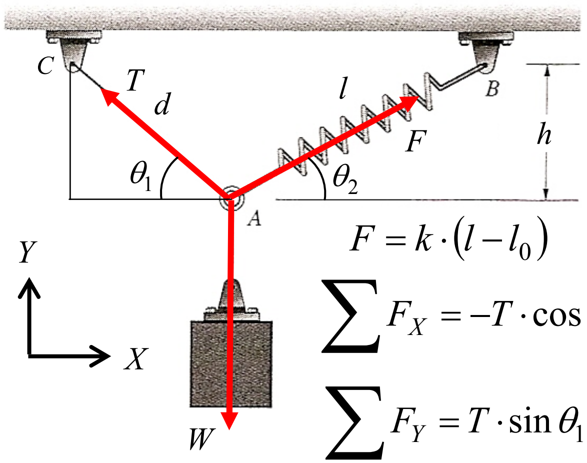


Figura 1.b

www.yoquieroaprobar.es

Apartado a) Datos h, d, l, l_0, W



$$F = k \cdot (l - l_0)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin\theta_1 &= \frac{h}{d}\\ \sin\theta_2 &= \frac{h}{l}\end{aligned}\right\} \theta_1, \theta_2 \to \text{conocidos} \left\{\begin{aligned}\theta_1 &= \sin^{-1}\left(\frac{h}{d}\right)\\ \theta_2 &= \sin^{-1}\left(\frac{h}{l}\right)\end{aligned}\right.$$

$$\sum F_X = -T \cdot \cos\theta_1 + F \cdot \cos\theta_2 = 0 \qquad -T \cdot \cos\theta_1 \cdot \sin\theta_1 + F \cdot \sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 = 0$$

$$\sum F_Y = T \cdot \sin\theta_1 + F \cdot \sin\theta_2 - W = 0 \qquad T \cdot \cos\theta_1 \cdot \sin\theta_1 + F \cdot \cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2 = W \cdot \cos\theta_1$$

$$F \cdot (\sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2) = W \cdot \cos\theta_1$$

$$F \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) = W \cdot \cos\theta_1$$

$$F = W \cdot \frac{\cos\theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$T = W \cdot \frac{\cos\theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

Una vez obtenido el valor de F, la constante elástica del muelle se determina de

$$k = \frac{W}{(l - l_0)} \cdot \frac{\cos\theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

Unidades sistema internacional

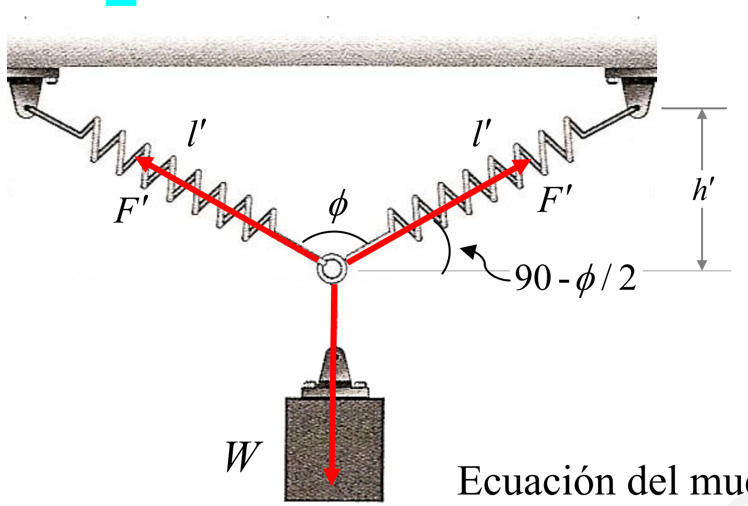
h (cm) =	**20**	0,20
d (cm) =	**40**	0,40
l (cm) =	**36**	0,36
l_0 (cm) =	**32**	0,32
W (kp) =	**0,50**	4,90
θ_1 (rad) =		0,5236
θ_1 (º) =		30,00
θ_2 (rad) =		0,5890
θ_2 (º) =		33,75
F (N) =		4,73
k (N/m) =		**118,3**
T (N) =		**4,54**

h, d, l, l_0, W

AJB
Lecciones de Física
www.yoquieroaprobar.es

P09.04. EXAMEN A3. CURSO 2008/2009 (CONTINUACIÓN)

Apartado b) Datos h', k, l_0, W Se pide l', ϕ



Ahora la fuerza en cada muelle es la misma, dada la simetría del problema. Sea F' dicha fuerza.

Suma de fuerzas en el eje vertical

$$2F' \cdot \cos(\phi/2) - W = 0$$

Geometría del problema

$$\sin(90 - \phi/2) = \frac{h'}{l'} \longrightarrow \cos(\phi/2) = \frac{h'}{l'} \quad (*)$$

Ecuación del muelle $F' = k \cdot (l' - l_0)$ (**)

Sustituyendo las ecuaciones (*) y (**) en la suma de fuerzas en el eje vertical $2k \cdot (l' - l_0) \cdot \frac{h'}{l'} - W = 0$

$$\frac{l' - l_0}{l'} = \frac{W}{2k \cdot h'} \qquad l' - l_0 = \frac{W}{2k \cdot h'} \cdot l' \qquad l' \cdot \left(1 - \frac{W}{2k \cdot h'}\right) = l_0 \qquad \boxed{l' = \frac{2k \cdot h'}{2k \cdot h' - W} \cdot l_0}$$

Puesto que $\cos(\phi/2) = \frac{h'}{l'}$

$$\boxed{\cos(\phi/2) = \frac{2k \cdot h' - W}{2k \cdot l_0}}$$

$$\boxed{\phi = 2\cos^{-1}\left(\frac{2k \cdot h' - W}{2k \cdot l_0}\right)}$$

h' (cm) = 25

h', k, l_0, W

Unidades sistema internacional

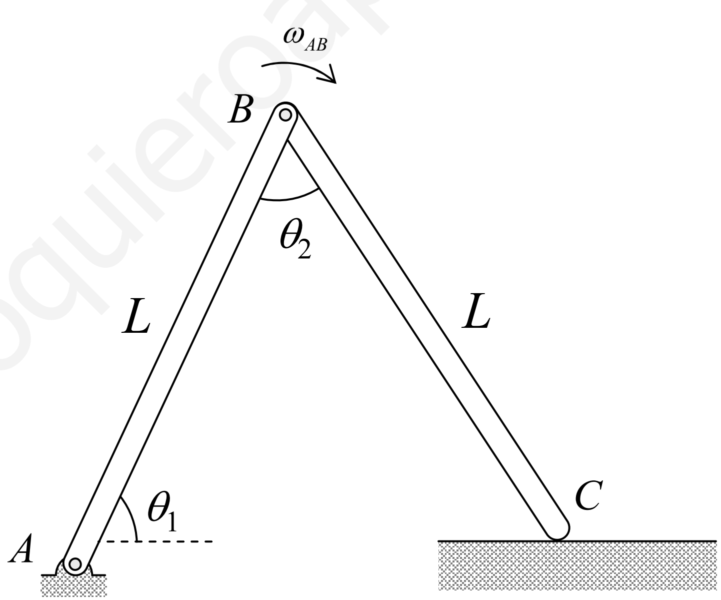
h' (m) =	0,25
l_0 (m) =	0,32
k (N/m) =	118,3
W (N) =	4,90
l' (m) =	**0,35**
cos(ϕ/2) =	0,7165
ϕ (rad) =	1,5440
ϕ (º) =	**88**

www.yoquieroaprobar.es

El mecanismo dibujado en la figura se compone de dos barras rígidas, cada una de ellas de la misma longitud L = 25 cm. La barra AB gira en torno a la rótula A con velocidad angular ω_{AB} = 0,50 rad/s. La barra BC se une a la barra AB y puede girar en torno al extremo B, mientras que el extremo C desliza sobre el suelo. En el instante representado en el dibujo, los ángulos son θ_1 = 60º y θ_2 = 50º . Se pide:

a) La velocidad del punto B, v_B, y el ángulo formado por v_B con la horizontal. 2 p

b) La velocidad angular de la barra BC, ω_{BC}, y la velocidad del extremo C, v_C. 4 p



www.yoquieroaprobar.es

a) Cálculo de la velocidad v_B y del ángulo formado por v_B con la horizontal.

Varilla AB $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{B/A}$

$$\vec{v}_B = 0 + \omega_{AB}\left(-\vec{k}\right)\times L\left(\vec{i}\cos\theta_1 + \vec{j}\sin\theta_1\right)$$

Véase que

$$\left(-\vec{k}\right)\times\vec{i} = -\vec{j}$$

$$\left(-\vec{k}\right)\times\vec{j} = \vec{i}$$

$$\vec{v}_B = \omega_{AB} L\left(\vec{i}\sin\theta_1 - \vec{j}\cos\theta_1\right)$$

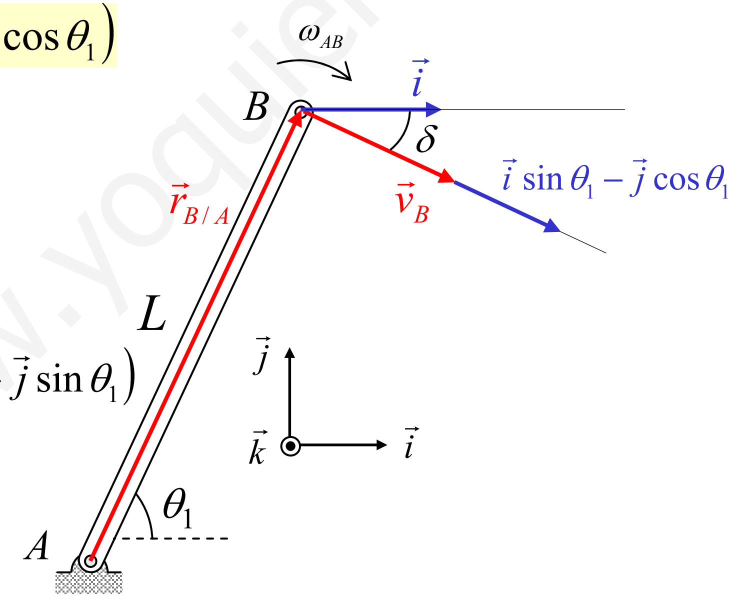
Definición producto escalar:

$$\left(\vec{i}\sin\theta_1 - \vec{j}\cos\theta_1\right)\cdot\vec{i} = \left|\vec{i}\sin\theta_1 - \vec{j}\cos\theta_1\right|\left|\vec{i}\right|\cos\delta$$

$$\cos\delta = \frac{\left(\vec{i}\sin\theta_1 - \vec{j}\cos\theta_1\right)\cdot\vec{i}}{\left|\vec{i}\sin\theta_1 - \vec{j}\cos\theta_1\right|\left|\vec{i}\right|}$$

$$\cos\delta = \sin\theta_1 = \cos\left(90-\theta_1\right) \qquad \delta = 90-\theta_1$$

$$\vec{\omega}_{AB} = \omega_{AB}\left(-\vec{k}\right)$$



$$\vec{r}_{B/A} = L\left(\vec{i}\cos\theta_1 + \vec{j}\sin\theta_1\right)$$

$$\vec{v}_A = 0$$

b) Cálculo de la velocidad angular ω_{BC} y de la velocidad v_C.

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BC} \times \vec{r}_{C/B} \qquad v_C\,\vec{i} = \omega_{AB} L\left(\vec{i}\sin\theta_1 - \vec{j}\cos\theta_1\right) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{BC} \\ L\sin\beta & -L\cos\beta & 0 \end{vmatrix}$$

Sabemos que:

$$\vec{v}_B = \omega_{AB} L\left(\vec{i}\sin\theta_1 - \vec{j}\cos\theta_1\right)$$

$$v_C\,\vec{i} = \omega_{AB} L\left(\vec{i}\sin\theta_1 - \vec{j}\cos\theta_1\right) + \vec{i}\,\omega_{BC} L\cos\beta + \vec{j}\,\omega_{BC} L\sin\beta$$

Vector $\vec{r}_{C/B}$

$$\vec{r}_{C/B} = L\left(\vec{i}\sin(\theta_1+\theta_2-90) - \vec{j}\cos(\theta_1+\theta_2-90)\right)$$

Let's call $\beta = \theta_1 + \theta_2 - 90$

$$\vec{r}_{C/B} = L\left(\vec{i}\sin\beta - \vec{j}\cos\beta\right)$$

Aunque no sepamos sus valores, podemos escribir la velocidad angular y la velocidad de C como:

$$\vec{\omega}_{BC} = \omega_{BC}\,\vec{k}$$

$$\vec{v}_C = v_C\,\vec{i}$$

ω_{BC} y v_C son las cantidades a calcular.

Esta ecuación vectorial corresponde a dos ecuaciones escalares, una por componente:

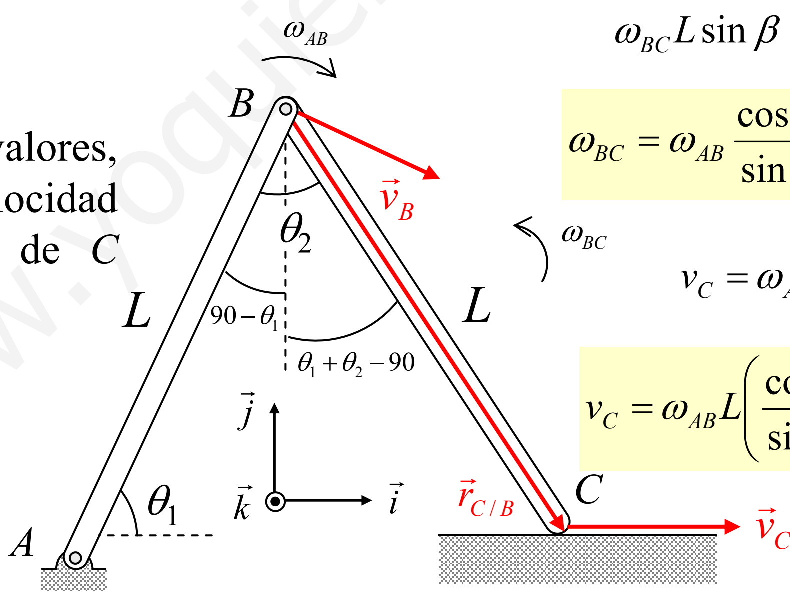
$$v_C - \omega_{BC} L\cos\beta = \omega_{AB} L\sin\theta_1$$

$$\omega_{BC} L\sin\beta = \omega_{AB} L\cos\theta_1$$

$$\omega_{BC} = \omega_{AB}\frac{\cos\theta_1}{\sin\beta} = \omega_{AB}\frac{\cos\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2-90)}$$

$$v_C = \omega_{AB} L\left(\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\cos\theta_1 + \sin\theta_1\right)$$

$$v_C = \omega_{AB} L\left(\frac{\cos(\theta_1+\theta_2-90)}{\sin(\theta_1+\theta_2-90)}\cos\theta_1 + \sin\theta_1\right)$$



C desliza sobre el suelo

Una varilla rígida y delgada de longitud $2L$ = 180 cm está formada por dos mitades homogéneas hechas de materiales diferentes, cuyas densidades lineales respectivas son ρ_A = 8 kg/m y ρ_B = 12 kg/m.

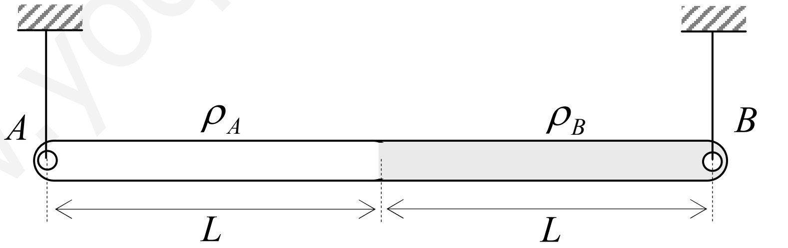
La varilla se cuelga por sus extremos mediante unos hilos, según se muestra en la figura. Se pide:

a) Determinar la posición del CM de la varilla (1 p)

b) Determinar la tensión de cada uno de los hilos usados para colgar horizontalmente la varilla (1 p)

c) Determinar el momento de inercia respecto al punto A (1 p)

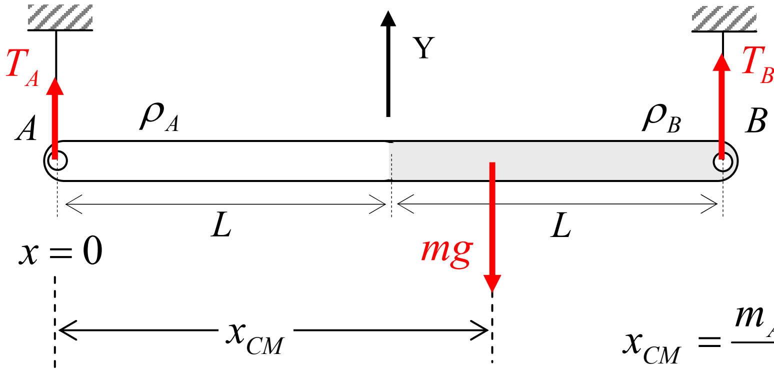
d) Suponiendo que en un momento dado se corta el hilo B, determinar la velocidad angular y la aceleración angular de la varilla cuando el ángulo entre la varilla y la horizontal es 45º (2 p).



www.yoquieroaprobar.es

P07.06. EXAMEN A2. CURSO 2006/2007 (CONTINUACIÓN) **SÓLIDO RIGIDO**

Apartado a) Puesto que las dos mitades son homogéneas, las respectivas posiciones de los centros de masas serán $x_A = L/2 \quad x_B = 3L/2$



Masa de cada mitad: $m_A = \rho_A L$ $\quad m_B = \rho_B L$

Posición del CM del conjunto: $x_{CM} = \dfrac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}$

$$x_{CM} = \frac{m_A(L/2) + m_B(3L/2)}{m_A + m_B} \qquad x_{CM} = \frac{\rho_A L(L/2) + \rho_B L(3L/2)}{\rho_A L + \rho_B L}$$

Masa total: $m = (\rho_A + \rho_B)L$

$$\boxed{x_{CM} = \left(\frac{\rho_A + 3\rho_B}{\rho_A + \rho_B}\right)\frac{L}{2}}$$

$$\sum \tau_A = -mg\, x_{CM} + T_B\, 2L = 0 \qquad T_B = mg\,\frac{x_{CM}}{2L}$$

$$\sum F_y = -mg + T_A + T_B = 0 \qquad T_A = mg - T_B = mg\left(1 - \frac{x_{CM}}{2L}\right)$$

$$\frac{x_{CM}}{2L} = \frac{1}{4}\left(\frac{\rho_A + 3\rho_B}{\rho_A + \rho_B}\right)$$

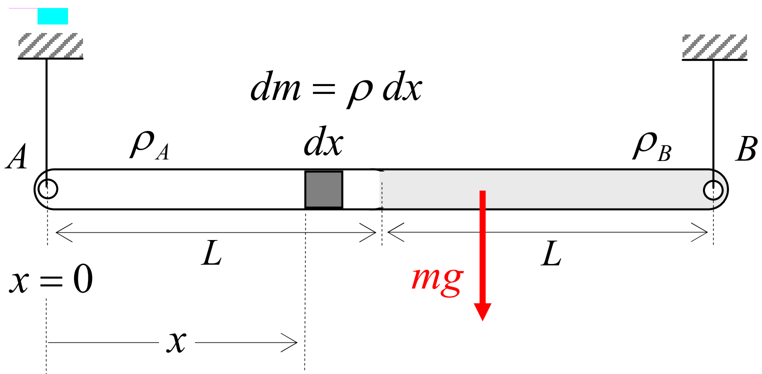
$$T_B = (\rho_A + \rho_B)L\, g\,\frac{1}{4}\left(\frac{\rho_A + 3\rho_B}{\rho_A + \rho_B}\right) \qquad \boxed{T_B = \frac{1}{4}(\rho_A + 3\rho_B)L\, g}$$

$$T_A = (\rho_A + \rho_B)L\, g\left[1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\rho_A + 3\rho_B}{\rho_A + \rho_B}\right)\right] \qquad \boxed{T_A = \frac{1}{4}[3\rho_A + \rho_B]L\, g}$$

www.yoquieroaprobar.es

P07.06. EXAMEN A2. CURSO 2006/2007 (CONTINUACIÓN)

Apartado b) Momento de inercia respecto de A



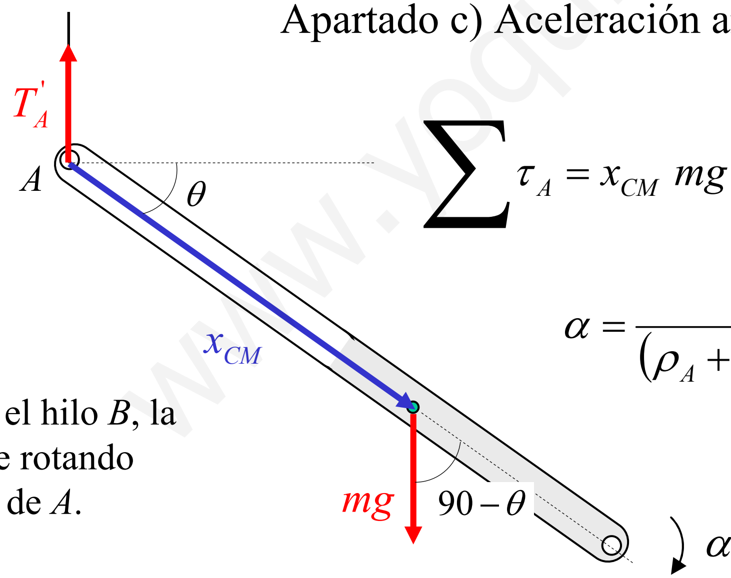
$$m = (\rho_A + \rho_B)L$$

$$x_{CM} = \left(\frac{\rho_A + 3\rho_B}{\rho_A + \rho_B}\right)\frac{L}{2}$$

$$\boxed{I_A = \frac{L^3}{3}(\rho_A + 7\,\rho_B)}$$

$$I_A = \int_0^L x^2 dm_A + \int_L^{2L} x^2 dm_B = \int_0^L x^2 \rho_A\, dx + \int_L^{2L} x^2 \rho_B\, dx = \rho_A \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L + \rho_B \left[\frac{x^3}{3}\right]_L^{2L} = \frac{1}{3}\rho_A L^3 + \frac{1}{3}\rho_B \left(8L^3 - L^3\right)$$

Apartado c) Aceleración angular y velocidad angular



$$\sum \tau_A = x_{CM}\ mg \sin(90-\theta) = I_A\, \alpha \qquad \alpha = \frac{x_{CM}\ mg\cos\theta}{I_A}$$

$$\alpha = \frac{3}{(\rho_A + 7\rho_B)\cancel{L^3}}\left(\frac{\rho_A + 3\rho_B}{\cancel{\rho_A + \rho_B}}\right)\frac{\cancel{L}}{2}\cancel{(\rho_A + \rho_B)}\cancel{L}\, g\cos\theta$$

Cortando el hilo B, la varilla cae rotando alrededor de A.

$$\boxed{\alpha = \left(\frac{\rho_A + 3\rho_B}{\rho_A + 7\rho_B}\right)\frac{3g\cos\theta}{2L}}$$

www.yoquieroaprobar.es

P07.06. EXAMEN A2. CURSO 2006/2007 (CONTINUACIÓN)

$$\alpha = \left(\frac{\rho_A + 3\rho_B}{\rho_A + 7\rho_B}\right)\frac{3g\cos\theta}{2L}$$

Regla de la cadena

$$\alpha = \left(\frac{\rho_A + 3\rho_B}{\rho_A + 7\rho_B}\right)\frac{3g\cos\theta}{2L} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

$$\omega\, d\omega = \left(\frac{\rho_A + 3\rho_B}{\rho_A + 7\rho_B}\right)\frac{3g\cos\theta}{2L}d\theta$$

$$\int_0^\omega \omega\, d\omega = \left(\frac{\rho_A + 3\rho_B}{\rho_A + 7\rho_B}\right)\frac{3g}{2L}\int_0^\theta \cos\theta\, d\theta$$

$$\omega^2 = \left(\frac{\rho_A + 3\rho_B}{\rho_A + 7\rho_B}\right)\frac{3g}{2L}\sin\theta$$

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{\rho_A + 3\rho_B}{\rho_A + 7\rho_B}\right)\frac{3g}{2L}\sin\theta}$$

SOLUCIÓN NUMÉRICA

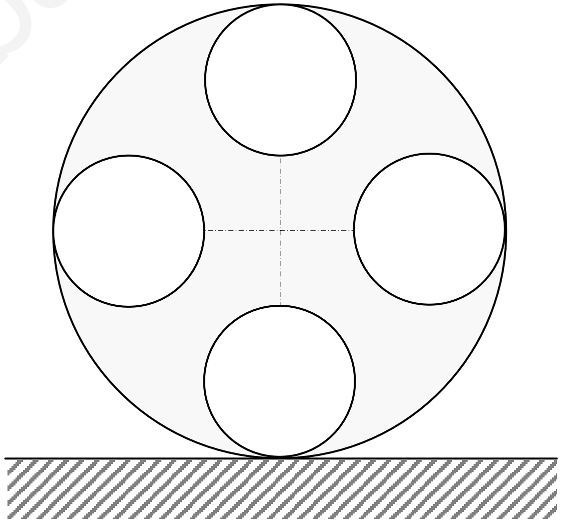
ρ_A (kg/m) =	8,00
ρ_B (kg/m) =	12,00
L (m) =	0,90
g (m s^{-2}) =	9,80
θ (º) =	45
θ (rad) =	0,7854

x_{CM} (m) =	0,9900
T_A (N) =	97,02
T_B (N) =	79,38
I_A (kg m^2) =	22,36
α (rad s^{-2}) =	5,52
ω (rad/s) =	2,35

www.yoquieroaprobar.es

La figura muestra un disco de radio $3R$, con cuatro agujeros circulares, cada uno de radio R. Estos agujeros están distribuidos como se indica en la figura. La densidad superficial del disco es ρ (kg·m^{-2}). El disco se mueve sobre suelo horizontal. Conteste a las siguientes preguntas para los valores numéricos dados abajo:

a) Calcular el momento de inercia I_{zz} del disco, donde Z es el eje perpendidular que pasa a través de su centro de simetría (no se muestra en la figura). (2 p)



b) La velocidad angular inicial del disco cuando entra en contacto con el suelo es ω_0 en sentido horario, mientras que la velocidad lineal del CM es nula. El coeficiente de rozamiento dinámico es μ. Dibuje el DSL teniendo en cuenta las fuerzas externas que actúan sobre el disco, y calcule: el tiempo que tarda el disco en empezar a rodar sin deslizar, la velocidad del centro de masas y la velocidad angular del sólido en el momento en que empieza la rodadura (4 p).

Halle los resultados numéricos de las cuestiones anteriores:

R = 14,7 cm, ρ = 50 kg·m^{-2}, ω_0 = 0,60 rad/s, μ = 0.15

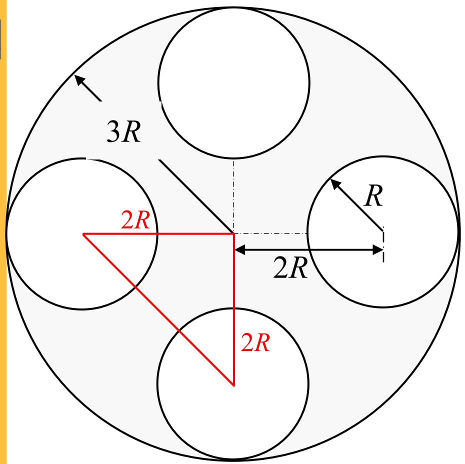
www.youtuaprobar.es

Momento de inercia de un disco (densidad superficial σ, radio a)

Respecto a un eje normal que pasa por su centro de simetría (I_{zz}) $$I_{zz} = \frac{1}{2}(Masa)\cdot(Radio)^2 = \frac{1}{2}\sigma\,\pi\,a^4$$

En nuestro problema tenemos discos de dos tipos: 1. Disco macizo de radio $a = 3R$, densidad superficial $\sigma = \rho$.

$$I_{1zz} = \frac{1}{2}\rho\,\pi\,(3R)^4 = \frac{81}{2}\rho\,\pi\,R^4$$



Z normal al plano, no se muestra en el dibujo

2. Cuatro agujeros que se tratarán como discos de radio $a = R$ y densidad superficial $\sigma = -\rho$.

Los agujeros están dispuestos simétricamente alrededor del centro de simetría del disco, la distancia entre cada centro de agujero y el centro de la figura es $2R$.

Momento de inercia de cada agujero respecto al eje perpendicular que pasa por su propio centro: $$I_{2zz} = -\frac{1}{2}\rho\,\pi\,R^4$$

Hay que calcular el momento de inercia de cada agujero respecto al eje Z que pasa por el centro de simetría. Aplicamos el teorema de Steiner:

$$I'_{2zz} = I_{2zz} + \left(-\rho\,\pi\,R^2\right)(2R)^2 = -\frac{9}{2}\rho\,\pi\,R^4$$

Eje Z

$$I_{1zz} = \frac{1}{2}\rho\,\pi\,(3R)^4 = \frac{81}{2}\rho\,\pi\,R^4$$

$$I'_{2zz} = I_{2zz} + \left(-\rho\,\pi\,R^2\right)(2R)^2 = -\frac{9}{2}\rho\,\pi\,R^4$$

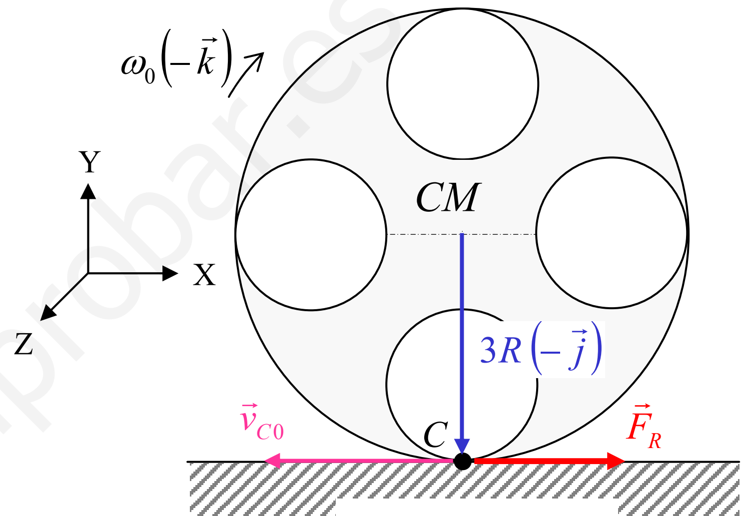
$$I_{zz} = I_{2zz} + 4I'_{2zz} = \left(\frac{81}{2} - 4\frac{9}{2}\right)\rho\,\pi\,R^4 = \frac{45}{2}\rho\,\pi\,R^4$$

$$I_{zz} = \frac{45}{2}\rho\,\pi\,R^4$$

Situación inicial:

$$\vec{v}_{CM0} = 0 \qquad \vec{v}_{C0} = \omega_0\left(-\vec{k}\right)\cdot 3R\left(-\vec{j}\right) = 3\omega_0 R\left(-\vec{i}\right)$$

Esto significa que el punto C se mueve inicialmente hacia la izquierda, luego la fuerza de rozamiento dinámica se dirige hacia la derecha.



Situación inicial

2ª Ley de Newton: $\sum \vec{F}_x = \vec{F}_R = m\,\vec{a}_{CM}$

$$\mu\, m\, g\, \vec{i} = m\, a_{CM}\, \vec{i} \qquad a_{CM} = \mu\, g$$

Rotación del disco: $\sum \vec{\tau}_{CM} = 3R\left(-\vec{j}\right)\times \vec{F}_R = I_{CM}\,\vec{\alpha}$

$$3R\left(-\vec{j}\right)\times \mu\, m\, g\, \vec{i} = I_{CM}\,\vec{\alpha} \qquad \vec{\alpha} = \frac{3\mu\, m\, g\, R}{I_{CM}}\vec{k}$$

El momento de inercia I_{CM} es el mismo I_{ZZ} calculado antes, ya que nuestro disco es una figura plana; la aceleración angular es entonces:

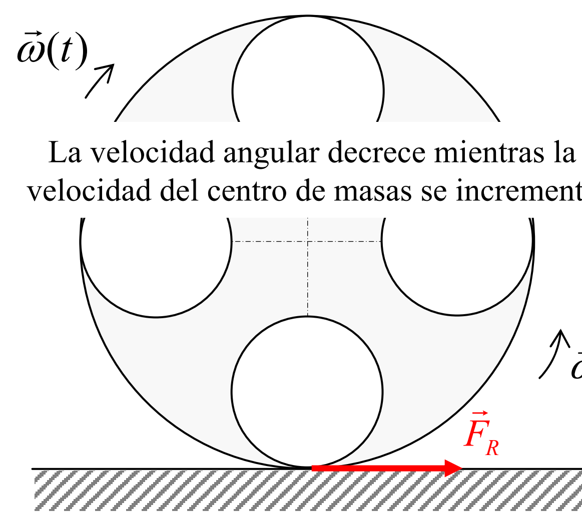
$$\alpha = \frac{3\mu\, m\, g\, R}{I_{CM}}$$

donde la masa m es $\quad m = \rho\,\pi\,(3R)^2 - 4\rho\,\pi\,R^2 = 5\rho\,\pi\,R^2$

y el momento de inercia es $\quad I_{CM} = I_{zz} = \dfrac{45}{2}\rho\,\pi\,R^4$

$$\alpha = \frac{3\mu\left(5\rho\,\pi\,R^2\right)g\,R}{(45/2)\rho\,\pi\,R^4} = \frac{2\mu\, g}{3\,R} \qquad \boxed{\vec{\alpha} = \frac{2\mu\, g}{3\,R}\vec{k}}$$

Antihorario



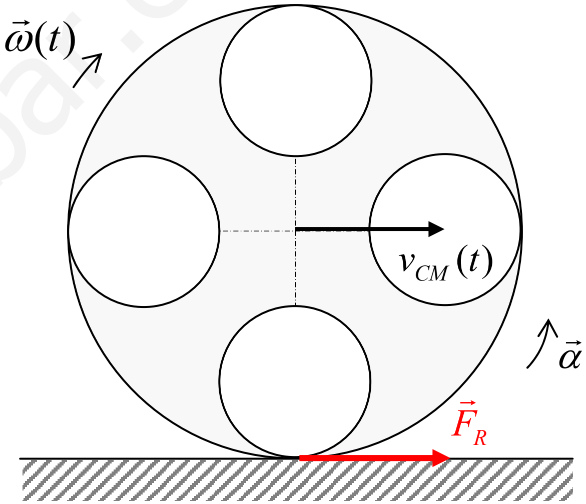
$t > 0$, pero antes de rodar sin delizar

www.yoquieroaprobar.es

Ecuaciones de traslación y rotación $v_{CM}(t) = a_{CM} t = \mu\, g\, t$ $\omega(t) = \omega_0 - \alpha\, t = \omega_0 - \dfrac{2\mu\, g}{3\,R} t$

Condición de rodadura $v_{CM}(t_f) = \omega(t_f)\cdot 3R$

$$\mu\, g\, t_f = 3R\omega_0 - \frac{2\mu\, g}{3\,R} 3R\, t_f \qquad t_f = \frac{R\,\omega_0}{\mu\, g}$$



$t > 0$, pero antes de rodar sin deslizar

Cuando comienza la rodadura tenemos:

$$v_{CM}(t_f) = a_{CM} t_f = \mu\, g\, t_f = R\,\omega_0 \qquad I_{zz} = \frac{45}{2}\rho\,\pi\,R^4$$

$$\omega(t_f) = \omega_0 - \alpha\, t_f = \omega_0 - \frac{2\mu\, g}{3\,R} t_f = \frac{1}{3}\omega_0 \qquad \alpha = \frac{2\mu\, g}{3\,R}$$

SOLUCIÓN: R = 14,7 cm, ρ = 50 kg·m^{-2}, ω_0 = 0,60 rad/s, μ = 0.15

I_{ZZ} = 1.65 kg·m^2 α = 6.67 rad·s^{-2} t_f = 0.060 s $v_{CM}(t_f)$ = 8.82·10^{-2} m/s $\omega(t_f)$ = 0.20 rad/s

www.yoquieroaprobar.es

P08.06. EXAMEN A2. CURSO 2007/2008

Un disco homogéneo de radio R y masa M rueda sin deslizar hacia abajo en un plano inclinado de ángulo θ que tiene una ranura, según se muestra en la figura. El disco va montado sobre un eje concéntrico de radio r y masa muy pequeña.

a) Determine la aceleración del CM y la aceleración angular del disco.

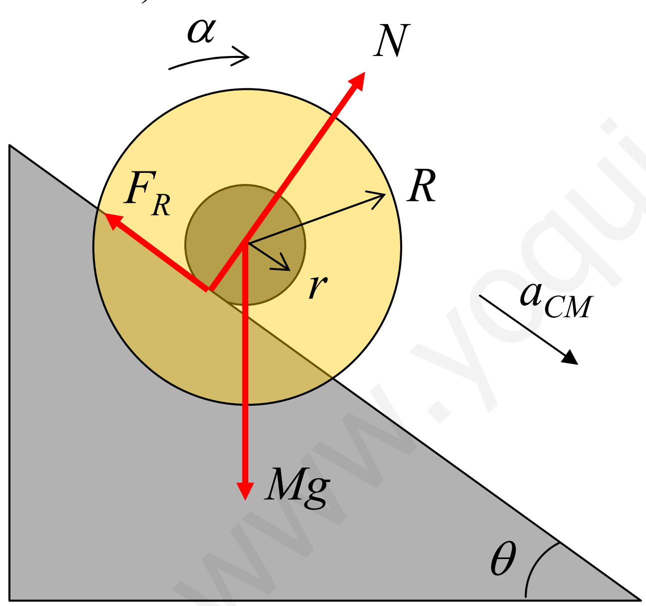
b) Calcule la fuerza de rozamiento entre el eje y el plano inclinado.

c) Calcule la velocidad angular del disco cuando haya recorrido una distancia L a lo largo del plano, suponiendo que partió del reposo.

Valores numéricos

g ($\mathrm{m \cdot s^{-2}}$) =	9,8
θ (º) =	30
M (kg) =	1,25
R (m) =	0,40
r (m) =	0,05
L (m) =	1,50

Apartado a)



Traslación: $Mg\sin\theta - F_R = M\,a_{CM}$ (Paralelamente al plano inclinado)

Rotación: $F_R\,r = I_{CM}\,\alpha$ (Sentido horario)

Rueda sin deslizar: $a_{CM} = r\,\alpha$

Momento inercia: $I_{CM} = \frac{1}{2}M\,R^2$ (La masa del eje es despreciable)

$$F_R = I_{CM}\frac{\alpha}{r} = \frac{1}{2}M\,R^2\frac{a_{CM}}{r^2}$$

$$\cancel{M}g\sin\theta - \frac{1}{2}\cancel{M}\frac{R^2}{r^2}a_{CM} = \cancel{M}\,a_{CM}$$

$$\left(1+\frac{R^2}{2r^2}\right)a_{CM} = g\sin\theta \qquad \boxed{a_{CM} = \frac{g\sin\theta}{1+\left(R^2/2r^2\right)}} \qquad \boxed{\alpha = \frac{a_{CM}}{r} = \frac{g\sin\theta}{r+\left(R^2/2r\right)}}$$

www.yoquieroaprobar.es

Apartado b) Fuerza de rozamiento. A partir de la ecuación de rotación y los resultados anteriores

$$a_{CM} = \frac{g\sin\theta}{1+\left(R^2/2r^2\right)}$$

$$F_R\, r = I_{CM}\,\alpha \;\rightarrow\; F_R = I_{CM}\frac{\alpha}{r} = I_{CM}\frac{a_{CM}}{r^2}$$

$$\alpha = \frac{a_{CM}}{r} = \frac{g\sin\theta}{r+\left(R^2/2r\right)}$$

$$F_R = \frac{1}{2}MR^2\frac{g\sin\theta}{r^2+\left(R^2/2\right)}$$

$$F_R = \frac{R^2}{R^2+2r^2}Mg\sin\theta$$

Apartado c) Velocidad angular cuando ha recorrido la distancia *L* a lo largo del plano inclinado

Es un movimiento uniformemente acelerado, calculamos primero la velocidad del CM:

$$v_{CM} = \sqrt{2a_{CM}L} = \sqrt{\frac{2gL\sin\theta}{1+\left(R^2/2r^2\right)}}$$

$$\omega = \frac{v_{CM}}{r} = \sqrt{\frac{2a_{CM}L}{r^2}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2gL\sin\theta}{r^2+\left(R^2/2\right)}}$$

Solución numérica

a_{CM} (m·s^{-2}) =	0,15
α (rad·s^{-2}) =	2,97
F_R (N) =	5,94
v_{CM} (m/s) =	0,67
ω (rad/s) =	13,35

www.yoquieroaprobar.es

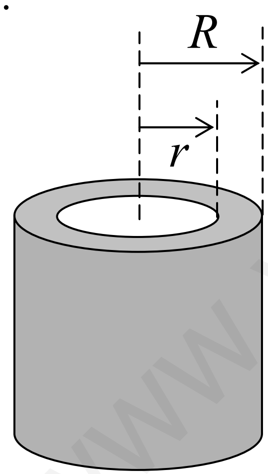
AJB Lecciones de Física

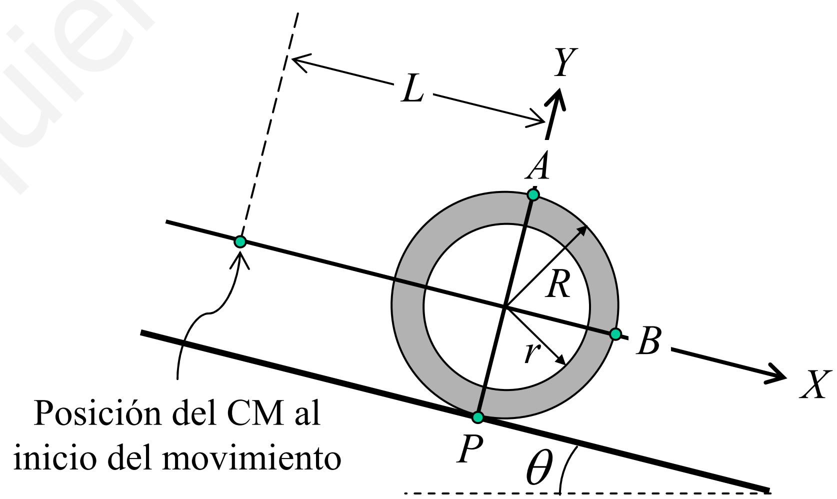
Un cilindro hueco y homogéneo, de radio interior r y radio exterior R, rueda sin deslizar a lo largo de un plano inclinado un ángulo θ sobre la horizontal. Suponiendo que inicialmente se encontraba en reposo, se pide:

a) Determinar la aceleración del CM y la aceleración angular del cilindro.

b) Calcular la velocidad del CM cuando el cilindro ha recorrido una distancia L sobre el plano inclinado y la velocidad angular del sólido en ese instante.

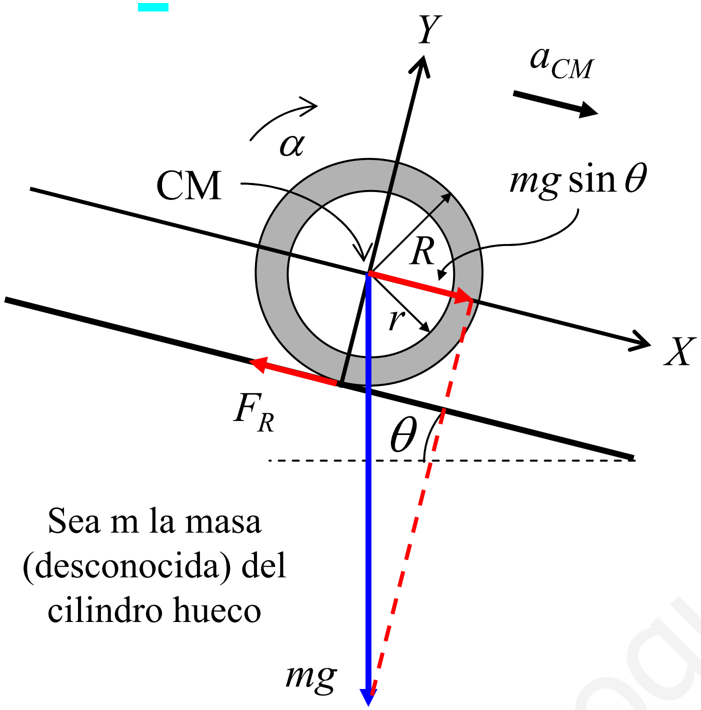
c) Calcular las componentes vectoriales de velocidades y aceleraciones de los puntos A, B y P indicados en el dibujo cuando el cilindro ha recorrido una distancia L sobre el plano inclinado, con respecto al sistema coordenado que se muestra en el esquema cuyo origen es el CM.





www.yoquieroaprobar.es

Apartado a) Fuerzas que intervienen en el movimiento a lo largo del plano (en rojo)



Sea m la masa (desconocida) del cilindro hueco

$$\left.\begin{array}{l} m\,g\sin\theta - F_R = m\,a_{CM} \\ F_R\cdot R = I\,\alpha \qquad F_R = \dfrac{I\,\alpha}{R} \end{array}\right\} \quad m\,g\sin\theta - \frac{I\,\alpha}{R} = m\,a_{CM}$$

I es el momento de inercia respecto al eje principal de simetría que pasa por el CM

Rueda sin deslizar:

$$\alpha = \frac{a_{CM}}{R}$$

Momento de inercia respecto a su eje principal de simetría de un cilindro hueco de radios r y R:

$$I = \frac{1}{2}m\left(R^2 + r^2\right)$$

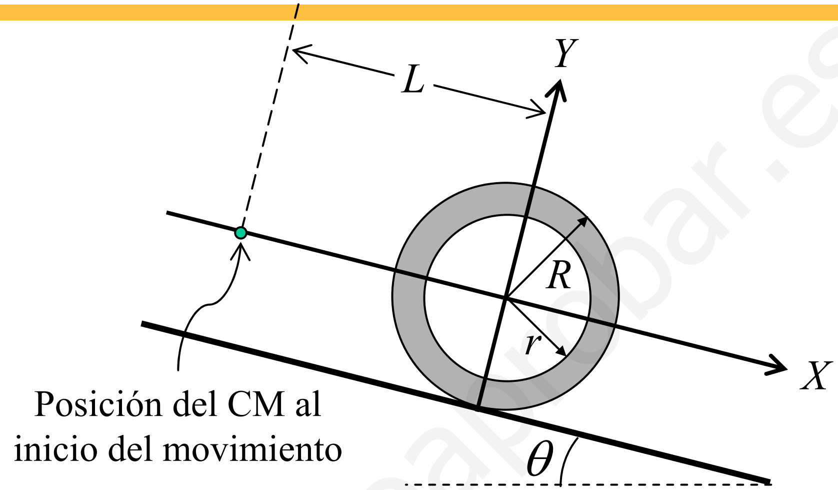
$$\frac{I\,\alpha}{R} = \frac{1}{2}m\left(R^2+r^2\right)\frac{a_{CM}}{R^2} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(1+\frac{r^2}{R^2}\right)}_{C} m\,a_{CM} = C\,m\,a_{CM}$$

Por tanto la relación $m\,g\sin\theta - \dfrac{I\,\alpha}{R} = m\,a_{CM}$ puede escribirse como $m\,g\sin\theta - C\,m\,a_{CM} = m\,a_{CM}$

$$a_{CM} = \frac{g\sin\theta}{1+C} \qquad \text{donde} \quad C = \frac{1}{2}\left(1+\frac{r^2}{R^2}\right)$$

De aquí la aceleración angular vale $\alpha = \dfrac{g\sin\theta}{R(1+C)}$

Apartado b)



Velocidad del CM y velocidad angular cuando ha recorrido una distancia L partiendo del reposo

$$v_{CM}^2 = 2\,a_{CM}L = \frac{2g\sin\theta}{1+C}L \qquad v_{CM} = \sqrt{\frac{2g\sin\theta}{1+C}L} \qquad \omega = \frac{v_{CM}}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2g\sin\theta}{1+C}L}$$

donde $C = \frac{1}{2}\left(1+\frac{r^2}{R^2}\right)$

Observación: cuanto más próximos sean los valores de r y R, mayor es el valor de C y menor será la velocidad lineal y la velocidad angular.

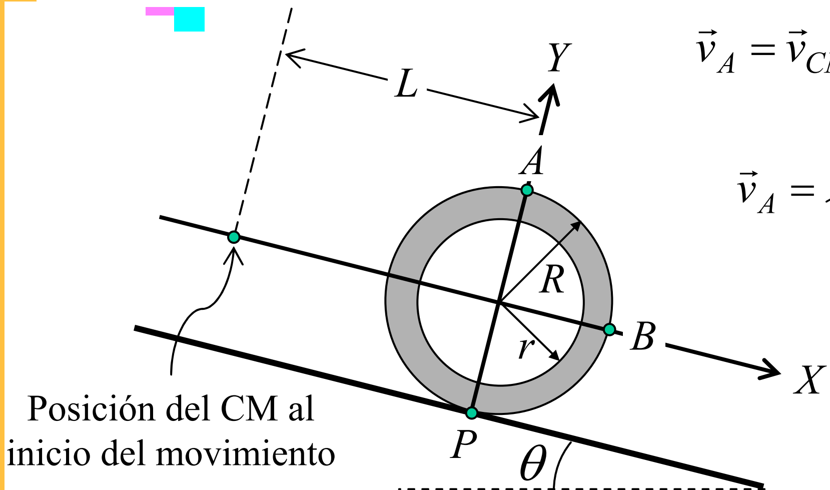
Componentes vectoriales en el sistema de referencia dado:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{g\sin\theta}{1+C}\,\vec{i} \qquad \vec{\alpha} = \frac{g\sin\theta}{R(1+C)}\left(-\vec{k}\right) \qquad \vec{v}_{CM} = \sqrt{\frac{2g\sin\theta}{1+C}L}\;\vec{i} \qquad \vec{\omega} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2g\sin\theta}{1+C}L}\;\left(-\vec{k}\right)$$

(El eje Z positivo es normal al plano XY y saliente)

www.yoquieroaprobar.es

Apartado c) Punto superior (A)



$$\vec{a}_{CM} = \frac{g\sin\theta}{1+C}\,\vec{i}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{g\sin\theta}{R(1+C)}\left(-\vec{k}\right)$$

$$\vec{v}_{CM} = \sqrt{\frac{2g\sin\theta}{1+C}L}\;\vec{i}$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2g\sin\theta}{1+C}L}\;\left(-\vec{k}\right)$$

$$C = \frac{1}{2}\left(1+\frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$\vec{r}_{A/CM} = R\,\vec{j}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_{A/CM} = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega}\times\vec{r}_{A/CM}$$

$$\vec{v}_A = \sqrt{\frac{2g\sin\theta}{1+C}L}\;\vec{i} + \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2g\sin\theta}{1+C}L}\cdot R\left(-\vec{k}\times\vec{j}\right)$$

$$\vec{v}_A = 2\sqrt{\frac{2g\sin\theta}{1+C}L}\;\vec{i}$$

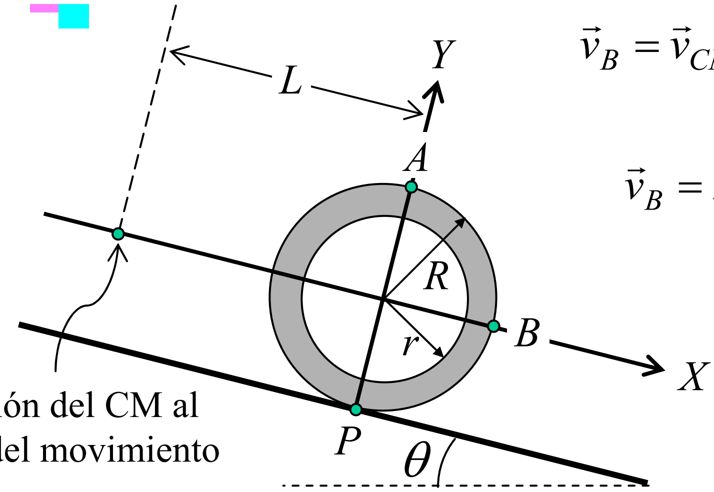
$$\vec{a}_A = \vec{a}_{CM} + \vec{\alpha}\times\vec{r}_{A/CM} - \omega^2\,\vec{r}_{A/CM}$$

$$\vec{a}_A = \frac{g\sin\theta}{1+C}\,\vec{i} + \frac{g\sin\theta}{R(1+C)}R\left(-\vec{k}\times\vec{j}\right) - \frac{2g\sin\theta}{R^2(1+C)}L\cdot R\cdot\vec{j}$$

$$\vec{a}_A = \frac{2g\sin\theta}{1+C}\left(\vec{i} - \frac{L}{R}\cdot\vec{j}\right)$$

P08.07. EXAMEN B2. CURSO 2007/2008 (CONTINUACIÓN)

Apartado c) Continuación



Posición del CM al inicio del movimiento

$$\vec{a}_{CM} = \frac{g\sin\theta}{1+C}\,\vec{i}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{g\sin\theta}{R(1+C)}\left(-\vec{k}\right)$$

$$\vec{v}_{CM} = \sqrt{\frac{2g\sin\theta}{1+C}L}\;\vec{i}$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2g\sin\theta}{1+C}L}\;\left(-\vec{k}\right)$$

$$C = \frac{1}{2}\left(1+\frac{r^2}{R^2}\right)$$

Punto delantero (B)

$$\vec{r}_{B/CM} = R\,\vec{i}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_{B/CM} = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega}\times\vec{r}_{B/CM}$$

$$\vec{v}_B = \sqrt{\frac{2g\sin\theta}{1+C}L}\;\vec{i} + \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2g\sin\theta}{1+C}L}\cdot R\left(-\vec{k}\times\vec{i}\right)$$

$$\vec{v}_B = \sqrt{\frac{2g\sin\theta}{1+C}L}\;\vec{i} - \sqrt{\frac{2g\sin\theta}{1+C}L}\;\vec{j}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{CM} + \vec{\alpha}\times\vec{r}_{B/CM} - \omega^2\,\vec{r}_{B/CM}$$

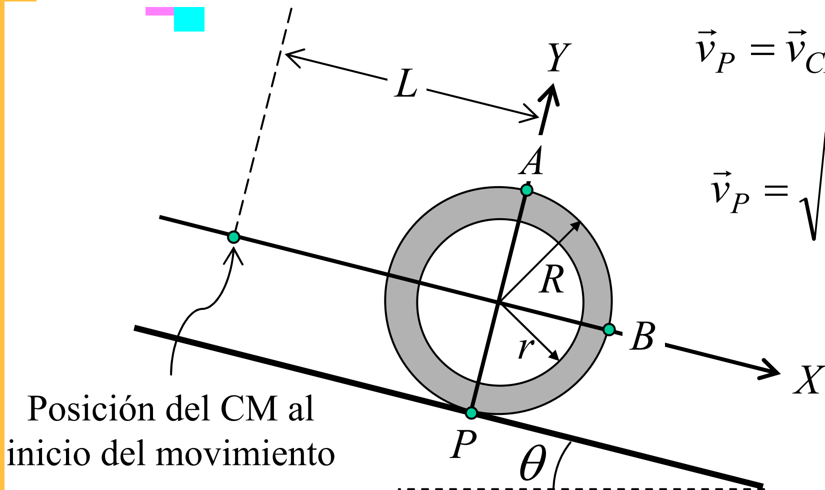
$$\vec{a}_B = \frac{g\sin\theta}{1+C}\,\vec{i} + \frac{g\sin\theta}{R(1+C)}R\left(-\vec{k}\times\vec{i}\right) - \frac{2g\sin\theta}{R^2(1+C)}L\cdot R\cdot\vec{i}$$

$$\vec{a}_B = \frac{g\sin\theta}{1+C}\left(1-\frac{2L}{R}\right)\vec{i} - \frac{g\sin\theta}{1+C}\;\vec{j}$$

www.yoquieroaprobar.es

P08.07. EXAMEN B2. CURSO 2007/2008 (CONTINUACIÓN)

Apartado c) Continuación



$$\vec{a}_{CM} = \frac{g\sin\theta}{1+C}\,\vec{i}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{g\sin\theta}{R(1+C)}\left(-\vec{k}\right)$$

$$\vec{v}_{CM} = \sqrt{\frac{2g\sin\theta}{1+C}L}\;\vec{i}$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2g\sin\theta}{1+C}L}\;\left(-\vec{k}\right)$$

$$C = \frac{1}{2}\left(1+\frac{r^2}{R^2}\right)$$

Punto inferior (P)

$$\vec{r}_{P/CM} = -R\,\vec{j}$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_{P/CM} = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega}\times\vec{r}_{B/CM}$$

$$\vec{v}_P = \sqrt{\frac{2g\sin\theta}{1+C}L}\;\vec{i} + \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2g\sin\theta}{1+C}L}\cdot R\left(-\vec{k}\times\left(-\vec{j}\right)\right)$$

$$\vec{v}_P = \sqrt{\frac{2g\sin\theta}{1+C}L}\;\vec{i} + \sqrt{\frac{2g\sin\theta}{1+C}L}\;\left(-\vec{i}\right) = 0$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{CM} + \vec{\alpha}\times\vec{r}_{P/CM} - \omega^2\,\vec{r}_{P/CM}$$

$$\vec{a}_P = \frac{g\sin\theta}{1+C}\,\vec{i} + \frac{g\sin\theta}{R(1+C)}R\left(-\vec{k}\times\left(-\vec{j}\right)\right) - \frac{2g\sin\theta}{R^2(1+C)}L\cdot R\cdot\left(-\vec{j}\right)$$

$$\vec{a}_P = \frac{2g\sin\theta}{1+C}\,\frac{L}{R}\,\vec{j}$$

El punto P es el centro instantáneo de rotación. Su velocidad es nula pero su aceleración no.

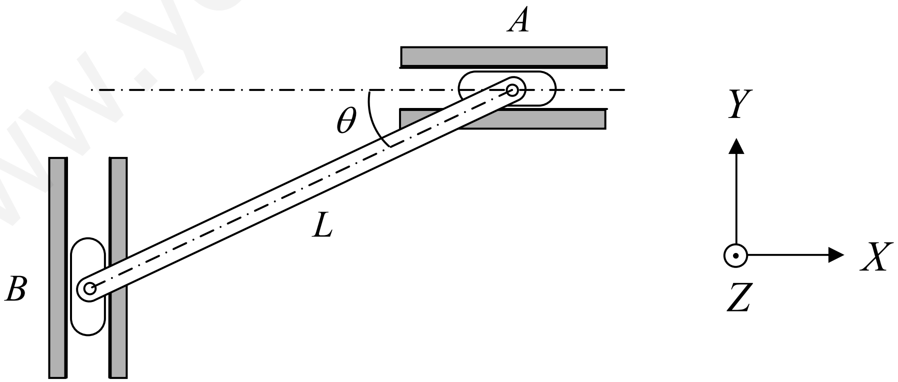
www.yoquieroaprobar.es

Una varilla delgada de longitud L desliza a lo largo de dos guías, una vertical y otra horizontal, según se indica en el esquema. Cuando el ángulo formado por la varilla y la horizontal es θ, la velocidad del extremo A es v_A y su aceleración es a_A, ambas dirigidas hacia la derecha. Determine según los ejes coordenados de la figura:

a) las componentes vectoriales de la velocidad del extremo B y de la velocidad angular en ese instante.

b) las componentes vectoriales de la aceleración del extremo B y de la aceleración angular en ese instante.

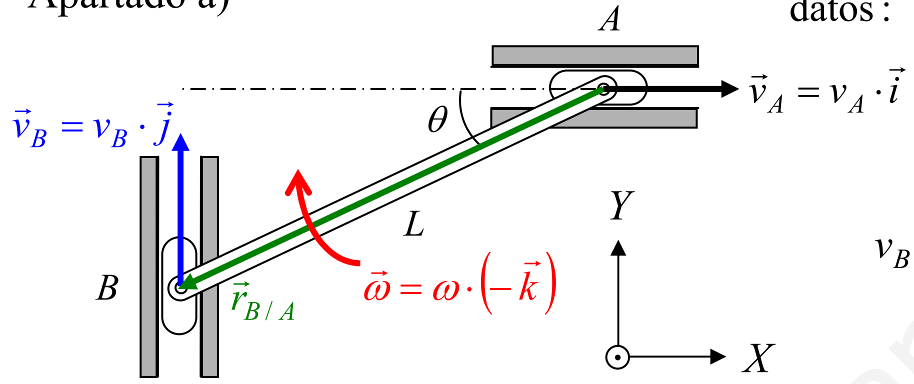
A	$v_A = 20$ cm/s	$L = 0.80$ m	$\theta = 30º$	$a_A = 1$ cm/s^2	(hacia la derecha)
B	$v_A = 15$ cm/s	$L = 0.80$ m	$\theta = 30º$	$a_A = 2$ cm/s^2	(hacia la derecha)
C	$v_A = 10$ cm/s	$L = 0.80$ m	$\theta = 15º$	$a_A = 3$ cm/s^2	(hacia la derecha)
D	$v_A = 5$ cm/s	$L = 0.80$ m	$\theta = 15º$	$a_A = 4$ cm/s^2	(hacia la derecha)



www.yoquieroaprobar.es

Apartado a)

datos : $v_A \quad L \quad \theta$ a determinar : $v_B \quad \omega$



$$\vec{r}_{B/A} = L\left[\cos\theta \cdot (-\vec{i}) + \sin\theta \cdot (-\vec{j})\right]$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$$

$$v_B \cdot \vec{j} = v_A \cdot \vec{i} + \omega \cdot L \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -1 \\ -\cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$v_B \cdot \vec{j} = v_A \cdot \vec{i} + \omega \cdot L \cdot \left[(-\sin\theta) \cdot \vec{i} + \cos\theta \cdot \vec{j}\right]$$

$$v_B \cdot \vec{j} = (v_A - \omega \cdot L \cdot \sin\theta) \cdot \vec{i} + \omega \cdot L \cdot \cos\theta \cdot \vec{j}$$

Igualando componentes

$$v_A - \omega \cdot L \cdot \sin\theta = 0 \qquad \omega = \frac{v_A}{L \cdot \sin\theta} \qquad \vec{\omega} = \frac{v_A}{L \cdot \sin\theta} \cdot (-\vec{k})$$

$$v_B = \omega \cdot L \cdot \cos\theta \qquad v_B = v_A \cdot \cot\theta \qquad \vec{v}_B = v_A \cdot \cot\theta \cdot \vec{j}$$

Resultados numéricos

	A	B	C	D
v_A (m/s) =	**0,20**	**0,15**	**0,10**	**0,05**
L (m) =	**0,80**	**0,80**	**0,80**	**0,80**
θ (º) =	**30,00**	**30,00**	**15,00**	**15,00**
θ (rad) =	0,5236	0,5236	0,2618	0,2618

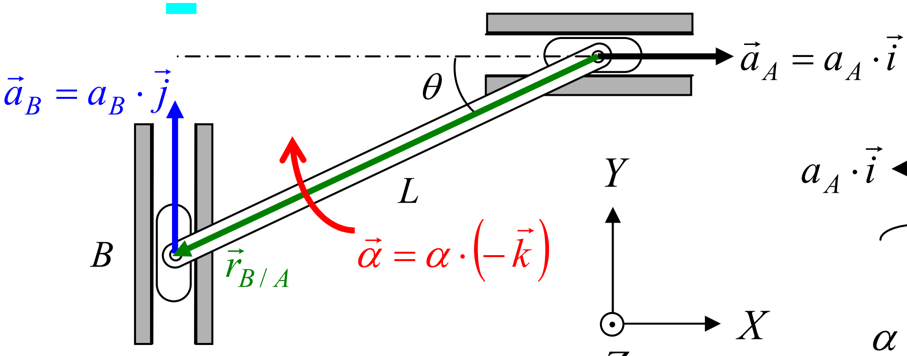
	A	B	C	D
ω (rad/s) =	0,50	0,38	0,48	0,24
v_B (m/s) =	0,35	0,26	0,37	0,19

www.yoquieroaprobar.es

AJB Lecciones de Física

Apartado b)

datos: $a_A \quad \omega \quad L \quad \theta$ a determinar: $a_B \quad \alpha$



$$\vec{r}_{B/A} = L\left[\cos\theta \cdot \left(-\vec{i}\right) + \sin\theta \cdot \left(-\vec{j}\right)\right]$$

$$\vec{a}_B = \underbrace{\vec{a}_A}_{a_A \cdot \vec{i}} + \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A}}_{\alpha \cdot L \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -1 \\ -\cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \alpha \cdot L \cdot \left[-\sin\theta \cdot \vec{i} + \cos\theta \cdot \vec{j}\right]} \underbrace{- \omega^2 \cdot \vec{r}_{B/A}}_{-\omega^2 \cdot L \cdot \left[-\cos\theta \cdot \vec{i} - \sin\theta \cdot \vec{j}\right]}$$

$$a_B \cdot \vec{j} = a_A \cdot \vec{i} + \alpha \cdot L \cdot \left[-\sin\theta \cdot \vec{i} + \cos\theta \cdot \vec{j}\right] - \omega^2 \cdot L \cdot \left[-\cos\theta \cdot \vec{i} - \sin\theta \cdot \vec{j}\right]$$

$$a_B \cdot \vec{j} = \left[a_A - \alpha \cdot L \cdot \sin\theta + \omega^2 \cdot L \cdot \cos\theta\right] \cdot \vec{i} + \left[\alpha \cdot L \cdot \cos\theta + \omega^2 \cdot L \cdot \sin\theta\right] \cdot \vec{j}$$

Igualando componentes

$$a_A - \alpha \cdot L \cdot \sin\theta + \omega^2 \cdot L \cdot \cos\theta = 0$$

$$\alpha = \frac{a_A + \omega^2 \cdot L \cdot \cos\theta}{L \cdot \sin\theta}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{a_A + \omega^2 \cdot L \cdot \cos\theta}{L \cdot \sin\theta} \cdot \left(-\vec{k}\right)$$

$$a_B = \alpha \cdot L \cdot \cos\theta + \omega^2 \cdot L \cdot \sin\theta$$

$$\vec{a}_B = \left(\alpha \cdot L \cdot \cos\theta + \omega^2 \cdot L \cdot \sin\theta\right) \cdot \vec{j}$$

Resultados numéricos

	A	B	C	D
a_A (m/s^2) =	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**
L (m) =	0,80	0,80	0,80	0,80
θ (º) =	30,00	30,00	15,00	15,00
θ (rad) =	0,5236	0,5236	0,2618	0,2618

	A	B	C	D
α (rad/s^2) =	0,46	0,29	1,02	0,41
a_B (m/s^2) =	0,42	0,26	0,83	0,33

www.yoquieroaprobar.es

P07.08. EXAMEN A3. CURSO 2006/2007

En una tubería por la que se suministra agua a un embalse se han colocado unos tubos piezométricos abiertos a la atmósfera (véase figura 1).

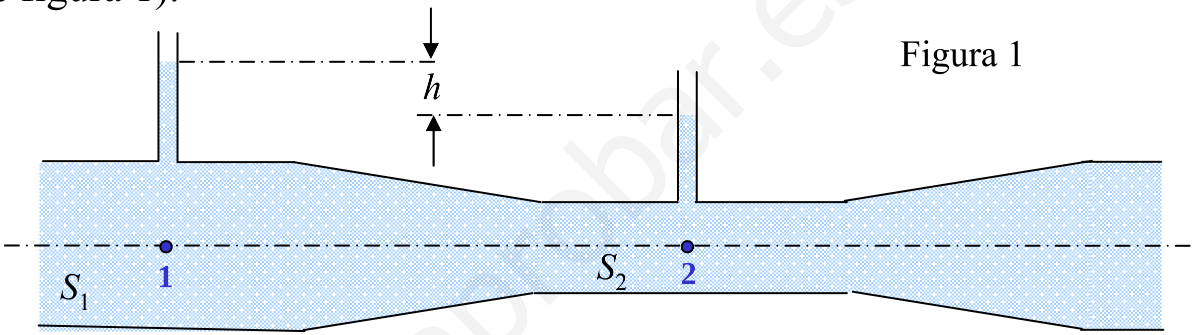


Figura 1

1. Si la diferencia de alturas entre los tubos es $h = 25$ cm y las secciones de la conducción en la parte ancha y en la parte estrecha son $S_1 = 350$ cm^2 y $S_2 = 200$ cm^2, respectivamente, determinar el caudal y el flujo másico que circula por la tubería.

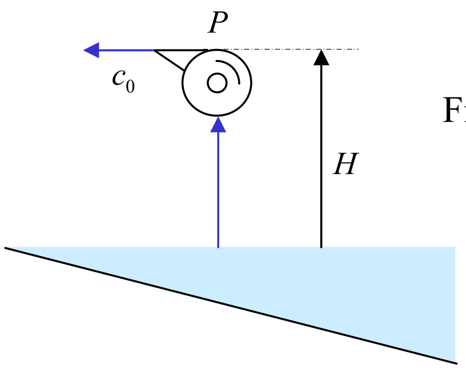


Figura 2

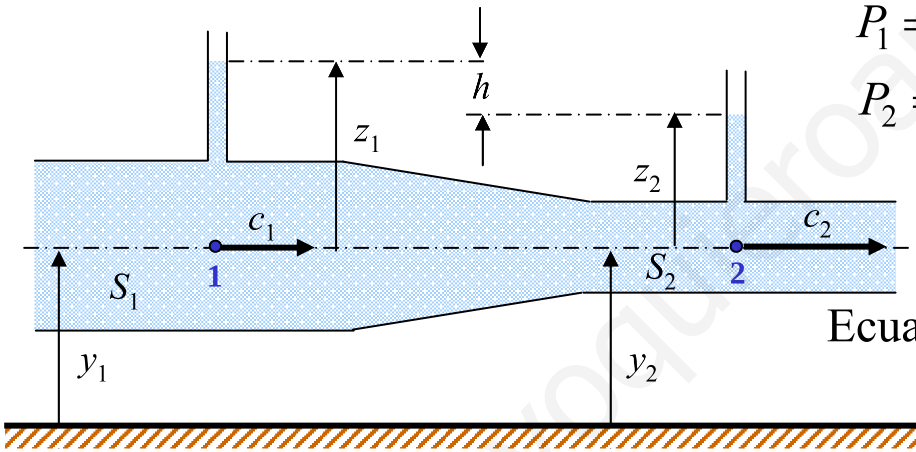
2. Del embalse toma agua una bomba P que eleva 3000 kg de líquido por minuto y la expulsa a una altura $H = 4$ m con una velocidad $c_0 = 8$ m/s (figura 2). ¿Qué potencia debe tener la bomba si despreciamos las pérdidas por rozamiento?.

Datos. Aceleración de la gravedad $g = 9.8$ m/s^2; densidad del agua $\rho = 1.00$ g/cm^3

www.yoquieroaprobar.es

Apartado 1

Ecuación de Bernoulli $P_1 + \frac{1}{2}\rho c_1^2 + \cancel{\rho g y_1} = P_2 + \frac{1}{2}\rho c_2^2 + \cancel{\rho g y_2}$ $\quad P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\left(c_2^2 - c_1^2\right)$



$$P_1 = P_{atm} + \rho g z_1$$

$$P_2 = P_{atm} + \rho g z_2$$

$$P_1 - P_2 = \rho g\left(z_1 - z_2\right)$$

$$\boxed{P_1 - P_2 = \rho g h}$$

Ecuación de continuidad $\quad c_1 = c_2 \dfrac{S_2}{S_1}$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\left(c_2^2 - c_2^2\frac{S_2^2}{S_1^2}\right) = \rho g h$$

$$\boxed{c_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1-\left(S_2/S_1\right)^2}}} \qquad \boxed{\dot{V}_2 = \dot{V} = S_2\sqrt{\frac{2gh}{1-\left(S_2/S_1\right)^2}}} \qquad \boxed{\dot{m}_2 = \dot{m} = \rho\, S_2\sqrt{\frac{2gh}{1-\left(S_2/S_1\right)^2}}}$$

www.yoquieroaprobar.es

2. Del embalse toma agua una bomba P que eleva M kg de líquido por minuto y la expulsa a una altura H con una velocidad c_0 (figura 2). ¿Qué potencia debe tener la bomba si despreciamos las pérdidas por rozamiento?.

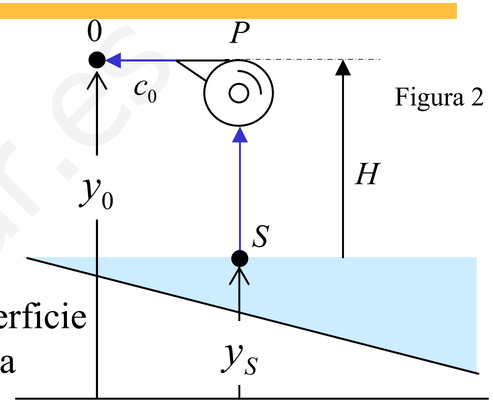


Figura 2

Aplicamos la ec. de Bernoulli en función de las alturas

La presión en S y en 0 es la misma

La velocidad de la superficie libre del embalse es nula

$$\cancel{\frac{P_S}{\rho g}}+\frac{1}{2g}\cancelto{0}{c_S^2}+y_S+H_P=\cancel{\frac{P_0}{\rho g}}+\frac{1}{2g}c_0^2+y_0$$

$$H_P=\frac{1}{2g}c_0^2+\underbrace{y_0-y_S}_{H}$$

$$H_P=\frac{1}{2g}c_0^2+H$$

Trabajo realizado por la bomba para elevar una masa de agua m a la altura H

$$W=m\,g\,H_P$$

Potencia necesaria:

$$\dot W=\frac{dW}{dt}=\frac{dm}{dt}g\,H_P \qquad \dot W=g\,H_P\,\dot m$$

La bomba eleva M kg por minuto:

$$\dot m=\frac{M\ (\text{kg})}{60\ (\text{s})}=\frac{1}{60}M\ \text{kg/s}$$

$$\dot W=\frac{1}{60}M\,g\,H_P$$

ρ (kg/m^3) =	1000
g (m/s^2) =	9,8
h (m) =	0,25
S_1 (m^2) =	3,50E-02
S_2 (m^2) =	2,00E-02

P_1-P_2 (Pa) =	2450
c_2 (m/s) =	2,70
c_1 (m/s) =	1,54
V (m^3/s) =	5,39E-02
m (kg/s) =	53,95

g (m/s^2) =	9,8
M (kg/min) =	3000
c_0 (m/s) =	8
H (m) =	4

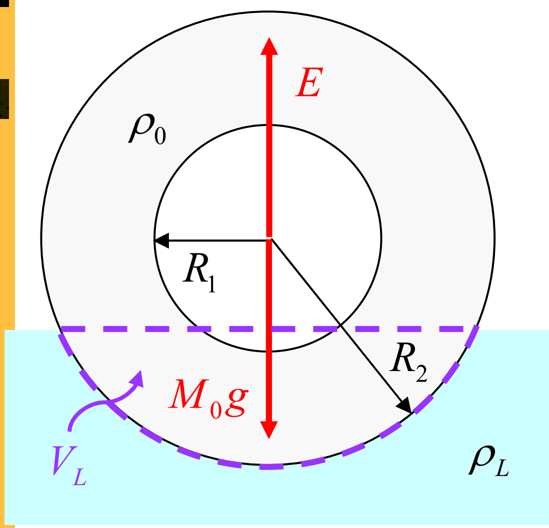
H_P (m) =	7,27
W (watt) =	3560,00

www.yoquieroaprobar.es

Una esfera hueca (radio interno R_1, radio externo R_2), hecha de un material de densidad ρ_0, flota en un líquido de densidad ρ_L. Cuando el hueco se rellena con un material de densidad ρ_m la esfera flota completamente sumergida con su parte superior justamente a ras de la superficie. (a) Calcule la fracción de volumen de la esfera hueca que flota por encima de la superficie *antes* de rellenarla. (b) Calcule la densidad ρ_m.

Datos numéricos

ρ_0 (g/cm^3) =	0,80
ρ_L (g/cm^3) =	1,60
R_1 (m) =	0,10
R_2 (m) =	0,20



(a) Volumen y masa de la esfera hueca:

$$V_0 = \frac{4}{3}\pi R_2^3 \qquad M_0 = \frac{4}{3}\pi \rho_0 \left(R_2^3 - R_1^3\right)$$

Por el principio de Arquímedes, la esfera sufre un empuje E igual al peso del fluido dsplazado. Como la esfera flota, E debe ser igual a su peso $M_0 g$.

$E = \rho_L V_L g$ $\quad$ V_L es el volumen de la parte sumergida

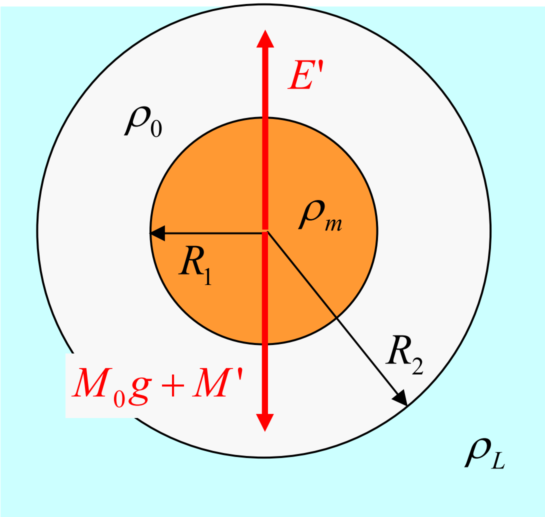
Igualando E con el peso, calculamos V_L $\quad E = \rho_L V_L g = M_0 g = \frac{4}{3}\pi \rho_0 \left(R_2^3 - R_1^3\right) g$

$$V_L = \frac{4}{3}\pi \frac{\rho_0}{\rho_L}\left(R_2^3 - R_1^3\right)$$

Fracción sumergida

$$\frac{V_L}{V_0} = \frac{\rho_0}{\rho_L}\frac{\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{R_2^3} = \frac{\rho_0}{\rho_L}\left(1 - \frac{R_1^3}{R_2^3}\right)$$

(b) Cuando el interior de la esfera se rellena con un material de densidad ρ_m, la esfera flota con su parte superior justo a ras de agua.



El empuje *E'* iguala al peso del fluido desplazado. Dicho peso es igual al peso de un volumen de fluido igual al volumen de la esfera.

$$E' = \rho_L V_0 g = \left(M_0 + M'\right) g \qquad M' = \rho_L V_0 - M_0$$

$$M' = \frac{4}{3}\pi \rho_L R_2^3 - \frac{4}{3}\pi \rho_0 \left(R_2^3 - R_1^3\right)$$

$$M' = \frac{4}{3}\pi \left(\rho_L - \rho_0\right) R_2^3 + \frac{4}{3}\pi \rho_0 R_1^3$$

La masa del material de relleno es

$$M' = \frac{4}{3}\pi \rho_m R_1^3$$

Igualando las dos expresiones para *M'*

$$\rho_m = \rho_0 + \left(\rho_L - \rho_0\right)\frac{R_2^3}{R_1^3}$$

Solución numérica

ρ_0 (g/cm^3) =	0,80
ρ_L (g/cm^3) =	1,60
R_1 (m) =	0,10
R_2 (m) =	0,20
V_L/V_0 =	0,44
ρ_m (g/cm^3) =	7,20

www.yoquieroaprobar.es

P07.10. EXAMEN B3. CURSO 2006/2007

Un tanque de forma cilíndrica es utilizado para almacenaje de agua. El área de su base es S m^2. Un grifo en la parte superior aporta un flujo másico de C_1 kg/s, mientras que un desagüe situado en la parte inferior deja salir fuera $C_2\,y$ kg/s, donde y representa la altura de la superficie del líquido sobre el fondo plano del tanque. Además, existe un rebosadero a una altura h m por encima del desagüe. Suponiendo que al comienzo de una jornada el tanque contiene inicialmente V_0 litros, y que se abren al mismo tiempo el grifo de entrada y el desagüe, calcular:

a) El tiempo que tarda la superficie del agua en alcanzar el rebosadero (si es que lo alcanza).

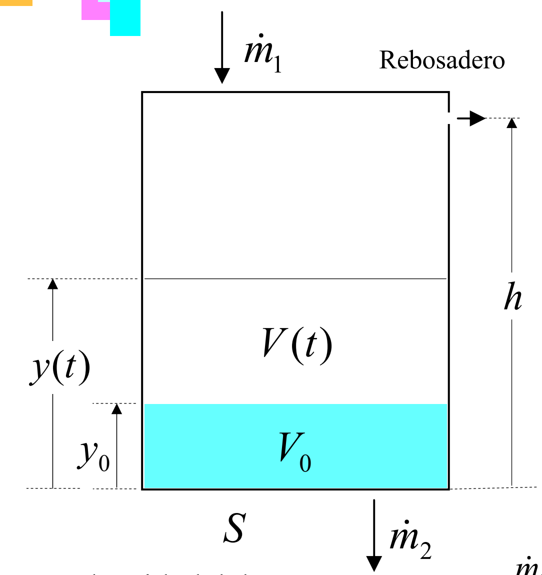
b) En caso de que no hubiese rebosadero, calcular el máximo nivel sobre el fondo que puede alcanzar el agua.

c) Haga una gráfica de la altura alcanzada por el agua en función del tiempo, señalando en la misma los valores obtenidos en los apartados a) y b).

www.yoquieroaprobar.es

P07.10. EXAMEN B3. CURSO 2006/2007 (CONTINUACIÓN)

FLUIDOS



$\rho \rightarrow$ densidad del agua

Ecuación de continuidad $\quad \dfrac{dm}{dt} = \dot{m}_1 - \dot{m}_2$

$$m(t) = \rho\, V(t) = \rho\, S\, y(t) \qquad y_0 = \frac{V_0}{S}$$

$$\frac{dm}{dt} = C_1 - C_2\, y(t) \qquad \frac{dm}{dt} = \rho \frac{dV(t)}{dt} = \rho\, S \frac{dy}{dt}$$

$$\dot{m}_1 = C_1 \text{ (kg/s)}$$

$$\dot{m}_2 = C_2 y \; (C_2 \rightarrow \text{kg/(m}\cdot\text{s))}$$

$$\rho\, S \frac{dy}{dt} = C_1 - C_2 y$$

$$\frac{dy}{C_1 - C_2 y} = \frac{1}{\rho\, S} dt \qquad \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{C_1 - C_2 y} = \frac{1}{\rho\, S} \int_0^t dt$$

$$\int \frac{dy}{C_1 - C_2 y} = -\frac{1}{C_2} \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{C_2} Ln\left(C_1 - C_2 y\right)$$

$$u = C_1 - C_2 y \;\rightarrow\; dy = -\frac{1}{C_2} du$$

$$-\frac{1}{C_2} Ln\left(C_1 - C_2 y\right)\Big|_{y_0}^{y} = \frac{1}{\rho\, S} t\Big|_0^t \qquad Ln\left(\frac{C_1 - C_2 y}{C_1 - C_2 y_0}\right) = -\frac{C_2}{\rho\, S} t \qquad C_1 - C_2 y = \left(C_1 - C_2 y_0\right)\exp\left(-\frac{C_2}{\rho\, S} t\right)$$

$$y = \frac{C_1}{C_2} - \left(\frac{C_1}{C_2} - y_0\right)\exp\left(-\frac{C_2}{\rho\, S} t\right)$$

www.yoquieroaprobar.es

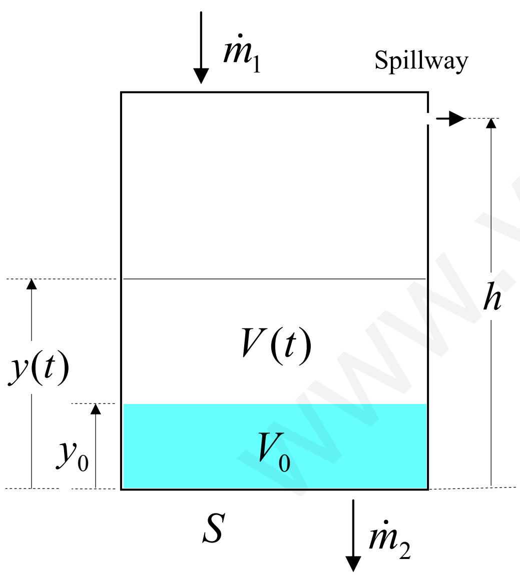
$$y = \frac{C_1}{C_2} - \left(\frac{C_1}{C_2} - y_0\right) \exp\left(-\frac{C_2}{\rho\, S} t\right)$$

a) El tiempo que tarda la superficie del agua en alcanzar el rebosadero (si es que lo alcanza).

$$t_{y=h} = -\frac{\rho\, S}{C_2} Ln \frac{\left(\frac{C_1}{C_2} - h\right)}{\left(\frac{C_1}{C_2} - y_0\right)}$$

b) En caso de no existir rebosadero, calcular el máximo nivel sobre el fondo que puede alcanzar el agua.

$$y_{máx} = \lim_{t\to\infty} \frac{C_1}{C_2} - \left(\frac{C_1}{C_2} - y_0\right) \exp\left(-\frac{C_2}{\rho\, S} t\right) = \frac{C_1}{C_2}$$



<u>Valores numéricos</u>

V_0 (litros) =	100
V_0 (m^3) =	0,1
S (m^2) =	10
ρ (kg/m^3) =	1000
C_1 (kg/s) =	0,6
C_2 (kg/m.s)=	0,5
y_0 (m) =	0,01
C_1/C_2 (m) =	1,2
C_1/C_2-y_0 =	1,19
$C_2/\rho\ S$ =	0,00005
h (m) =	1

$$y = 1.2 - 1.19 \exp(-0.00005\, t)$$

$$t_{y=h} = -\frac{1}{0.00005} Ln \frac{(1.2-1)}{(1.2-0.01)} = 35668 \text{ s}$$

$$y_{máx} = \lim_{t\to\infty} \frac{C_1}{C_2} - \left(\frac{C_1}{C_2} - y_0\right) \exp\left(-\frac{C_2}{\rho\, S} t\right)$$

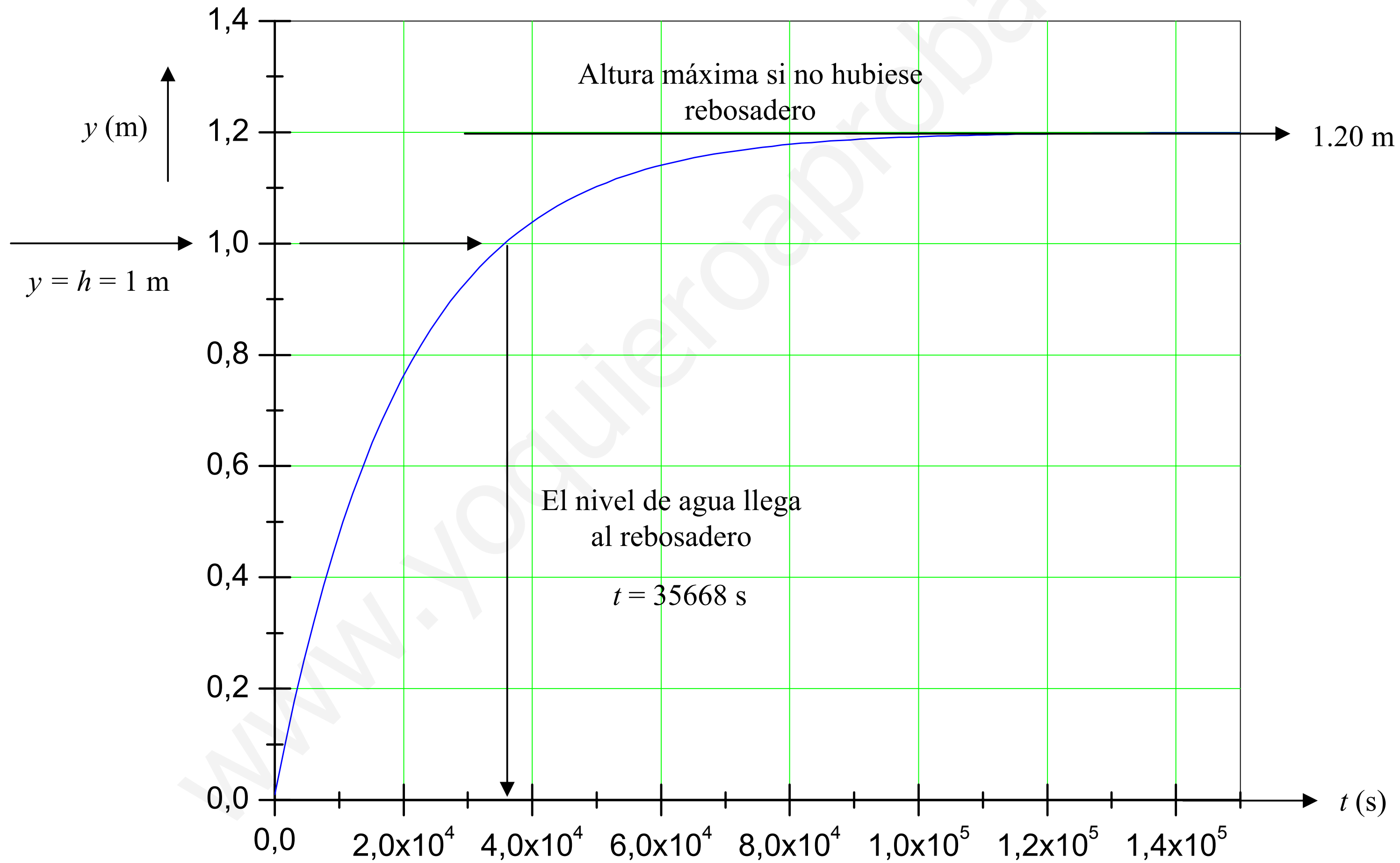
$$y_{máx} = \frac{C_1}{C_2} = 1.20 \text{ m}$$

www.yoquieroaprobar.es

c) Nivel de agua frente a tiempo

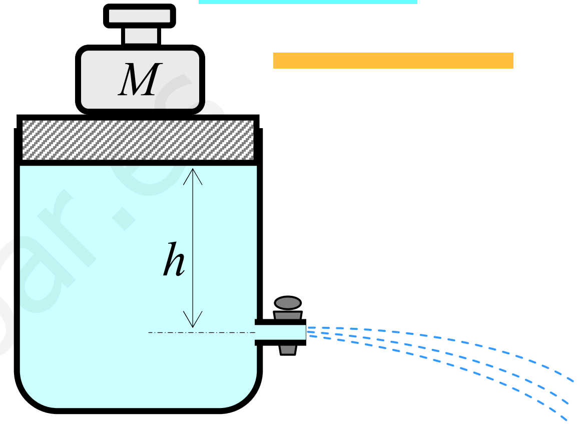
$$y = \frac{C_1}{C_2} - \left(\frac{C_1}{C_2} - y_0\right)\exp\left(-\frac{C_2}{\rho\, S}\, t\right)$$

$$y = 1.2 - 1.19\exp(-0.00005\ t)$$



www.yoquieroaprobar.es

P08.08. EXAMEN A3. CURSO 2007/2008



Un cilindro de sección S lleno de agua está cerrado por su parte superior mediante un pistón hecho con un material muy ligero que ajusta muy bien y sobre el que hay una pesa de masa M. Por debajo del nivel del agua, a una profundidad h, hay una llave que al abrirse permite el paso del agua a través de un conducto de sección efectiva A.

Datos numéricos: $M = 20\,\text{kg};\ S = 400\,\text{cm}^2;\ A = 1\,\text{cm}^2;\ h = 60\,\text{cm}$

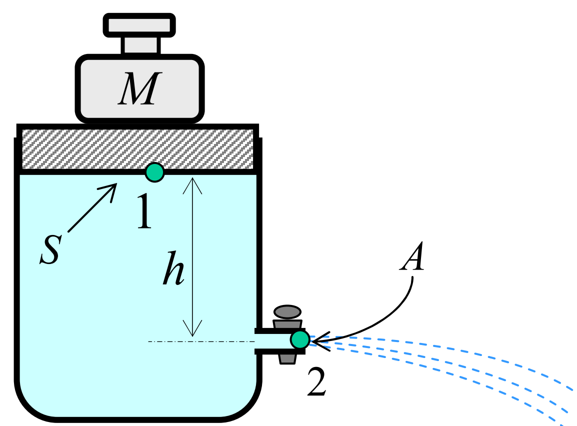
a) Determinar la velocidad de salida del agua en el momento en que se abre la llave.

b) Calcular el flujo de agua (en kg/s) y el caudal (en litro/s) en el instante en que se abre la llave.

Sean 1 y 2 los puntos señalados en la figura, entre los que aplicaremos Bernoulli

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\, c_1^2 + \rho\, g\, h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\, c_2^2 + \rho\, g\, h_2$$

Punto 1



<u>Velocidad</u> c_1: la suponemos nula pues S >> A, y eso quiere decir que la bajada del pistón será muy lenta.

<u>Presión</u> P_1: debe ser igual a la atmosférica más la ejercida por la pesa; despreciamos el peso del pistón al ser muy ligero.

$$P_1 = P_{atm} + \frac{Mg}{S}$$

<u>Altura</u> h_1: tomando como nivel de referencia el del orificio de salida, es evidente que $h_1 = h$.

www.yoquieroaprobar.es

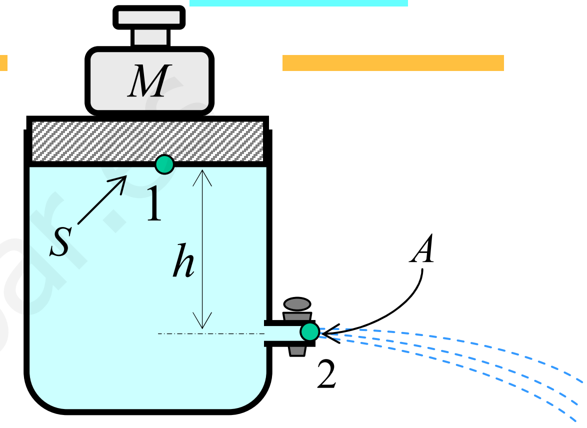
P08.08. EXAMEN A3. CURSO 2007/2008 (CONTINUACIÓN)

Punto 2

Velocidad c_2: es la incógnita a determinar.

Presión P_2: es igual a la presión atmosférica ya que se trata de un extremo abierto.

Altura h_2: tomando como nivel de referencia el del orificio de salida, es evidente que $h_2 = 0$.



La ecuación de Bernoulli queda

$$\cancel{P_{atm}} + \frac{Mg}{S} + \frac{1}{2}\rho \underbrace{\cancel{c_1^2}}_{0} + \rho\, g\, h = \cancel{P_{atm}} + \frac{1}{2}\rho\, c_2^2 + \rho\, g\, \underbrace{\cancel{h_2}}_{0}$$

Velocidad de salida: $c_2 = \sqrt{2g\left(\frac{M}{\rho\, S} + h\right)}$

Flujo másico: $\dot{m} = \rho\, A\, c_2$

Flujo volumétrico: $\dot{V} = \frac{\dot{m}}{\rho} = A\, c_2$

DATOS ENUNCIADO

M (kg) =	20
S (cm^2) =	400
A (cm^2) =	1
h (cm) =	60
S (m^2) =	0,04
A (m^2) =	1,0E-04
h (m) =	0,60

DATO CONOCIDO

ρ (kg/m^3) =	1000
c_2 (m/s) =	4,64
$\dot{m}$ (kg/s)=	0,46
$\dot{V}$ (litro/s) =	0,46

Con los datos del enunciado multiplicamos por 10^3 para obtener el resultado en litro/s) →

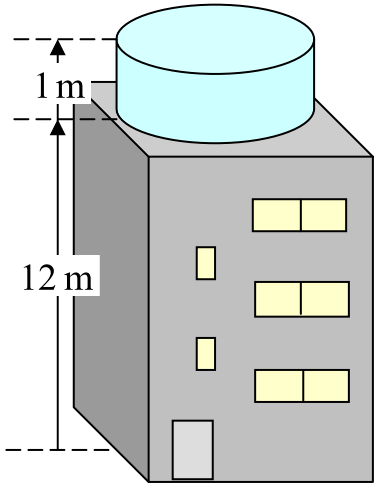
www.yoquieroaprobar.es

P08.09. EXAMEN B3. CURSO 2007/2008 (CONTINUACIÓN)

En la azotea de un edificio de tres pisos, a 12 m de altura sobre el nivel de la calle, hay un depósito de agua para servicio de la comunidad. La superficie del agua en el depósito alcanza una altura de 1 m sobre el fondo, y este nivel puede considerarse invariable aunque varios vecinos abran los grifos a la vez, pues el volumen almacenado en el depósito es grande comparado con el caudal de salida y además hay un mecanismo de alimentación que deja entrar agua de la red pública para compensar el gasto de agua. Las alturas sobre el nivel de la calle de los grifos de los distintos pisos se dan en la tabla adjunta.

Piso 1º: 4 m
Piso 2º: 7 m
Piso 3º: 10 m

Se sabe que las pérdidas de carga en las tuberías son de 8000 Pa/m, y dada la configuración de la fontanería de la finca, se puede admitir que la distancia de los grifos de cada piso a la tubería principal de bajada es despreciable.



Se pide:

a) Considerando que cada grifo tiene una abertura de salida equivalente a 0.40 cm^2, y que siempre se abren al máximo, determinar cuánto tiempo tardará en llenar un cubo de 20 litros el vecino del 1º, el vecino del 2º y el vecino del 3º.

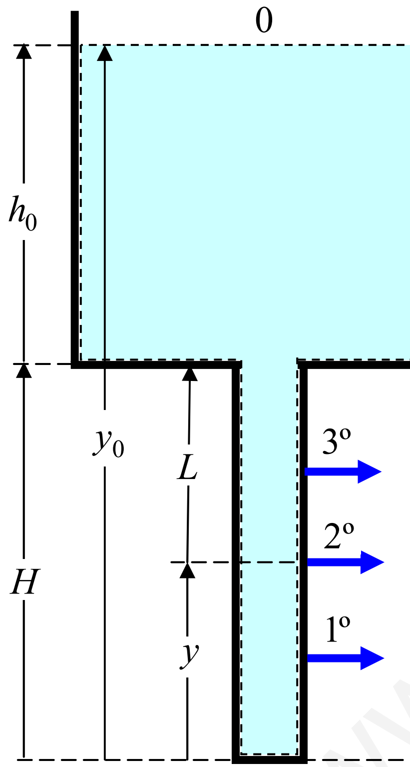
b) Un fin de semana en que el fontanero está ilocalizable, hay una avería en la alimentación del depósito, que queda interrumpida, y como resultado el depósito se va vaciando lentamente. El vecino del 2º llena una jarra de agua de 1 litro a las 12 h, y observa que tarda 4 segundos en llenarse. Cuando vuelve a llenar la misma jarra a las 14 h, el tiempo de llenado es de 5 segundos. Calcular cuánto ha descendido el nivel del depósito en ese intervalo.

Tome la aceleración de la gravedad como 10 m/s^2, y la densidad del agua como 1000 g/cm^3.

AJB Lecciones de Física

Apartado a)

D = Pérdida de carga en tuberías (Pa/m)



$$\cancel{P_0} + \frac{1}{2}\rho \cancel{c_0^2} + \rho g y_0 - D\cdot L = \cancel{P} + \frac{1}{2}\rho c^2 + \rho g y$$

$$c(y) = \sqrt{2g(y_0 - y) - 2D\cdot L/\rho} = \sqrt{2g(y_0 - y) - 2D\cdot(H-y)/\rho}$$

$L = H - y \qquad c(y) = \sqrt{2gy_0 - 2gy - 2D\cdot H/\rho + 2D\cdot y/\rho}$

$y_0 = H + h_0 \qquad c(y) = \sqrt{2g(H + h_0 - D\cdot H/\rho g) - 2gy(1 - D/\rho g)}$

$$c(y) = \sqrt{2g[h_0 + H(1 - D/\rho g) - y(1 - D/\rho g)]}$$

Cada piso se caracteriza por su diferente valor de y (altura sobre el suelo). El flujo volumétrico (caudal) al abrir el grifo en el piso situado a la altura y está dado por:

$$Q(y) = S\cdot c(y) = S\cdot\sqrt{2g[h_0 + H(1 - D/\rho g) - y(1 - D/\rho g)]}$$

El tiempo que tarda en llenarse un recipiente de 20 litros será:

$$t(20) = \frac{20\cdot 10^{-3}}{Q(y)} = \frac{20\cdot 10^{-3}}{S\cdot c(y)} \qquad \text{(unidades S.I.)}$$

www.yoquieroaprobar.es

P08.09. EXAMEN B3. CURSO 2007/2008 (CONTINUACIÓN)

Apartado a) continuación

$$c(y) = \sqrt{2\,g\left[h_0 + H(1 - D/\rho\,g) - y(1 - D/\rho\,g)\right]}$$

$$Q(y) = S \cdot c(y) = S \cdot \sqrt{2\,g\left[h_0 + H(1 - D/\rho\,g) - y(1 - D/\rho\,g)\right]}$$

$$t(20) = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{Q(y)} = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{S \cdot c(y)}$$

Piso 1º: $y_1 = 4$ m
Piso 2º: $y_2 = 7$ m
Piso 3º: $y_3 = 10$ m

g (m.s^{-2}) =	10
ρ (kg.m^{-3}) =	1000
h_0 (m) =	1
H (m) =	12
D (Pa/m) =	8000
S (m^2) =	4,00E-05
c_1 (m/s) =	7,21
c_2 (m/s) =	6,32
c_3 (m/s) =	5,29

	m^3/s	litro/s
Q_1 =	2,88E-04	0,29
Q_2 =	2,53E-04	0,25
Q_3 =	2,12E-04	0,21

	t (s)
t_1(20 l) =	69,3
t_2(20 l) =	79,1
t_3(20 l) =	94,5

Apartado b)

Cuando empieza a disminuir lentamente el nivel del depósito, la velocidad de salida en un piso situado a la altura y sobre el suelo sigue siendo

$$c(y) = \sqrt{2\,g\left[h_0 + H(1 - D/\rho\,g) - y(1 - D/\rho\,g)\right]}$$

… pero el valor de h_0 va disminuyendo lentamente.

$$h_0 = \frac{c^2(y)}{2\,g} - H(1 - D/\rho\,g) + y(1 - D/\rho\,g)$$

Puesto que $Q = S \cdot c$ $\rightarrow$ $h_0 = \dfrac{Q^2}{2\,g\,S^2} - H(1 - D/\rho\,g) + y(1 - D/\rho\,g)$

donde $Q = \dfrac{\text{capacidad}}{\text{tiempo llenado}}$

El vecino del 2º registra diferentes valores del caudal a diferentes horas:

$$\begin{cases} c_2(12\,h) = \dfrac{Q_2(12\,h)}{S} \\[2ex] c_2(14\,h) = \dfrac{Q_2(14\,h)}{S} \end{cases}$$

	t llenado 1 l		litro/s	m^3/s	c (m/s)	Nivel agua	m
A las 12 h	4	Q_2 (12 h) =	0,25	2,500E-04	6,25	h_0 (12 h) =	0,95
A las 14 h	5	Q_2 (14 h) =	0,20	2,000E-04	5,00	h_0 (14 h) =	0,25

$$\Delta h = 0.70\ \text{m}$$

www.yoquieroaprobar.es

Una pesa de plomo de forma cúbica con una arista a = 5 cm se adhiere firmemente al centro de una plancha cuadrada de corcho de espesor e = 6 cm (véase figura 2.a). A continuación el conjunto se introduce en una cubeta de agua con la pesa hacia arriba y se observa que flota de manera que la superficie del agua es rasante con la cara superior del corcho (figura 2.b).

a) Determine cuanto sobresaldrá el corcho de la superficie del agua si el conjunto se coloca al revés (es decir, calcule la distancia d en la figura 2.c).

b) Si se colocase otra pesa exactamente igual a la primera encima del corcho de la figura 2.c, ¿se hundiría el conjunto, o continuaría flotando? Razónese la respuesta.

Datos de densidades (g/cm^3): plomo 11.4; corcho 0.16

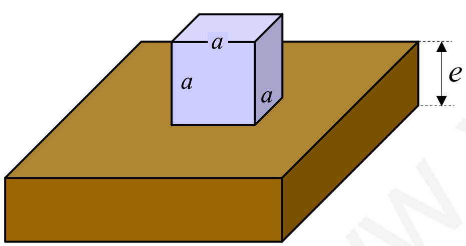


Figura 2.a

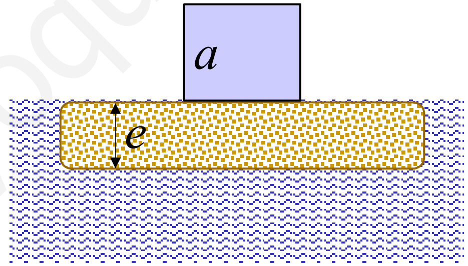


Figura 2.b

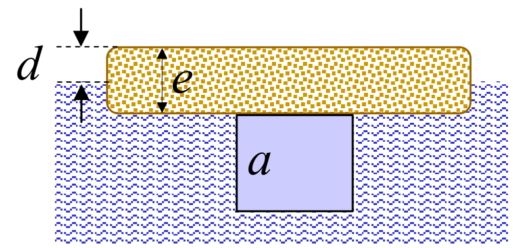


Figura 2.c

www.yoquieroaprobar.es

P09.06. EXAMEN A3. CURSO 2008/2009 (CONTINUACIÓN)

a) Determine cuanto sobresaldrá el corcho de la superficie del agua si el conjunto se coloca al revés (distancia *d* en la figura 2.c).

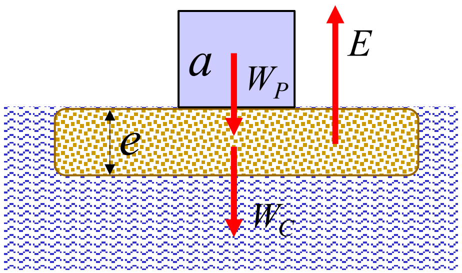


Figura 2.b

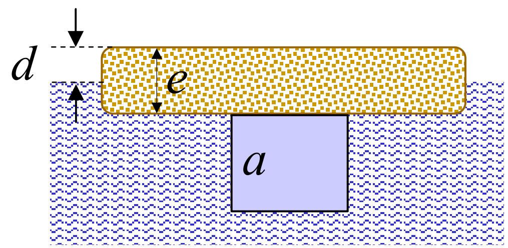


Figura 2.c

Principio de Arquímedes:

Cualquier sólido sumergido en un fluido sufre un empuje vertical hacia arriba igual al peso del volumen de fluido desalojado.

Usaremos los subíndices: *C* para el corcho, *P* para el plomo, *A* para el agua.
Sea *S* la superficie del corcho, que tendremos que determinar para calcular su volumen.

$$W_C = \rho_C \cdot e \cdot S \cdot g$$

El conjunto flota porque la parte sumergida (el corcho) sufre un empuje hacia arriba igual al peso total del corcho más la pesa.

$$W_P = \rho_P \cdot a^3 \cdot g$$

$$E = W_A = \rho_A \cdot e \cdot S \cdot g$$

$$E = W_A = W_C + W_P$$

$$\rho_A \cdot e \cdot S \cdot g = \rho_C \cdot e \cdot S \cdot g + \rho_P \cdot a^3 \cdot g$$

$$S = \frac{\rho_P \cdot a^3}{(\rho_A - \rho_C) \cdot e}$$

Cuando se coloque al revés (figura 2.c) estará sumergida la totalidad de la pesa de plomo y parte de la plancha de corcho, un volumen igual a $S \cdot (e-d)$.
Por lo tanto el nuevo empuje será $E' = W_A' = \rho_A \cdot S \cdot (e-d) \cdot g + \rho_A \cdot a^3 \cdot g$

$$\rho_A \cdot S \cdot (e-d) \cdot g + \rho_A \cdot a^3 \cdot g = \rho_C \cdot e \cdot S \cdot g + \rho_P \cdot a^3 \cdot g$$

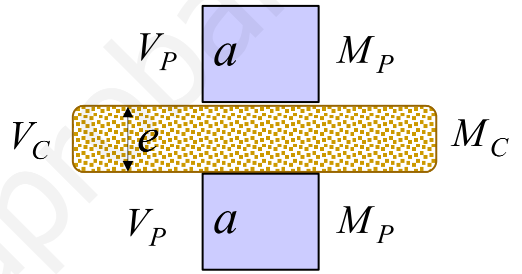
$$d = e - \frac{\rho_C \cdot S \cdot e + (\rho_P - \rho_A) \cdot a^3}{\rho_A \cdot S}$$

S (cm^2) =	**282,7**
lado (cm) =	**16,8**
d (cm) =	**0,44**

www.yoquieroaprobar.es

b) Si se colocase otra pesa exactamente igual a la primera encima del corcho de la figura 2.c, ¿se hundiría el conjunto, o continuaría flotando? Razónese la respuesta.

El cuerpo cuya flotación hay que estudiar está compuesto por tres partes: dos pesas iguales y la plancha de corcho. Las masas y volúmenes de cada parte se denotan por M_P , V_P y M_C, V_C .



La masa total es $M_T = M_C + 2M_P = \rho_C \cdot S \cdot e + 2\rho_P \cdot a^3$

El volumen total es $V_T = V_C + 2V_P = S \cdot e + 2a^3$

Por lo tanto su densidad media es $\rho = \dfrac{M_T}{V_T} = \dfrac{\rho_C \cdot S \cdot e + 2\rho_P \cdot a^3}{S \cdot e + 2 \cdot a^3}$

Haciendo los cálculos, la densidad resulta $\rho = 1.60\ \mathrm{g/cm^3}$

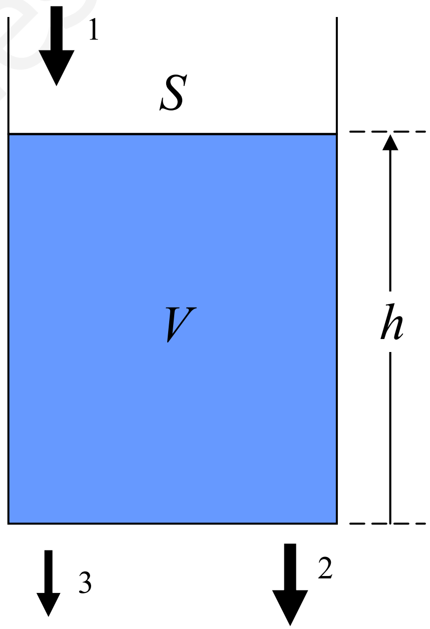
Si al calcular esta densidad media resulta un valor mayor que la densidad del agua, el conjunto se hundirá; si es menor, flotará.

La conclusión es, por lo tanto, que se hundirá.

www.yoquieroaprobar.es

AJB Lecciones de Física

Un depósito de agua para riego tiene forma cilíndrica, siendo el área de su sección recta $S = 4\ \text{m}^2$. El depósito se alimenta por medio de una conducción (1) que aporta un flujo de entrada constante de 7.8 kg/s. En el fondo del depósito hay dos tuberías de salida: la tubería principal (2) de diámetro 5 cm, y la tubería auxiliar (3), de diámetro 2 cm.



a) Por las mañanas la tubería (2) está abierta y la tubería (3) está cerrada. Así se mantiene un volumen constante de agua en el depósito, alcanzando su nivel una altura h (véase esquema). Calcular la altura h, el volumen V contenido en el depósito y la velocidad de salida del agua por la tubería (2).

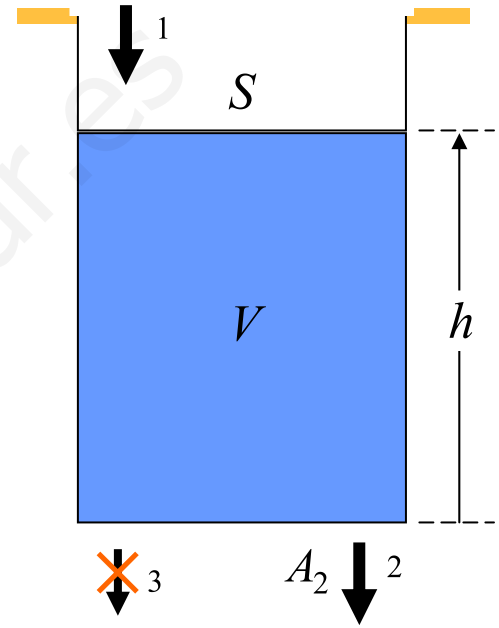
b) Por las tardes las tuberías (2) y (3) están ambas abiertas. El nivel de agua del depósito también se mantiene constante, pero a una altura diferente h'. Calcular la altura h', el volumen V' contenido en el depósito y la velocidad de salida del agua por las tuberías (2) y (3).

Densidad del agua: $1\ \text{g/cm}^3$

www.yoquieroaprobar.es

P09.07. EXAMEN A4. CURSO 2008/2009 (CONTINUACIÓN)

a) Por las mañanas la tubería (2) está abierta y la tubería (3) está cerrada. Así se mantiene un volumen constante de agua en el depósito, alcanzando su nivel una altura h (véase esquema). Calcular la altura h, el volumen V contenido en el depósito y la velocidad de salida del agua por la tubería (2).



Ecuación de continuidad $\dfrac{dm}{dt} = \dot{m}_1 - \dot{m}_2 = 0$

$$\dot{m}_2 = \dot{m}_1$$

$$\dot{m}_1 = 7.8 \text{ kg/s}$$

Puesto que la superficie libre del agua del depósito tiene velocidad nula, la velocidad de salida c_2 está dada por la ec. de Torricelli)

$$c_2 = \sqrt{2\,g\,h}$$

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \rho \cdot A_2 \cdot c_2 = \rho \cdot A_2 \cdot \sqrt{2\,g\,h}$$

$$h = \frac{1}{2\,g}\frac{\dot{m}_1^2}{\rho^2 \cdot A_2^2} = \frac{1}{2 \cdot 9.8}\frac{7.8^2}{1000^2 \cdot \left(1.963 \cdot 10^{-3}\right)^2} = 0.805 \text{ m}$$

$$A_2 = \pi \frac{D_2^2}{4} = \pi \frac{0.05^2}{4} = 1.963 \cdot 10^{-3} \ \text{m}^2$$

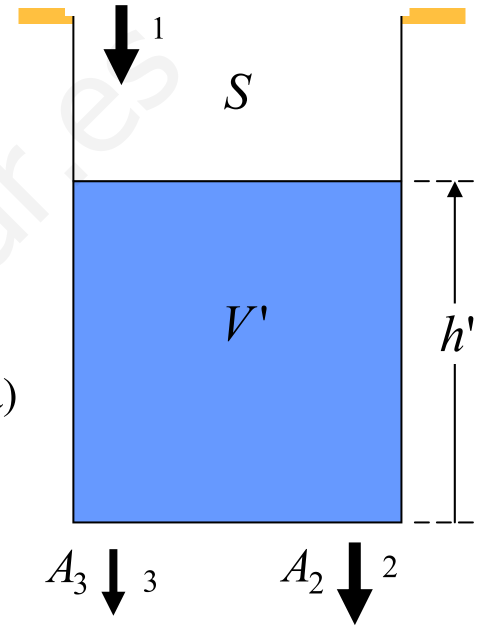
Una vez calculada la altura h, se determinan el volumen del depósito y la velocidad de salida

$$V = S \cdot h = 4 \cdot 0.805 = 3.22 \text{ m}^3$$

$$c_2 = \sqrt{2\,g\,h} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 0.805} = 3.97 \ \text{m/s}$$

Lecciones de Física
www.yoquieroaprobar.es

b) Por las tardes las tuberías (2) y (3) están ambas abiertas. El nivel de agua del depósito también se mantiene constante, pero a una altura diferente *h*'. Calcular la altura *h*', el volumen *V'* contenido en el depósito y la velocidad de salida del agua por las tuberías (2) y (3).



Ecuación de continuidad: aquí llamaremos $\dot{n}_2,\ \dot{n}_3$ a los flujos de salida por las tuberías 2 y 3 para distinguirlos de los del apartado a)

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_1 - \dot{n}_2 - \dot{n}_3 = 0$$

donde sigue siendo $\dot{m}_1 = 7.8\ \text{kg/s}$

Como antes, la superficie libre del agua del depósito tiene velocidad nula, y las velocidades de salida *c'*$_2$ y *c'*$_3$ están dadas por la ec. de Torricelli (ambas son iguales pues la entrada a las dos tuberías está a la misma profundidad

$$c'_2 = c'_3 = \sqrt{2\,g\,h'}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{n}_2 &= \rho\cdot A_2\cdot c'_2 = \rho\cdot A_2\cdot\sqrt{2\,g\,h'} \\ \dot{n}_3 &= \rho\cdot A_3\cdot c'_3 = \rho\cdot A_3\cdot\sqrt{2\,g\,h'} \end{aligned}\right\}\ \dot{m}_1 = \dot{n}_2 + \dot{n}_3$$

$$\dot{m}_1 = \rho\cdot(A_2 + A_3)\cdot\sqrt{2\,g\,h'}$$

$$h' = \frac{1}{2\,g}\,\frac{\dot{m}_1^2}{\rho^2\cdot(A_2 + A_3)^2} = 0.598\ \text{m}$$

$$A_2 = 1.963\cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$$
$$A_3 = 3.142\cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$$

Una vez calculada la altura *h'*, se determinan el volumen del depósito y la velocidad de salida

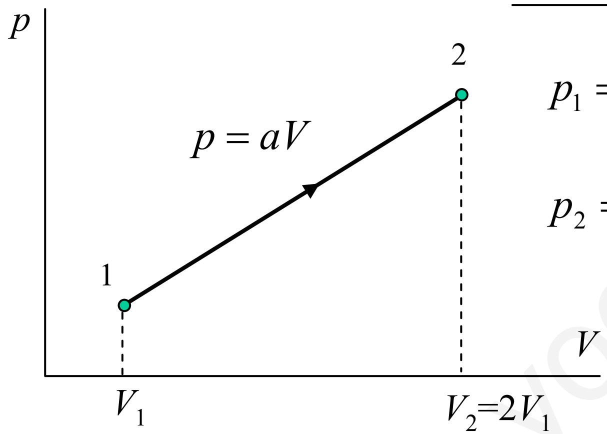
$$V' = S\cdot h' = 4\cdot 0.598 = 2.39\ \text{m}^3$$

$$c'_2 = c'_3 = \sqrt{2\,g\,h'} = \sqrt{2\cdot 9.8\cdot 0.598} = 3.42\ \text{m/s}$$

www.yoquieroaprobar.es

10 moles de un gas ideal monoatómico inicialmente a 20 ºC se expanden reversiblemente de acuerdo con la relación $p = aV$, donde p, V representan la presión y el volumen, respectivamente, y a es una constante. El volumen al final de la expansión es el doble del volumen inicial. La constante universal de los gases es R = 8.314 J/(K·mol)

1. Representar el proceso en un diagrama p-V (1 p).
2. Determinar la temperatura final (1.5 p).
3. Calcular el trabajo en la expansión (1.5 p).



Conocemos $T_1 = 20º\ C = 293\ K$

Debemos encontrar una relación que nos permita hallar el valor de T_2 sabiendo T_1 y la relación de volúmenes inicial y final.

$$p_1 = aV_1 \qquad T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR}$$

$$p_2 = aV_2 \qquad T_2 = \frac{p_2 V_2}{nR}$$

$$V_2 = mV_1 \qquad \text{(en este caso } m = 2\text{)}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_1}{V_2} \qquad \frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1 V_1}{p_2 V_2} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 = \left(\frac{1}{m}\right)^2 \qquad T_2 = m^2\, T_1$$

$$T_2 = m^2\, T_1 = 2^2 \cdot 293 = 1172\ \text{K} = 899º\ \text{C}$$

Trabajo en la expansión:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} a\, V\, dV = \frac{a}{2}\left[V^2\right]_{V_1}^{V_2} \qquad W = \frac{a}{2}\left[V_2^2 - V_1^2\right] = \frac{a}{2}\left[m^2 - 1\right]V_1^2 = \frac{nR}{2}\left[m^2 - 1\right]T_1$$

$$W = \frac{10 \cdot 8.314}{2}\left[2^2 - 1\right] \cdot 293 = 36540\ \text{J}$$

$$V_1^2 = \frac{nRT_1}{a} \qquad T_1 = \frac{aV_1^2}{nR}$$

www.yoquieroaprobar.es

Un gas ideal de coeficiente adiabático $\gamma = 1.4$ ejecuta un ciclo de potencia formado por las siguientes etapas:

1→2. El gas se expande politrópicamente (índice de politropía $k_1 = 1.35$) desde las condiciones $V_1 = 1$ litro, $P_1 = 7.87$ bar, hasta que su volumen se duplica.

2→3. El gas se enfría a volumen constante, hasta que su temperatura es $T_3 = 280$ K.

3→1. El gas se comprime politrópicamente hasta restituir las condiciones iniciales (sea k_2 el índice de politropía de este proceso, que deberá determinarse).

Se supone que todas las etapas son reversibles. La masa de gas es $n = 0.20$ moles, y la constante universal de los gases es $R = 8{,}314$ J/(K·mol). Se pide:

A) Calcular las coordenadas de presión y temperatura en todos los puntos notables del ciclo (2 p).

B) Determinar el índice k_2 y representar gráficamente el ciclo en un diagrama de Clapeyron (P-V) (2 p).

C) Calcular el trabajo asociado con cada una de las etapas del ciclo, discutiendo su signo (2 p).

D) Calcular el calor asociado con cada una de las etapas del ciclo, discutiendo su signo (2 p).

E) Determinar el rendimiento del ciclo (1 p).

F) Calcular la variación de entropía de cada una de las etapas del ciclo (2 p).

www.yoquieroaprobar.es

P07.12. EXAMEN B4. CURSO 2006/2007 (CONTINUACIÓN)

R (J/K.mol)	**8,314**
n (mol)	**0,2**
V_1 (l)	**1**
P_1 (bar)	**7,87**
V_2 (l)	**2**
T_3 (K)	**280**
k_1	**1,35**
γ	**1,4**

V_1 (m^3)	0,001
P_1 (Pa)	787000
V_2 (m^3)	0,002
k_1	1,35
V_3 (m^3)	0,002
k_2	1,7573
c_v (J/K.mol)	20,785

Cálculo del índice k_2

$$V_3 = V_2 = 2\,V_1$$

Se calcula p_3 usando la ley de los gases ideales

$$p_1 V_1^{k_2} = p_3 V_3^{k_2}$$

$$k_2 = \frac{\ln(p_3/p_1)}{\ln(V_1/V_3)}$$

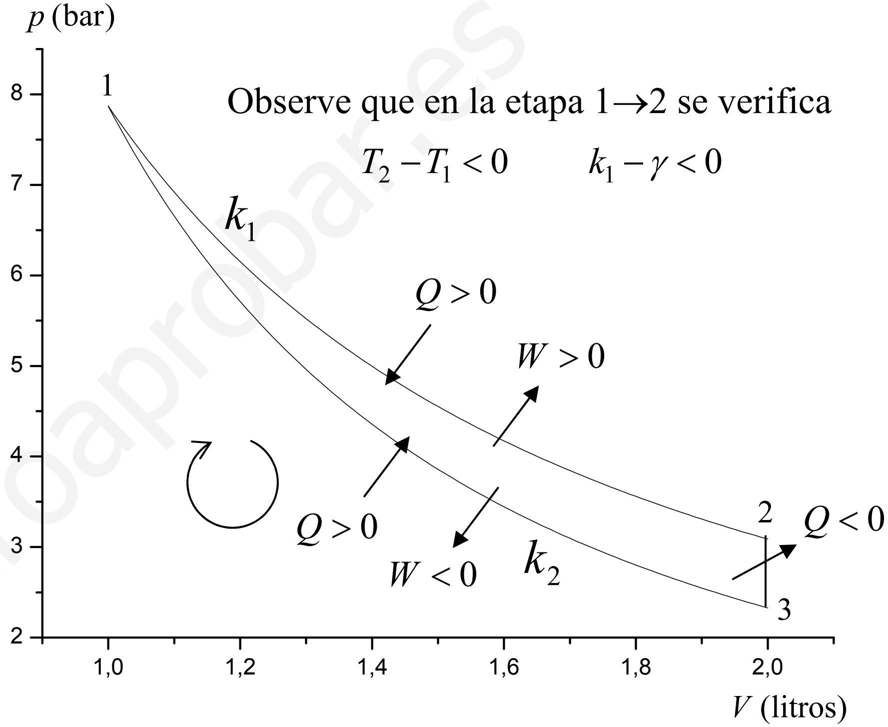
$P_1V_1^{k1}$ 70,141449

$P_1V_1^{k2}$ 4,2073464

	T (K)	V (m^3)	P (Pa)
1	473,3	0,001	787000
2	371,3	0,002	308734
3	280,0	0,002	232792

En azul, los datos iniciales

Los demás se calculan usando la ecuación de estado del gas ideal, y para T_2, la ecuación adiabática en función de T y V.



Observe que en la etapa 1→2 se verifica

$T_2 - T_1 < 0$ $\quad k_1 - \gamma < 0$

$$W_{politrópico} = \frac{p_iV_i - p_fV_f}{k-1} = \frac{nR(T_i - T_f)}{k-1}$$

$$Q_{politrópico} = \frac{p_iV_i - p_fV_f}{k-1} + \frac{p_fV_f - p_iV_i}{\gamma-1} = nR(T_f - T_i)\left[\frac{k-\gamma}{(k-1)(\gamma-1)}\right]$$

$$Q_V = n\,c_V\,(T_3 - T_2) \qquad c_V = \frac{R}{(\gamma-1)}$$

www.yoquieroaprobar.es

P07.12. EXAMEN B4. CURSO 2006/2007 (CONTINUACIÓN)

Calor y trabajo

	Q (J)	W (J)	ΔU (J)
Polit 1→2	60,55	484,38	-423,83
Isoc 2→3	-379,71	0,00	-379,71
Polit 3→1	379,13	-424,41	803,54
Qin, Wout	439,68	59,97	0,00

$$W_{politrópico} = \frac{p_i V_i - p_f V_f}{k-1} = \frac{nR(T_i - T_f)}{k-1}$$

$$Q_{politrópico} = \frac{p_i V_i - p_f V_f}{k-1} + \frac{p_f V_f - p_i V_i}{\gamma - 1} = nR(T_f - T_i)\left[\frac{k-\gamma}{(k-1)(\gamma-1)}\right]$$

$$Q_V = n\, c_V\, (T_3 - T_2)$$

Rendimiento $\eta = \frac{W_{out}}{Q_{in}} = \frac{W_{polit1\to2} + W_{polit3\to1}}{Q_{polit1\to2} + Q_{polit3\to1}} = \frac{59.97}{439.68} = 0.136$

Incremento de entropía (politrópicas)

$$\Delta S = -nR \ln\frac{V_i}{V} \qquad V = \left(\frac{p_f V_f^{\gamma}}{p_i V_i}\right)^{1/(\gamma-1)}$$

Incremento de entropía (isocórica)

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q_V}{T} = \int_{T_i}^{T_f} \frac{n c_v dT}{T} = n\frac{R}{\gamma-1}\ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$$

Cálculo entropías
Volumen auxiliar $V = \left(\frac{p_f V_f^{\gamma}}{p_i V_i}\right)^{1/(\gamma-1)}$

$V(k_1)$ (m^3)	0,00109	
$V(k_2)$ (m^3)	0,00371	
ΔS_{12} (J/K)	0,144	Politropica
ΔS_{23} (J/K)	-1,174	Isocora
ΔS_{31} (J/K)	1,030	Politropica
ΔS_{ciclo} (J/K)	0,000	

www.yoquieroaprobar.es

P08.10. EXAMEN A4. CURSO 2007/2008

Una muestra de 0.25 mol de gas ideal monoatómico, cuyo coeficiente adiabático es $\gamma = 5/3$, describe un **ciclo de potencia** que puede asimilarse a un **ciclo ideal de Carnot** de rendimiento 40%. Los volúmenes y presiones conocidos de este ciclo se dan en la tabla adjunta. Rellene los cuadros de resultados, usando las unidades indicadas, para cada uno de los apartados siguientes:

Etapa 1→2	Expansión isoterma
V_1 (litros) =	3,50
P_1 (bar) =	4,00
V_2 (litros) =	7,00

a) Calcule los calores específicos del gas a presión y a volumen constante. Dato: $R = 8{,}314$ J·K^{-1}·mol^{-1}

c_P (J/mol.K) =

c_V (J/mol.K) =

b) Determine todas las coordenadas V, p, T de los puntos notables del ciclo que no están dadas en el enunciado. Haga una gráfica del ciclo usando el reverso de esta hoja, numerando dichos puntos notables en el sentido de recorrido del ciclo.

	V (m^3)	p (Pa)	T (K)
1			
2			
3			
4			

c) Determine el trabajo, el calor y la variación de energía interna en cada etapa del ciclo.

	W (J)	Q (J)	ΔU (J)
1→2			
2→3			
3→4			
4→1			

d) Calcule la variación de entropía de cada etapa del ciclo.

	ΔS (J/K)
1→2	
2→3	
3→4	
4→1	

e) Calcule el índice politrópico del proceso que une directamente el punto de mayor presión del ciclo con el punto de mayor volumen del ciclo.

k =

Cada resultado correcto (total = 40):		
Apartado a) +2	Apartado b) +1	Gráfica: +5
Apartado c) +1	Apartado d) +1	Apartado e) +6

www.yoquieroaprobar.es

P08.10. EXAMEN A4. CURSO 2007/2008 (CONTINUACIÓN)

a) Calcule los calores específicos del gas a presión y a volumen constante. Dato: $R = 8{,}314\ \mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}mol^{-1}}$

$$\left.\begin{array}{l} \gamma = \dfrac{c_P}{c_V} \\ c_P - c_V = R \end{array}\right\} \quad c_V = \frac{R}{(\gamma-1)} \quad c_P = \frac{\gamma R}{(\gamma-1)} \quad \gamma = 5/3$$

c_P (J/mol.K) =	20,785
c_V (J/mol.K) =	12,471

b) Determine todas las coordenadas *V, p, T* de los puntos notables del ciclo que no están dadas en el enunciado. Haga una gráfica del ciclo usando el reverso de esta hoja, numerando dichos puntos notables en el sentido de recorrido del ciclo.

	V (m³)	p (Pa)	T (K)
1	V_1	p_1	
2	V_2		
3			
4			

(isoterma 1→2)

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} = T_2$$

$$T_3 = (1-\eta_R)\cdot T_1 = T_4$$

(isoterma 3→4)

$$\eta_R = 1 - \frac{T_B}{T_A} = 1 - \frac{T_3}{T_1}$$

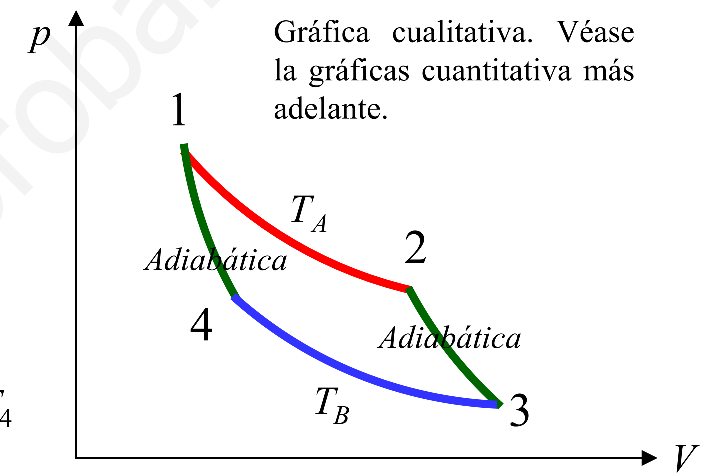
$$p_2 = \frac{nRT_2}{V_2} \qquad p_3 = \frac{nRT_3}{V_3} \qquad p_4 = \frac{nRT_4}{V_4}$$

$$V_3 = V_2\left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{1/(\gamma-1)} \qquad V_4 = V_1\left(\frac{T_1}{T_4}\right)^{1/(\gamma-1)}$$

$$T_2\, V_2^{\gamma-1} = T_3\, V_3^{\gamma-1} \qquad T_1\, V_1^{\gamma-1} = T_4\, V_4^{\gamma-1}$$

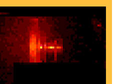
(adiabática 2→3) (adiabática 4→1)

Gráfica cualitativa. Véase la gráficas cuantitativa más adelante.



Las coordenadas de cada punto se calcularán usando la ecuación estado del gas ideal (cuando se conozcan dos coordenadas de un punto) o la ecuación de la adiabática (en forma de relación *T*-*V* en otro caso).

www.yoquieroaprobar.es



P08.10. EXAMEN A4. CURSO 2007/2008 (CONTINUACIÓN)

c) Determine el trabajo, el calor y la variación de energía interna en cada etapa del ciclo.

Procesos isotermos: $\Delta U = 0$

Procesos adiabáticos: trabajo

Procesos adiabáticos: $Q = 0$

$$W_{adiab41} = \frac{R(T_4 - T_1)}{\gamma - 1} \qquad W_{adiab23} = \frac{R(T_2 - T_3)}{\gamma - 1}$$

$$W_{adiab} = \frac{R(T_i - T_f)}{\gamma - 1}$$

	W (J)	Q (J)	ΔU (J)
1→2			
2→3			
3→4			
4→1			

$$\Delta U_{23} = -W_{adiab23}$$

$$\Delta U_{41} = -W_{adiab41}$$

$$Q_{isot34} = W_{isot34} = R\,T_3 \ln \frac{V_4}{V_3}$$

$$Q_{isot12} = W_{isot12} = R\,T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$Q_{isot} = W_{isot} = R\,T \ln \frac{V_f}{V_i}$$

Procesos adiabáticos: $\Delta U = -W_{adiab}$

Procesos isotermos: calor y trabajo

d) Calcule la variación de entropía de cada etapa del ciclo.

$$\Delta S_{isot} = \frac{Q_{isot}}{T}$$

$$\Delta S_{12} = \frac{Q_{isot12}}{T_1} \qquad \Delta S_{34} = \frac{Q_{isot34}}{T_1}$$

	ΔS (J/K)
1→2	
2→3	
3→4	
4→1	

$\Delta S_{adiab} = 0$ (reversible)

e) Calcule el índice politrópico del proceso que une directamente el punto de mayor presión del ciclo con el punto de mayor volumen del ciclo.

$$p_1 V_1^k = p_3 V_3^k$$

$$\ln p_1 + k \ln V_1 = \ln p_3 + k \ln V_3$$

$$k(\ln V_1 - \ln V_3) = \ln p_3 - \ln p_1$$

$$k = \frac{\ln(p_3 / p_1)}{\ln(V_1 / V_3)}$$

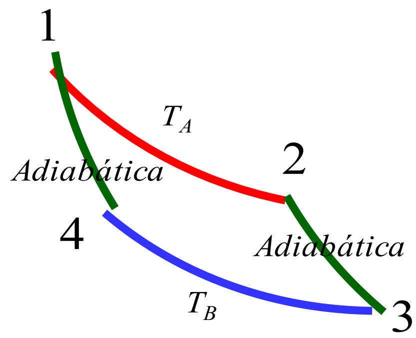
www.yoquieroaprobar.es

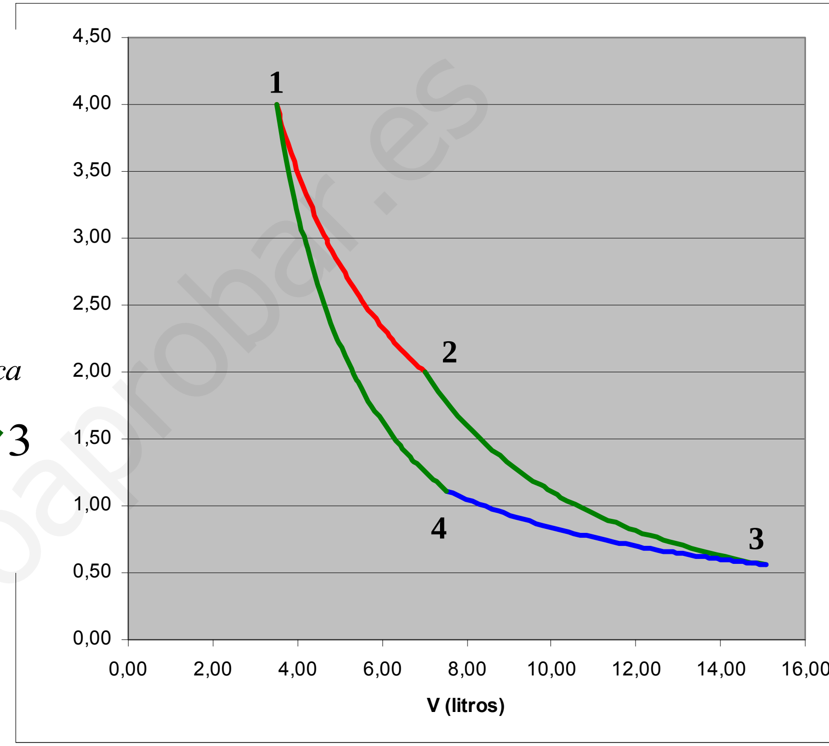
P08.10. EXAMEN A4. CURSO 2007/2008 (CONTINUACIÓN)

c_P (J/mol.K) =	20,785
c_V (J/mol.K) =	12,471

R (J/mol.K) = 8,314

γ =	1,67	
n (mol) =	0,25	
V_1 (litros) =	3,50	3,50E-03 m3
P_1 (bar) =	4,00	4,00E+05 Pa
V_2 (litros) =	7,00	7,00E-03 m3
η_R =	0,40	





$T_A = T_1\,(\mathrm{K}) = T_2\,(\mathrm{K}) =$ 673,6

$T_B = (1-\eta_R)\cdot T_A$ $\quad T_B = T_3\,(\mathrm{K}) = T_4\,(\mathrm{K}) =$ 404,1

Apdo e) $k = \dfrac{\ln(p_3/p_1)}{\ln(V_1/V_3)}$ $\quad k =$ 1,350

	(1)
γ =	1,67
n (mol) =	0,25
V_1 (litros) =	3,50
P_1 (bar) =	4,00
V_2 (litros) =	7,00
η_R =	0,40

	ΔS (J/K)
1→2	1,441
2→3	0,000
3→4	-1,441
4→1	0,000

$k =$ 1,350

Coordenadas *V, p, T*

	V (m^3)	p (Pa)	T (K)
1	**0,0035**	**400000**	673,6
2	**0,0070**	200000	673,6
3	0,0151	55771	404,1
4	0,0075	111542	404,1

	W (J)	Q (J)	ΔU (J)
1→2	970,4	970,4	0,0
2→3	840,0	0,0	-840,0
3→4	-582,2	-582,2	0,0
4→1	-840,0	0,0	840,0

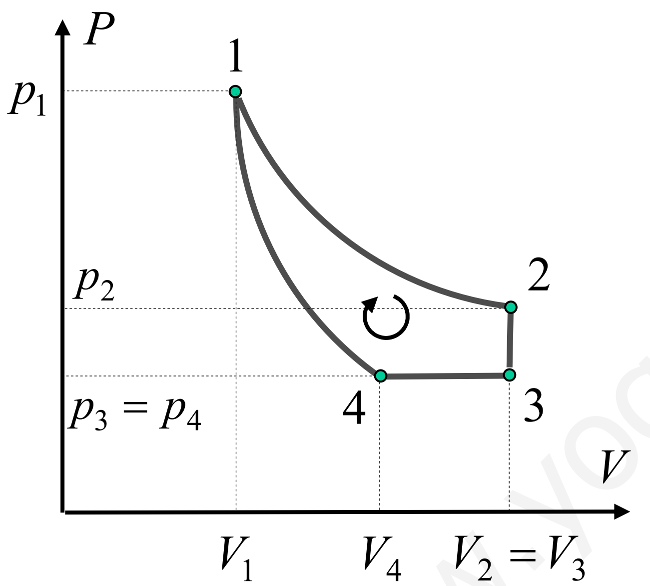
www.yoquieroaprobar.es

P08.11. EXAMEN B4. CURSO 2007/2008

Un mol de gas ideal de coeficiente adiabático 1.40 describe el ciclo termodinámico de la figura. Se trata de un ciclo descrito en sentido horario en el que la etapa 1→2 es isoterma, siendo su temperatura 750 K, y la etapa 4→1 es adiabática, siendo la presión p_4 = 1.05 bar. Además, se conocen las siguientes relaciones de volumen:

$$\frac{V_2}{V_1} = 8/3 \qquad \frac{V_4}{V_3} = 0.90$$

Dato: $R = 8{,}314\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$



Suponiendo que todas las etapas son reversibles, analice el ciclo y realice las siguientes tareas, completando el cuadro *Resultados*:

a) Calcule las coordenadas *V*, *p*, *T* de los puntos notables del ciclo que no estén dadas en el enunciado. Emplee los resultados obtenidos para dibujar una gráfica a escala en el plano *p* - *V*.

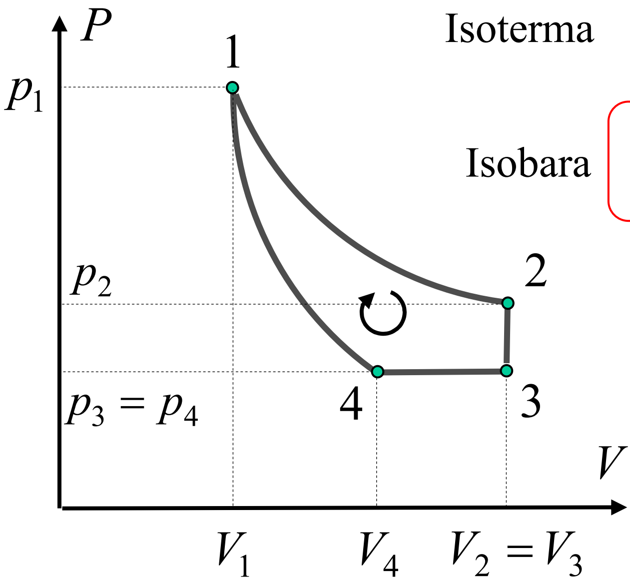
b) Razone a partir del primer principio los signos de los intercambios de calor del gas en cada etapa del ciclo. Después calcule para cada etapa el calor, el trabajo y la variación de energía interna del gas. Con esos resultados, determine el rendimiento, si se trata de un ciclo de potencia, o la eficiencia, si es un ciclo de refrigeración.

c) Calcule la variación de entropía en cada una de las etapas del ciclo.

d) Considere una máquina térmica funcionando de acuerdo con este ciclo, pero de forma irreversible. Si su rendimiento fuese el 40% de la máquina reversible ideal, ¿cuánto calor habría que suministrarle para obtener el mismo trabajo que la máquina térmica ideal proporcionaría en cada ciclo de funcionamiento?

www.yoquieroaprobar.es

Apartado a) Coordenadas de los puntos notables



Isoterma $T_1 = T_2$ $\qquad \boxed{\dfrac{V_2}{V_1} = a}$ $\qquad p_1V_1 = p_2V_2 \Rightarrow \dfrac{p_1}{p_2} = a$

Isobara $\boxed{\dfrac{V_4}{V_3} = b}$ $\qquad \dfrac{V_4}{V_3}\dfrac{V_2}{V_1} = a \cdot b \Rightarrow \dfrac{V_4}{V_1} = a \cdot b$

Isocora $V_3 = V_2$

Adiabática $\quad p_1V_1^{\gamma} = p_4V_4^{\gamma} \qquad T_1\,V_1^{\gamma-1} = T_4\,V_4^{\gamma-1}$

$$T_4 = T_1\left(\frac{V_1}{V_4}\right)^{\gamma-1} = T_1\left(\frac{1}{a \cdot b}\right)^{\gamma-1}$$

$$V_4 = \frac{nRT_4}{p_4} \qquad V_3 = V_2 = \frac{V_4}{b}$$

$$V_1 = \frac{1}{a \cdot b}V_4 \qquad p_1 = \frac{nRT_1}{V_1} \qquad p_2 = \frac{nRT_2}{V_2} \qquad T_3 = \frac{p_3V_3}{nR}$$

Datos iniciales

	V	p	T
1	V_1	p_1	T_1
2	V_2	p_2	T_2
3	V_3	p_3	T_3
4	V_4	p_4	T_4

Relaciones de volumen conocidas

$$\frac{V_2}{V_1} = a \qquad \frac{V_4}{V_3} = b$$

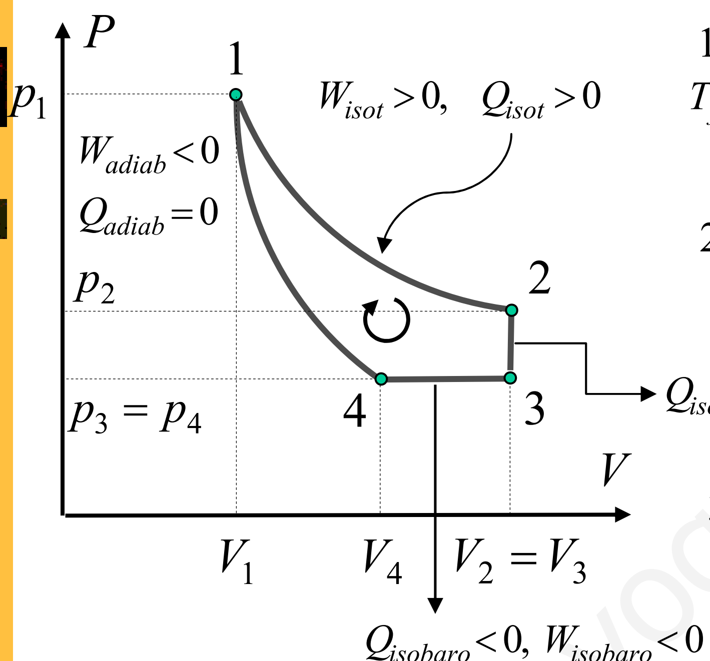
Cálculo de valores numéricos: véase más adelante

www.yoquieroaprobar.es

P08.11. EXAMEN B4. CURSO 2007/2008 (CONTINUACIÓN)

Apartado b) Trabajo, calor, variaciones de energía interna

El ciclo es recorrido en sentido horario. Esto corresponde a un ciclo de potencia, con trabajo neto del ciclo positivo.



1→2 Expansión isoterma

$T_{final} = T_{inicial} \qquad V_{final} > V_{inicial}$

$$\begin{cases} W_{isot} = Q_{isot} = n\,R T_1 \ln\dfrac{V_2}{V_1} \\ \Delta U_{isot} = U_2 - U_1 = 0 \end{cases}$$

2→3 Enfriamiento isocoro

$T_{final} < T_{inicial} \qquad V_{final} = V_{inicial}$

$$\begin{cases} Q_{isocoro} = n\,c_V\left(T_3 - T_2\right) \qquad W_{isocoro} = 0 \\ \Delta U_{isocoro} = U_3 - U_2 = Q_{isocoro} \end{cases}$$

3→4 Enfriamiento isobaro

$T_{final} < T_{inicial} \qquad V_{final} < V_{inicial}$

$$\begin{cases} Q_{isob} = n\,c_P\left(T_4 - T_3\right) \\ W_{isob} = p_4\left(V_4 - V_3\right) \\ \Delta U_{isobaro} = U_4 - U_3 = Q_{isobaro} - W_{isobaro} \end{cases}$$

4→1 Compresión adiabática

$T_{final} > T_{inicial} \qquad V_{final} < V_{inicial}$

$$\begin{cases} W_{adiab} = \dfrac{p_4 V_4 - p_1 V_1}{\gamma - 1} = \dfrac{nR\left(T_4 - T_1\right)}{\gamma - 1} \qquad Q_{adiab} = 0 \\ \Delta U_{adiab} = U_1 - U_4 = -W_{adiab} \end{cases}$$

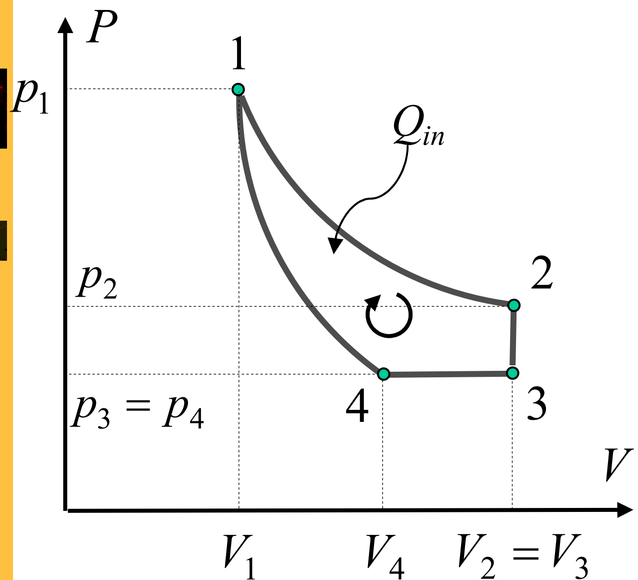
$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} \quad ; \quad c_P - c_V = R$$

$$c_V = \frac{R}{\gamma - 1} \quad ; \quad c_P = \frac{\gamma\, R}{\gamma - 1}$$

Cálculo de valores numéricos: véase más adelante

www.yoquieroaprobar.es

Apartado c) Variaciones de entropía



$$\Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{\delta Q_{isot}}{T} = \int_1^2 \frac{\delta W_{isot}}{T} = \int_{T_3}^{T_4} \frac{nRT}{T}\frac{dV}{V} = n\,R\ln\frac{V_2}{V_1}$$ Isoterma

$$\Delta S_{23} = \int_{T_2}^{T_3} \frac{\delta Q_V}{T} = \int_{T_2}^{T_3} \frac{n\,c_V}{T}dT = n\,c_V \ln\frac{T_3}{T_2}$$ Isocora

$$\Delta S_{34} = \int_{T_3}^{T_4} \frac{\delta Q_p}{T} = \int_{T_3}^{T_4} \frac{n\,c_p}{T}dT = n\,c_p \ln\frac{T_4}{T_3}$$ Isobara

$\Delta S_{41} = 0$ Adiabática

Cálculo de valores numéricos: véase más adelante

Apartado d) Rendimiento

El rendimiento del ciclo, bajo el supuesto de que todas las etapas son reversibles, viene dado por

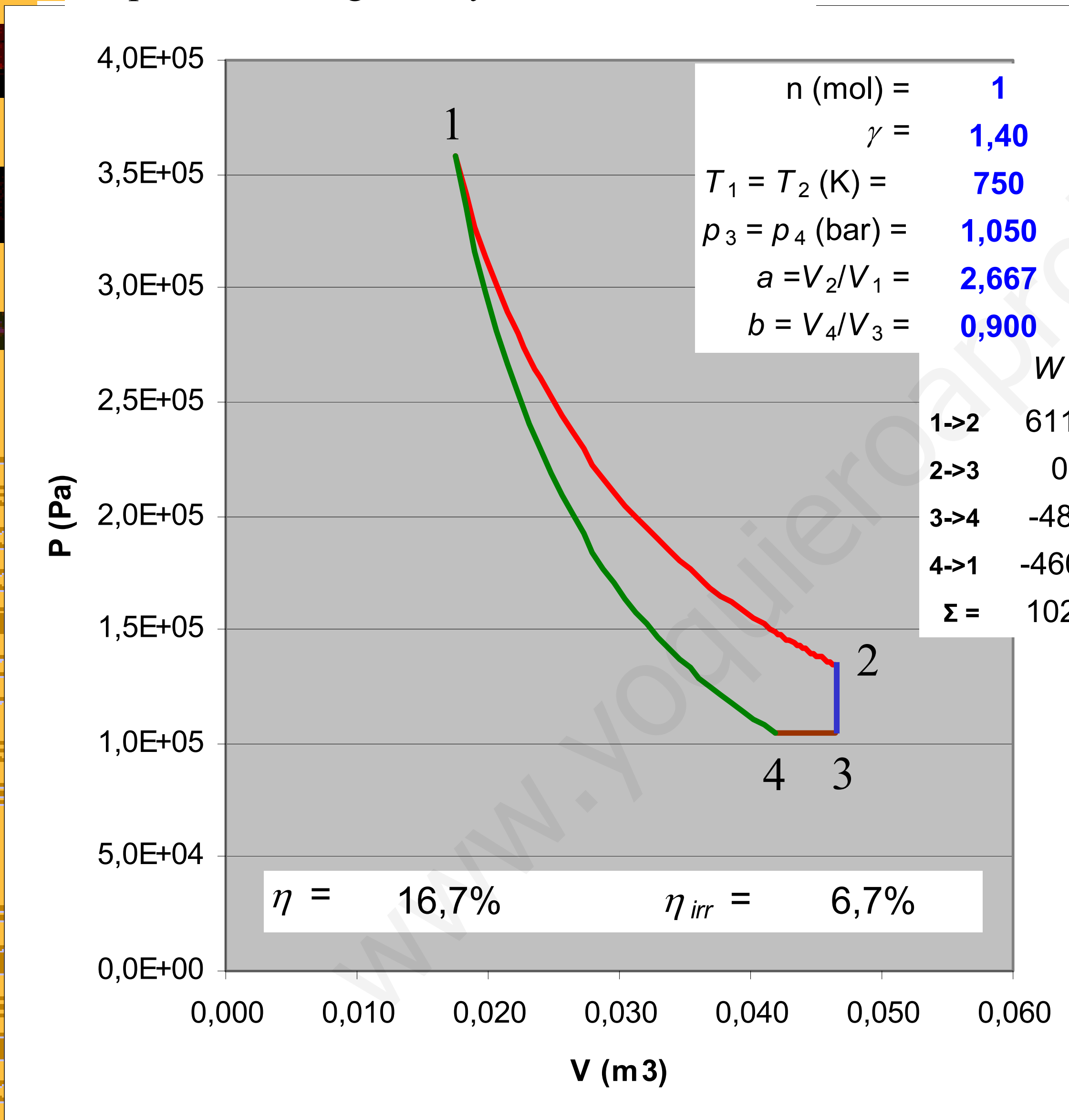
$$\eta = \frac{W_{neto}}{Q_{in}} = \frac{W_{isot} + W_{isob} + W_{adiab}}{Q_{isot}}$$

Si llamamos q (=0.40) a la fracción del rendimiento ideal que tenemos en el ciclo real (irreversible), el rendimiento de dicho ciclo irreversible será:

$$\eta_{irr} = q \cdot \eta$$

P08.11. EXAMEN B4. CURSO 2007/2008 (CONTINUACIÓN)

Representación gráfica y valores numéricos



	V (m^3)	p (Pa)	T (K)
1	0,0174	357672	**750,0**
2	0,0465	134127	**750,0**
3	0,0465	**105000**	587,1
4	0,0418	**105000**	528,4

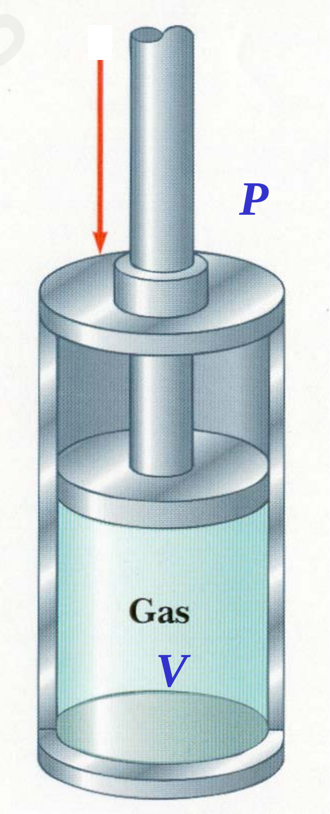
	W (J)	Q (J)	ΔU (J)	ΔS (J/K)
1->2	6116,0	6116,0	0,0	8,1546
2->3	0,0	-3385,3	-3385,3	-5,0887
3->4	-488,1	-1708,5	-1220,3	-3,0659
4->1	-4605,6	0,0	4605,6	0,0000
Σ =	1022,2	1022,2	0,0	0,0

www.yoquieroaprobar.es

Un cilindro cerrado con un pistón deslizante contiene 11.2 litros de gas ideal a una temperatura de 273 K y a una presión de 1013.25 mb. Dicho gas se somete a los siguientes procesos cuasiestáticos:

Proceso 1→2. El gas sufre una compresión politrópica de índice k =1.32 desde su estado inicial hasta que su temperatura alcanza 373 K.

Proceso 2→3. Una vez alcanzados los 373 K, se deja que el gas se enfríe a volumen constante hasta que su temperatura es 298 K.



a) Dibuje esquemáticamente los procesos 1→2 y 2→3 en un diagrama de Clapeyron, justificando el signo del trabajo y de la variación de energía interna en cada uno de ellos.

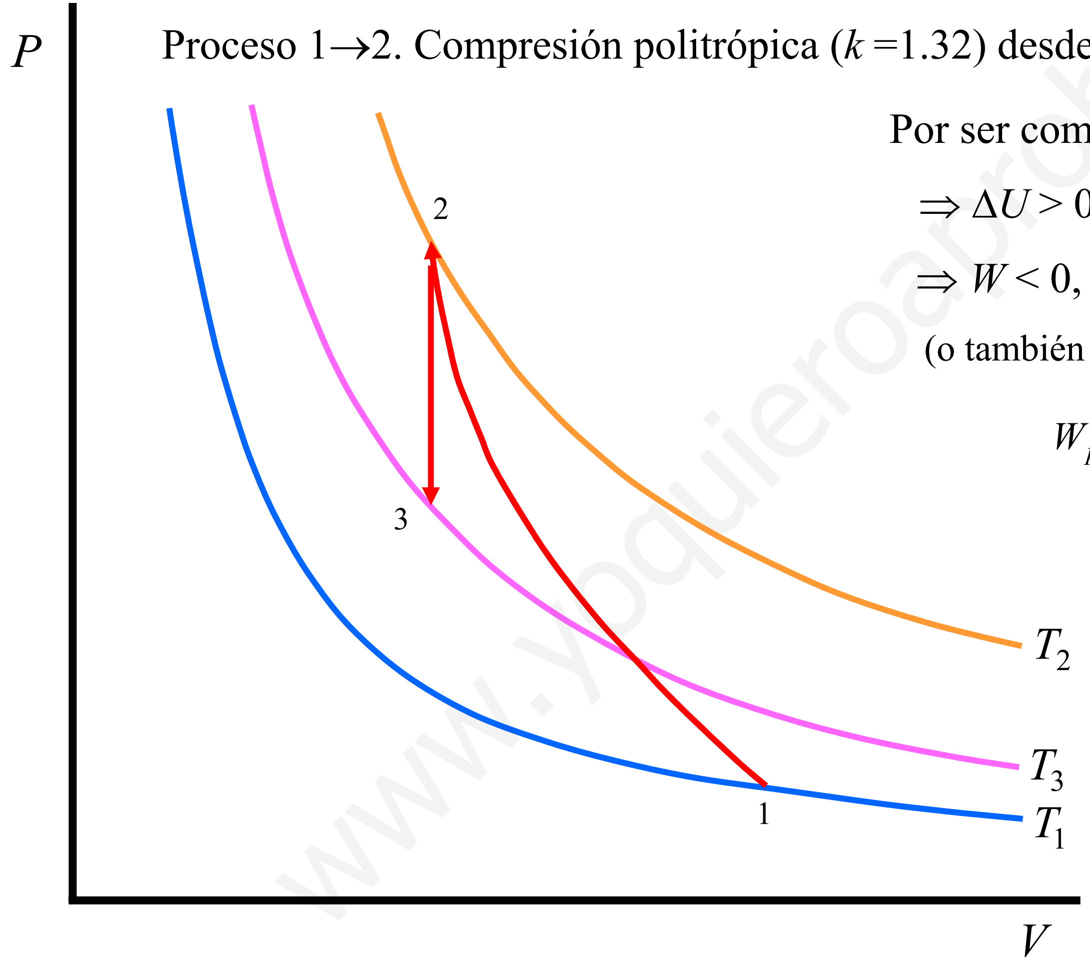
b) Calcular las coordenadas V, P no conocidas de los estados 2 y 3 (exprese los resultados en unidades S.I).

c) Si el calor específico a volumen constante es $c_V = 5R/2$ J·mol^{-1}·K^{-1}, determinar la variación de entropía del gas encerrado en el cilindro durante el proceso 2→3. ¿Qué signo y qué unidades tiene esta variación de entropía?

Dato: constante universal de los gases $R = 8.314$ J·mol^{-1}·K^{-1}

www.yoquieroaprobar.es

a) Dibuje esquemáticamente los procesos 1→2 y 2→3 en un diagrama de Clapeyron, justificando el signo del trabajo y de la variación de energía interna en cada uno de ellos.



Proceso 1→2. Compresión politrópica (k =1.32) desde T_1 = 273 K hasta T_2 = 373 K.

Por ser compresión P y T crecen, V disminuye

⇒ $\Delta U > 0$, pues la temperatura aumenta.

⇒ $W < 0$, pues es un proceso de compresión.

(o también $W < 0$, pues la temperatura aumenta)

$$W_{polit12} = \frac{P_1 V_1 - P_2 V_2}{k-1} = n\,R\,\frac{T_1 - T_2}{k-1}$$

Proceso 2→3. Enfriamiento a V = cte desde T_2 = 373 K hasta T_3 = 298 K .

⇒ $W = 0$, pues V = cte.

⇒ $\Delta U < 0$, pues la temperatura disminuye.

www.yoquieroaprobar.es

b) Calcular las coordenadas V, P no conocidas de los estados 2 y 3 (exprese los resultados en unidades S.I).

Calculamos el número de moles a partir de las coordenadas V_1, P_1, T_1 del estado inicial

$$n = \frac{p_1 V_1}{R T_1} = \frac{101325 \cdot 0.0112}{8.314 \cdot 273} = 0.50 \text{ mol}$$

	V (m^3)	P (Pa)	T (K)
1	**0,0112**	**101325**	**273**
2	**0,0042**	**367151**	**373**
3	**0,0042**	**293327**	**298**

Proceso politrópico 1→2 $\quad p_1 V_1^k = p_2 V_2^k$

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \frac{nR T_1}{V_1} \\ p_2 &= \frac{nR T_2}{V_2} \end{aligned}\right\} \quad \frac{n R T_1}{V_1} V_1^k = \frac{n R T_2}{V_2} V_2^k \qquad T_1 V_1^{k-1} = T_2 V_2^{k-1} \qquad V_2 = V_1 \left(T_1 / T_2\right)^{1/(k-1)}$$

$$V_2 = 0.0112 \left(273/373\right)^{1/(1.32-1)} = 0.0042 \text{ m}^3 = V_3$$

Proceso 2→3 a volumen constante

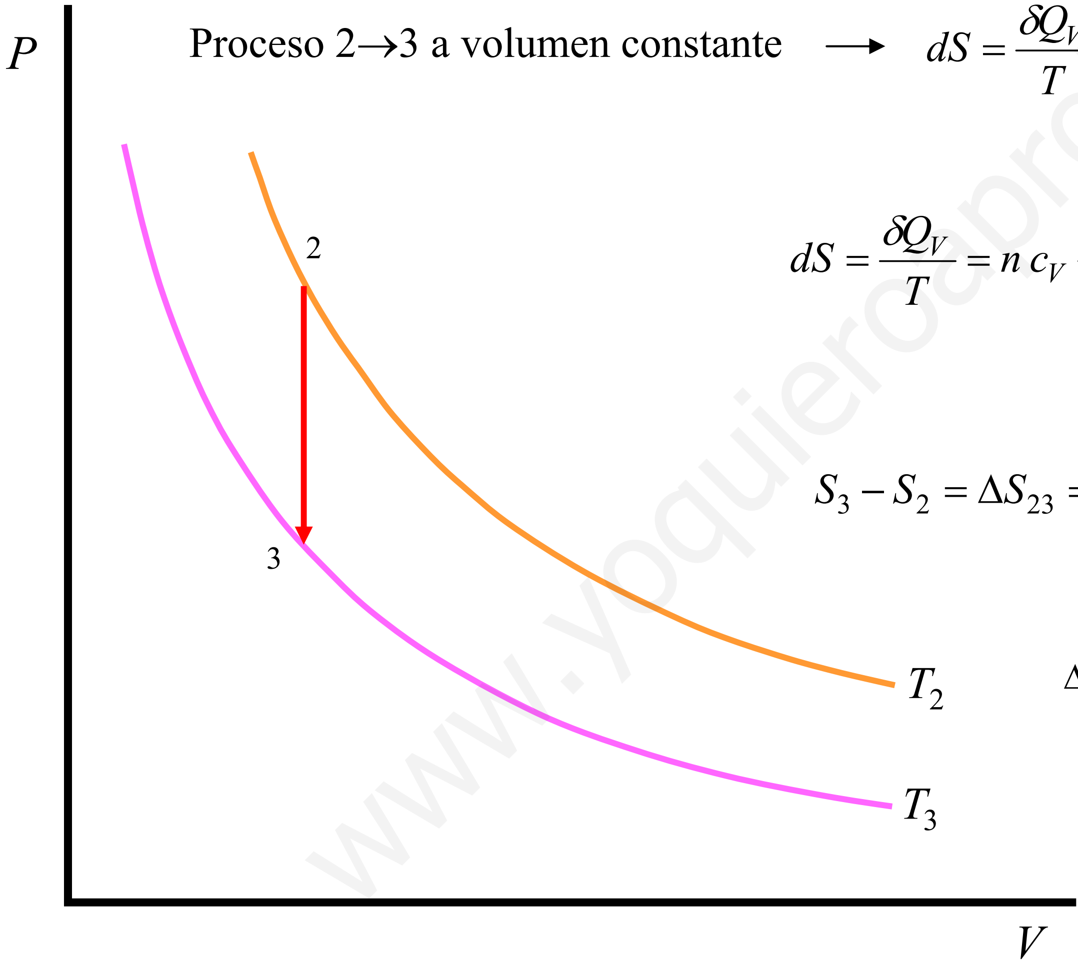
Ley de los gases ideales: calculamos las presiones

$$p_2 = \frac{nR T_2}{V_2} = \frac{0.50 \cdot 8.314 \cdot 373}{0.0042} = 367151 \text{ Pa}$$

$$p_3 = \frac{nR T_3}{V_3} = \frac{0.50 \cdot 8.314 \cdot 298}{0.0042} = 293327 \text{ Pa}$$

www.yoquieroaprobar.es

c) Si el calor específico a volumen constante es $c_V = 5R/2$ J·mol⁻¹·K⁻¹, determinar la variación de entropía del gas encerrado en el cilindro durante el proceso 2→3. ¿Qué signo y qué unidades tiene esta variación de entropía?



Proceso 2→3 a volumen constante $\longrightarrow$ $dS = \dfrac{\delta Q_V}{T}$ $\qquad \delta Q_V = n\, c_V\, dT$

$$dS = \frac{\delta Q_V}{T} = n\, c_V \frac{dT}{T} \qquad \int_{S_2}^{S_3} dS = \int_{T_2}^{T_3} n\, c_V \frac{dT}{T}$$

$$S_3 - S_2 = \Delta S_{23} = n \frac{5R}{2} \int_{T_2}^{T_3} \frac{dT}{T} \qquad \Delta S_{23} = \frac{5}{2} n\, R \ln \frac{T_3}{T_2}$$

$$\Delta S_{23} = \frac{5}{2} 0.5 \cdot 8.314 \cdot \ln \frac{298}{373} = -2.33 \ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$$

El signo negativo (disminución de entropía) implica que durante el proceso 2→3 el gas ha cedido calor al entorno

www.yoquieroaprobar.es