2.8. Rotacional y Divergencia de un campo vectorial F y sus propiedades.

2.8.1. Rotacional: Definición y propiedades.

Definición. Sea F un campo vectorial dado por $F : D \subset \Re^3 \to \Re^3 \,/\, F(x,y,z) = \left(F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)\right)$, donde F_1, F_2 y F_3 tienen derivadas parciales continuas en alguna región *R*. El **rotacional** del campo *F* está dado por

$$\operatorname{rot}(F) = \nabla \times F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\hat{k}$$

Para recordar mejor el vector del rotacional de *F*, se puede considerar el desarrollo del siguiente determinante

$$\operatorname{rot}(F) = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\hat{k}$$

Propiedades del Rotacional.

1. Si el campo escalar $f(x,y,z)$ tiene derivadas parciales continuas de segundo orden entonces el $rot(\nabla f) = \vec{0}$.

2. Si $F(x,y,z)$ es un campo vectorial conservativo entonces $rot(F) = \vec{0}$.

3. Si el campo vectorial $F(x,y,z)$ es una función definida sobre todo $\Re^3$ cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas y el $rot(F) = \vec{0}$ entonces *F* es un campo vectorial conservativo.

El rotacional de un campo vectorial tiene su principal interpretación física cuando la función vectorial $F(x,y,z)$ representa el flujo de un fluido, el rotacional en este caso se interpreta como la circulación que presenta el fluido alrededor de un punto (x_0, y_0, z_0).

Si el campo vectorial F representa el flujo de un fluido y $rot(F)=\vec{0}$ entonces se dice que el fluido es irrotacional.

EJEMPLO 63. Sea el campo vectorial $F(x,y,z)=(0,\cos(xz),-sen(xy))$ determine su rotacional.

Solución. Al aplicar la definición del rotacional se obtiene el siguiente vector que lo representa

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}(F) &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(-sen(xy))-\frac{\partial}{\partial z}(\cos(xz))\right)\hat{i}+\left(\frac{\partial}{\partial z}(0)-\frac{\partial}{\partial x}(-sen(xy))\right)\hat{j}+\left(\frac{\partial}{\partial x}(\cos(xz))-\frac{\partial}{\partial y}(0)\right)\hat{k} \\
&= (-x\cos(xy)+xsen(xz))\hat{i}+(y\cos(xy))\hat{j}+(-zsen(xz))\hat{k} \\
&= x(sen(xz)-\cos(xy))\hat{i}+y\cos(xy)\hat{j}-zsen(xz)\hat{k}
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 64. Determine si el campo vectorial definido por $F(x,y,z)=(2xy,x^2+2yz,y^2)$ es un campo conservativo.

Solución. Por propiedades del rotacional, un campo vectorial es conservativo si $rot(F)=\vec{0}$, para demostrarlo aplicamos la definición del rotacional para calcularlo.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}(F) &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(y^2)-\frac{\partial}{\partial z}(x^2+2yz)\right)\hat{i}+\left(\frac{\partial}{\partial z}(2xy)-\frac{\partial}{\partial x}(y^2)\right)\hat{j}+\left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2+2yz)-\frac{\partial}{\partial y}(2xy)\right)\hat{k} \\
&= (2y-2y)\hat{i}+(0-0)\hat{j}+(2x-2x)\hat{k} \\
&= 0\hat{i}+0\hat{j}+0\hat{k}
\end{aligned}
$$

En donde queda demostrado que $F(x,y,z)=(2xy,x^2+2yz,y^2)$ es un campo conservativo.

EJEMPLO 65. Demuestre que cualquier campo vectorial definido por $F(x,y,z)=(f(x),g(y),h(z))$, donde f, g y h son funciones derivables, es irrotacional.

Solución. Se dice que un campo vectorial es irrotacional si se de muestra que $rot(F)=\vec{0}$, al aplicar la definición el rotacional se obtiene

$$rot(F)=\left(\frac{\partial}{\partial y}(h(z))-\frac{\partial}{\partial z}(g(y))\right)\hat{i}+\left(\frac{\partial}{\partial z}(f(x))-\frac{\partial}{\partial x}(h(z))\right)\hat{j}+\left(\frac{\partial}{\partial x}(g(y))-\frac{\partial}{\partial y}(f(x))\right)\hat{k}$$
$$=0\hat{i}+0\hat{j}+0\hat{k}$$

Por lo que se puede afirmar que el campo es irrotacional.

2.8.2. Divergencia: Definición y propiedades.

Definición. Sea F un campo vectorial definido por $F:\Re^3\rightarrow\Re^3 / F(x,y,z)=(F_1(x,y,z),F_2(x,y,z),F_3(x,y,z))$, donde, F_1, F_2 y F_3 tienen derivadas parciales continuas en alguna región *R*. La divergencia de *F* se denota por div ***F***, o por $\nabla\cdot F$, y esta dado por

$$\text{div}(F)=\nabla\cdot F=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Propiedades de la Divergencia.

1. Si $F(x,y,z)=(F_1(x,y,z),F_2(x,y,z),F_3(x,y,z))$ es un campo vectorial sobre $\Re^3$, y F_1, F_2 y F_3 tienen derivadas parciales continuas de segundo orden entonces la $div(rot(F))=0$.

2. Si $f(x,y,z)$ es un campo escalar, la divergencia de su campo vectorial gradiente $div(\nabla f)$, está dado por

$$div(\nabla f)=\nabla\cdot\nabla f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Expresión que se suele abreviar por $\nabla^2 f$, en donde al operador $\nabla^2 f$, se le denomina como ***operador de Laplace***. Este operador también puede ser empleado a un campo vectorial $F(x,y,z)=(F_1(x,y,z),F_2(x,y,z),F_3(x,y,z))$, aplicándolo a cada una de sus funciones componentes, esto es

$$\nabla^2 F=(\nabla^2 F_1,\nabla^2 F_2,\nabla^2 F_3)$$

En la mecánica de los fluidos si el campo de velocidades del fluido viene dado por el campo vectorial *F*, se la $div(F)=0$ se dice que el fluido es incompresible.

EJEMPLO 66. Sea el campo vectorial $F(x,y,z)=\left(e^{x}sen(y),e^{x}\cos(y),z\right)$ determine su divergencia.

Solución.

$$\begin{aligned} div(F) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x}sen(y)\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x}\cos(y)\right)+\frac{\partial}{\partial z}(z) \\ &= e^{x}sen(y)-e^{x}sen(y)+1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

EJEMPLO 67. Demuestre que cualquier campo vectorial definido por $F(x,y,z)=\left(f(y,z),g(x,z),h(x,y)\right)$, es incompresible.

Solución.

$$\begin{aligned} div(F) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(f(y,z)\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(f(x,z)\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(f(x,y)\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

EJERCICIOS PROPUESTO 2.8

1)

2)

3)