Apuntes de Álgebra.

Ingeniería Industrial

Encarnación Algaba Durán
Fernando Mayoral Masa
Alejandro J. Rodríguez Luis

Dpto. Matemática Aplicada II
E.T.S. Ingenieros
Universidad de Sevilla

Introducción.

Con las siguientes notas se pretende facilitar a los alumnos de la asignatura de Álgebra la tarea de trabajar y asimilar sus contenidos.

Referente a algunos contenidos, y sin pretender ser exhaustivos, es conveniente reseñar lo siguiente:

Las cónicas y las cuádricas. El estudio de las cónicas (parábolas, elipses e hipérbolas en el plano) y de las cuádricas (elipsoides, paraboloides, ... en el espacio) aparece separado en dos bloques. Por una parte en el Tema 1 se estudian, desde un punto de vista elemental, aquellos aspectos que no requieren técnicas adicionales a las conocidas en Bachillerato. Esto permite el estudio y manipulación de las cónicas y cuádricas cuyos ejes y planos (en el caso de las cuádricas) de simetría son paralelos a los coordenados. Por otra parte, en el Tema 11 se hace el estudio de las cónicas y las cuádricas con elementos de simetría girados respecto al sistema de coordenadas. Las razones para no concentrar todo su análisis al final de la asignatura son varias. Quizá la más importante sea que constituyen un catálogo básico de ejemplos en el estudio del cálculo diferencial e integral de una y varias variables y no tiene sentido considerar la parte elemental al final del temario cuando ya haya sido usada en las asignaturas de Cálculo y Fundamentos Físicos.

Las formas cuadráticas. Referente a las formas cuadráticas puede decirse algo similar a lo comentado para las cónicas y las cuádricas. Su estudio está dividido en dos partes. Por una, la que puede ser estudiada con técnicas elementales (Tema 2) y por otra (Tema 11) la que requiere del estudio de autovalores y autovectores. Las formas cuadráticas son polinomios homogéneos de segundo grado en varias variables. En la optimización de funciones de varias variables (cálculo de máximos y mínimos) juegan el mismo papel que tiene la derivada segunda en el cálculo de extremos de funciones de una variable.

Números complejos. El estudio de un tema dedicado a los números complejos obedece a dos motivos fundamentales. Por un lado, aunque sólo se consideraran matrices reales, pueden aparecer en el cálculo de autovalores y autovectores (Tema 10). Por otro, cabe citar el fuerte contenido geométrico que tienen sus operaciones en relación con las transformaciones en el plano.

Vectores y matrices reales. Consideramos casi exclusivamente vectores y matrices reales, aunque conceptualmente, en lo relativo a manipulación algebraica, no hay diferencias esenciales entre trabajar con vectores y matrices con entradas reales o hacerlo con entradas complejas. No obstante, en los problemas de autovalores y autovectores (Tema 10) aparecerán no sólo números sino también vectores y matrices complejos. Haremos uso de los conceptos de independencia lineal, subespacio vectorial generado por ciertos vectores, inversa de una matriz, ..., sin tener en cuenta si se trata o no de coordenadas reales o complejas y aunque, de manera explícita, en los temas anteriores sólo se hayan considerado algunos conceptos en el caso real. Por otra parte, en los conceptos y técnicas relacionados con cuestiones métricas (ortogonalidad, distancias, ...), que están basados en el producto escalar, la consideración del caso complejo conllevaría el cambio de la definición de producto escalar. Por ello, no citaremos nada relativo a cuestiones métricas para vectores complejos.

Geometría. La geometría puede considerarse el nexo común a todos los conceptos y técnicas de la asignatura. Aunque, en lo relativo a conceptos lineales, se trabaje habitualmente con vectores y matrices en dimensión arbitraria, la visualización de los conceptos, técnicas,... en el plano y el espacio (de dimensión tres) constituye una herramienta esencial.

Determinantes. Normalmente los estudiantes los conocen para orden pequeño (dos y tres), y los manejan en el estudio y resolución de sistemas de ecuaciones lineales con pocas incógnitas. Desde el punto de vista de los sistemas *grandes* de ecuaciones lineales constituyen una herramienta teórica y poco más. Para dimensiones grandes, su cálculo requiere del método de eliminación de Gauss, que utilizaremos para el estudio y resolución de un sistema lineal con un número genérico de ecuaciones e incógnitas y que los alumnos conocen, en su versión elemental, desde los últimos cursos de Primaria y primeros de Secundaria. Por ello, el estudio que se hace de los determinantes se retrasa hasta el Tema 5 en el que de forma somera se consideran sus propiedades.

¿Cómo debe usarse este texto? En general suele ser difícil explicitar lo que se debe hacer respecto a algo, puesto que suele depender de la persona a la que va dirigido. Sin embargo, en la cuestión que nos ocupa, sí puede decirse lo que **no se debe hacer**. No debe considerarse que este texto sirve como sustituto de las clases o del trabajo adecuado por parte de los estudiantes (y en particular de la consulta de algunos textos de los que hay en la Biblioteca de la Escuela). En lo que respecta a los ejercicios resueltos incluidos en el texto, no es aconsejable memorizarlos presumiendo que los del examen sean *muy parecidos*. Suele ser recomendable *pelearse con ellos* antes de ver la resolución completa e incluso intentar resoluciones distintas de las planteadas en el texto. Los ejercicios que tienen cierto carácter geométrico suelen ser abordables de muchas formas distintas y, además de las planteadas en el texto, pueden existir otras igualmente razonables. La mayor parte de los ejercicios resueltos que aparecen a lo largo del texto corresponden a ejercicios de exámenes de cursos anteriores. Al final de estos apuntes están incluidos los enunciados de todos los exámenes de la asignatura correspondientes a los tres últimos cursos.

División por temas. En lo que se refiere a cómo están repartidos por temas los distintos contenidos de la asignatura cabe hacer los siguientes comentarios:

- La separación de los Temas 6 y 7 obedece a que en el primer cuatrimestre de la asignatura no suelen tener cabida los epígrafes contemplados en el Tema 7. Lo habitual, en los últimos años, es que la materia del primer cuatrimestre (Primer Parcial) corresponda a los temas 1 a 6 y que del 7 en adelante sea la materia del Segundo Parcial.

- En el estudio de cuestiones métricas se han considerado por un lado los conceptos y técnicas fundamentales (Tema 8) y por otro sus aplicaciones a problemas de mínimos cuadrados (Tema 9). Hubiera sido igualmente razonable incluir el Tema 9 como una sección del 8.

La redacción de estas notas ha sido un trabajo acumulativo en el que, en uno u otro momento, y en mayor o menor medida, han participado todos los profesores del Departamento de Matemática Aplicada II en la Escuela Superior de Ingenieros de Sevilla que, en los últimos años, han impartido la asignatura de Álgebra de Ingeniería Industrial o Química: José Miguel Díaz Báñez, Fernando Fernández Sánchez, Estanislao Gamero Gutiérrez, Juan Manuel Virués Gavira, ...

Sevilla, Septiembre de 2008.

En esta segunda edición se han corregido algunas erratas y se han incluido los exámenes del último curso.

Sevilla, Septiembre de 2009.

ÍNDICE

Tema 1.- Elementos de geometría en el plano y el espacio.

La necesidad de afrontar el estudio de objetos complicados del plano y el espacio hace conveniente disponer de un manejo previo de ciertas curvas y superficies simples. Este primer tema se divide en tres secciones que, además de estar unidas por el nexo común de la geometría y por sus múltiples utilidades, se diferencian en los temas que analizan: (1) las rectas en el plano y el espacio y los planos en el espacio; (2) las cónicas en el plano y las superficies cuádricas en el espacio.

En la primera parte del tema se han recopilado diversos problemas de selectividad de cursos anteriores. Todos ellos se pueden abordar con conceptos simples de geometría en el plano y el espacio que deben ser conocidos por los alumnos de su paso por el bachillerato.

Las cónicas son curvas que se obtienen a partir de ecuaciones de segundo grado en dos variables. Geométricamente pueden obtenerse, salvo algunos casos degenerados, de la intersección de un plano con un cono, razón por la cual reciben el nombre de secciones cónicas. Su importancia radica, junto a la utilidad que tienen para el estudio de otras curvas más complicadas, en sus muchas propiedades geométricas.

Por su parte, las cuádricas son superficies del espacio que, análogamente a las cónicas, corresponden a los puntos del espacio que verifican una ecuación de segundo grado en tres variables.

Comentemos, para terminar, que el estudio de las cónicas y cuádricas que llevaremos a cabo en este primer tema se reducirá a aquellas cuyos ejes de simetría sean paralelos a los ejes coordenados. Esta condición se traduce, en términos de la ecuación de segundo grado, en que no aparecerán productos cruzados de las variables.

1. Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Rectas en el plano. Rectas y planos en el espacio.

La materia a la que se hace referencia en el título de esta sección debe ser conocida por los alumnos tras su paso por el Bachillerato y, para su repaso, se recopilan a continuación un buen número de ejercicios de selectividad. Para resolver alguno de ellos existen técnicas y fórmulas particulares que, con el paso del tiempo, son olvidadas. Animamos aquí a resolver estos ejercicios utilizando sólo las ideas, procedimientos y expresiones más simples y usuales, como son:

- el cálculo de las ecuaciones de una recta (en el plano o el espacio) conociendo dos puntos de ella o conociendo un punto y un vector director de la misma;
- el cálculo de la ecuación de un plano en el espacio a partir de un punto y dos vectores con distinta dirección o a partir de tres puntos no alineados;
- la determinación del paralelismo de rectas y de planos en relación con los coeficientes de sus ecuaciones respectivas;
- la definición de producto escalar y de producto vectorial;
- la relación entre el concepto de perpendicularidad de vectores y el producto escalar nulo;
- la definición de distancia entre dos puntos;
- saber que la distancia (mínima) entre una recta y un punto exterior a ella se mide en dirección perpendicular a dicha recta (ídem con un plano y un punto exterior a él).

Ejercicios de Selectividad

Ejercicio S1. Halla la distancia entre el origen de coordenadas y la recta intersección de los planos de ecuaciones respectivas $x + y + 2z = 4$ y $2x - y + z = 2$.

Ejercicio S2. Calcula las coordenadas del punto simétrico del $(1, -3, 7)$ respecto de la recta dada por las ecuaciones

$$x - 1 = y + 3 = \frac{z-4}{2}.$$

Ejercicio S3. Calcula el punto de la recta de ecuaciones

$$x - 1 = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-3}$$

más cercano al punto $A = (1, -1, 1)$.

Ejercicio S4. Los puntos $A=(3,3,5)$ y $B=(3,3,2)$ son vértices consecutivos de un rectángulo $ABCD$. El vértice C consecutivo de B está en la recta de ecuaciones $x=\frac{y-6}{-1}=\frac{z+1}{2}$.

(a) Determina el vértice C.

(b) Determina el vértice D.

Ejercicio S5. Halla las ecuaciones de la recta que se apoya perpendicularmente en las rectas r y s definidas respectivamente por

$$x-1=y-2=\frac{z-1}{-2}, \quad \frac{x-4}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{2}.$$

Ejercicio S6. Calcula el volumen de un cubo sabiendo que dos de sus caras están, respectivamente, en los planos $2x-2y+z-1=0$ y $2x-2y+z-5=0$.

Ejercicio S7. Halla las coordenadas del punto simétrico del punto $P=(1,2,-2)$ respecto al plano de ecuación $3x+2y+z-7=0$.

Ejercicio S8. Halla la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es $(-1,2,1)$.

Ejercicio S9. Determina los puntos de la recta de ecuaciones

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{2}$$

que equidistan de los planos de ecuaciones

$$3x+4y-1=0 \quad \text{y} \quad 4x-3z-1=0.$$

Ejercicio S10. Considera los puntos $A(1,-3,2)$, $B(1,1,2)$ y $C(1,1,-1)$.

(a) ¿Pueden ser A, B y C vértices consecutivos de un rectángulo? Justifica la respuesta.

(b) Halla, si es posible, las coordenadas de un punto D para que el paralelogramo $ABCD$ sea un rectángulo.

Ejercicio S11. Considera los puntos

$$A(1,1,1), \quad B(2,2,2), \quad C(1,1,0) \quad \text{y} \quad D(1,0,0).$$

(a) Halla la ecuación del plano que contiene a los puntos A y B y no corta a la recta determinada por C y D.

(b) Halla las ecuaciones de la recta determinada por los puntos medios de los segmentos AB y CD.

Ejercicio S12. Considera los puntos

$$A(1,-1,2), \quad B(1,3,0) \;\; y \;\; C(0,0,1).$$

Halla el punto simétrico de A respecto de la recta que pasa por B y C.

Ejercicio S13. Sea π el plano de ecuación $3x-y+2z-4=0$,

(a) Halla la ecuación del plano π_1 que es paralelo a π y pasa por el punto $P(1,-2,2)$.

(b) Halla la ecuación del plano π_2 perpendicular a ambos que contiene a la recta

$$r\equiv\begin{cases} x-y+z &=1\\ 2x+y-4z &=1\end{cases}$$

Ejercicio S14. Los puntos $A(1,0,2)$ y $B(-1,0,-2)$ son vértices opuestos de un cuadrado.

(a) Calcula el área del cuadrado.

(b) Calcula el plano perpendicular al segmento de extremos A y B que pasa por su punto medio.

Ejercicio S15. Considera el plano $\pi\equiv x-y+2z=3$ y el punto $A(-1,-4,2)$.

(a) Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por A.

(b) Halla el punto simétrico de A respecto de π.

Ejercicio S16. Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi\equiv x+y-z+6=0$ con la recta $s\equiv\dfrac{x}{3}=y-2=z+1$ y es paralela a la recta

$$r\equiv\begin{cases} 3x+y-4 &=0\\ 4x-3y+z-1 &=0\end{cases}$$

Ejercicio S17. Calcula el área del triángulo de vértices

$$A(1,1,2), \quad B(1,0,-1) \quad \text{y} \quad C(1,-3,2).$$

Ejercicio S18. Determina la recta que no corta al plano de ecuación $x-y+z=7$ y cuyo punto más cercano al origen es $(1,2,3)$.

Ejercicio S19. Sabiendo que las rectas

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{r} x+y-z=1 \\ x-y=2 \end{array} \right. \quad \text{y} \quad s \equiv \left\{ \begin{array}{r} x-2y-z=a \\ 2x+z=a \end{array} \right.$$

se cortan, determina a y el punto de corte.

Ejercicio S20. Halla el punto de la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{r} x+3y+z=1 \\ y+z=-1 \end{array} \right.$ que está más cercano al punto $P(1,-1,0)$.

Ejercicio S21. Considera la recta r y el plano π siguientes

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{rl} x+\ z-a & =0 \\ y-az-1 & =0 \end{array} \right. , \qquad \pi \equiv 2x-y=b.$$

(a) Determina a y b sabiendo que r está contenida en π.

(b) Halla la ecuación de un plano que contenga r y sea perpendicular a π.

2. Cónicas.

El objetivo de considerar aquí el estudio básico de las cónicas no es otro que el de ampliar el catálogo conocido de curvas planas elementales definidas de manera implícita, así como el estudiar algunas de sus propiedades intrínsecas (independientes del sistema de ejes).

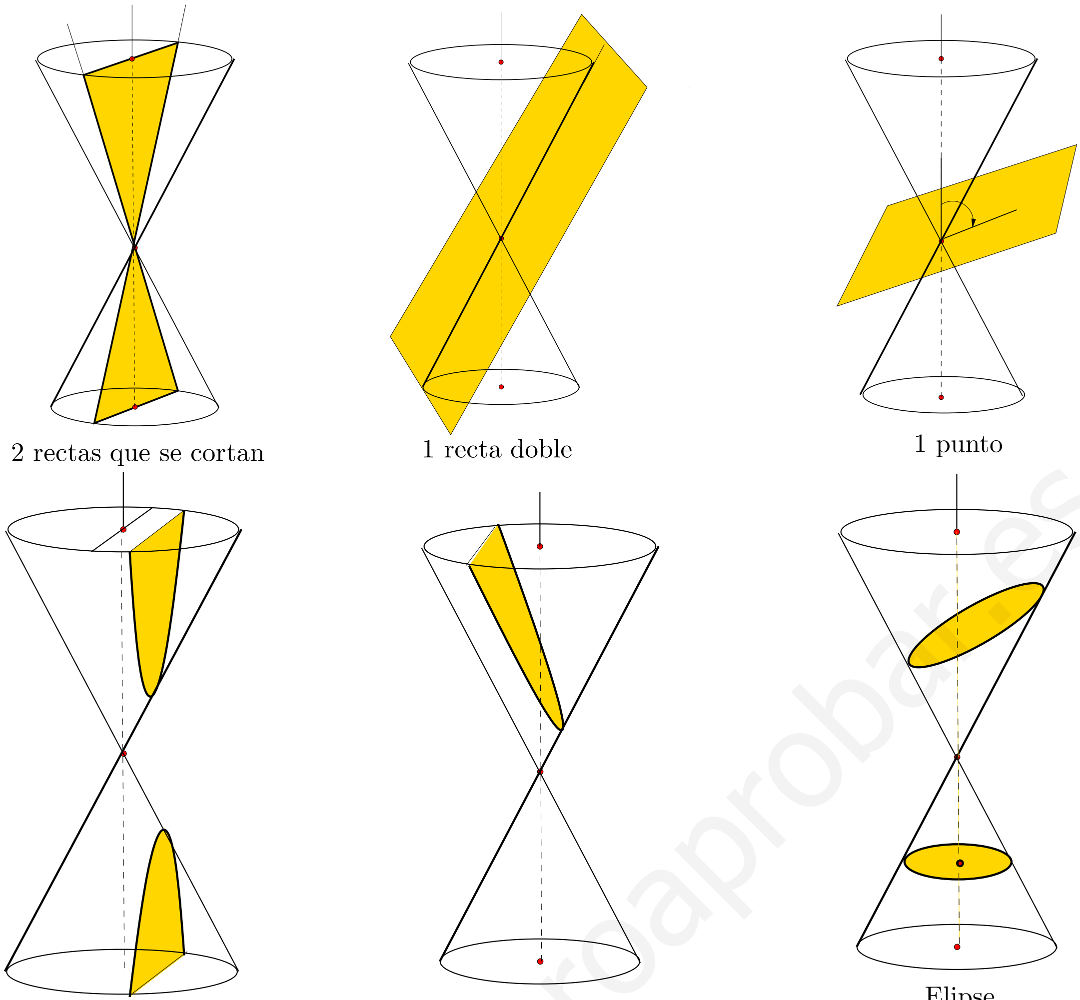
Vamos a estudiar los aspectos básicos de las **cónicas:** parábola, elipse e hipérbola, considerando la definición de éstas como *lugar geométrico*, es decir, como el conjunto de todos los puntos del plano que verifican una determinada propiedad. Ejemplos sencillos de lugares geométricos son: la circunferencia (lugar geométrico de los puntos de un plano que están a igual distancia de un punto fijo), el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de dos puntos prefijados no es otro que la recta mediatriz del segmento determinado por los dos puntos, el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos rectas que se cortan está formado por las bisectrices de los ángulos que determinan las rectas dadas, ...

Como veremos, adoptando un sistema de ejes adecuado las cónicas quedarán caracterizadas mediante una ecuación implícita en dos variables (x,y) determinada por un polinomio de segundo grado en el que no hay término cruzado xy.

2.1. Secciones cónicas.

Dejando al margen coordenadas, ecuaciones, ... el nombre completo de las cónicas es el de secciones cónicas pues son las curvas que se obtienen al seccionar un cono mediante un plano. Si tenemos un cono circular recto (más adelante mostraremos su ecuación) y lo cortamos con un plano, pueden obtenerse (ver los siguientes dibujos):

- **2 rectas**, si cortamos con un plano que pasa por el vértice y cuyo ángulo de inclinación respecto al eje del cono es menor que el de la generatriz del cono.
- **1 recta doble**, si cortamos con un plano que pasa por el vértice y cuyo ángulo de inclinación respecto al eje del cono es igual que el de la generatriz del cono.
- **1 punto**, concretamente el vértice del cono, si cortamos con un plano que pasa por el vértice y cuyo ángulo de inclinación respecto al eje del cono es mayor que el de la generatriz del cono.
- **Una hipérbola**, si cortamos con un plano que no pase por el vértice y cuyo ángulo de inclinación respecto al eje del cono es menor que el de la generatriz del cono.
- **Una parábola**, si cortamos con un plano que no pase por el vértice y sea paralelo a una generatriz.
- **Una elipse**, si cortamos con un plano que no pase por el vértice y cuyo ángulo de inclinación respecto al eje del cono es mayor que el de la generatriz del cono. **La circunferencia** se obtiene como un caso particular de elipse si cortamos con un plano perpendicular al eje del cono.



2 rectas que se cortan — 1 recta doble — 1 punto

Hipérbola — Parábola — Elipse Circunferencia

2.2. Definición métrica y elementos notables.

2.2.1. La parábola.

Aunque sea una curva plana conocida por el alumno como la trayectoria descrita por un proyectil (en ausencia de rozamiento) y como la gráfica de una función polinómica de segundo grado $y = f(x) = ax^2+bx+c, a \neq 0$, adoptaremos ahora otro punto de vista.

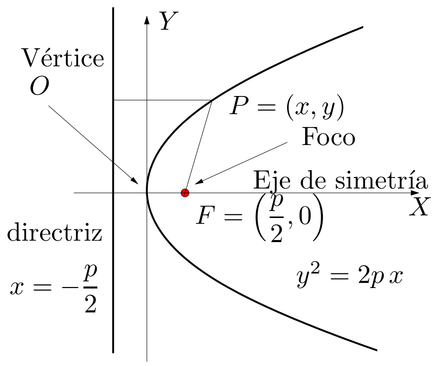
Dada una recta L, llamada directriz, y un punto fijo F (no perteneciente a la recta), llamado foco, el lugar geométrico de los puntos que equidistan de la recta L y el punto F se denomina parábola de foco F y directriz L.

En la definición considerada no hay ninguna referencia a sistema de coordenadas alguno. En el plano determinado por la recta y el punto dados, vamos a considerar un sistema de referencia adecuado, de forma que la ecuación que caracterice a los puntos de la parábola sea lo más sencilla posible. Como eje OX de la variable independiente vamos a tomar la recta que pasa por el foco F y es perpendicular a la directriz L, como origen del sistema de referencia tomamos el punto O de dicha recta que equidista del foco y de la directriz, por último, como eje OY de nuestro sistema de referencia tomamos la recta que pasa por O y es paralela a la directriz.

En este sistema de ejes perpendiculares tendremos que las coordenadas del foco serán de la forma $F = (\frac{p}{2}, 0)$ y la ecuación de la directriz será $L \equiv x = -\frac{p}{2}$.

Un punto $P = (x, y)$ pertenecerá a la parábola considerada si, y sólo si,

$$d(P, L) = \left|x + \frac{p}{2}\right| = d(P, F) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$



De lo anterior es fácil obtener que los puntos (x, y) que están en la parábola están caracterizados por la ecuación

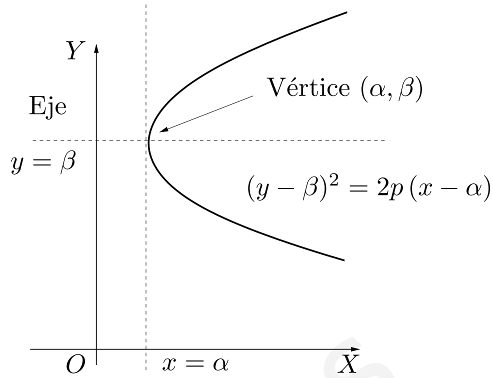
$$y^2 = 2p\,x, \text{ donde } p = d(F, L).$$

La recta $y = 0$ (el eje OX) es el eje de simetría de la parábola anterior y el vértice (el punto de corte del eje de simetría con la parábola) es el origen de coordenadas $O = (x = 0, y = 0)$. Una ecuación del tipo $x^2 = 2q\,y$ define una parábola con eje de simetría el eje OY y vértice en el origen de coordenadas.

Recordemos que una curva plana es simétrica: respecto del origen si al cambiar en su ecuación (x, y) por $(-x, -y)$ la ecuación no cambia; respecto del eje OX si al cambiar en su ecuación (x, y) por $(x, -y)$ la ecuación no cambia; respecto del eje OY si al cambiar en su ecuación (x, y) por $(-x, y)$ la ecuación no cambia.

Si cuando hemos obtenido la ecuación de la parábola, $y^2 = 2p\,x$, hubiéramos adoptado un sistema de ejes paralelo al que hemos elegido (o lo que es lo mismo, si hacemos una traslación del sistema de coordenadas), en el cual el eje OX fuera paralelo al eje de simetría de la parábola (dicho eje de simetría tendría como ecuación $y = \beta$) y el vértice tuviera como coordenadas (α, β), la ecuación de la parábola en dicho sistema de coordenadas sería de la forma

$$(y - \beta)^2 = 2p\,(x - \alpha).$$



Ejercicio. Determina el vértice, el eje de simetría, el foco y la directriz de las parábolas

$$(y - \beta)^2 = 2p\,(x - \alpha), \qquad (x - \alpha)^2 = 2q\,(y - \beta),$$

para valores cualesquiera de p y q no nulos.

Las ecuaciones anteriores cubren todos los casos en los que el eje de la parábola es paralelo a uno de los ejes coordenados. En el Tema 11 analizaremos el caso en que la parábola tenga un eje de simetría que no sea paralelo a ninguno de los ejes del sistema de referencia que se considere.

Ejercicio. Expresa la ecuación $2y^2 + 4y + 3x + 7 = 0$ en la forma $(y - \beta)^2 = 2p\,(x - \alpha)$. Determina el vértice, el foco, la directriz y el eje de simetría de la parábola y haz la representación gráfica.

Ejercicio resuelto
Encontrar razonadamente la ecuación de la parábola que tiene su vértice en el punto $(-1, 1)$ y su foco en $(-2, 1)$. Hallar la ecuación de su recta directriz. Hacer un dibujo esquemático de dicha cónica.

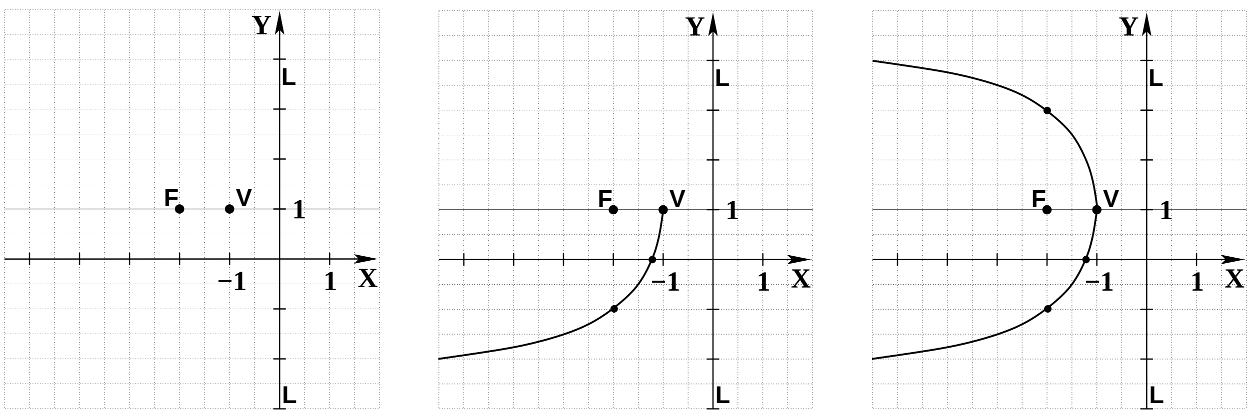
Sabemos que la recta que pasa por el vértice V y el foco F de la parábola es su eje de simetría. En nuestro caso, como $V = (-1, 1)$ y $F = (-2, 1)$, el eje de simetría es la recta horizontal $y = 1$. Por tanto, la ecuación de la parábola será (teniendo en cuenta tanto las coordenadas de su vértice como que su eje es horizontal, parábola *tumbada*)

$$(y - 1)^2 = 2p(x + 1),$$

donde $\frac{p}{2} = x_F - x_V = -2 - (-1) = -1$ con lo que $p = -2$. La ecuación buscada es pues $(y - 1)^2 = -4(x + 1)$, que corresponde a una parábola *tumbada que se abre hacia la izquierda*.

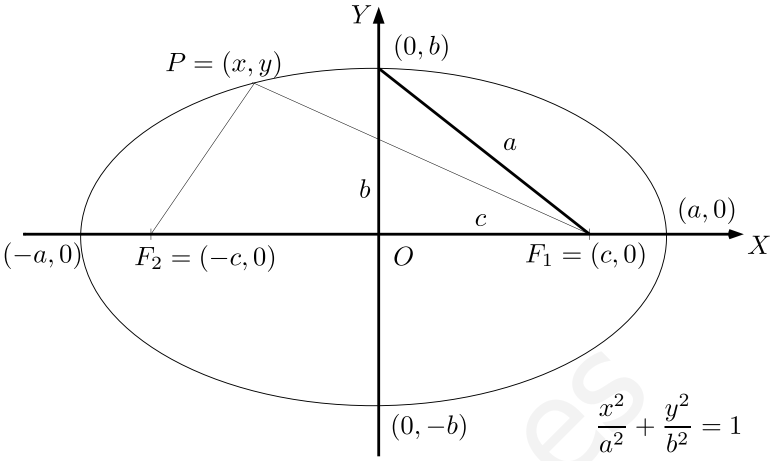
Observemos que si hacemos la traslación $x' = x + 1$, $y' = y - 1$ (coloca el origen de las nuevas coordenadas en el vértice de la parábola) la ecuación de la parábola es ${y'}^2 = -4x'$. En estas coordenadas la recta directriz tiene por ecuación $x' = -\frac{p}{2} = 1$ con lo que, deshaciendo la traslación, vemos que $x = 0$ es su ecuación en las coordenadas originales.

Para dibujar cualitativamente la parábola comenzamos marcando el vértice V, el foco F, el eje de simetría (la recta $y = 1$ que sería el eje OX') y la directriz L. Los puntos exactos que conocemos de la parábola son V y los puntos de corte con los ejes (fácilmente se ve que sólo hay un punto de corte, el $(-5/4, 0)$). Dibujamos aproximadamente media parábola (pasa por esos dos puntos y por $(-2, -1)$, donde a simple vista se ve que cumple la condición de equidistancia entre el foco y la recta directriz). Por último, dibujando la otra mitad de la parábola obtenemos el dibujo cualitativo final.



2.2.2. La elipse.

Se llama elipse al lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 (focos) es constante. Esta constante se suele denotar por $2a > 0$ y debe ser mayor que la distancia $2c \geq 0$ entre los focos. Introducimos ahora un sistema de referencia respecto del cual la elipse estará caracterizada por una ecuación lo más simple posible. Tomamos como eje OX la recta que une los focos F_1 y F_2 y como eje OY la recta perpendicular al eje OX en el punto medio de los focos, punto que será por tanto el origen de coordenadas del sistema de referencia. Respecto de este sistema de referencia los focos vendrán dados por



$$F_1 = (c, 0), \quad F_2 = (-c, 0),$$

con c positivo y menor que a. Un punto $P = (x, y)$ estará en la elipse si y sólo si

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a. \tag{1}$$

Sin más que hacer operaciones se puede obtener que la ecuación anterior es equivalente a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ siendo } b^2 = a^2 - c^2. \tag{2}$$

En primer lugar tenemos que elevar al cuadrado la ecuación (1), de donde obtenemos

$$(x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2 + 2\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2.$$

Reagrupando, queda

$$4a^2 - ((x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2) = 2\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Volvemos a elevar al cuadrado con objeto de que desaparezcan las raíces cuadradas [1], con lo que obtenemos

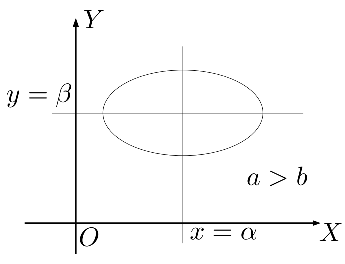
$$16a^4 + \left((x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2\right)^2 - 8a^2\left((x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2\right) = 4\left((x-c)^2 + y^2\right)\left((x+c)^2 + y^2\right).$$

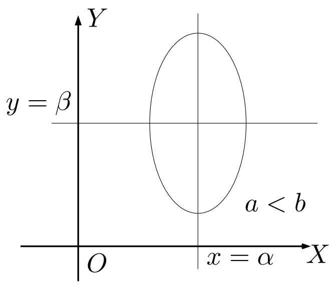
Ahora sólo queda simplificar la expresión y dividir por a^2, para llegar hasta $a^2(a^2 - c^2) = (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2$. Dividiendo por $a^2(a^2 - c^2)$ y llamando $b^2 = (a^2 - c^2)$ se obtiene la ecuación (2).

Es fácil comprobar que el eje OX (la recta que une los focos) y el eje OY (la perpendicular en el punto medio de los focos) son ejes de simetría de la elipse, y por tanto la elipse es simétrica respecto al punto medio de los focos, punto que se denomina centro de la elipse. Los puntos en los que los ejes de simetría cortan a la elipse $(\pm a, 0)$ y $(0, \pm b)$ se denominan vértices. También suelen denominarse ejes de la elipse a los dos segmentos que se determinan por los vértices en cada eje de simetría. Las distancias $a > 0$ y $b > 0$ del centro de la elipse a los vértices se denominan semiejes.

Si tenemos un sistema de referencia respecto del cual el centro de simetría de la elipse tiene por coordenadas (α, β) y sus ejes de simetría son paralelos a los ejes coordenados (con lo cual serán las rectas $x = \alpha$ e $y = \beta$) la ecuación de la elipse será

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1.$$





La **circunferencia** no es más que un caso particular de elipse, que se obtiene cuando los dos focos son un mismo punto que se denomina centro de la circunferencia: si $F_1 = F_2$ tenemos que $c = 0$ y, por tanto, $a^2 = b^2$.

Ejercicio. Deducir la ecuación de la circunferencia a partir de la definición que se acaba de dar. Comprobar que los puntos de una circunferencia están situados a la misma distancia del centro.

[1] Este procedimiento podría añadir soluciones falsas si $4a^2 - ((x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2) < 0$, es decir, si $2a^2 < x^2 + y^2 + c^2$. Pasando c^2 al otro lado y teniendo en cuenta que $b^2 = a^2 - c^2$, la condición de existencia de soluciones falsas sería $a^2 + b^2 < x^2 + y^2$. Esto no es posible porque, suponiendo que se verifique la ecuación de la elipse (2), se tiene

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2 + b^2} = \frac{x^2}{a^2 + b^2} + \frac{y^2}{a^2 + b^2} < \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

por lo que $a^2 + b^2 > x^2 + y^2$.

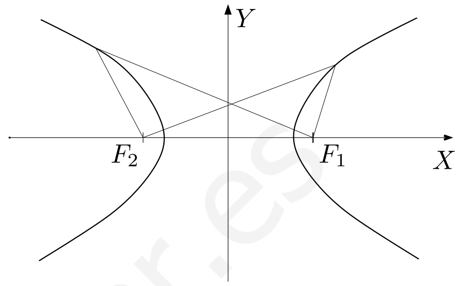
2.2.3. La hipérbola.

Al igual que la parábola, los alumnos conocen la hipérbola como representación gráfica de una función explícita $y = f(x) = \frac{k}{x}$. Todas estas hipérbolas son equiláteras y tienen como asíntotas a los ejes coordenados. Veamos la hipérbola desde otro punto de vista.

Se llama hipérbola al lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2, llamados focos, es constante. Se suele denotar esta constante por $2a$ y debe ser menor que la distancia entre los focos.
Ejercicio. ¿Qué sucede si $2a$ es mayor que la distancia entre los focos? ¿Y si es igual?

Si, al igual que en el caso de la elipse, tomamos como sistema de referencia el que tiene como eje OX la recta que une los focos y como eje OY la perpendicular en el punto medio de los focos, las coordenadas de los focos serán de la forma $F_1 = (c, 0)$, $F_2 = (-c, 0)$, con $c > a$. Un punto $P = (x, y)$ estará en la hipérbola si, y sólo si,

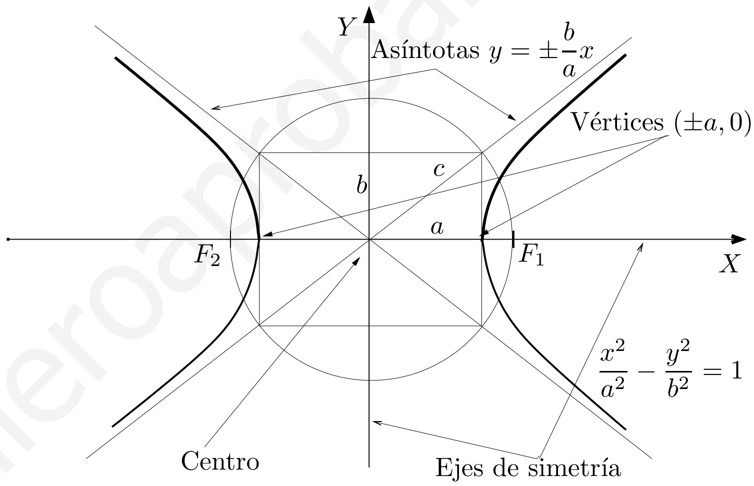
$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = \left|\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2}\right| = 2a.$$



Sin más que hacer operaciones, similares a las realizadas en el caso de la elipse, se puede obtener que la ecuación anterior es equivalente a

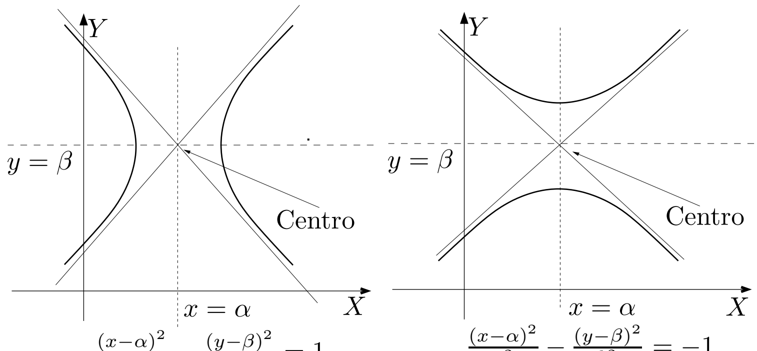
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ para } b^2 = c^2 - a^2.$$

Una hipérbola está formada por dos ramas (dos curvas sin puntos en común) que vienen dadas, respectivamente, por los puntos P que verifican $d(P,F_1) - d(P,F_2) = 2a$ y por los que verifican $d(P,F_1) - d(P,F_2) = -2a$. Es fácil comprobar que el eje OX (la recta que une los focos) y el eje OY (la perpendicular en el punto medio de los focos) son ejes de simetría de la hipérbola, y por tanto la hipérbola es simétrica respecto al punto medio de los focos, punto que se denomina centro de la hipérbola. Mientras que uno de los ejes de simetría, el que hemos tomado como eje OY, no corta a la hipérbola, el otro, la recta que une los focos, corta a la hipérbola en dos puntos $(\pm a, 0)$ que se denominan vértices. Los valores $a > 0$ y $b > 0$ se denominan semiejes de la hipérbola.



Otro elemento característico de las hipérbolas son sus asíntotas, las rectas $y = \pm\frac{b}{a}x$ que pasan por el centro de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y tienen pendiente $\pm\frac{b}{a}$. Se dice que la hipérbola es equilátera si sus dos semiejes son iguales $a = b$, o lo que es equivalente, si sus asíntotas son perpendiculares entre sí.
Ejercicio. Siendo $F_1 = (0, c)$ y $F_2 = (0, -c)$, determina la ecuación de la hipérbola formada por los puntos P que verifican $|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a$.

Si, cuando hemos obtenido la ecuación de la hipérbola, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, hubiéramos adoptado un sistema de ejes paralelo al que hemos adoptado (o lo que es lo mismo, si hacemos una traslación del sistema de coordenadas), en el cual el eje OX fuera paralelo a la recta que une los focos y el eje OY fuera paralelo a la perpendicular en el punto medio de los focos, los ejes de simetría tendrían por ecuaciones respectivas $x = \alpha$ e $y = \beta$ y la ecuación de la hipérbola sería $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$.



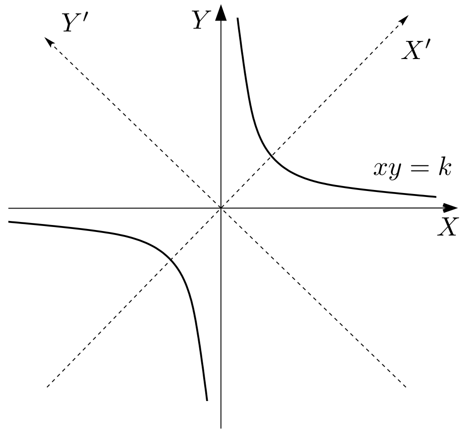
$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ $\qquad$ $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = -1$

Observación ¿Qué relación hay entre las gráficas $y = \frac{k}{x}$ y las hipérbolas? Si hacemos un giro de centro el origen de coordenadas y ángulo $\phi = -\frac{\pi}{4}$ obtenemos los puntos de coordenadas (x', y')

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\operatorname{sen}(\phi) \\ \operatorname{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Puesto que la relación anterior es equivalente a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \operatorname{sen}(\phi) \\ -\operatorname{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$



sustituyendo (x, y) en la ecuación $xy = k$ tenemos

$$\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) = k \iff \frac{(x')^2}{2k} - \frac{(y')^2}{2k} = 1$$

que es la ecuación de una hipérbola equilátera con centro $(x' = 0, y' = 0) = (x = 0, y = 0)$, con ejes $y' = 0$ (o lo que es lo mismo $\dfrac{x-y}{\sqrt{2}} = 0$) y $x' = 0$ (o lo que es lo mismo $\dfrac{x+y}{\sqrt{2}} = 0$ y con asíntotas $y' = \pm x'$ (o lo que es lo mismo, $y = 0$ y $x = 0$).

Cuando una hipérbola (equilátera) viene dada por una ecuación del tipo $xy = k$ se dice que la hipérbola está referida a sus asíntotas y cuando viene dada por una ecuación del tipo $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ se dice que está referida a sus ejes.

Ejercicio resuelto
Calcular la ecuación, los elementos notables (centro, focos, vértices, asíntotas y ejes) y la gráfica de la hipérbola que verifica: sus focos están en la recta $x = 1$; la distancia entre sus vértices es 6; una de sus asíntotas es la recta $y - 3x + 1 = 0$.

Puesto que los focos de la hipérbola están en la recta $x = 1$, esta recta es un eje de simetría de dicha cónica, con lo que tenemos garantía de que no está girada sino sólo trasladada. Es decir, su ecuación será de la forma

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = \pm 1 \quad \rightarrow \quad \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = \pm 1,$$

donde hacemos la traslación $x' = x - \alpha,\ \ y' = y - \beta$.

Es más, al estar los focos en una recta vertical (y, por tanto, sus vértices), sabemos que la ecuación será de la forma

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = -1 \quad \rightarrow \quad \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = -1,$$

pues la hipérbola cortará al eje Y' y no al X'. Por tanto, la hipérbola tiene: su centro en $(x', y') = (0, 0)$, es decir, $(x, y) = (\alpha, \beta)$; sus vértices en $(x', y') = (0, \pm b)$, es decir, $(x, y) = (\alpha, \beta \pm b)$; sus focos en $(x', y') = (0, \pm c)$ siendo $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, es decir, $(x, y) = (\alpha, \beta \pm c)$; sus ejes de simetría son las rectas $x' = 0$ e $y' = 0$, es decir, las rectas $x = \alpha$ e $y = \beta$; sus asíntotas son las rectas $y' = \pm \frac{b}{a} x'$, es decir, $y - \beta = \pm \frac{b}{a}(x - \alpha)$.

Tenemos pues, con los datos que nos dan, que determinar α, β, a y b.

Puesto que el centro está sobre la recta $x = 1$, sus coordenadas serán $(x, y) = (\alpha = 1, \beta)$. Al ser la distancia entre los vértices 6, esto quiere decir que b, distancia entre el centro y un vértice, vale $b = 6/2 = 3$. Como la asíntota pasa por el centro, las coordenadas de éste las determinamos hallando la intersección entre la recta $x = 1$ y dicha asíntota, $y - 3x + 1 = 0$: el centro está pues en $(x, y) = (\alpha = 1, \beta = 2)$. Por último, como la pendiente de la asíntota $y - 3x + 1 = 0$ es 3, deducimos que $b/a = 3$, es decir, $a = 1$.

La ecuación de la hipérbola es pues

$$\frac{(x-1)^2}{1^2} - \frac{(y-2)^2}{3^2} = -1 \quad \rightarrow \quad \frac{x'^2}{1^2} - \frac{y'^2}{3^2} = -1,$$

donde la traslación efectuada viene dada por $x' = x - 1,\ \ y' = y - 2$.

En las nuevas coordenadas, (x', y'), el centro de la hipérbola es el origen, sus semiejes son $a = 1$ y $b = 3$, con lo que su intersección con los ejes de coordenadas (no corta al X', sólo al Y'), que son sus ejes de simetría, se produce en los puntos $(0, \pm b) = (0, \pm 3)$, vértices de la hipérbola. Los focos están en los puntos $(0, \pm c)$ siendo $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$. Y, finalmente, las asíntotas son las rectas $y' = \pm \frac{b}{a} x'$, es decir, $y' = \pm 3x'$.

Usando la traslación $\quad x' = x - 1, \quad y' = y - 2, \quad$ pasamos esta información a las coordenadas originales (x, y). Vemos que la hipérbola está centrada en el punto $(1, 2)$, los vértices son los puntos $(1, 5)$ y $(1, -1)$, los focos son los puntos $\left(1, 2 + \sqrt{10}\right)$ y $\left(1, 2 - \sqrt{10}\right)$. Tiene dos ejes de simetría, las rectas $x = 1$ e $y = 2$ (los ejes Y' y X', respectivamente). Las asíntotas, que también se pueden obtener al factorizar la ecuación

$$\frac{(x-1)^2}{1^2} - \frac{(y-2)^2}{3^2} = 0,$$

son las rectas $y - 2 = \pm 3(x - 1)$, es decir, $y = 3x - 1$ e $y = -3x + 5$.

Resumimos estos resultados en la tabla siguiente:

	Coordenadas $X'Y'$	Coordenadas XY
Centro	$(0,0)$	$(1,2)$
Ejes de simetría	$x'=0$ e $y'=0$	$x=1$ e $y=2$
Vértices	$(0,\pm 3)$	$(1,5)$ y $(1,-1)$
Focos	$(0,\pm\sqrt{10})$	$(1,2+\sqrt{10})$ y $(1,2-\sqrt{10})$
Asíntotas	$y'=\pm 3x'$	$y=3x-1$ e $y=-3x+5$

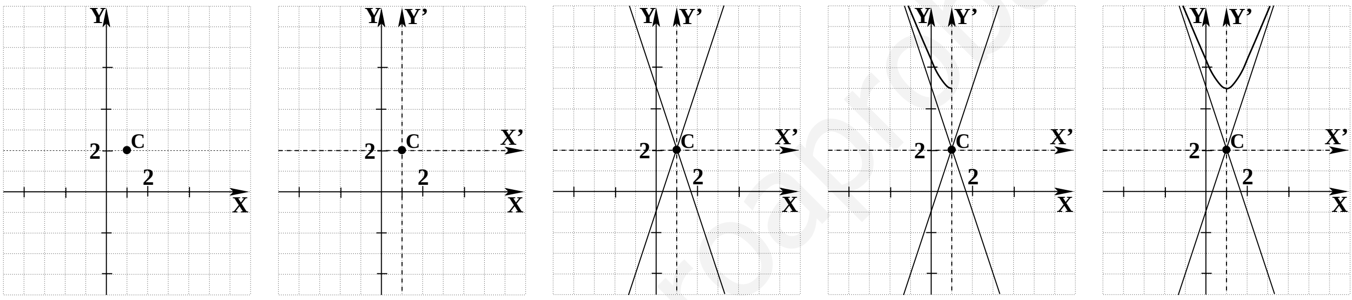
Teniendo en cuenta esta información, representamos una gráfica cualitativa de la hipérbola. Para ello procedemos de la siguiente forma.

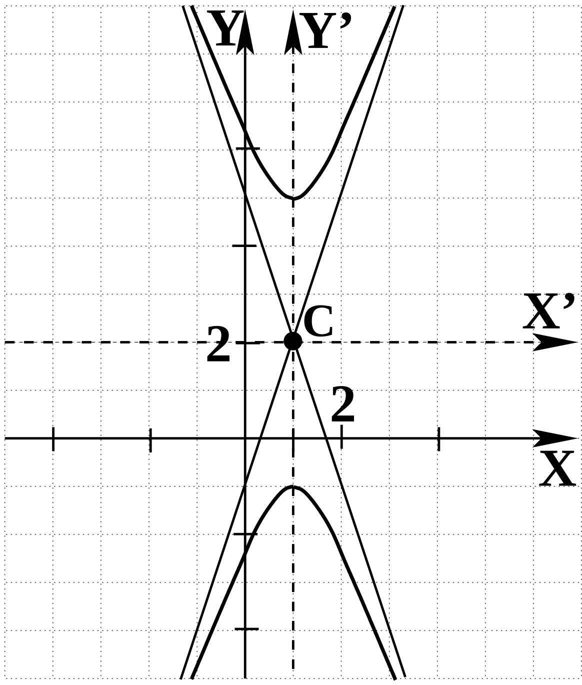
Primero, comenzamos dibujando los ejes X, Y y colocamos el centro C de la hipérbola. A continuación dibujamos los ejes auxiliares X', Y' (las escalas deben ser las mismas, por un lado, en los dos ejes de abscisas, X y X', y, por otro, en los dos de ordenadas, Y e Y').

En tercer lugar dibujamos, con toda la precisión posible, una de las rectas asíntotas, que pasa por el centro (origen de las coordenadas x', y') y que, en este caso tiene pendiente $+3$ (es decir, cuando la abscisa aumenta una unidad, la ordenada lo hace en 3 unidades). Después dibujamos la otra asíntota (que es simétrica de la anterior respecto de los dos ejes coordenados X' e Y', es decir, pasa por el centro y su pendiente es -3).

En cuarto lugar, dibujamos cualitativamente media rama (en este caso la parte izquierda de la rama superior). Partimos de un punto por el que sabemos que pasa la rama, el vértice $(x', y') = (0, 3)$, y prolongamos la curva (esto ya es aproximado) de manera que se acerque cada vez más a la asíntota.

En quinto lugar, dibujamos la parte derecha de la rama superior (simétrica de la semirrama izquierda con respecto al eje Y').





En el sexto y último paso, sólo falta ya dibujar la rama inferior (simétrica de la rama superior con respecto al eje X') para completar nuestro dibujo cualitativo.
Podemos plantearnos también, para dibujar con más exactitud la cónica, calcular algunos de sus puntos, como por ejemplo sus cortes con los ejes OX y OY. Así, los posibles cortes con el eje OX los calculamos haciendo $y = 0$ en la ecuación de la cónica.
De esta forma:

$$y=0 \;\rightarrow\; (x-1)^2 - \frac{(-2)^2}{9} = -1 \;\rightarrow\; (x-1)^2 = -\frac{5}{9}$$

es decir, no corta al eje OX. Las posibles intersecciones con el eje OY salen de

$$x=0 \;\rightarrow\; (-1)^2 - \frac{(y-2)^2}{9} = -1 \;\rightarrow\; y = 2 \pm 3\sqrt{2}$$

es decir, corta al eje OY en $(0, 2+3\sqrt{2}) \approx (0, 6{,}24)$ y en $(0, 2-3\sqrt{2}) \approx (0, -2{,}24)$.

2.3. Propiedades focales.

Las propiedades focales son ciertas características que poseen las cónicas y que las hacen idóneas para utilizarlas en la construcción de numerosos dispositivos y aparatos de uso común: las antenas parabólicas, los focos de los estadios deportivos, algunos telescopios, ... A pesar de ello, nosotros vamos únicamente a enunciar la propiedad focal de cada una de las cónicas en términos geométricos.

2.3.1. Propiedad focal de la parábola.

Sea F el foco de una parábola, r el eje de simetría de la misma y P un punto cualquiera de la parábola. La recta paralela a r que pasa por P y el segmento $\overline{PF}$ forman el mismo ángulo con la recta tangente a la parábola en P.

Si tenemos la superficie que se obtiene al girar una parábola, esta propiedad permite concentrar en el foco de la parábola todo lo que recibe la superficie (ondas, luz,...) en dirección paralela al eje. Recíprocamente, permite reflejar paralelamente al eje todo lo que se emite desde el foco. Ejemplos de utilización de esta propiedad son los faros de los automóviles, las antenas parabólicas de TV, los grandes reflectores de los telescopios que se usan en Astronomía, los hornos parabólicos, ...

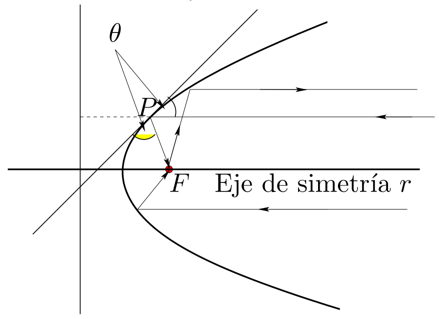
2.3.2. Propiedad focal de la elipse.

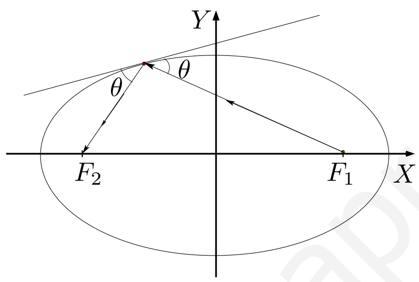
En cada punto P de la elipse, la recta tangente forma ángulos iguales con los segmentos $\overline{PF_1}$ y $\overline{PF_2}$ que unen el punto con los focos.

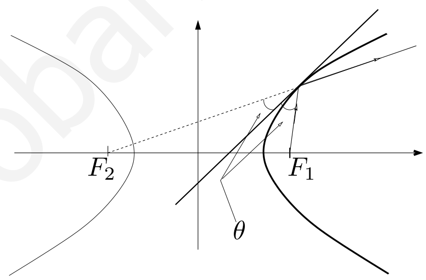
Ejercicio: ¿Qué dice la propiedad focal para la circunferencia, si es que tiene sentido plantearse dicha propiedad?

2.3.3. Propiedad focal de la hipérbola.

En cada punto P de la hipérbola, la recta tangente forma ángulos iguales con los segmentos PF_1 y PF_2 que unen el punto con los focos.







2.4. Ecuación reducida de una cónica no girada.

En general una cónica es una curva formada por todos los puntos del plano cuyas coordenadas (x, y) verifican una ecuación de segundo grado del tipo

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0.$$

Notemos que una ecuación de este tipo puede describir, junto a las cónicas previamente estudiadas, otro tipo de cónicas que se suelen conocer como cónicas degeneradas. Los siguientes ejemplos ilustran este tipo de cónicas degeneradas: una pareja de rectas (que se corten en un punto, que sean paralelas o que sean coincidentes), $x^2 - y^2 = 0,\ x^2 - 4 = 0,\ x^2 = 0$, o un único punto, $x^2 + y^2 = 0$, o nada, $x^2 + y^2 + 1 = 0$.

En general cualquier ecuación de segundo grado sin término en xy ($a_{12} = 0$) puede reducirse a uno de los siguientes tipos de ecuación

$$a\,X^2 + b\,Y^2 + c = 0, \qquad a\,X^2 + bY = 0, \qquad a\,X^2 + c = 0,$$

sin más que *completar cuadrados* y realizar un cambio de coordenadas. Una ecuación de alguno de estos tipos representa a una cónica cuyos ejes son paralelos a los ejes coordenados (la cónica no está girada respecto al sistema de referencia considerado). A este tipo de ecuación se le denomina ecuación reducida de la cónica o ecuación de la cónica referida a sus ejes.

Dado un polinomio de segundo grado (en una o varias variables) en el que no aparecen términos cruzados (xy si tenemos dos variables (x, y), o bien xy, xz e yz si tenemos tres variables (x, y, z),...) completar cuadrados consiste en formar un cuadrado de un binomio a partir de un cuadrado de un monomio y un término de primer grado. Veamos algunos ejemplos de cómo completar cuadrados en un polinomio de segundo grado (en 1, 2, ... variables).

Ejemplo. La conocida fórmula de las soluciones de una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$),

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

se obtiene sin más que completar cuadrados en x (esto es posible porque el coeficiente de x es distinto de 0)

$$ax^2 + bx + c \quad = \quad a\left[x^2 + \frac{b}{a}x\right] + c = a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x\right] + c = a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c$$

$$= \quad a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2+c=a\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2-\frac{b^2}{4a}+c=0.$$

Llegados a este punto hemos completado cuadrados en x. Para llegar a la fórmula de la solución de la ecuación de segundo grado sólo queda manipular convenientemente la expresión obtenida:

$$a\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2-\frac{b^2}{4a}+c=0 \iff \left[x+\frac{b}{2a}\right]^2=\frac{1}{a}\left[\frac{b^2}{4a}-c\right] \iff \left[x+\frac{b}{2a}\right]^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$
$$\iff x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \iff x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Ejemplo. Consideremos la cónica de ecuación $2x^2+3x+y^2-5y-1=0$ y obtengamos su ecuación reducida. Sin más que completar cuadrados en x y en y tenemos

$$\begin{aligned}2x^2+3x+y^2-5y-1 &= 2\left[x^2+\frac{3}{2}x\right]+\left[y^2-5y\right]-1\\ &= 2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]+\left[\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]-1=0.\end{aligned}$$

Una vez completados los cuadrados sólo queda simplificar para obtener

$$2\left[x+\frac{3}{4}\right]^2+\left[y-\frac{5}{2}\right]^2=\frac{67}{8} \quad \text{o, equivalentemente,} \quad \frac{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2}{\frac{67}{16}}+\frac{\left(y-\frac{5}{2}\right)^2}{\frac{67}{8}}=1$$

y la cónica es una elipse con centro el punto $\left(-\frac{3}{4},\frac{5}{2}\right)$ y semiejes $a=\frac{\sqrt{67}}{4}$ y $b=\frac{\sqrt{67}}{2\sqrt{2}}$. ¿Sobre qué recta están los focos de la elipse? ¿Cuáles son los ejes de simetría? Calcula los focos y los vértices de la elipse y dibújala.

Ejercicio resuelto
Representar gráficamente la cónica de ecuación $16x^2-y^2+32x-4y+8=0$, determinando, en las coordenadas originales x,y, sus siguientes elementos notables (si es que los tiene): centro, ejes, focos, asíntotas y vértices.

Puesto que en la ecuación de la cónica no aparece el término xy, sabemos que basta con hacer una traslación adecuada $x'=x-x_0,\ y'=y-y_0$ que lleve el origen de las nuevas coordenadas al centro (elipse o hipérbola) o al vértice (parábola) de la cónica. Tras dicha traslación será fácil identificar la cónica pues llegaremos a

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1, \quad \frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=\pm1, \quad y'=\alpha x'^2 \ \left(\text{o } x'=\beta y'^2\right),$$

si se trata de una elipse, una hipérbola o una parábola, respectivamente.

Notemos que, antes de hacer ningún cálculo, en el caso en que no aparece término xy, podemos saber si estamos ante un *caso elíptico* (elipse, un punto o nada), si los dos coeficientes de x^2 e y^2 tienen el mismo signo, o ante un *caso hiperbólico* (hipérbola o dos rectas que se cortan) si los dos coeficientes de x^2 e y^2 tienen signo opuesto o ante un *caso parabólico* (parábola, dos rectas paralelas, una recta *doble* o nada) cuando no aparece término x^2 o y^2. Es obvio, pues, que nuestra ecuación corresponde al caso hiperbólico.

Para determinar la traslación a realizar basta con completar cuadrados en la ecuación de la cónica:

$$\begin{aligned}16x^2-y^2+32x-4y+8 &= 0 \ \rightarrow\ 16(x^2+2x)-(y^2+4y)+8=0 \ \rightarrow\\ 16[(x+1)^2-1]-[(y+2)^2-4]+8 &= 0 \ \rightarrow\ 16(x+1)^2-(y+2)^2=4 \ \rightarrow\\ 4(x+1)^2-\frac{(y+2)^2}{2^2} &= 1 \ \rightarrow\ \frac{(x+1)^2}{(1/2)^2}-\frac{(y+2)^2}{2^2}=1.\end{aligned}$$

Es decir, que la traslación $x'=x+1,\quad y'=y+2,$ nos lleva a la ecuación de la hipérbola

$$\frac{x'^2}{(1/2)^2}-\frac{y'^2}{2^2}=1.$$

En las nuevas coordenadas, (x',y'), el centro de la hipérbola es el origen, sus semiejes son $a=\frac{1}{2}$ y $b=2$, con lo que su intersección con los ejes de coordenadas (no corta al OY', sólo al OX'), que son sus ejes de simetría, se produce en los puntos $(\pm a,0)=(\pm\frac{1}{2},0)$, vértices de la hipérbola. Los focos están en los puntos $(\pm c,0)$ siendo $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+2^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}$. Y, finalmente, las asíntotas son las rectas $y'=\pm\frac{b}{a}x'$, es decir, $y'=\pm4x'$.

Usando la traslación $\quad x' = x + 1, \quad y' = y + 2, \quad$ pasamos esta información a las coordenadas originales (x, y). Vemos que la hipérbola está centrada en el punto $(-1, -2)$, los vértices son los puntos $(-\frac{1}{2}, -2)$ y $(-\frac{3}{2}, -2)$, los focos son los puntos $\left(\frac{\sqrt{17}}{2} - 1, -2\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{17}}{2} - 1, -2\right)$. Tiene dos ejes de simetría, las rectas $x = -1$ e $y = -2$ (los ejes OY' y OX', respectivamente). Las asíntotas, que también se pueden obtener al factorizar la ecuación

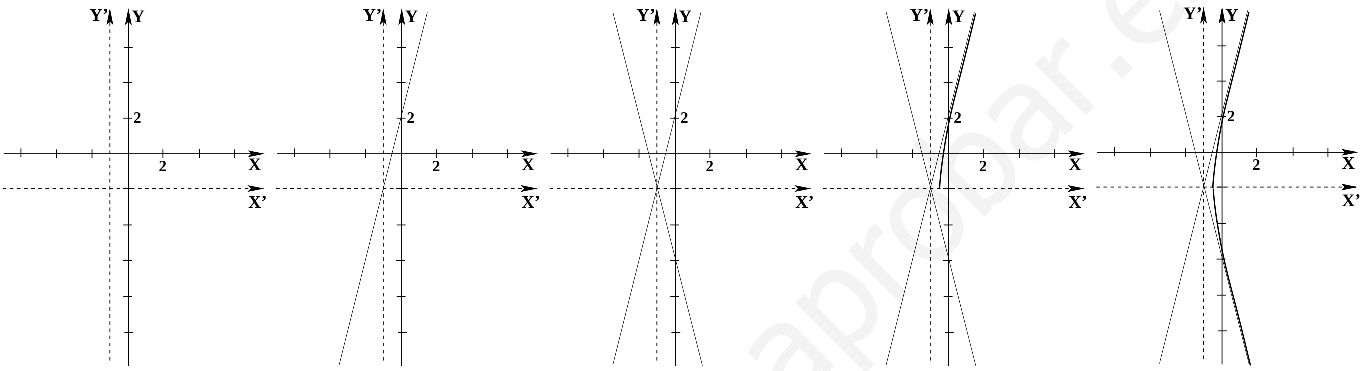
$$\frac{(x+1)^2}{(1/2)^2} - \frac{(y+2)^2}{2^2} = 0,$$

son las rectas $y + 2 = \pm 4(x + 1)$, es decir, $y = 4x + 2$ e $y = -4x - 6$.

Teniendo en cuenta esta información, representamos una gráfica cualitativa de la hipérbola. Para ello procedemos de la siguiente forma.

Primero, comenzamos dibujando los ejes X, Y y los ejes auxiliares X', Y' (las escalas deben ser las mismas, por un lado, en los dos ejes de abscisas y, por otro, en los dos de ordenadas).

En segundo lugar dibujamos, con toda la precisión posible, una de las rectas asíntotas, que pasa por el centro (origen de las coordenadas x', y') y que, en este caso tiene pendiente $+4$ (es decir, cuando la abscisa aumenta una unidad, la ordenada lo hace en 4 unidades).

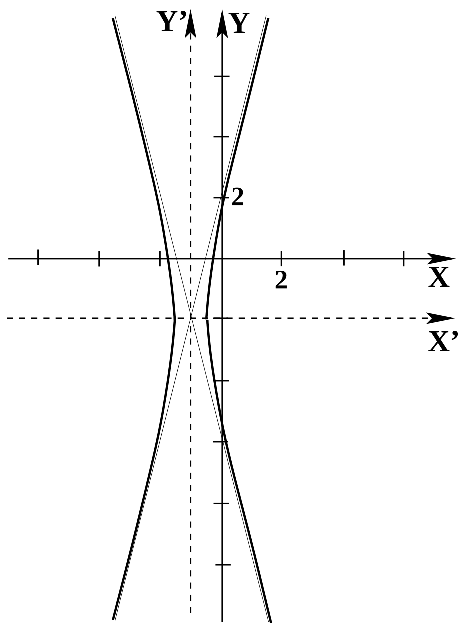


En tercer lugar, dibujamos la otra asíntota (que es simétrica de la anterior respecto de los dos ejes coordenados X' e Y', es decir, pasa por el centro y su pendiente es -4).

En cuarto lugar, dibujamos cualitativamente media rama (en este caso la parte superior de la rama derecha). Partimos de un punto por el que sabemos que pasa la rama, el vértice $(x', y') = (1/2, 0)$, y prolongamos la curva (esto ya es aproximado) de manera que se acerque cada vez más a la asíntota.

En quinto lugar, dibujamos la parte inferior de la rama derecha (simétrica de la semirrama superior con respecto al eje X').

En el sexto y último paso, sólo falta ya dibujar la rama izquierda (simétrica de la rama derecha con respecto al eje Y') para completar nuestro dibujo cualitativo.



Podemos plantearnos también, para dibujar con más exactitud la cónica, calcular algunos de sus puntos, como por ejemplo sus cortes con los ejes OX y OY. Así, los posibles cortes con el eje OX los calculamos haciendo $y = 0$ en la ecuación de la cónica.

De esta forma:

$$y = 0 \;\rightarrow\; 16x^2 + 32x + 8 = 0 \;\rightarrow\; x = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

es decir, corta al eje OX en $(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \approx (-0{,}29, 0)$ y en $(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \approx (-1{,}71, 0)$. Las posibles intersecciones con el eje OY salen de

$$x = 0 \;\rightarrow\; y^2 + 4y - 8 = 0 \;\rightarrow\; y = -2 \pm 2\sqrt{3}$$

es decir, corta al eje OY en $(0, -2 + 2\sqrt{3}) \approx (0, 1{,}46)$ y en $(0, -2 - 2\sqrt{3}) \approx (0, -5{,}46)$.

3. Cuádricas.

En general, una cuádrica es la superficie formada por todos los puntos del espacio cuyas coordenadas (x, y, z) verifican una ecuación de segundo grado

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0.$$

Desde este punto de vista, las cuádricas tienen muchos elementos en común con las cónicas en el plano.

Por lo general, las cuádricas son superficies en el espacio, aunque existen algunos casos degenerados para elecciones concretas de los parámetros. Por ejemplo, una ecuación de este tipo puede describir: una pareja de planos (que se corten en una recta, que sean paralelos o que sean coincidentes),

$$x^2 - y^2 = 0, \quad x^2 - 4 = 0, \quad x^2 = 0,$$

o un único punto

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

o nada

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0.$$

A la hora de analizar una cuádrica es una buena idea simplificar previamente la ecuación. Si en la ecuación de la cuádrica no aparecen términos cruzados, la ecuación puede reducirse, sin más que completar cuadrados, a una ecuación en la que a lo sumo aparece un término en cada variable (y, posiblemente, un término independiente), es decir, a uno de los siguientes tipos de ecuación:

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 + d = 0, \quad aX^2 + bY^2 + cZ = 0, \quad aX^2 + bY + cZ = 0, \quad aX^2 + bY = 0, \quad aX^2 + d = 0.$$

En general, aunque en la ecuación aparezcan términos cruzados, también es posible reducirla a uno de los tipos anteriores, que se denomina ecuación reducida de la cuádrica correspondiente. La técnica necesaria para *eliminar* los términos cruzados será desarrollada en el Tema 11.

A continuación estudiamos las diferentes cuádricas (además de los pares de planos ya citados) y sus elementos notables. Dependiendo de los signos de los coeficientes involucrados tendremos superficies con diferentes elementos distintivos (planos, ejes y centros de simetría, vértices, cortes con planos paralelos a los planos coordenados, etc.).

Recordemos que una superficie es simétrica: respecto del origen si al cambiar en su ecuación (x, y, z) por $(-x, -y, -z)$ la ecuación no cambia; respecto del eje OX, $y = z = 0$, si al cambiar en su ecuación (x, y, z) por $(x, -y, -z)$ la ecuación no cambia; respecto del eje OY, $x = z = 0$, si al cambiar en su ecuación (x, y, z) por $(-x, y, -z)$ la ecuación no cambia; respecto del eje OZ, $x = y = 0$, si al cambiar en su ecuación (x, y, z) por $(-x, -y, z)$ la ecuación no cambia; respecto del plano OXY, $z = 0$, si al cambiar en su ecuación (x, y, z) por $(x, y, -z)$ la ecuación no cambia; respecto del plano OXZ, $y = 0$, si al cambiar en su ecuación (x, y, z) por $(x, -y, z)$ la ecuación no cambia; respecto del plano OYZ, $x = 0$, si al cambiar en su ecuación (x, y, z) por $(-x, y, z)$ la ecuación no cambia.

3.1. Elipsoides.

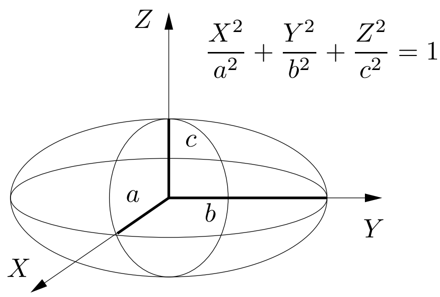
Los elipsoides se obtienen cuando, una vez completados cuadrados, los tres coeficientes de los términos de segundo grado tienen el mismo signo. Simplificando la ecuación, llegaremos a uno de los tres casos siguientes, dependiendo del signo del segundo término:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = \begin{cases} 1, \\ 0, \\ -1, \end{cases} \quad \text{con} \quad a, b, c \neq 0. \tag{3}$$

• **Elipsoide (real) y esfera:**
El primero de los casos,

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1,$$

se corresponde con la superficie que podemos observar en la figura y que se denomina **elipsoide (real)**. Elementos característicos de un elipsoide son: su centro (de simetría), sus ejes (de simetría), sus vértices (puntos de corte de los ejes con el elipsoide), sus semiejes a, b, c (distancias del centro a los vértices). En el caso considerado el centro es el origen de coordenadas, los ejes son los ejes coordenados y los vértices son $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ y $(0, 0, \pm c)$.



Elipsoide

El elipsoide real es simétrico respecto de los planos $X = 0$, $Y = 0$ y $Z = 0$, y sus intersecciones con ellos son las elipses de ecuaciones respectivas

$$\frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1, \quad \text{y} \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Un caso especialmente importante de elipsoide es la **esfera** que se cuando $a^2 = b^2 = c^2$.

• **Casos degenerados:** Si, al simplificar, se obtiene un cero como segundo término de la ecuación (3), la cuádrica se correspondería con un solo **punto**, $(X, Y, Z) = (0, 0, 0)$. En el caso en que el segundo término fuese negativo, la ecuación no tiene solución real y, por lo tanto, no se corresponde con ninguna superficie real. Por ello, se suele denominar a esta "cuádrica" como **elipsoide imaginario**.

3.2. Hiperboloides.

Las superficies cuádricas que tratamos ahora aparecen cuando, al completar cuadrados, dos de los coeficientes de los términos de segundo grado son positivos y uno negativo, o viceversa. Supondremos en este estudio que la variable cuyo coeficiente es negativo es Z (aunque las otras posibilidades serán también comentadas). Una ecuación de este tipo se puede llevar a uno de los tres casos siguientes, dependiendo del signo del segundo término:

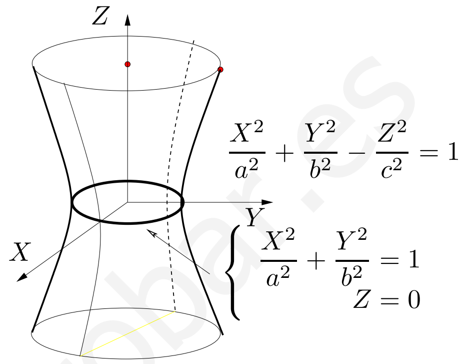
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=\begin{cases}1,\\0, \quad \text{con} \quad a,b,c\neq 0.\\-1,\end{cases} \tag{4}$$

• **Hiperboloide hiperbólico (o de una hoja):**

El primero de los casos, correspondiente a la ecuación (4) cuando el segundo término es positivo, se denomina **hiperboloide hiperbólico** o **hiperboloide de una hoja**.
Su ecuación es

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1.$$

Elementos característicos de un hiperboloide de una hoja son su centro y su eje. En el caso considerado, el centro es el origen de coordenadas $(X,Y,Z)=(0,0,0)$ y el eje corresponde al eje $OZ\equiv\begin{cases}X=0,\\Y=0.\end{cases}$
Al igual que el elipsoide, esta cuádrica es simétrica respecto de los planos coordenados. La intersección con los mismos da lugar a distintos tipos de cónicas:



Hiperboloide hiperbólico

Al igual que el elipsoide, esta cuádrica es simétrica respecto de los planos coordenados. La intersección con los mismos da lugar a distintos tipos de cónicas:

- Con $Z=0$, la intersección es la elipse $\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=1.$
- Con $X=0$, la intersección es la hipérbola $\dfrac{Y^2}{b^2}-\dfrac{Z^2}{c^2}=1.$
- Con $Y=0$, la intersección es la hipérbola $\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Z^2}{c^2}=1.$

El hiperboloide de una hoja tiene una particularidad que resulta sorprendente (desde un punto de vista intuitivo), esta particularidad es el ser, del mismo modo que el cono, una superficie reglada. De hecho, por cada punto de un hiperboloide de una hoja pasan dos rectas totalmente contenidas en la superficie. Las superficies que verifican que por cada uno de sus puntos pasa una recta totalmente contenida en la superficie se denominan superficies regladas.

Para terminar esta descripción comentemos, brevemente, la importancia de la variable cuyo coeficiente es el negativo. Ésta indica la dirección del eje del hiperboloide hiperbólico. Por ejemplo, si la ecuación fuese

$$-\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1,$$

el eje del hiperboloide hiperbólico sería el eje OX.

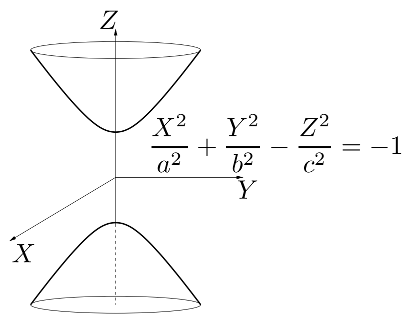
• **Hiperboloide elíptico (de dos hojas):**

El **Hiperboloide elíptico** o **hiperboloide de dos hojas** se obtiene de la ecuación (4) cuando el segundo término es negativo.

La ecuación es

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=-1.$$

Elementos característicos de un hiperboloide de dos hojas son su centro, su eje y sus vértices. En el caso considerado el centro es el origen de coordenadas y el eje es el eje OZ.
La variable cuyo signo es negativo indica también, en este caso, la dirección del eje del hiperboloide de dos hojas.
Esta cuádrica es simétrica respecto de los planos coordenados. La intersección con los mismos da lugar a distintos tipos de cónicas:



Hiperboloide elíptico

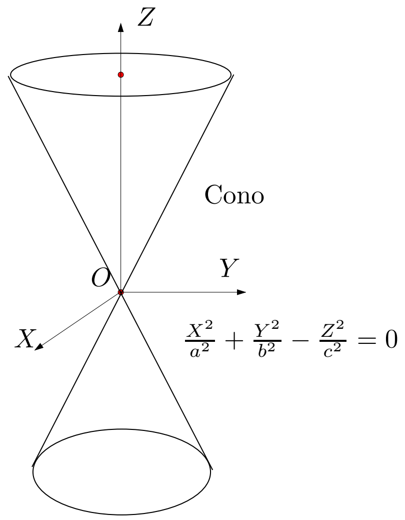
- Con $Z=0$, la intersección da lugar a la ecuación $\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=-1$, que no es una curva real.

- Con $X=0$, la intersección es la hipérbola $\dfrac{Y^2}{b^2}-\dfrac{Z^2}{c^2}=-1$.

- Con $Y=0$, la intersección es la hipérbola $\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Z^2}{c^2}=-1$.

• Cono:

La cuádrica que se obtiene de la ecuación (4) para el segundo término nulo, que se denomina **cono**, se puede considerar como un caso límite, o degenerado, entre los dos tipos de hiperboloides que acabamos de describir.



Su ecuación puede ser

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0 \quad \text{o, despejando,} \quad Z^2=\frac{X^2}{A^2}+\frac{Y^2}{B^2}.$$

Elementos característicos de un cono son su vértice y su eje. En el caso considerado son el origen de coordenadas y el eje OZ.
Notemos que un cono es una superficie que puede ser descrita fácilmente mediante rectas. Si tenemos una elipse en el espacio y un punto V que no está en el plano de la elipse, la superficie formada por (todos los puntos de) las rectas que pasan por V y por cada punto de la elipse es un cono con vértice V. Es obvio, por tanto, que un cono es también una superficie reglada, como el hiperboloide de una hoja.
Cuando $A^2=B^2$ se tiene un cono circular (los cortes con planos $Z=k$ son circunferencias).

3.3. Paraboloides.

Los paraboloides se obtienen cuando una de las tres variables no aparece elevada al cuadrado. Supondremos, en esta descripción, que dicha variable es Z. Una vez completados cuadrados y simplificada la ecuación llegamos a los dos tipos principales siguientes:

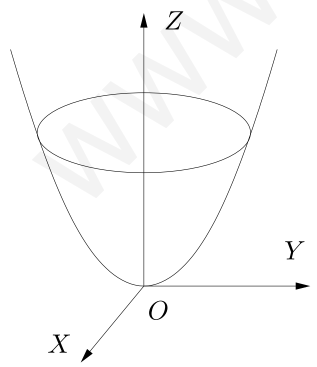
$$Z=\pm\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}\right) \quad \text{con} \quad a,b\neq 0, \tag{5}$$

y

$$Z=\pm\left(\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}\right) \quad \text{con} \quad a,b\neq 0. \tag{6}$$

• Paraboloide elíptico:

La ecuación (5) es la ecuación general de un **paraboloide elíptico**, salvo el papel que realizan las distintas variables.



Paraboloide elíptico

De los dos posibles signos de la ecuación (5), para una primera representación (que se puede observar en la figura), consideraremos el positivo, es decir, $Z=\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}$.
Elementos característicos de un paraboloide elíptico son su vértice y su eje. En el caso considerado son el origen de coordenadas y el eje OZ, respectivamente.
Si, en la ecuación (5) hubiésemos tomado el signo negativo, el paraboloide elíptico estaría abierto hacia los valores negativos de Z.

En el caso considerado, esta cuádrica es simétrica respecto de los planos $X=0$ e $Y=0$. La intersección con ellos da lugar a las siguientes cónicas:

- Con $X=0$, la intersección es la parábola $Z=\dfrac{Y^2}{b^2}$.

- Con $Y=0$, la intersección es la parábola $Z=\dfrac{X^2}{a^2}$.

Vemos que, en ambos casos, las parábolas están abiertas hacia los valores positivos de Z.

Observemos, también, que la intersección de un paraboloide elíptico con un plano $Z = c$ es una elipse si $c > 0$, un punto (el vértice) para $c = 0$ y nada si $c < 0$.

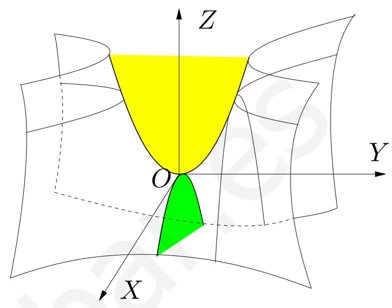
Terminemos esta descripción mencionando que el papel que desempeña la variable que no aparece elevada al cuadrado se corresponde, como en casos anteriores, con la dirección del eje de la cuádrica.

• Paraboloide hiperbólico.

Salvo el papel realizado por las distintas variables, la ecuación (6) es la ecuación general de un **paraboloide hiperbólico**. De los dos signos posibles de dicha ecuación consideraremos ahora el signo negativo, es decir, la ecuación

$$Z = -\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}.$$

Podemos comprobar, en la figura, que esta superficie se asemeja a una silla de montar, y a veces recibe este nombre.
En el caso considerado, el origen de coordenadas es el llamado vértice o punto de silla del paraboloide hiperbólico.
Los planos $X = 0$ e $Y = 0$ son de simetría para el paraboloide hiperbólico y al cortar la superficie con ellos se obtienen parábolas ($Z = \frac{Y^2}{b^2}$ y $Z = -\frac{X^2}{a^2}$, respectivamente).
Al cortar con planos $Z = c$ se obtienen hipérbolas para $c \neq 0$ y sus respectivas asíntotas para $c = 0$.



Paraboloide hiperbólico

La elección del signo positivo en la ecuación (6) cambiaría los papeles respectivos de X e Y y, por tanto, si las parábolas de corte están abiertas hacia valores positivos o negativos de Z.

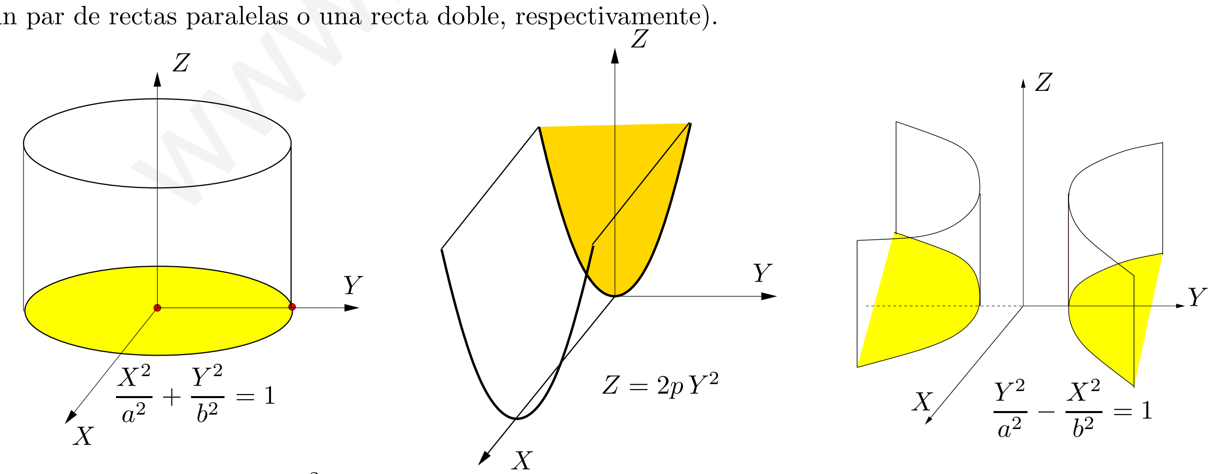
Del mismo modo, el cambio en la variable que no tiene término cuadrático cambiaría los planos de simetría y, por tanto, las secciones parabólicas e hiperbólicas.

Es obligado terminar la descripción del paraboloide hiperbólico destacando que, aunque la intuición no lo ponga del todo sencillo, nos encontramos ante una superficie reglada. Aún más, por cada punto de la superficie pasan un par de rectas que están completamente contenidas en ella.

3.4. Cilindros.

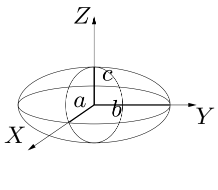
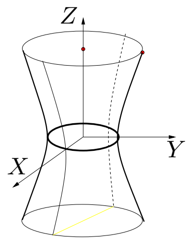
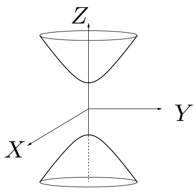
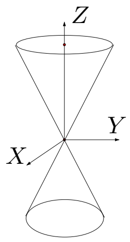
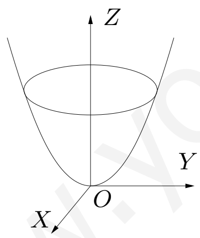
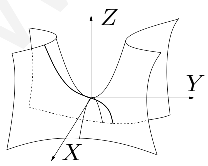
Estas cuádricas corresponden a casos en los que, al completar cuadrados, alguna de las variables no aparece o se obtiene un único cuadrado. Esto hace que podamos pensar en los **cilindros** como superficies formadas al desplazar una cónica a lo largo de una recta que pasa por uno de sus puntos (y no está contenida en el plano de dicha cónica).

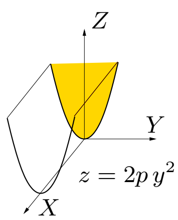
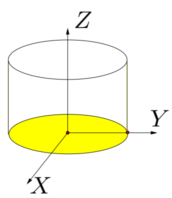
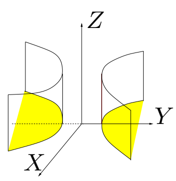
Dependiendo del comportamiento de las otras dos variables se pueden obtener distintos cilindros. En la figura siguiente mostramos los más habituales, aunque también podríamos incluir en estos casos las cuádricas degeneradas correspondientes a dos planos secantes (generados a partir de un par de rectas que se cortan y que pueden ser consideradas como las asíntotas de una familia de hipérbolas), dos planos paralelos o un plano doble (generados por un par de rectas paralelas o una recta doble, respectivamente).



Una ecuación del tipo $Y^2 = 2X - Z$, en la que aparece el cuadrado de una variable y términos lineales en las otras dos, corresponde a un cilindro parabólico en el que la directriz (la recta formada por los vértices de las parábolas) no es paralela a ninguno de los ejes coordenados.

Tabla–resumen de Cuádricas

Elipsoide		$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ Es una esfera si $a=b=c$. Secciones con planos paralelos a los coordenados: Elipses. Simetría respecto al centro, ejes y planos coordenados. Centro (de simetría): Origen de coordenadas. Es de revolución si dos de los coeficientes a, b y c son iguales.
Hiperboloide Hiperbólico (o de 1 hoja)		$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$ Eje del hiperboloide: variable que aparece con coeficiente negativo. Secciones con planos paralelos al plano XY: Elipses. Secciones con planos paralelos al plano XZ ó YZ: Hipérbolas. Simetría respecto al centro, ejes y planos coordenados. Centro: Origen de coordenadas. Es de revolución si $a=b$.
Hiperboloide Elíptico (o de 2 hojas)		$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$ Eje del hiperboloide: variable que aparece con coeficiente negativo. Secciones con planos paralelos al plano XZ ó YZ: Hipérbolas. Secciones con planos paralelos al XY: Elipses (ó 1 punto ó nada). Simetría respecto al centro, ejes y planos coordenados. Centro: Origen de coordenadas. Es de revolución si $a=b$.
Cono		$$z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$ Eje del cono: OZ. Vértice: O. Secciones con planos paralelos al plano XY: Elipses (ó 1 punto). Secciones con planos paralelos al plano XZ ó YZ: Hipérbolas. Simetría respecto al centro, ejes y planos coordenados. Centro (de simetría): Origen de coordenadas. Es de revolución si $a=b$.
Paraboloide Elíptico		$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$ Eje del paraboloide: OZ, variable que aparece con grado uno. Vértice: O. Secciones con planos paralelos al XY: Elipses (ó 1 punto o nada). Secciones con planos paralelos al plano XZ ó YZ: Parábolas. Simetría respecto a los planos XZ e YZ y al eje OZ. Es de revolución si $a=b$.
Paraboloide hiperbólico		$$z=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$ Eje de simetría: OZ. Simetría respecto a los planos XZ e YZ. Secciones con planos paralelos al XY: Hipérbolas (ó 2 rectas). Secciones con planos paralelos al plano XZ ó YZ: Parábolas.

Cilindros	Parabólico 	Elíptico $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 	 Hiperbólico $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$

Ejercicio resuelto
Determinar el tipo de cuádrica que corresponde a la ecuación

$$x^2 - 4y^2 + z^2 - 2x - 8y + 4z + 5 = 0,$$

representarla gráficamente y encontrar las simetrías que presenta (respecto a puntos, rectas y planos).

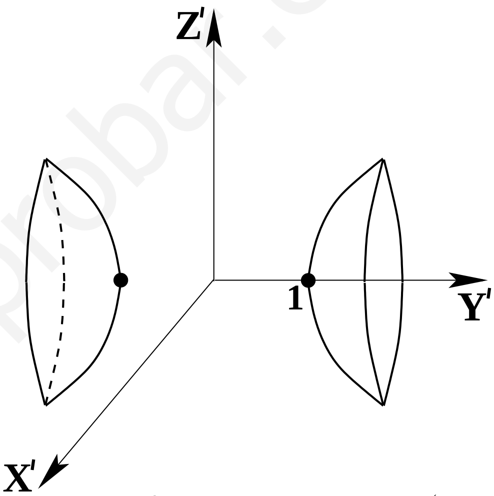
El tipo de cuádrica depende de los signos de los coeficientes cuadráticos (cuántos son positivos, cuántos negativos y cuántos nulos) y del signo del término independiente. Puesto que los coeficientes de los tres términos de grado dos son todos no nulos y no tienen todos el mismo signo, sabemos que estamos ante un hiperboloide (de una o de dos hojas) o ante un cono.

Completando cuadrados

$$\begin{aligned} &x^2 - 4y^2 + z^2 - 2x - 8y + 4z + 5 = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 2x - 4(y^2 + 2y) + z^2 + 4z + 5 = 0 \;\rightarrow \\ &(x-1)^2 - 1 - 4[(y+1)^2 - 1] + (z+2)^2 - 4 + 5 = 0 \;\rightarrow\; (x-1)^2 - 4(y+1)^2 + (z+2)^2 = -4 \\ &\rightarrow\; \frac{(x-1)^2}{2^2} - (y+1)^2 + \frac{(z+2)^2}{2^2} = -1 \;\rightarrow\; \frac{x'^2}{2^2} - y'^2 + \frac{z'^2}{2^2} = -1, \end{aligned}$$

donde hemos realizado la traslación $x' = x-1$, $y' = y+1$, $z' = z+2$, con lo que el origen de las nuevas coordenadas está en el punto $(x = 1, y = -1, z = -2)$. Se trata, por tanto, de un hiperboloide de dos hojas, cuyo eje es el OY', al que corta en los puntos $(x', y', z') = (0, \pm 1, 0)$. Además es simétrico respecto:

1. del punto $(x', y', z') = (0, 0, 0)$, es decir, $(x, y, z) = (1, -1, -2)$.
2. de las rectas $y' = z' = 0$ (eje OX'), $x' = z' = 0$ (eje OY') y $x' = y' = 0$ (eje OZ'), es decir, respecto de las tres rectas de ecuaciones $y = 1, z = -2$, $x = 1, z = -2$ y $x = 1, y = 1$, respectivamente.
3. de los planos $z' = 0$ (plano $OX'Y'$), $y' = 0$ (plano $OX'Z'$) y $x' = 0$ (plano $OY'Z'$), es decir, respecto de los tres planos de ecuaciones $z = -2$, $y = 1$ y $x = 1$, respectivamente.



Un dibujo cualitativo de esta cuádrica, en coordenadas (x', y', z'), aparece en la figura. En coordenadas (x, y, z) basta con desplazar los ejes coordenados.

Ejercicio resuelto
Clasificar, según los valores de $a \in \mathbb{R}$, la cuádrica de ecuación

$$4x^2 - ay^2 + 9z^2 - 16x - 2ay - 18z = 2a - 25.$$

Para $a = 36$, dibujar la cuádrica que se obtiene y encontrar en las coordenadas originales, si los tiene, su centro de simetría, sus ejes de simetría y sus planos de simetría.

Para clasificar la familia de cuádricas completamos cuadrados

$$\begin{aligned} &4x^2 - ay^2 + 9z^2 - 16x - 2ay - 18z = 2a - 25 \;\rightarrow\; 4(x^2 - 4x) - a(y^2 + 2y) + 9(z^2 - 2z) = 2a - 25 \\ &\rightarrow\; 4[(x-2)^2 - 4] - a[(y+1)^2 - 1] + 9[(z-1)^2 - 1] = 2a - 25 \\ &\rightarrow\; 4(x-2)^2 - 16 - a(y+1)^2 + a + 9(z-1)^2 - 9 = 2a - 25 \;\rightarrow\; 4(x-2)^2 - a(y+1)^2 + 9(z-1)^2 = a. \end{aligned}$$

La traslación

$$x' = x - 2, \quad y' = y + 1, \quad z' = z - 1$$

permite escribir la ecuación como

$$4x'^2 - ay'^2 + 9z'^2 = a.$$

El tipo de cuádrica depende de los signos de los coeficientes cuadráticos (cuántos son positivos, cuántos negativos y cuántos nulos) y del signo del término independiente. Observamos que:

- el coeficiente de x'^2, 4, es siempre positivo;
- el coeficiente de y'^2, $-a$, es negativo cuando $a > 0$, nulo cuando $a = 0$ y positivo cuando $a < 0$;
- el coeficiente de z'^2, 9, es siempre positivo;

- el término independiente, a, es negativo cuando $a < 0$, nulo cuando $a = 0$ y positivo cuando $a > 0$.

Aparecen, por tanto, las tres situaciones siguientes (indicamos los signos de los coeficientes de x'^2, y'^2, z'^2 y del término independiente, este último entre paréntesis, en cada caso):

i) $a < 0$: $+ + +(-)$, no hay ningún punto que lo verifique (es un caso de elipsoide degenerado).

ii) $a = 0$: $+0 + (0)$, se trata de un caso degenerado de cilindro elíptico, concretamente una recta (el eje OY'), que verifica la ecuación $4x'^2 + 9z'^2 = 0$. Es pues la recta dada por $x = 1$, $z = 2$.

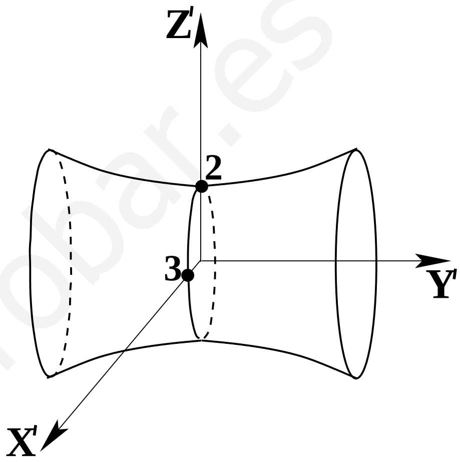
iii) $a > 0$: $+ - +(+)$, estamos ante un hiperboloide de una hoja, cuyo eje es el OY'.

Para $a = 36$ obtenemos el hiperboloide de una hoja de ecuación

$$4(x-2)^2 - 36(y+1)^2 + 9(z-1)^2 = 36 \to \frac{(x-2)^2}{3^2} - \frac{(y+1)^2}{1^2} + \frac{(z-1)^2}{2^2} = 1 \to \frac{x'^2}{3^2} - \frac{y'^2}{1^2} + \frac{z'^2}{2^2} = 1.$$

Estudiemos las simetrías que presenta este hiperboloide de una hoja (representado en la figura) respecto de puntos, rectas y planos.
El único punto respecto del que una cuádrica puede ser simétrica es el origen, $(x', y', z') = (0, 0, 0)$. Esto ocurre cuando su ecuación es invariante al cambiar (x', y', z') por $(-x', -y', -z')$:

$$\frac{(-x')^2}{3^2} - \frac{(-y')^2}{1^2} + \frac{(-z')^2}{2^2} = 1 \;\to\; \frac{x'^2}{3^2} - \frac{y'^2}{1^2} + \frac{z'^2}{2^2} = 1.$$

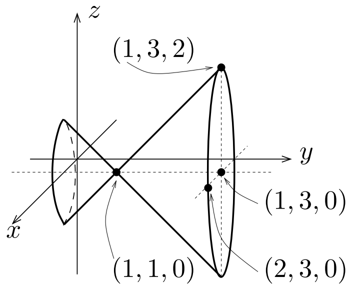


Por tanto, esta cuádrica es simétrica respecto del punto $(x', y', z') = (0, 0, 0)$, es decir, $(x, y, z) = (2, -1, 1)$.
Las rectas respecto de las cuales la cuádrica puede ser simétrica son los ejes coordenados: la simetría respecto del eje X', definido por $y' = z' = 0$, aparece si la ecuación no varía cuando se sustituye (x', y', z') por $(x', -y', -z')$; la simetría respecto del eje Y', definido por $x' = z' = 0$, está presente si la ecuación no cambia cuando se sustituye (x', y', z') por $(-x', y', -z')$; la simetría respecto del eje Z' definido por $x' = y' = 0$, aparece si la ecuación no varía cuando se sustituye (x', y', z') por $(-x', -y', z')$. Es trivial comprobar que el hiperboloide es simétrico respecto de los tres ejes, cuyas ecuaciones en las coordenadas originales son: $y = -1$, $z = 1$ para el eje X'; $x = 2$, $z = 1$ para el eje Y'; $x = 2$, $y = -1$ para el eje Z'.

Los planos respecto de los cuales la cuádrica puede ser simétrica son los planos coordenados: la simetría respecto del plano $X'Y'$, definido por $z' = 0$, aparece si la ecuación no varía cuando se sustituye (x', y', z') por $(x', y', -z')$; la simetría respecto del plano $X'Z'$, definido por $y' = 0$, está presente si la ecuación no cambia cuando se sustituye (x', y', z') por $(x', -y', z')$; la simetría respecto del plano $Y'Z'$ definido por $x' = 0$, aparece si la ecuación no varía cuando se sustituye (x', y', z') por $(-x', y', z')$. Es trivial comprobar que el hiperboloide es simétrico respecto de esos tres planos, cuyas ecuaciones en las coordenadas originales son: $z = 1$ para el plano $X'Y'$; $y = -1$ para el plano $X'Z'$; $x = 2$ para el plano $Y'Z'$.

Resumiendo, el hiperboloide es simétrico respecto del origen, de los ejes y de los planos coordenados (de las coordenadas $X'Y'Z'$). Presenta esas siete simetrías porque en su ecuación aparecen x', y' y z' con grado dos y, por tanto, la ecuación no cambia al sustituir cualquiera de ellos por su opuesto (x' por $-x'$, y' por $-y'$, z' por $-z'$).

Ejercicio resuelto
Observa la cuádrica de la figura. Determina su ecuación en coordenadas (x, y, z).



Se trata de un cono que tiene su eje paralelo al OY, es decir, su ecuación será de la forma

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(z-\beta)^2}{b^2} = (y-\gamma)^2$$

si su vértice está en el punto (α, γ, β). Como el de la figura tiene su vértice en $(1, 1, 0)$, su ecuación es de la forma

$$\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = (y-1)^2.$$

Para determinar a y b tenemos la información de que el corte del cono con el plano $y = 3$ es una elipse de semiejes 1 en la dirección del eje OX y 2 en la del OZ. Por tanto,

$$y = 3: \ \frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = (3-1)^2 = 2^2 \ \rightarrow \ \frac{(x-1)^2}{(2a)^2} + \frac{z^2}{(2b)^2} = 1,$$

con lo que identificando con los semiejes de la elipse obtenemos $2a = 1$ y $2b = 2$, es decir, la ecuación de la cuádrica es

$$\frac{(x-1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{z^2}{1^2} = (y-1)^2 \ \rightarrow \ 4(x-1)^2 + z^2 = (y-1)^2.$$

Otra manera de determinar a y b es exigiendo que los puntos $(1, 3, 2)$ y $(2, 3, 0)$ verifiquen la ecuación del cono (cuidado con el punto $(1, 3, 0)$, que no pertenece al cono):

$$\begin{aligned} (1,3,2): \quad & \frac{(1-1)^2}{a^2} + \frac{2^2}{b^2} = (3-1)^2 \ \rightarrow \ b^2 = 1 \ \rightarrow \ b = 1, \\ (2,3,0): \quad & \frac{(2-1)^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = (3-1)^2 \ \rightarrow \ a^2 = \frac{1}{4} \ \rightarrow \ a = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ejercicio resuelto
Determinar razonadamente el tipo de cuádrica que corresponde a la ecuación

$$(a+1)x^2 + (a^2-4)y^2 + az^2 = -a^2 + a + 2,$$

para cada valor de $a \in \mathbb{R}$. Hacer, asimismo, un dibujo esquemático de las superficies que se obtienen según los valores del parámetro a. Además, estudiar razonadamente, cuáles de dichas superficies son simétricas respecto del eje OX y cuáles respecto del plano OXZ ($y = 0$).

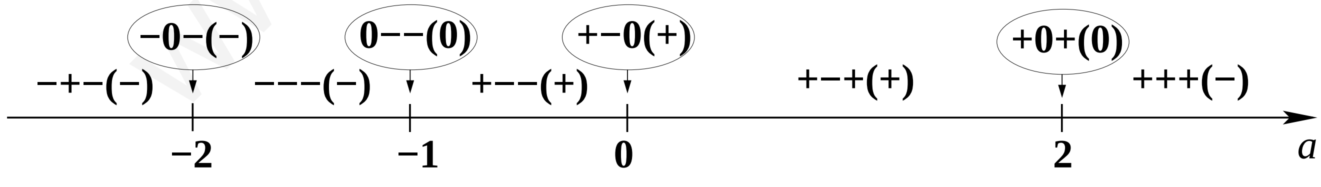
Tenemos que clasificar la familia de cuádricas

$$(a+1)x^2 + (a^2-4)y^2 + az^2 = -a^2 + a + 2.$$

El tipo de cuádrica depende de los signos de los coeficientes cuadráticos (cuántos son positivos, cuántos negativos y cuántos nulos) y del signo del término independiente. Observamos que:

- el coeficiente de x^2, $a+1$, es negativo cuando $a < -1$, nulo cuando $a = -1$ y positivo cuando $a > -1$;
- el coeficiente de y^2, $a^2 - 4$, es negativo cuando $|a| < 2$, es decir, $-2 < a < 2$, nulo cuando $a = \pm 2$ y positivo cuando $|a| > 2$, o sea, $a < -2$ o $a > 2$;
- el coeficiente de z^2, a, es, obviamente, negativo cuando $a < 0$, nulo cuando $a = 0$ y positivo cuando $a > 0$;
- el término independiente, $-a^2 + a + 2 = -(a+1)(a-2)$, es negativo cuando $a < -1$ o $a > 2$, nulo cuando $a = -1, 2$ y positivo cuando $-1 < a < 2$.

Aparecen, por tanto, las nueve situaciones siguientes (indicamos los signos de los coeficientes de x^2, y^2, z^2 y del término independiente, este último entre paréntesis, en cada caso):



i) $a < -2$: $-+-(-)$, o si preferimos (cambiando el signo a la ecuación completa) $+-+(+)$, se trata de un hiperboloide de una hoja, cuyo eje es el OY.

ii) $a = -2$: $-0-(-)$, tenemos un cilindro elíptico cuyo eje es el OY. Observemos que, equivalentemente, estamos ante el caso $+0+(+)$, en concreto con la ecuación $x^2 + 2z^2 = 4$.

iii) $-2 < a < -1$: $---(-)$, estamos ante un elipsoide, pues es equivalente a $+++(+)$.

iv) $a = -1$: $0--(0)$, se trata de un caso degenerado de cilindro elíptico, equivalente a $0++(0)$, concretamente una recta (el eje OX), que verifica la ecuación $-3y^2 - z^2 = 0$.

v) $-1 < a < 0$: $+--(+)$, se trata de un hiperboloide de dos hojas, cuyo eje es el OX.

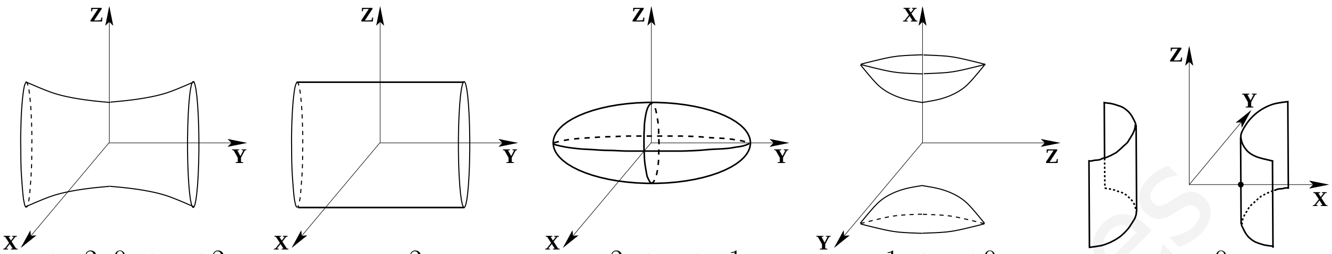
vi) $a = 0$: $+-0(+)$, se trata de un cilindro hiperbólico, cuyo eje es el OZ, en concreto de ecuación $x^2 - 4y^2 = 2$.

vii) $0 < a < 2$: $+-+(+)$, o si preferimos, $++-(-)$, estamos ante un hiperboloide de una hoja, cuyo eje es el OY.

viii) $a = 2$: $+0+(0)$, se trata de un caso degenerado de cilindro elíptico, concretamente una recta (el eje OY), que verifica la ecuación $3x^2 + 2z^2 = 0$.

ix) $a > 2$: $+++(-)$, no hay ningún punto que lo verifique (es un caso de elipsoide degenerado).

Hacemos un dibujo cualitativo de las cuádricas que se obtienen en cada caso:



$a < -2$, $0 < a < 2$, $a = -2$, $-2 < a < -1$, $-1 < a < 0$ $a = 0$

Una cuádrica será simétrica respecto al eje OX si al cambiar en su ecuación (x, y, z) por $(x, -y, -z)$ la ecuación no cambia. Esto sucederá siempre que, cuando aparezcan y y z, lo hagan con grado dos o grado cero (que no aparezcan). Como en todos los casos (no degenerados) que surgen al variar a ocurre eso, concluimos que todas son simétricas respecto al eje OX.

Análogamente, una cuádrica será simétrica respecto al plano OXZ si al sustituir en su ecuación (x, y, z) por $(x, -y, z)$ la ecuación no cambia. Esto sucederá siempre que, cuando aparezca y, no lo haga con grado uno (es decir, su grado sea dos o cero). Como en todos los casos (no degenerados) que surgen al variar a ocurre eso, concluimos que todas son simétricas respecto al plano OXZ.

Observemos que en los casos degenerados (el eje OX cuando $a = -1$ y el eje OY cuando $a = 2$) también es válido ese razonamiento (aunque el enunciado habla de estudiar las superficies que sean simétricas).

Ejercicio resuelto

Determinar razonadamente el tipo de cuádrica que corresponde a la ecuación

$$\alpha x^2 + (4 - \alpha^2)y^2 - z + 1 = 0,$$

para cada valor $\alpha \in \mathbb{R}$. Hacer un dibujo esquemático de las superficies que se obtienen para $\alpha = -3$, $\alpha = -1$ y $\alpha = 0$.

Tenemos que clasificar la familia de cuádricas

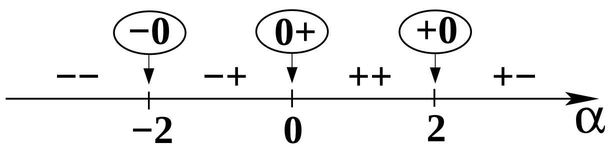
$$\alpha x^2 + (4 - \alpha^2)y^2 - z + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad z - 1 = \alpha x^2 + (4 - \alpha^2)y^2 \quad \rightarrow \quad z' = \alpha {x'}^2 + (4 - \alpha^2){y'}^2$$

donde hemos hecho la traslación $x' = x$, $y' = y$, $z' = z - 1$ que nos permite eliminar el término independiente.

Vemos que no aparece término cuadrático en z' (siempre lineal con coeficiente $+1$ cuando lo despejamos). El tipo de cuádrica depende entonces de los signos de los coeficientes cuadráticos (cuántos son positivos, cuántos negativos y cuántos nulos). Observamos que:

- el coeficiente de ${x'}^2$ es positivo si $\alpha > 0$, nulo si $\alpha = 0$ y negativo si $\alpha < 0$;
- el coeficiente de ${y'}^2$, $4 - \alpha^2$, es positivo cuando $|\alpha| < 2$, es decir, $-2 < \alpha < 2$, nulo cuando $\alpha = \pm 2$ y negativo cuando $|\alpha| > 2$, o sea, $\alpha < -2$ o $\alpha > 2$.

Aparecen, por tanto, las siete situaciones siguientes (indicamos los signos de los coeficientes de ${x'}^2$ e ${y'}^2$, en cada caso):



i) $\alpha < -2$: $--$, se trata de un paraboloide elíptico cuyo eje es el OZ'.

ii) $\alpha = -2$: -0, se trata de un cilindro parabólico cuyo eje es el OY'.

iii) $-2 < \alpha < 0$: $-+$, estamos ante un paraboloide hiperbólico cuyo eje es el OZ'.

iv) $\alpha = 0$: $0+$, es un cilindro parabólico cuyo eje es el OX'.

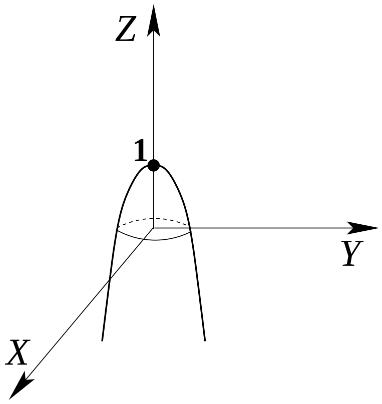
v) $0 < \alpha < 2$: $++$, estamos ante un paraboloide elíptico, cuyo eje es el OZ'.

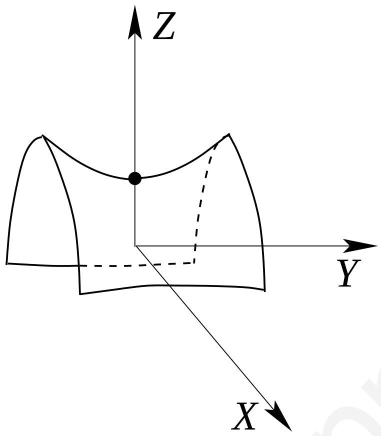
vi) $\alpha = 2$: $+0$, se trata de un cilindro parabólico cuyo eje es el OY'.

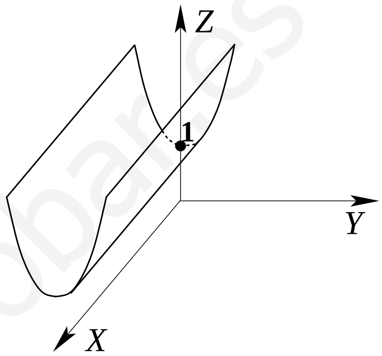
vii) $\alpha > 2$: $+-$, tenemos un paraboloide hiperbólico cuyo eje es el OZ'.

Hacemos un dibujo cualitativo de las cuádricas que se obtienen para los valores dados:

- para $\alpha = -3$, el paraboloide elíptico $z - 1 = -3x^2 - 5y^2$;
- para $\alpha = -1$, el paraboloide hiperbólico $z - 1 = -x^2 + 3y^2$;
- para $\alpha = 0$, el cilindro parabólico $z - 1 = 4y^2$.







4. Ejercicios

Ejercicio 1. En las siguientes ecuaciones, determinar el tipo de cónica que es, sus elementos notables y su representación gráfica.

1. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.
2. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.
3. $y = 4x^2$.
4. $x = 2y^2$.

Ejercicio 2. Completar cuadrados, si es necesario, en las siguientes ecuaciones y determinar el tipo de cónica que es, sus elementos notables y su representación gráfica.

1. $3x^2 + 3y^2 + x + 5y + 1 = 0$.
2. $3x^2 - 3y^2 + x + 5y + 1 = 0$.
3. $3y^2 + x + 5y + 1 = 0$.
4. $x^2 + 2y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$.
5. $x^2 - y^2 + 4x - 6y - 9 = 0$.
6. $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$.
7. $x^2 - 4x + 4y + 4 = 0$.
8. $y^2 - 4y = 0$.
9. $4x^2 + 5y^2 - 30y + 25 = 0$.
10. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10 = 0$.
11. $2x^2 + y^2 - 12x - 4y + 24 = 0$.

Ejercicio 3.

1. Calcular la ecuación de la parábola de eje horizontal que tiene por foco $F = (-2, 3)$ y pasa por el punto $(-1, 3)$.
2. Calcular la ecuación de la elipse que pasa por el punto $P = (3, -2)$ y tiene por focos los puntos $F_1 = (4, 2)$ y $F_2 = (-2, 2)$. Determina sus elementos notables y dibújala.
3. Calcular la ecuación de la hipérbola que tiene por vértices los puntos $(1, 2)$ y $(1, 6)$ y pasa por el punto $(3, 8)$.

Ejercicio 4. (Selectividad)

1. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(0, 2)$, $(0, -2)$ y $(-1, 1)$.
2. Determinar los valores de m para que el punto $(3, m)$ pertenezca a la circunferencia anterior.

Ejercicio 5. (Selectividad) Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A = (1, 6)$ y $B = (5, 2)$ y tiene su centro sobre la recta $y = 2x$.

Ejercicio 6. (Selectividad) Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto de intersección de las rectas de ecuaciones respectivas

$$2x - y - 4 = 0 \quad \text{y} \quad x - 2y + 3 = 0$$

y es tangente a la recta $x - 3y + 3 = 0$. Calcula el punto de tangencia.

Ejercicio 7. Completar cuadrados en las siguientes ecuaciones y determinar el tipo de cuádrica que es, sus elementos notables y su representación gráfica:

1. $x^2 + 3y^2 + z^2 + 2x + 5y - 2z + 1 = 0$.
2. $3x^2 + y^2 - z^2 + x + 2y + 2z + 1 = 0$.
3. $-x^2 + y^2 + 3z^2 + 2x + 2y + z + 1 = 0$.
4. $x^2 + y^2 + x + 4y + 3z - 1 = 0$.
5. $x^2 + y^2 + x + 4y - z^2 - 1 = 0$.
6. $x^2 + z^2 + x + 4z - 1 = 0$.
7. $x^2 + y^2 + x + 4y - z = 0$.
8. $y^2 - z^2 + y + 4z - 1 = 0$.
9. $x^2 + x + 3z - 1 = 0$.
10. $x^2 - y^2 + x + 4y + z - 1 = 0$.

Ejercicio 8. Indicar la respuesta correcta:

1. La ecuación $y^2 - 6x - 4y - 20 = 0$ corresponde a:
   a) ☐ Una parábola cuyo vértice es $V = (-4, 2)$.
   b) ☐ Una parábola cuyo eje es la recta de ecuación $y = -4$.
   c) ☐ Dos rectas que se cortan en un punto.
2. La ecuación $5x^2 + y^2 = 1$ corresponde a:
   a) ☐ Una elipse con focos en el eje de abscisas.
   b) ☐ Una elipse con focos en el eje de ordenadas.
   c) ☐ Una hipérbola.
3. La cuádrica $x^2 - y^2 + z^2 + 4y + 6z + 13 = 0$ verifica:
   a) ☐ Tiene por centro $C = (0, 2, -3)$.
   b) ☐ Contiene a la recta $x - 1 = y - 2,\ z = 4$.
   c) ☐ No tiene centro.

Ejercicio 9. Representar gráficamente la cónica de ecuación $9x^2 - y^2 + 36x + 2y + 44 = 0$, determinando sus elementos notables (centro, ejes, focos, asíntotas, vértices, ...) en las coordenadas originales x, y.

Ejercicio 10. Considérese la cónica de ecuación $y^2 - 2y + 4x - 3 = 0$. Calcular una ecuación reducida de la cónica. Encontrar sus elementos notables (focos, vértices, directriz, asíntotas, ejes, según el tipo de cónica de que se trate). Representar la cónica junto a dichos elementos notables.

Ejercicio 11. Considérese la cónica de ecuación $x^2 - y^2 - x = 0$. Encontrar sus elementos notables (focos, vértices, directriz, asíntotas, ejes, según el tipo de cónica de que se trate). Representar la cónica junto a dichos elementos notables.

Ejercicio 12. Determinar razonadamente el tipo de cuádrica que corresponde a la ecuación

$$x^2 + (\alpha^2 - 4)y^2 + (\alpha + 2)z^2 - \alpha = 0,$$

para cada valor $\alpha \in \mathbb{R}$. Hacer un dibujo esquemático de las superficies que se obtienen para $\alpha = -3$, $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$.

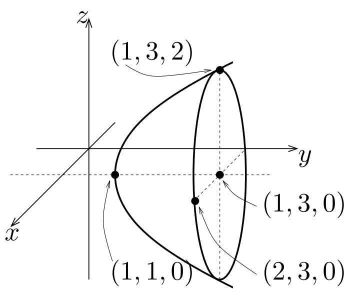
Ejercicio 13. Determinar, según los valores de $a \in \mathbb{R}$, el tipo de cuádrica que corresponde a la ecuación

$$x^2 - y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z + a = 0.$$

Dibujar cualitativamente las cuádricas que se obtienen para $a = -3$, $a = 6$ y $a = 10$.

Ejercicio 14. (Primer Parcial 2004–05)

Observar la cuádrica de la figura. Determinar su ecuación en coordenadas (x, y, z).



Tema 2.- Formas Cuadráticas.

En el Tema 1, al estudiar las cónicas y las cuádricas, hemos descrito y considerado ejemplos referentes a cómo completar cuadrados en un polinomio de segundo grado sin términos cruzados. Veremos en esta lección que este mismo procedimiento (completar cuadrados) puede usarse en un polinomio homogéneo de segundo grado en varias variables, que se denomina una forma cuadrática. Las formas cuadráticas surgen en estadística, mecánica y en otros problemas de la física. Aparecen, además, al estudiar los máximos y los mínimos de las funciones de varias variables, como se verá en la asignatura de Cálculo.

1. Definición y representación matricial.

Un **polinomio homogéneo de segundo grado** en varias variables (reales), es decir un polinomio real de segundo grado en el que todos los términos son de segundo grado, se suele denominar **forma cuadrática**. En dos variables (x, y) tendremos

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

y en tres variables

$$g(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz.$$

En el caso genérico de n variables, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, la forma cuadrática adopta la expresión

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ &+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + \cdots \\ &+ 2a_{2n}x_2x_n + \cdots + 2a_{n-2,n-1}x_{n-2}x_{n-1} + 2a_{n-2,n}x_{n-2}x_n + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{kk}x_k^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} 2a_{ij}x_{ij}. \end{aligned}$$

Nótese que puesto que hemos escrito los coeficientes de los términos cruzados como $2a_{ij}$, la forma cuadrática que es una función (real de varias variables) $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ puede expresarse a través de una matriz simétrica $A = [a_{ij}]$ (una matriz cuadrada se dice simétrica cuando todos sus elementos verifican $a_{ij} = a_{ji}$, es decir, cuando A coincide con su traspuesta, $A^T = A$):

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = [x_1 \ x_2 \ \ldots \ x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$$

siendo $\mathbf{x}$ el vector columna de las variables.

En particular, en el caso de dos variables, tendremos

$$Q(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T A\mathbf{x},$$

y en el de tres variables

$$Q(x, y, z) = [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}.$$

El estudio de las formas cuadráticas lo completaremos en el Tema 11 donde, aprovechando propiedades de las matrices simétricas, reduciremos a suma de cuadrados por un proceso alternativo al que describiremos en este tema.

2. Clasificación de las formas cuadráticas.

Definición. Se dice que la forma cuadrática $Q : x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow Q(x) = x^T Ax \in \mathbb{R}$ (y que la matriz simétrica asociada A) es

(1) definida positiva si $Q(x) = x^T Ax > 0, \ \forall x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n$.

(2) **definida negativa** si $Q(x) = x^T Ax < 0, \ \forall x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n$.

(3) **indefinida** si existen vectores en $\mathbb{R}^n$ para los que Q es positiva y otros para los que es negativa, es decir, $\exists v_1 \in \mathbb{R}^n$ y $\exists v_2 \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$Q(v_1) = v_1^T A v_1 > 0 \quad \text{y} \quad Q(v_2) = v_2^T A v_2 < 0.$$

(4) **semidefinida positiva** si $Q(x) = x^T Ax \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

(5) **semidefinida negativa** si $Q(x) = x^T Ax \leq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Nota. Con las definiciones dadas los casos de formas cuadráticas semidefinidas (positiva o negativa) incluyen a los casos de formas cuadráticas definidas (positiva o negativa). Para considerar situaciones disjuntas, en la definición de forma cuadrática semidefinida suele añadirse que se cumpla $Q(v) = 0$ para algún vector $v \neq 0$. En caso de no existir tal vector v, siendo semidefinida (positiva o negativa) será definida (positiva o negativa). En lo que sigue consideramos la definición dada más arriba con objeto de simplificar los enunciados.

En el caso general de varias variables, el siguiente resultado nos da la clasificación pero sólo sirve para formas cuadráticas sin términos mixtos. Necesitaremos, por tanto, un método sistemático que nos permita escribir cualquier forma cuadrática como suma de cuadrados. En la siguiente sección veremos un método, el de Lagrange, que permite eliminar los términos mixtos y conseguir lo que se llama una *forma canónica* de la forma cuadrática.

Teorema de clasificación de formas cuadráticas.
Sea $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma cuadrática $Q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2$. Se verifica:

(1) Q es definida positiva $\Longleftrightarrow$ todos los coeficientes $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ son (estrictamente) positivos,

$$\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \ldots, \alpha_n > 0.$$

(2) Q es definida negativa $\Longleftrightarrow$ todos los coeficientes $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ son (estrictamente) negativos,

$$\alpha_1 < 0, \alpha_2 < 0, \ldots, \alpha_n < 0.$$

(3) Q es indefinida $\Longleftrightarrow$ hay algún coeficiente $\alpha_i > 0$ y algún coeficiente $\alpha_j < 0$, es decir,

$$\exists\, i,\, j \ \ \textit{tales que} \ \ \alpha_i > 0, \ \alpha_j < 0.$$

(4) Q es semidefinida positiva si no hay ningún coeficiente negativo,

$$\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \ldots, \alpha_n \geq 0.$$

(5) Q es semidefinida negativa si no hay ningún coeficiente positivo,

$$\alpha_1 \leq 0, \alpha_2 \leq 0, \ldots, \alpha_n \leq 0.$$

3. Reducción a suma de cuadrados: método de Lagrange.

En esta sección mostramos un método sencillo que permite escribir cualquier forma cuadrática como suma de cuadrados, es decir, sin términos mixtos. Este método, denominado de Lagrange, se basa en dos ideas sencillas: completar cuadrados y que *suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados*. Aprenderemos a usar el método con los siete ejemplos que aparecen a continuación y, sólo al final, describiremos el método en forma general.

Los siguientes ejemplos ilustran el método de Lagrange, que nos permite llevar cualquier forma cuadrática a una suma de cuadrados (una forma canónica). Obviamente el carácter de la forma cuadrática no cambia con las operaciones usadas en el método de Lagrange, lo cual permite clasificar la forma cuadrática utilizando el *teorema de clasificación de formas cuadráticas* enunciado en la sección anterior.

Ejemplo 1.
Consideremos la forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$

$$Q_1(x) = x^T Ax = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 3x_1x_2 - x_2^2.$$

Al aparecer los términos x_1^2 y x_1x_2 podemos completar cuadrados en la primera variable

$$Q_1(x) = \left(x_1 + \frac{3}{2}x_2\right)^2 - \frac{9}{4}x_2^2 - x_2^2 = \left(x_1 + \frac{3}{2}x_2\right)^2 - \frac{13}{4}x_2^2.$$

Finalmente, mediante el cambio $y_1 = x_1 + \frac{3}{2}x_2,\ \ y_2 = x_2$ llegamos a

$$Q_1(x) = y_1^2 - \frac{13}{4}y_2^2.$$

Por tanto, la forma cuadrática es indefinida puesto que

$$Q_1(y_1 = 1, y_2 = 0) = Q_1(x_1 = 1, x_2 = 0) = 1 \qquad \text{y} \quad Q_1(y_1 = 0, y_2 = 1) = -\frac{13}{4}.$$

Pero, la anterior no es la única forma de proceder. Puesto que también aparecen en Q_1 los términos x_2^2 y x_1x_2, podemos completar cuadrados en la segunda variable:

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= x_1^2 + 3x_1x_2 - x_2^2 = -\left(x_2^2 - 3x_1x_2\right) + x_1^2 \\ &= -\left(x_2 - \frac{3}{2}x_1\right)^2 + \frac{9}{4}x_1^2 + x_1^2 = -\left(x_2 - \frac{3}{2}x_1\right)^2 + \frac{13}{4}x_1^2 \\ &= -z_2^2 + \frac{13}{4}z_1^2 = \frac{13}{4}z_1^2 - z_2^2, \end{aligned}$$

donde al final hemos hecho el cambio $z_1 = x_1,\ z_2 = x_2 - \frac{3}{2}x_1$. Nótese que si preferimos hacer el cambio $u_1 = x_2 - \frac{3}{2}x_1,\ u_2 = x_1$ llegamos a

$$Q_1(x) = -u_1^2 + \frac{13}{4}u_2^2.$$

Nada nos impide hacer el cambio $u_1 = x_2 - \frac{3}{2}x_1,\ u_2 = \frac{\sqrt{13}}{2}x_1$, y llegar a

$$Q_1(x) = -v_1^2 + v_2^2.$$

Obsérvese que siempre que reducimos Q_1 a una suma de cuadrados aparecen un coeficiente positivo y uno negativo:

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -13/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13/4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 13/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{13}/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{13}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \ldots \end{aligned}$$

Ejemplo 2.

Consideremos la forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$

$$Q_2(x) = x^T A x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2.$$

Al aparecer los términos x_1^2 y x_1x_2 podemos completar cuadrados en la primera variable:

$$Q_2(x) = (2x_1 - x_2)^2$$

y, finalmente, hacemos el cambio $y_1 = 2x_1 - x_2,\ \ y_2 = x_2$ para obtener

$$Q_2(x) = y_1^2.$$

Nótese que tomamos, por simplicidad, $y_2 = x_2$, pero que podemos elegir $y_2 = \alpha x_1 + \beta x_2$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha + 2\beta \neq 0$ y seguimos obteniendo $Q_2(x) = y_1^2$.

Si preferimos hacer el cambio $z_1 = x_1,\ z_2 = 2x_1 - x_2$, obtenemos

$$Q_2(x) = z_2^2.$$

Además, en este caso, si preferimos completar cuadrados en la segunda variable (en vez de en la primera) llegamos a la misma expresión.

Obsérvese que siempre que reducimos Q_2 a una suma de cuadrados aparecen un coeficiente positivo y otro nulo. Esta forma cuadrática es, por tanto, semidefinida positiva.

Ejemplo 3.
Consideremos la forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$

$$Q_3(x) = x^T Ax = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 - 4x_1x_2.$$

Completamos cuadrados en la primera variable (puesto que aparecen términos en x_1^2 y x_1x_2), para finalmente hacer el cambio $y_1 = x_1 - 2x_2,\ y_2 = x_2$:

$$Q_3(x) = (x_1 - 2x_2)^2 - 4x_2^2 = y_1^2 - 4y_2^2.$$

Puesto que aparecen un coeficiente positivo y uno negativo, esta forma cuadrática es indefinida.

Ejemplo 4.
Consideremos la forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$

$$Q_4(x) = x^T Ax = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 4x_1x_2.$$

En este caso no podemos completar cuadrados ni en la primera ni en la segunda variable (pues no aparecen ni x_1^2 ni x_2^2). Sin embargo sí hay término mixto (x_1x_2). En esta situación recurrimos a la idea de introducir una *suma por diferencia*, que conseguimos, por ejemplo, mediante el cambio $x_1 = y_1 + y_2,\ x_2 = y_1 - y_2$:

$$Q_4(x) = 4(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 4y_1^2 - 4y_2^2.$$

Hemos conseguido ya una suma de cuadrados.
Obsérvese que siempre que reducimos Q_4 a una suma de cuadrados aparecen un coeficiente positivo y uno negativo. Esta forma cuadrática es, por tanto, indefinida.

Ejemplo 5.
Consideremos la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$

$$Q_5(x) = x^T Ax = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3.$$

Completamos cuadrados en la primera variable puesto que aparecen términos en x_1^2 y x_1x_2:

$$\begin{aligned} Q_5(x) &= 3\left(x_1^2 + \frac{4}{3}x_1x_2\right) + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3 \\ &= 3\left(x_1 + \frac{2}{3}x_2\right)^2 - \frac{4}{3}x_2^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3 \\ &= 3\left(x_1 + \frac{2}{3}x_2\right)^2 + \frac{2}{3}x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3. \end{aligned}$$

A continuación completamos cuadrados en la segunda variable puesto que aparecen términos en x_2^2 y x_2x_3:

$$\begin{aligned} Q_5(x) &= 3\left(x_1 + \frac{2}{3}x_2\right)^2 + \frac{2}{3}(x_2^2 + 6x_2x_3) + x_3^2 \\ &= 3\left(x_1 + \frac{2}{3}x_2\right)^2 + \frac{2}{3}(x_2 + 3x_3)^2 - 6x_3^2 + x_3^2 \\ &= 3\left(x_1 + \frac{2}{3}x_2\right)^2 + \frac{2}{3}(x_2 + 3x_3)^2 - 5x_3^2. \end{aligned}$$

Finalmente el cambio $y_1 = x_1 + \frac{2}{3}x_2,\ y_2 = x_2 + 3x_3,\ y_3 = x_3$ nos lleva a

$$Q_5(x) = 3y_1^2 + \frac{2}{3}y_2^2 - 5y_3^2.$$

Obsérvese que siempre que reducimos Q_5 a una suma de cuadrados aparecen dos coeficientes positivos y uno negativo. Esta forma cuadrática es, por tanto, indefinida.

Ejemplo 6.

Consideremos la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$

$$Q_6(x) = x^T Ax = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

Completamos cuadrados en la primera variable puesto que aparecen términos en x_1^2, x_1x_2 y x_1x_3:

$$\begin{aligned} Q_6(x) &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_2x_3 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_2x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3. \end{aligned}$$

A continuación completamos cuadrados en la segunda variable (puesto que aparecen términos en x_2^2 y x_2x_3):

$$Q_6(x) = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 = y_1^2 + y_2^2,$$

donde hemos hecho el cambio $y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3,\ y_2 = x_2 + x_3,\ y_3 = x_3$.

Obsérvese que siempre que reducimos Q_6 a una suma de cuadrados aparecen dos coeficientes positivos y uno nulo. Esta forma cuadrática es, por tanto, semidefinida positiva.

Ejemplo 7.

Consideremos la forma cuadrática en $\mathbb{R}^4$

$$Q_7(x) = x^T Ax = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3/2 & 0 & 0 \\ 3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & 5/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 3x_1x_2 + 5x_3x_4.$$

Puesto que no hay ningún término al cuadrado, necesitamos recurrir a *suma por diferencia*. Lo hacemos, por ejemplo, mediante el cambio:

$$x_1 = y_1 + y_2,\ x_2 = y_1 - y_2,\ x_3 = y_3,\ x_4 = y_4$$

con lo que

$$Q_7(x) = 3(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + 5y_3y_4 = 3y_1^2 - 3y_2^2 + 5y_3y_4.$$

Ya tenemos suma de cuadrados en las dos primeras variables. Nuevamente, como no hay ningún término al cuadrado en las variables restantes (tercera y cuarta), necesitamos recurrir a *suma por diferencia*. Lo hacemos, por ejemplo, mediante el cambio:

$$y_1 = z_1,\ y_2 = z_2,\ y_3 = z_3 + z_4,\ y_4 = z_3 - z_4,$$

y obtenemos finalmente

$$Q_7(x) = 3z_1^2 - 3z_2^2 + 5(z_3 + z_4)(z_3 - z_4) = 3z_1^2 - 3z_2^2 + 5z_3^2 - 5z_4^2$$

que ya aparece como suma de cuadrados.

Nótese que ambos cambios de variables, en este caso sencillo, se podían haber hecho a la vez:

$$x_1 = z_1 + z_2,\ x_2 = z_1 - z_2,\ x_3 = z_3 + z_4,\ x_4 = z_3 - z_4,$$

con lo que habríamos llegado, en un solo paso, al resultado final.

Obsérvese que siempre que reducimos Q_7 a una suma de cuadrados aparecen dos coeficientes positivos y dos negativos (y obviamente ninguno nulo). Esta forma cuadrática es pues indefinida.

Como quedó de manifiesto en los siete ejemplos anteriores, reduciendo de diferentes modos una forma cuadrática a suma de cuadrados, podemos obtener coeficientes diferentes. Sin embargo tiene lugar el siguiente hecho importante: *Si una forma cuadrática se reduce a suma de cuadrados de dos formas diferentes (es decir, si se obtienen dos formas canónicas diferentes para dicha forma cuadrática), el número de coeficientes positivos es el mismo en ambas expresiones. Y lo mismo ocurre con el número de coeficientes negativos y con el de número de coeficientes nulos.*

Este resultado se conoce como **ley de inercia de Sylvester**.

Formulación general del método de Lagrange.

Sea $Q(x) = x^T Ax$ una forma cuadrática. El método consistente en ir completando cuadrados haciendo cambios de variable en los que en cada paso cambia una (o a lo sumo dos) de las variables, suele denominarse método de Lagrange. Hemos visto con ejemplos este método, que se puede sistematizar como sigue. Hay que distinguir dos casos:

1. Si para algún índice i se tiene $a_{ii} \neq 0$, podemos completar cuadrados con todos los términos que contengan a x_i para obtener

$$Q(x) = a_{ii}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j\right)^2 + Q'(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

donde Q' es una nueva forma cuadrática con $n-1$ variables a la que se le vuelve a aplicar el proceso.

El cambio de variables que se utiliza es

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j \ , \ y_j = x_j \text{ para } j \neq i.$$

2. Si $a_{ii} = 0$ para todo i elegimos $a_{ij} \neq 0$ (si todos fueran cero tendríamos $\Psi(x) = 0$ que ya está reducida). En este caso hacemos el cambio de variables

$$x_i = y_i + y_j \ , \ x_j = y_i - y_j \text{ y } x_k = y_k \text{ para } k \neq i, j,$$

y pasamos de nuevo al caso (1), pues $a_{ij}x_ix_j = a_{ij}y_i^2 - a_{ij}y_j^2$.

Un teorema para clasificar formas cuadráticas de dos variables.

Clasificar una forma cuadrática de dos variables a partir del determinante de la matriz simétrica asociada es posible usando el siguiente resultado, que se demuestra fácilmente completando cuadrados.

Teorema. La forma cuadrática

$$Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = [x \;\; y]\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

es:

- definida positiva si, y sólo si, $a > 0$ y $\det \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = ac - b^2 > 0$.
- definida negativa si, y sólo si, $a < 0$ y $\det \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = ac - b^2 > 0$.
- indefinida si, y sólo si, $\det \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = ac - b^2 < 0$.

Notemos que si el determinante es nulo la forma cuadrática es semidefinida. Este teorema, que no merece la pena memorizar, se suele aplicar al estudiar los extremos de funciones de dos variables en la asignatura de Cálculo.

Para demostrar este resultado, separemos los casos en los que $a \neq 0$ y los casos en los que $a = 0$.

Si $a \neq 0$, entonces podemos completar cuadrados en x

$$\begin{aligned} ax^2 + 2bxy + cy^2 &= a\left[x^2 + \frac{2b}{a}xy\right] + cy^2 = a\left[x^2 + 2\frac{b}{a}xy + \left(\frac{b}{a}y\right)^2 - \left(\frac{b}{a}y\right)^2\right] + cy^2 \\ &= a\left[x^2 + 2\frac{b}{a}xy + \left(\frac{b}{a}y\right)^2\right] - a\left(\frac{b}{a}y\right)^2 + cy^2 = a\left[x + \frac{b}{a}y\right]^2 + \left(-\frac{b^2}{a} + c\right)y^2 \\ &= a\,x'^2 + \left(-\frac{b^2}{a} + c\right)y'^2, \text{ siendo } \left\{ \begin{array}{l} x' = x + \frac{b}{a}y, \\ y' = y. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Por tanto, en este caso, la forma cuadrática es:

$$\begin{array}{lcl} \text{definida positiva} & \iff & a > 0, \quad -\frac{b^2}{a} + c > 0, \\ \text{definida negativa} & \iff & a < 0, \quad -\frac{b^2}{a} + c < 0, \\ \text{indefinida} & \iff & a\left(-\frac{b^2}{a} + c\right) < 0. \end{array}$$

Supongamos ahora que $a = 0$. En este caso, $Q(x, y) = 2bxy + cy^2$. Si $c \neq 0$ podemos completar el cuadrado en y, y estamos en un caso análogo al anterior y si $c = 0$ tenemos $Q(x, y) = 2bxy$ y podemos transformar el producto cruzado en una suma×diferencia

$$Q(x, y) = 2b\,xy = \left[\text{siendo} \left\{ \begin{array}{l} x = x' + y' \\ y = x' - y' \end{array} \right.\right] = 2b(x'^2 - y'^2).$$

Por tanto, en este caso, la forma cuadrática es indefinida, sea cual sea el signo de $b \neq 0$.

Recopilando todos los casos obtenemos el enunciado.

Ejercicio resuelto
Escribir la forma cuadrática

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = (3-\beta)\, x_1^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 10x_1x_3 + 2x_2x_3$$

como suma de cuadrados y clasificarla según los valores de $\beta \in \mathbb{R}$.

Para escribir la forma cuadrática como suma de cuadrados es conveniente elegir, en cada paso, el término cuadrático puro cuyo coeficiente sea el más sencillo. En particular, siempre que sea posible, es una buena idea dejar los parámetros para el final para así evitar posibles discusiones de casos que al final pueden ser irrelevantes. De ese modo comenzamos eligiendo el término que corresponde a x_2^2. Así agrupamos todos los términos que contienen a x_2 y completamos cuadrados en dicha variable.

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2, x_3) &= (3-\beta)\, x_1^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 10x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ &= -[x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3] + (3-\beta)\, x_1^2 - 4x_3^2 + 10x_1x_3. \end{aligned}$$

Para reproducir el término entre corchetes con un cuadrado nos basta tomar

$$(x_2 - x_1 - x_3)^2 = \underline{x_2^2} + x_1^2 + x_3^2 \underline{-2x_1x_2 - 2x_2x_3} + 2x_1x_3,$$

donde hemos subrayado aquellos sumandos que aparecen entre corchetes en la ecuación anterior. Despejándolos y sustituyendo en la ecuación anterior queda

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2, x_3) &= -[(x_2 - x_1 - x_3)^2 - x_1^2 - x_3^2 - 2x_1x_3] + (3-\beta)\, x_1^2 - 4x_3^2 + 10x_1x_3 \\ &= -(x_2 - x_1 - x_3)^2 + (4-\beta)\, x_1^2 - 3x_3^2 + 12x_1x_3. \end{aligned}$$

A partir de ahora olvidamos el primer sumando, donde ya hemos completado cuadrados en x_2, y nos centramos en las dos variables que quedan. En particular, agrupamos todos los términos que contienen a x_3, al ser más simple el coeficiente de x_3^2 que el de x_1^2, quedando

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = -(x_2 - x_1 - x_3)^2 - 3[x_3^2 - 4x_1x_3] + (4-\beta)\, x_1^2.$$

El término entre corchetes proviene del cuadrado

$$(x_3 - 2x_1)^2 = \underline{x_3^2 - 4x_1x_3} + 4x_1^2,$$

donde hemos subrayado aquellos términos que aparecen en el corchete de la ecuación anterior. Despejando y sustituyendo queda

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2, x_3) &= -(x_2 - x_1 - x_3)^2 - 3[(x_3 - 2x_1)^2 - 4x_1^2] + (4-\beta)\, x_1^2 \\ &= -(x_2 - x_1 - x_3)^2 - 3(x_3 - 2x_1)^2 + (16-\beta)\, x_1^2. \end{aligned}$$

Ya hemos completado cuadrados. Simplemente quedaría un cambio lineal, por ejemplo,

$$y_1 = x_2 - x_1 - x_3, \qquad y_2 = x_3 - 2x_1, \qquad y_3 = x_1,$$

para obtener una forma canónica de la forma cuadrática:

$$\Phi(y_1, y_2, y_3) = -y_1^2 - 3y_2^2 + (16-\beta)\, y_3^2.$$

La segunda parte del apartado pide clasificar la forma cuadrática dependiendo de los valores de $\beta \in \mathbb{R}$. Está claro que hemos de centrarnos en el signo del coeficiente de y_3^2, ya que los otros dos son negativos y no dependen de β. De este modo se obtienen las tres posibilidades siguientes:

- $\boldsymbol{\beta > 16}$: Los tres coeficientes son negativos, por lo que la forma cuadrática es **Definida Negativa**.
- $\boldsymbol{\beta = 16}$: Dos coeficientes son negativos y uno nulo, por lo que la forma cuadrática es **Semidefinida Negativa**.
- $\boldsymbol{\beta < 16}$: Los coeficientes son de distinto signo (en concreto, dos negativos y uno positivo), por lo que la forma cuadrática es **Indefinida**.

Veamos que si hubiéramos procedido completando cuadrados en otro orden llegamos a una suma de cuadrados en la que se conserva el número de coeficientes positivos, negativos y nulos (ley de inercia de Sylvester). Por ejemplo, si comenzamos completando cuadrados en la tercera variable:

$$\begin{aligned}
\Phi &= (3-\beta)\, x_1^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 10x_1x_3 + 2x_2x_3 \\
&= -4\left(x_3^2 - \frac{5}{2}x_1x_3 - \frac{1}{2}x_2x_3\right) + (3-\beta)\, x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 \\
&= -4\left[\left(x_3 - \frac{5}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2\right)^2 - \frac{25}{16}x_1^2 - \frac{1}{16}x_2^2 - \frac{5}{8}x_1x_2\right] + (3-\beta)\, x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 \\
&= -4\left(x_3 - \frac{5}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2\right)^2 + \left(\frac{37}{4} - \beta\right)\, x_1^2 - \frac{3}{4}x_2^2 + \frac{9}{2}x_1x_2 \\
&= -4\left(x_3 - \frac{5}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2\right)^2 - \frac{3}{4}\left(x_2^2 - 6x_1x_2\right) + \left(\frac{37}{4} - \beta\right)\, x_1^2 \\
&= -4\left(x_3 - \frac{5}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2\right)^2 - \frac{3}{4}\left[(x_2 - 3x_1)^2 - 9x_1^2\right] + \left(\frac{37}{4} - \beta\right)\, x_1^2 \\
&= -4\left(x_3 - \frac{5}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2\right)^2 - \frac{3}{4}(x_2 - 3x_1)^2 + (16-\beta)\, x_1^2 = -4y_1^2 - \frac{3}{4}y_2^2 + (16-\beta)\, y_3^2,
\end{aligned}$$

donde hemos introducido el cambio lineal de coordenadas $y_1 = x_3 - \frac{5}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2,\ y_2 = x_2 - 3x_1,\ y_3 = x_1$. Obtenemos, nuevamente, una suma de cuadrados con dos coeficientes negativos y uno que depende de β (exactamente el mismo, $16-\beta$). Llegamos pues al mismo resultado, pero con unas cuentas un poco más engorrosas pues nos aparecen fracciones.

Veamos, por último, el camino que NO debemos seguir (porque es mucho más largo y engorroso, con lo que seguramente nos equivocaremos), el de comenzar completando cuadrados en x_1 (variable acompañada del parámetro β):

$$\begin{aligned}
\Phi &= (3-\beta)\, x_1^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 10x_1x_3 + 2x_2x_3 \\
&= [\beta \neq 3] = (3-\beta)\ \left[x_1^2 + \frac{2}{3-\beta}x_1x_2 + \frac{10}{3-\beta}x_1x_3\right] - x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_2x_3 \\
&= (3-\beta)\ \left[\left(x_1 + \frac{1}{3-\beta}x_2 + \frac{5}{3-\beta}x_3\right)^2 - \frac{x_2^2 + 25x_3^2 + 10x_2x_3}{(3-\beta)^2}\right] - x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_2x_3 \\
&= (3-\beta)\ \left(x_1 + \frac{1}{3-\beta}x_2 + \frac{5}{3-\beta}x_3\right)^2 - \frac{4-\beta}{3-\beta}x_2^2 - \frac{37-4\beta}{3-\beta}x_3^2 - \frac{4+2\beta}{3-\beta}x_2x_3 \\
&= [\beta \neq 4] = (3-\beta)\ \left(x_1 + \frac{1}{3-\beta}x_2 + \frac{5}{3-\beta}x_3\right)^2 - \frac{4-\beta}{3-\beta}\left[x_2^2 + \frac{4+2\beta}{4-\beta}x_2x_3\right] - \frac{37-4\beta}{3-\beta}x_3^2 \\
&= (3-\beta)\ \left(x_1 + \frac{1}{3-\beta}x_2 + \frac{5}{3-\beta}x_3\right)^2 - \frac{4-\beta}{3-\beta}\left[\left(x_2 + \frac{2+\beta}{4-\beta}x_3\right)^2 - \frac{(2+\beta)^2}{(4-\beta)^2}x_3^2\right] - \frac{37-4\beta}{3-\beta}x_3^2 \\
&= (3-\beta)\ \left(x_1 + \frac{1}{3-\beta}x_2 + \frac{5}{3-\beta}x_3\right)^2 - \frac{4-\beta}{3-\beta}\left(x_2 + \frac{2+\beta}{4-\beta}x_3\right)^2 + 3\frac{\beta-16}{4-\beta}x_3^2 \\
&= (3-\beta)\, y_1^2 + \frac{\beta-4}{3-\beta}y_2^2 + 3\frac{\beta-16}{4-\beta}y_3^2,
\end{aligned}$$

donde hemos hecho el cambio lineal

$$y_1 = x_1 + \frac{1}{3-\beta}x_2 + \frac{5}{3-\beta}x_3, \quad y_2 = x_2 + \frac{2+\beta}{4-\beta}x_3, \quad y_3 = x_3.$$

El estudio que hemos hecho vale para $\beta \neq 3, 4$, valores que tendremos que estudiar aparte. El primer coeficiente, $3-\beta$ es positivo si $\beta < 3$ y negativo si $\beta > 3$. El coeficiente de y_2^2 es negativo si $\beta < 3$ o $\beta > 4$ y positivo cuando $3 < \beta < 4$. El coeficiente de y_3^2 es negativo si $\beta < 4$ o $\beta > 16$, positivo cuando $4 < \beta < 16$ y nulo si $\beta = 16$. Si representamos con un signo más $(+)$ si el coeficiente es positivo, con un signo menos $(-)$ al coeficiente negativo y con un cero (0) al coeficiente nulo, nuestro estudio (válido si $\beta \neq 3, 4$) nos dice que el signo de los tres coeficientes es el siguiente

$$\beta < 3:\ +--; \quad 3 < \beta < 4:\ -+-; \quad 4 < \beta < 16:\ --+; \quad \beta = 16:\ --0; \quad \beta > 16:\ ---,$$

es decir, que la forma cuadrática es indefinida (con dos coeficientes negativos y uno positivo) cuando $\beta < 16$ $(\beta \neq 3, 4)$, es semidefinida negativa (con dos coeficientes negativos y uno nulo) cuando $\beta = 16$ y es definida negativa para $\beta > 16$.

Veamos los casos $\beta = 3, 4$:

$$\begin{array}{rcl}
\Phi(\beta=3) & = & -x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 10x_1x_3 + 2x_2x_3 \\
& = & -\left(x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3\right) - 4x_3^2 + 10x_1x_3 \\
& = & -\left[(x_2 - x_1 - x_3)^2 - x_1^2 - x_3^2 - 2x_1x_3\right] - 4x_3^2 + 10x_1x_3 \\
& = & -(x_2 - x_1 - x_3)^2 + x_1^2 - 3x_3^2 + 12x_1x_3 \\
& = & -(x_2 - x_1 - x_3)^2 + \left[(x_1 + 6x_3)^2 - 36x_3^2\right] - 3x_3^2 \\
& = & -(x_2 - x_1 - x_3)^2 + (x_1 + 6x_3)^2 - 39x_3^2 = -y_1^2 + y_2^2 - 39y_3^2;
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\Phi(\beta=4) & = & -(x_1 - x_2 - 5x_3)^2 + 21x_3^2 + 12x_2x_3 \\
& = & -(x_1 - x_2 - 5x_3)^2 + 21\left[x_3^2 + \dfrac{4}{7}x_2x_3\right] \\
& = & -(x_1 - x_2 - 5x_3)^2 + 21\left[\left(x_3 + \dfrac{2}{7}x_2\right)^2 - \dfrac{4}{49}x_2^2\right] \\
& = & -(x_1 - x_2 - 5x_3)^2 + 21\left(x_3 + \dfrac{2}{7}x_2\right)^2 - \dfrac{12}{7}x_2^2 = -y_1^2 + 21y_2^2 - \dfrac{12}{7}y_3^2,
\end{array}$$

con lo que vemos que tanto para $\beta = 3$ como para $\beta = 4$ la forma cuadrática es indefinida (con dos coeficientes negativos y uno positivo).

Por tanto, por este camino mucho más largo y engorroso llegamos también a que la forma cuadrática es indefinida (con dos coeficientes negativos y uno positivo) cuando $\beta < 16$, es semidefinida negativa (con dos coeficientes negativos y uno nulo) cuando $\beta = 16$ y es definida negativa para $\beta > 16$.

La moraleja, como ya se dijo al principio de esta cuestión es clara: conviene retrasar la discusión con los parámetros todo lo que sea posible (aparte de no complicar los cálculos se evitará la discusión de valores irrelevantes de los parámetros: $\beta = 3, 4$ en este problema).

Ejercicio resuelto

Escribir la forma cuadrática

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + \alpha x_2^2 + 4\alpha x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + (6 - 4\alpha)x_2x_3$$

como suma de cuadrados y clasificarla según los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Para escribir la forma cuadrática como suma de cuadrados es conveniente elegir, en cada paso, el término cuadrático puro cuyo coeficiente sea el más sencillo. En particular, siempre que sea posible, es una buena idea dejar los parámetros para el final para así evitar posibles discusiones de casos que al final pueden ser irrelevantes. De ese modo comenzamos eligiendo el término que corresponde a x_1^2. Así agrupamos todos los términos que contienen a x_1 y completamos cuadrados en dicha variable.

$$\begin{array}{rcl}
\Phi(x_1, x_2, x_3) & = & x_1^2 + \alpha x_2^2 + 4\alpha x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + (6 - 4\alpha)x_2x_3 \\
& = & [x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3] + \alpha x_2^2 + 4\alpha x_3^2 + (6 - 4\alpha)x_2x_3.
\end{array}$$

Para reproducir el término entre corchetes con un cuadrado nos basta tomar

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = \underline{x_1^2} + x_2^2 + x_3^2 \underline{+ 2x_1x_2 + 2x_1x_3} + 2x_2x_3,$$

donde hemos subrayado aquellos sumandos que aparecen entre corchetes en la ecuación anterior. Despejándolos y sustituyendo en la ecuación anterior queda

$$\begin{array}{rcl}
\Phi(x_1, x_2, x_3) & = & [(x_1 + x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3] + \alpha x_2^2 + 4\alpha x_3^2 + (6 - 4\alpha)x_2x_3 \\
& = & (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (\alpha - 1)x_2^2 + (4\alpha - 1)x_3^2 + 4(1 - \alpha)x_2x_3.
\end{array}$$

A partir de ahora olvidamos el primer sumando, donde ya hemos completado cuadrados en x_1, y nos centramos en las dos variables que quedan. En particular, agrupamos todos los términos que contienen a x_2, quedando

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (\alpha - 1)[x_2^2 - 4x_2x_3] + (4\alpha - 1)x_3^2.$$

El término entre corchetes proviene del cuadrado

$$(x_2 - 2x_3)^2 = \underline{x_2^2 - 4x_2x_3} + 4x_3^2,$$

donde hemos subrayado aquellos términos que aparecen en el corchete de la ecuación anterior. Despejando y sustituyendo queda

$$\begin{aligned}\Phi(x_1,x_2,x_3) &= (x_1+x_2+x_3)^2+(\alpha-1)[(x_2-2x_3)^2-4x_3^2]+(4\alpha-1)x_3^2\\ &= (x_1+x_2+x_3)^2+(\alpha-1)(x_2-2x_3)^2+3x_3^2.\end{aligned}$$

Ya hemos completado cuadrados. Simplemente quedaría un cambio,

$$y_1 = x_1+x_2+x_3, \qquad y_2 = x_2-2x_3, \qquad y_3 = x_3,$$

para obtener una forma canónica de la forma cuadrática:

$$\Phi(y_1,y_2,y_3) = y_1^2+(\alpha-1)y_2^2+3y_3^2.$$

La segunda parte del apartado pide clasificar la forma cuadrática dependiendo de los valores de $\alpha\in\mathbb{R}$. Está claro que hemos de centrarnos en el signo del coeficiente de y_2^2, ya que los otros dos son positivos y no dependen de α. De este modo se obtienen las tres posibilidades siguientes :

- $\boldsymbol{\alpha > 1}$: Los tres coeficientes son positivos, por lo que la forma cuadrática es **definida positiva**.
- $\boldsymbol{\alpha = 1}$: Dos coeficientes son positivos y uno nulo, por lo que la forma cuadrática es **semidefinida positiva**.
- $\boldsymbol{\alpha < 1}$: Los coeficientes son de distinto signo, por lo que la forma cuadrática es **indefinida**.

Ejercicio resuelto
Considera las formas cuadráticas

$$Q_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = (a^2-8)x_1^2-x_2^2-4x_1x_2+(a-2)x_3x_4 \quad \text{y} \quad Q_2(x_1,x_2) = Q_1(x_1,x_2,0,0).$$

Reduce ambas a sumas de cuadrados y clasifícalas según los valores de $a\in\mathbb{R}$.

Aplicando el método de Lagrange (completar cuadrados y, si es necesario, introducir suma por diferencia) obtenemos

$$\begin{aligned}Q_1(x_1,x_2,x_3,x_4) &= (a^2-8)x_1^2-x_2^2-4x_1x_2+(a-2)x_3x_4\\ &= (a^2-8)x_1^2-(x_2^2+4x_1x_2)+(a-2)x_3x_4\\ &= (a^2-8)x_1^2-[(x_2+2x_1)^2-4x_1^2]+(a-2)x_3x_4\\ &= (a^2-4)x_1^2-(x_2+2x_1)^2+(a-2)x_3x_4\\ &= (a^2-4)y_1^2-y_2^2+(a-2)(y_3+y_4)(y_3-y_4)\\ &= (a^2-4)y_1^2-y_2^2+(a-2)y_3^2-(a-2)y_4^2.\end{aligned}$$

Puesto que los coeficientes de y_3^2 e y_4^2 son opuestos, $\pm(a-2)$, la forma cuadrática será indefinida salvo que esos coeficientes se anulen, es decir, salvo si $a=2$. Para este valor la forma cuadrática es semidefinida negativa pues tres coeficientes son nulos y uno, el de y_2^2, negativo.

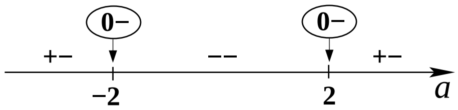
En resumen, Q_1 es semidefinida negativa si $a=2$ e indefinida cuando $a\neq 2$.

Notemos que $Q_2(x_1,x_2)$ la obtenemos haciendo $a=0$ en Q_1, es decir, aprovechando los cálculos anteriores escribimos

$$Q_2(x_1,x_2) = (a^2-8)x_1^2-x_2^2-4x_1x_2 = (a^2-4)x_1^2-(x_2+2x_1)^2 = (a^2-4)y_1^2-y_2^2.$$

El coeficiente de y_1^2, a^2-4, es negativo cuando $|a|<2$, es decir, $-2<a<2$, nulo cuando $a=\pm 2$ y positivo cuando $|a|>2$, o sea, $a<-2$ o $a>2$. El coeficiente de y_2^2 es siempre negativo.

Aparecen, por tanto, las tres situaciones siguientes (indicamos los signos de los coeficientes de y_1^2e y_2^2):



1. $a<-2$ o $a>2$: $+-$, se trata de una forma cuadrática indefinida.

2. $a=\pm 2$: $0-$, estamos ante una forma cuadrática semidefinida negativa.

3. $-2<a<2$: $--$, es una forma cuadrática definida negativa.

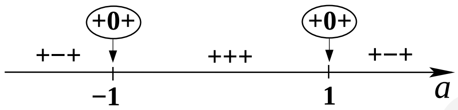
Ejercicio resuelto
Dada la forma cuadrática
$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 - 4ax_1x_2,$$
clasificarla según los valores de $a \in \mathbb{R}$.

Para escribir la forma cuadrática como suma de cuadrados es conveniente elegir, en cada paso, el término cuadrático puro cuyo coeficiente sea el más sencillo. Además, siempre que sea posible, es una buena idea dejar los parámetros para el final para así evitar posibles discusiones de casos que al final pueden ser irrelevantes. En nuestro caso comenzamos eligiendo el término que corresponde a x_1^2. Así agrupamos todos los términos que contienen a x_1 y completamos cuadrados en dicha variable

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 - 4ax_1x_2 = (x_1 - 2ax_2)^2 - 4a^2x_2^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 \\ &= (x_1 - 2ax_2)^2 + 4(1 - a^2)x_2^2 + 3x_3^2. \end{aligned}$$

El tipo de forma cuadrática depende de los signos de los coeficientes (cuántos son positivos, cuántos negativos y cuántos nulos). Dos son positivos y el de x_2^2, $1 - a^2$, es positivo cuando $|a| < 1$, es decir, $-1 < a < 1$, nulo cuando $a = \pm 1$ y negativo cuando $|a| > 1$, o sea, $a < -1$ o $a > 1$.

Aparecen, por tanto, las situaciones siguientes (indicamos también los signos de los coeficientes de $(x_1 - 2ax_2)^2$, x_2^2 y x_3^2):



1. $a < -1$: $+ - +$, se trata de una forma cuadrática indefinida.

2. $a = -1$: $+0+$, estamos ante una forma cuadrática semidefinida positiva.

3. $-1 < a < 1$: $+ + +$, es una forma cuadrática definida positiva.

4. $a = 1$: $+0+$, se trata de una forma cuadrática semidefinida positiva.

5. $a > 1$: $+ - +$, estamos ante una forma cuadrática indefinida.

En resumen, para $a < -1$ y $a > 1$ la forma cuadrática es indefinida, si $a = \pm 1$ es semidefinida positiva y si $-1 < a < 1$ es definida positiva.

4. Ejercicios

Ejercicio 1. Reducir a suma de cuadrados las formas cuadráticas siguientes y clasificarlas:

a) $Q(x_1, x_2) = 8x_1^2 + 20x_1x_2 + 20x_2^2$.
b) $Q(x_1, x_2) = -9x_1^2 + 6x_1x_2 - 9x_2^2$.
c) $Q(x_1, x_2) = -2x_1^2 + 12x_1x_2 - 18x_2^2$.
d) $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2$.
e) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 9x_2^2 - 2x_3^2 - 30x_1x_2 - 8x_1x_3 - 12x_2x_3$.
f) $Q(x_1, x_2, x_3) = 12x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 + 12x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$.
g) $Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$.
h) $Q(x_1, x_2, x_3) = -11x_1^2 - 5x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.
i) $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 12x_1^2 + 19x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_4^2 - 14x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_1x_4 - 12x_2x_3 + 24x_2x_4 - 8x_3x_4$.

Ejercicio 2. Calcula, mediante el método de Lagrange, dos formas canónicas distintas para cada una de las formas cuadráticas siguientes. Comprueba que se verifica la ley de inercia de Sylvester.

a) $Q(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 3x_1x_2 + 5x_2^2$.
b) $Q(x_1, x_2) = 10x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$.
c) $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2$.

Ejercicio 3. Calcula, mediante el método de Lagrange, una forma canónica para cada una de las formas cuadráticas siguientes. A continuación, aplicando la ley de inercia de Sylvester, escribe tres formas canónicas más para cada una de ellas.

a) $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 5x_2^2$.

b) $Q(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$.

c) $Q(x_1, x_2) = -x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2$.

d) $Q(x_1, x_2) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 7x_2^2$.

e) $Q(x_1, x_2) = 8x_1x_2 - x_2^2$.

f) $Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

g) $Q(x_1, x_2, x_3) = 8x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

h) $Q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Ejercicio 4. Indica la respuesta correcta:

a) Una forma canónica de la forma cuadrática $Q(x_1, x_2) = 2x_1x_2$ es:

- ☐ $-\sqrt{2}y_1^2 - y_2^2$
- ☐ $\frac{3}{5}y_1^2 - y_2^2$
- ☐ $2y_1^2 + 2y_2^2$

b) La forma cuadrática $-5x^2 - y^2 + az^2 + 4xy - 2xz - 2yz$ es definida negativa si

- ☐ $a > -10$.
- ☐ $a = -10$.
- ☐ $a < -10$.

Ejercicio 5. Escribir la forma cuadrática

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \alpha^2 x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + \alpha x_3^2$$

como suma de cuadrados y clasificarla según los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 6. Escribir la forma cuadrática

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \alpha x_1^2 + (1 - \alpha^2)x_2^2 + x_3^2 - 2\alpha x_1x_3$$

como suma de cuadrados y clasificarla según los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 7. Escribir la forma cuadrática

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

como suma de cuadrados y clasificarla según los valores de $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 8. Clasificar, según los valores del parámetro a, la forma cuadrática

$$Q(x, y, z) = x^2 + (2 - a)y^2 + z^2 + 2axz, \quad a \in \mathbb{R}$$

Tema 3.- Números Complejos.

1. Los números complejos.
2. Operaciones.
3. Las raíces de un polinomio real.
4. Aplicaciones geométricas de los números complejos: transformaciones en el plano.
5. Ejercicios.

Históricamente los números complejos fueron introducidos para tratar ecuaciones polinomiales, tales como $x^2+1=0$, que no tienen solución real. En esta dirección, el resultado principal de esta lección es el teorema fundamental del Álgebra que asegura que toda ecuación polinomial con coeficientes complejos tiene, al menos, una solución.

Antes de considerar la relación entre los números complejos y la factorización de polinomios, los definiremos junto con sus operaciones más importantes y la interpretación geométrica de las mismas. La manipulación de las operaciones con números complejos nos permitirá describir transformaciones geométricas sobre el plano.

1. Los números complejos.

Definición. Un número complejo es un número de la forma $z=a+bi$ (o $z=a+ib$) donde i verifica que $i^2=-1$ y a y b son números reales. A i se le llama unidad imaginaria. Los números reales a y b se conocen, respectivamente, como parte real y parte imaginaria del número complejo z y se suele escribir

$$\mathrm{Re}\,(z)=a \quad \text{así como} \quad \mathrm{Im}\,(z)=b.$$

Dos números complejos z y w son iguales si, y sólo si,

$$\mathrm{Re}\,(z)=\mathrm{Re}\,(w) \quad \text{y} \quad \mathrm{Im}\,(z)=\mathrm{Im}\,(w)\,.$$

Al conjunto de los números complejos lo denotaremos por $\mathbb{C}$, es decir,

$$\mathbb{C}=\{z=a+bi : a,b\in\mathbb{R}\}\,.$$

Sea $z=a+bi$. Si $b=0$ escribiremos simplemente a para denotar a z, si $a=0$ escribiremos bi para denotar a z. En este último caso diremos que z es un número imaginario puro. En lo que sigue identificaremos el número real a con el número complejo $a+0i$. De esta forma se puede entender que el conjunto de los números reales es un subconjunto de los números complejos.

Para distinguirla de otras expresiones que veremos más adelante, esta expresión, $z=a+bi, a,b\in\mathbb{R}$, se denomina **forma binómica** de un número complejo.

2. Operaciones.

2.1. Suma.

Dados dos números complejos $z=a+bi$ y $w=c+di$ definimos la suma $z+w$ así:

$$z+w=(a+c)+(b+d)\,i.$$

Propiedades de la suma. Si $z,w,v\in\mathbb{C}$ se verifica:

1. Conmutativa: $z+w=w+z$.
2. Asociativa: $(z+w)+v=z+(w+v)$.
3. Existe un elemento nulo para la suma, el $0=0+0i$ tal que $z+0=0+z=z$ para todo $z\in\mathbb{C}$.
4. Cada número complejo $z=a+bi$ tiene un elemento opuesto $-z=-a+(-b)\,i$ tal que $z+(-z)=0$.

2.2. Producto.

Dados dos números complejos $z=a+bi$ y $w=c+di$ se define el producto zw así:

$$zw=(ac-bd)+(ad+bc)\,i.$$

Propiedades del producto. Si $z,w,v\in\mathbb{C}$ se verifica:

1. Conmutativa: $zw=wz$.

2. Asociativa: $(zw)\,v = z\,(wv)$.
3. Existe un elemento unidad para el producto, el $1 = 1 + 0i$ tal que $z1 = 1z = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
4. Cada número complejo $z = a + bi \neq 0$ tiene un elemento inverso z^{-1} tal que $zz^{-1} = z^{-1}z = 1$. De hecho, si $z = a + bi \neq 0$ se tiene que
$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i.$$

También se verifica una propiedad que relaciona la suma y el producto: la propiedad distributiva del producto respecto de la suma
$$z\,(w + v) = zw + zv.$$

El inverso de z lo representaremos por z^{-1} y por $1/z$ y
$$\frac{w}{z} = w\,(1/z) = wz^{-1}.$$

Para obtener la parte real y la imaginaria en una división de números complejos podemos hacer lo siguiente. Si $z = a + bi \neq 0$ y $w = c + di$
$$\frac{w}{z} = \frac{c + di}{a + bi} = (c + di)\,(a + bi)^{-1} = (c + di)\left(\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i\right) = \frac{(c + di)\,(a - bi)}{a^2 + b^2}.$$
De cualquier modo, tras estudiar la conjugación y el módulo veremos otra técnica más eficiente para calcular el inverso de un número complejo o dividir números complejos.
Observación. No es posible establecer en el conjunto de los números complejos una relación de orden que verifique las mismas propiedades que verifica la relación de orden que conocemos entre los números reales.

Ejercicio resuelto Siendo $z = x + iy$, calcula la parte real de $z^2 - z$.

Como $z = x + iy$ calculamos
$$z^2 - z = (x + iy)^2 - (x + iy) = (x^2 + 2ixy + i^2y^2) - (x + iy) = (x^2 - y^2 - x) + i(2xy - y),$$
con lo que
$$Re(z^2 - z) = x^2 - y^2 - x.$$

2.3. Conjugado de un número complejo.

Sea $z = a + bi$ un número complejo. Se define el conjugado de z y se representa por $\overline{z}$ como el número $a - bi$.
Propiedades del conjugado de un número complejo.

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$. (En general: $\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \cdots + \overline{z_n}$).
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$. (En general: $\overline{z_1 z_2 \cdots z_n} = \overline{z_1}\ \overline{z_2} \cdots \overline{z_n}$).
- $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,(z)$.
- $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,(z)$.
- $z\,\overline{z} = (\mathrm{Re}\,(z))^2 + (\mathrm{Im}\,(z))^2$. Por ello, si $z \neq 0$ entonces $z\,\overline{z} > 0$.

Demostraremos esta última propiedad: Si $z = a + bi$, entonces $\overline{z} = a - bi$ y
$$z\,\overline{z} = (a + bi)\,(a - bi) = \big(a^2 - b\,(-b)\big) + (a\,(-b) + ba)\,i = a^2 + b^2 = (\mathrm{Re}\,(z))^2 + (\mathrm{Im}\,(z))^2\,.$$

2.4. Módulo de un número complejo.

Se define el módulo del número complejo $z = a + bi$ y se representa por $|z|$, como el número real
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Observaciones.

1. Nótese que $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}}$. De ahí se deduce ahora que $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

2. Podemos observar también que para dividir dos números complejos w/z, basta con multiplicar numerador y denominador por el conjugado del denominador

$$\frac{w}{z}=\frac{w\overline{z}}{z\overline{z}}=\frac{w\overline{z}}{|z|^2}.$$

Propiedades del módulo de un número complejo.

- $|z|=0$ si, y sólo si, $z=0$.
- $|z|=|\overline{z}|$.
- $|z_1z_2|=|z_1|\ \ |z_2|$. (En general: $|z_1z_2\cdots z_n|=|z_1|\ \ |z_2|\cdots|z_n|$).
- $|\operatorname{Re}(z)|\leq|z|, \quad |\operatorname{Im}(z)|\leq|z|$.
- Desigualdad triangular: $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$. (En general: $|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leq|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$).

Demostraremos esta última propiedad:

$$\begin{aligned}
|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\,\overline{(z_1+z_2)}=(z_1+z_2)\,(\overline{z_1}+\overline{z_2})\\
&= z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=|z_1|^2+2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})+|z_2|^2\\
&\leq |z_1|^2+2\,|\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})|+|z_2|^2\leq|z_1|^2+2\,|z_1\overline{z_2}|+|z_2|^2\\
&= |z_1|^2+2\,|z_1|\,|z_2|+|z_2|^2=(|z_1|+|z_2|)^2\Rightarrow|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|
\end{aligned}$$

en la cuarta igualdad nos basamos en que $\overline{z_1\overline{z_2}}=\overline{z_1}\ \overline{\overline{z_2}}=\overline{z_1}z_2$ y, por tanto, $z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}=2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$.

Ejercicio resuelto
Calcular $\dfrac{1}{i+\dfrac{1}{i+\dfrac{1}{1+i}}}$.

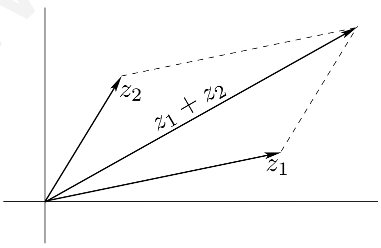
Basta con calcular $\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ para obtener

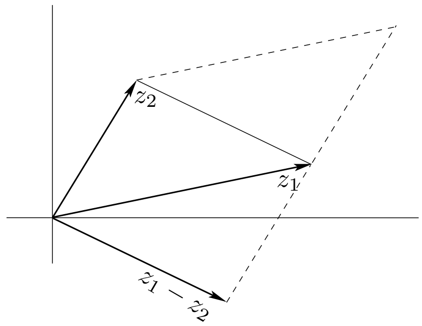
$$\frac{1}{i+\frac{1}{i+\frac{1}{1+i}}}=\frac{1}{i+\frac{1}{i+\frac{1}{2}-\frac{i}{2}}}=\frac{1}{i+\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{i}{2}}}=\frac{1}{i+\frac{2}{1+i}}=\frac{1}{i+1-i}=\frac{1}{1}=1.$$

2.5. Representación de los números complejos en el plano.

Hemos definido los números complejos como números de la forma $z=x+yi$ para $x,y\in\mathbb{R}$. Esto nos permite representar al número complejo z por el punto P del plano que tiene por coordenadas cartesianas (x,y). A veces también lo respresentaremos por el vector que tiene su origen en O, el origen de coordenadas del plano, y por extremo el punto P. Interpretado de esta manera, al plano cartesiano se le denomina también plano complejo.

De esta forma la suma y la diferencia que hemos definido se puede interpretar en el plano complejo así:





Es decir, como la suma y la diferencia de vectores libres cuyas coordenadas son respectivamente la parte real y la parte imaginaria.

El producto que hemos definido no tiene una fácil interpretación, por ahora, pero más adelante daremos una interpretación geométrica.

Si el número complejo $z=x+yi$ se representa por el punto $P\,(x,y)$, su conjugado $\overline{z}=x-yi$ se representa por el punto $P^{'}\,(x,-y)$ que es el simétrico de P respecto del eje X de abscisas (ver la figura siguiente).

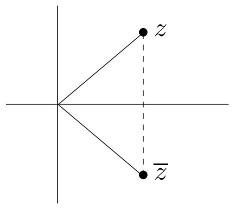
El módulo del número complejo $z = x + yi$, que hemos definido como $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, se representa por la longitud del segmento $\overline{OP}$ (ver figura). Por tanto, el módulo nos puede ser útil para representar distancias, longitudes de segmento. Así, si los números complejos $z_1 = x_1 + y_1 i$ y $z_2 = x_2 + y_2 i$ se representan en el plano por los puntos $P_1\,(x_1, y_1)$ y $P_2\,(x_2, y_2)$, respectivamente, entonces

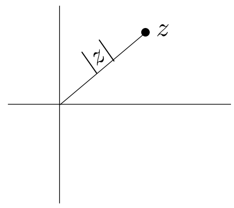
$$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\, i$$

y su módulo

$$|z_1 - z_2| = +\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

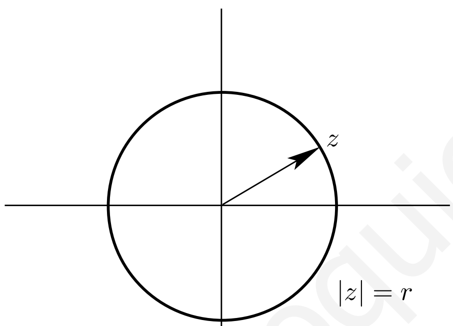
representa la distancia que existe entre los puntos P_1 y P_2.

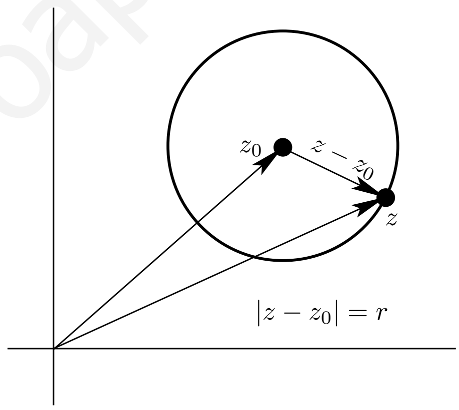




Teniendo en cuenta lo anterior, el conjunto de puntos $P\,(x, y)$ del plano que equidistan del origen O una cantidad constante r, es decir, los puntos $P\,(x, y)$ que verifican $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ son los de una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio r. Usando los números complejos dicho conjunto se puede representar por $|z| = r$ (ver figura).

De la misma forma, si el número complejo $z_0 = x_0 + y_0 i$ se representa en el plano por el punto $C\,(x_0, y_0)$, entonces el conjunto de puntos $P\,(x, y)$ del plano que equidistan de C una cantidad constante r, es decir, los puntos $P\,(x, y)$ que verifican $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$, son los de una circunferencia con centro en C y radio r. Ésta, mediante los números complejos, se escribe como $|z - z_0| = r$ (ver figura).





2.6. Forma polar o trigonométrica de un número complejo.

Como acabamos de ver, al número complejo $z = a + bi$ le corresponde el punto P del plano de coordenadas (a, b). Si representamos por r la longitud del segmento $\overline{OP}$, que une el origen O de coordenadas y P, y por θ el ángulo que forma $\overline{OP}$ con el semieje positivo de abscisas, se dice que (r, θ) son las coordenadas polares del punto P. Si $r = 0$, es decir, si $P \equiv O$, entonces el ángulo θ no está definido. Consideraremos, por tanto, que $z \neq 0$. Se entiende que θ es positivo si es medido en sentido antihorario, y negativo en caso contrario. Al número θ lo llamaremos argumento de z y lo representaremos por $\arg(z)$. Se sigue fácilmente que

$$r = +\sqrt{a^2 + b^2} = |z| \quad \text{y que } \operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}.$$

Como $a = r\cos\theta$ y $b = r\operatorname{sen}\theta$, entonces z se puede escribir así

$$z = a + ib = r\,(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

que denominaremos forma polar o trigonométrica de z.

Los números complejos $z_1 = r_1\,(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)$ y $z_2 = r_2\,(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$ son iguales

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad r_1 = r_2 \quad \text{y} \quad \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Interpretación geométrica del producto de dos números complejos. Si $z_1 = r_1\,(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)$ y $z_2 = r_2\,(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$, entonces

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\theta_1)\, r_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\theta_2) \\ &= r_1 r_2\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\theta_1\,\mathrm{sen}\theta_2) + i\,(\mathrm{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\mathrm{sen}\theta_2)\right] \\ &= r_1 r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)\right] \end{aligned}$$

que nos permite dar una interpretación geométrica del producto de dos números complejos: cuando se multiplican dos números complejos, se obtiene otro que tiene por módulo el producto de los módulos y por argumento la suma de los argumentos.

El inverso del número complejo $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)$ se puede obtener en forma trigonométrica del siguiente modo:

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)} = \frac{1}{r}\frac{\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\theta}{(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\theta)} = \frac{1}{r}\,\frac{\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\theta}{(\cos\theta)^2 + (\mathrm{sen}\theta)^2} \\ &= r^{-1}(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\theta) = r^{-1}(\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta)). \end{aligned}$$

Del mismo modo podemos deducir que

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2)\right].$$

2.7. La fórmula de Euler.

Observamos en los cálculos anteriores que el término

$$f(\theta) = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta$$

tiene las mismas propiedades que una función exponencial, pues

$$f(\theta_1+\theta_2) = f(\theta_1)\,f(\theta_2).$$

Es posible mostrar, aunque está fuera del alcance de este curso, que la función exponencial real e^x puede extenderse de manera razonable al caso de exponentes complejos y que dicha extensión es necesariamente

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta.$$

Con esto se puede representar $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta) = re^{i\theta}$.

Propiedades:

- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $\left|e^{i\theta}\right| = 1$
- $e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

Se sigue que

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)} = \frac{1}{r}\,\frac{\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\theta}{\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

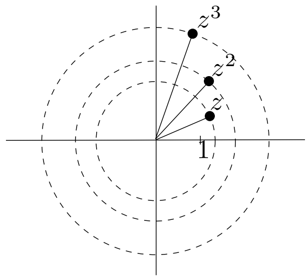
que coincide con el valor de z^{-1} obtenido antes.

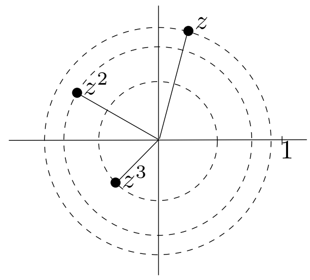
2.8. Potencias de números complejos.

Si $z = re^{i\theta}$ tenemos:

- $z^0 = 1$ (por convenio).
- $z^1 = z = re^{i\theta}$.
- $z^2 = r^2 e^{i2\theta}$ y, en general,
- $z^n = r^n e^{in\theta}$ para $n = 1, 2, 3, ...$

Se observa que la interpretación geométrica de la potencia n-ésima de un número complejo es sencilla. Simplemente hay que elevar el módulo a n y multiplicar el argumento por n. En la figura se observan dos ejemplos: para módulos mayor y menor que 1.





Si $n = -1, -2, -3, ...$ llamamos $m = -n$ y definimos

$$z^n = \left(z^{-1}\right)^m .$$

Entonces tenemos

$$z^n = \left(\frac{1}{z}\right)^m = \left(\frac{1}{r}e^{-i\theta}\right)^m = \left(r^{-1}\right)^m e^{-im\theta} = r^n e^{in\theta}.$$

Fórmula de De Moivre: De lo anterior se sigue que si $z = e^{i\theta}$, entonces

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}\,(n\theta)\,, \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}.$$

Potencias de la unidad imaginaria. Como caso particular de lo anterior tenemos que

$$\begin{array}{lll} i^0 = 1, & i^4 = 1, & i^8 = 1, \\ i^1 = i, & i^5 = i, & i^9 = i, \\ i^2 = -1, & i^6 = -1, & i^{10} = -1, \\ i^3 = -i, & i^7 = -i, & i^{11} = -i, \end{array}$$

es decir, las potencias de la unidad imaginaria se repiten de cuatro en cuatro. Por tanto, para calcular, por ejemplo, i^{1397} lo que haríamos sería dividir el exponente entre cuatro, hallar el resto, (en este caso se tendría $1397 = 4 \cdot 349 + 1$) y expresar:

$$i^{1397} = i^{4\cdot 349+1} = \left(i^4\right)^{349} \cdot i^1 = i.$$

Ejercicio resuelto
Siendo $z = e^{i\varphi}$, hallar la parte real del número complejo

$$w = z\,\overline{z} + \frac{1}{1+z^2}\,.$$

Para calcular la parte real de w necesitamos escribir w en forma binomial, $a + bi$, es decir, $w = \mathrm{Re}(w) + i\mathrm{Im}(w)$. Partimos de que

$$z = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi \quad \rightarrow \quad \overline{z} = \overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\,\mathrm{sen}\,\varphi.$$

Lo más cómodo es trabajar con las exponenciales de forma que

$$\begin{aligned} w &= z\,\overline{z} + \frac{1}{1+z^2} = e^{i\varphi}e^{-i\varphi} + \frac{1}{1+e^{2i\varphi}} = 1 + \frac{1+e^{-2i\varphi}}{(1+e^{2i\varphi})(1+e^{-2i\varphi})} = 1 + \frac{1+e^{-2i\varphi}}{2+e^{2i\varphi}+e^{-2i\varphi}} \\ &= 1 + \frac{1+\cos(2\varphi) - i\,\mathrm{sen}(2\varphi)}{2(1+\cos(2\varphi))} = 1 + \frac{1+\cos(2\varphi)}{2(1+\cos(2\varphi))} - i\frac{\mathrm{sen}(2\varphi)}{2(1+\cos(2\varphi))} = \frac{3}{2} - i\frac{\mathrm{sen}(2\varphi)}{2(1+\cos(2\varphi))}\,, \end{aligned}$$

es decir, las partes real (que es la que nos piden) e imaginaria de w son

$$\mathrm{Re}(w) = \frac{3}{2}\,, \quad \mathrm{Im}(w) = -\frac{\mathrm{sen}(2\varphi)}{2(1+\cos(2\varphi))}\,.$$

Nótese que en el cociente que aparece hemos multiplicado el numerador y el denominador por el conjugado del denominador, $1 + e^{2i\varphi}$:

$$\overline{1+e^{2i\varphi}} = \overline{1} + \overline{e^{2i\varphi}} = 1 + e^{-2i\varphi}$$

(conjugado de la suma igual a la suma de los conjugados) y después hemos tenido en cuenta que

$$e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi} = [\cos(2\varphi) + i\,\mathrm{sen}(2\varphi)] + [\cos(2\varphi) - i\,\mathrm{sen}(2\varphi)] = 2\cos(2\varphi)$$

(la suma de un número y su conjugado es dos veces la parte real del número).

Nótese que si sustituimos desde el primer momento la exponencial por su valor, llegamos al mismo resultado pero con cálculos más largos y tediosos:

$$\begin{aligned} w &= z\,\overline{z} + \frac{1}{1+z^2} = (\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)(\cos\varphi - i\operatorname{sen}\varphi) + \frac{1}{1+(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)^2} \\ &= \cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi + \frac{1}{1+\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi + 2i\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi} = 1 + \frac{1}{1+\cos(2\varphi) + i\operatorname{sen}(2\varphi)} \\ &= 1 + \frac{1+\cos(2\varphi) - i\operatorname{sen}(2\varphi)}{[1+\cos(2\varphi)+i\operatorname{sen}(2\varphi)][1+\cos(2\varphi)-i\operatorname{sen}(2\varphi)]} = 1 + \frac{1+\cos(2\varphi)-i\operatorname{sen}(2\varphi)}{[1+\cos(2\varphi)]^2+\operatorname{sen}^2(2\varphi)} \\ &= 1 + \frac{1+\cos(2\varphi)-i\operatorname{sen}(2\varphi)}{2(1+\cos(2\varphi))} = 1 + \frac{1+\cos(2\varphi)}{2(1+\cos(2\varphi))} - i\frac{\operatorname{sen}(2\varphi)}{2(1+\cos(2\varphi))} = \frac{3}{2} - i\frac{\operatorname{sen}(2\varphi)}{2(1+\cos(2\varphi))}\,, \end{aligned}$$

donde hemos usado que

$$[1+\cos(2\varphi)]^2 + \operatorname{sen}^2(2\varphi) = 1 + 2\cos(2\varphi) + \cos^2(2\varphi) + \operatorname{sen}^2(2\varphi) = 2 + 2\cos(2\varphi).$$

Obviamente, si cuando nos ha aparecido en el denominador $1+\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi + 2i\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi$ no hubiéramos introducido el seno y el coseno del ángulo doble, los cálculos se habrían hecho aún más farragosos.

Ejercicio resuelto
Dado el número complejo

$$w = \frac{1+ai}{1-ai}, \quad a \in \mathbb{R},$$

encontrar los valores de a para los que el argumento de w vale $\pi/4$, $arg(w) = \frac{\pi}{4}$.

Como el número complejo w viene definido por un cociente, multiplicando por el conjugado del denominador obtenemos

$$w = \frac{1+ai}{1-ai} = \frac{(1+ai)^2}{(1-ai)(1+ai)} = \frac{1-a^2+2ai}{1+a^2} = \frac{1-a^2}{1+a^2} + \frac{2a}{1+a^2}i.$$

Queremos encontrar el valor de a para que el argumento de w sea $\frac{\pi}{4}$, es decir, para que $w = |w|e^{i\pi/4}$. Si calculamos el módulo de w:

$$|w| = \sqrt{\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^2 + \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^2} = \frac{1}{1+a^2}\sqrt{1-2a^2+a^4+4a^2} = \frac{1}{1+a^2}\sqrt{(1+a^2)^2} = 1,$$

deducimos que $w = e^{i\pi/4}$, es decir,

$$w = \frac{1-a^2}{1+a^2} + \frac{2a}{1+a^2}i = e^{i\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

con lo que igualando las partes real e imaginaria obtenemos dos ecuaciones que deben verificarse simultáneamente. La primera nos lleva a

$$\frac{1-a^2}{1+a^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\rightarrow\; a^2(1+\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1 \;\rightarrow\; a^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = (\sqrt{2}-1)^2$$

con lo que $a = \pm(\sqrt{2}-1)$. De la segunda ecuación deducimos que

$$\frac{2a}{1+a^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\rightarrow\; a^2 - 2\sqrt{2}\,a + 1 = 0 \;\rightarrow\; a = \sqrt{2} \pm 1.$$

Por tanto, el único valor para el que se cumplen las dos ecuaciones es $a = \sqrt{2}-1$. Éste es el valor que nos pide el enunciado.

Observemos que, si en vez de trabajar con el seno y el coseno del argumento lo hacemos con la tangente, impondríamos la condición $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{Im(w)}{Re(w)} = \frac{\frac{2a}{1+a^2}}{\frac{1-a^2}{1+a^2}} = \frac{2a}{1-a^2} = 1 \;\rightarrow\; a^2 + 2a - 1 = 0 \;\rightarrow\; a = -1 \pm \sqrt{2}$$

que, aunque la hemos resuelto con más facilidad, nos lleva a los valores de a para los que el argumento es $\frac{\pi}{4}$ o $\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$ (pues para ambos ángulos la tangente vale 1). Tenemos que asegurarnos pues de si los valores de a nos llevan al argumento que buscamos, $\frac{\pi}{4}$, o al otro.

Una forma fácil de ver esto es la siguiente. Teniendo en cuenta que $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$ es inmediato deducir que, si $a = \sqrt{2} - 1$, entonces $Re(w) > 0$ e $Im(w) > 0$ (pues $1 - a^2 > 0$ y $2a > 0$), es decir, w está en el primer cuadrante (su argumento será, por tanto, $\frac{\pi}{4}$). Sin embargo, como $-\sqrt{2}-1 < -1$, deducimos que, si $a = -\sqrt{2}-1$, entonces $Re(w) < 0$ e $Im(w) < 0$ (pues $1 - a^2 < 0$ y $2a < 0$), es decir, w está en el tercer cuadrante (su argumento será, por tanto, $\frac{5\pi}{4}$).

Otra forma más sencilla de proceder es la siguiente. Una vez que hemos visto que $w = |w|e^{i\pi/4} = e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, podemos igualar a su expresión original:

$$w = \frac{1+ai}{1-ai} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \;\rightarrow\; 1+ai = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(1-ai) \;\rightarrow\; 1+ai = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+a) + i\frac{\sqrt{2}}{2}(1-a)$$

e igualando las partes real e imaginaria obtenemos dos ecuaciones (que deben verificarse simultáneamente). La primera nos conduce a $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+a) = 1 \;\rightarrow\; a = \sqrt{2} - 1$ y la segunda a $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-a) = a \;\rightarrow\; a = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2} - 1$. Por tanto, el valor del parámetro buscado es $a = \sqrt{2} - 1$.

Notemos que el cálculo del módulo de w es inmediato si observamos que el denominador $1 - ai$ es el conjugado del numerador $1 + ai$. Usando que, por una parte, un número complejo y su conjugado tienen el mismo módulo y que, por otra parte, el módulo de un cociente de números complejos es el cociente de los módulos, deducimos que $|w| = 1$.

Otra forma alternativa de resolver el problema es la siguiente. Si llamamos r al módulo del numerador y θ a su argumento, entonces

$$\left.\begin{array}{l} 1+ai = re^{i\theta} \\ 1-ai = re^{-i\theta} \end{array}\right\} \;\rightarrow\; w = \frac{1+ai}{1-ai} = \frac{re^{i\theta}}{re^{-i\theta}} = e^{i[\theta-(-\theta)]} = e^{2i\theta}.$$

Queremos que $Arg(w) = \frac{\pi}{4}$, es decir, que $2\theta = \frac{\pi}{4}$, por tanto, $\theta = \frac{\pi}{8}$. Teniendo en cuenta que $tg\theta = \frac{Im(w)}{Re(w)} = \frac{a}{1} = a$, deducimos que $a = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$.

Podemos calcular la tangente de ese ángulo a partir de las fórmulas del ángulo mitad:

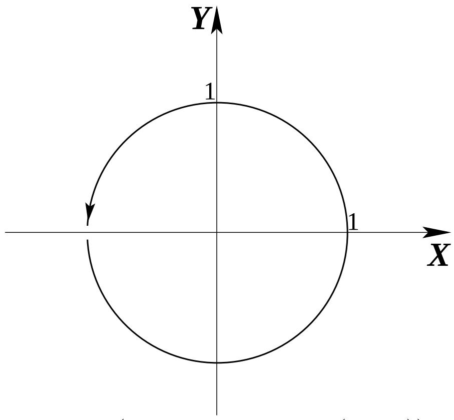
$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}},\; \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \;\rightarrow\; \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}.$$

Nos quedamos con el signo positivo (tanto en el seno como en el coseno) al tratarse de un ángulo del primer cuadrante, con lo que

$$a = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1.$$

Notemos que, los puntos (x, y) del plano dados por $(Re(w), Im(w))$, están situados sobre la circunferencia de centro el origen y radio unidad (pues $|w| = 1$). En particular, se trata de una parametrización de la circunferencia:

$$(x(a), y(a)) = \left(\frac{2a}{1+a^2}, \frac{1-a^2}{1+a^2}\right),\; a \in \mathbb{R}.$$



Si $a = 0$ obtenemos $w = 1$, es decir, el punto $(1, 0)$. Si $a = 1$ obtenemos $w = i$, es decir, el punto $(0, 1)$. Si $a \rightarrow +\infty$, entonces $w \rightarrow -1$, es decir, tiende al punto $(-1, 0)$. Cuando a es positivo se va describiendo la semicircunferencia superior, recorrida en sentido antihorario: el primer cuarto de circunferencia se obtiene cuando a se mueve en el intervalo $[0, 1]$ y el segundo cuarto para $a \in [1, \infty)$. Análogamente, si $a = -1$ obtenemos $w = -i$, es decir, el punto $(0, -1)$. Si $a \rightarrow -\infty$, entonces también $w \rightarrow -1$, es decir, tiende al punto $(-1, 0)$. Por tanto, para a negativo, se va recorriendo la semicircunferencia inferior: en el cuarto cuadrante cuando $a \in [-1, 0]$ y en el tercero si $a \in (-\infty, -1]$.

En resumen, al moverse a en $(-\infty, +\infty)$ se describe la circunferencia completa (excepto el punto $(-1, 0)$), en sentido antihorario, *partiendo* del punto $(-1, 0)$ y *llegando* al mismo punto.

2.9. Raíces n-ésimas de un número complejo.

Se dice que el número complejo $z = re^{i\theta}$ es raíz n-ésima de $z_0 = r_0e^{i\theta_0} \neq 0$ si, y sólo si, $z^n = z_0$:

$$\sqrt[n]{z_0} = z \quad \Leftrightarrow \quad z_0 = z^n.$$

Veamos cuántas raíces n-ésimas tiene un número complejo. Según la definición dada deberá ser

$$z_0 = z^n \quad \Leftrightarrow \quad r_0e^{i\theta_0} = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^ne^{in\theta}$$

y de acuerdo con la definición de igualdad de números complejos dados en forma polar,

$$\left\{\begin{array}{l} r_0 = r^n \\ n\theta = \theta_0 + 2k\pi \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} r = \sqrt[n]{r_0} \\ \theta = \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} \end{array}\right. \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Ahora bien, al dar valores a k obtenemos

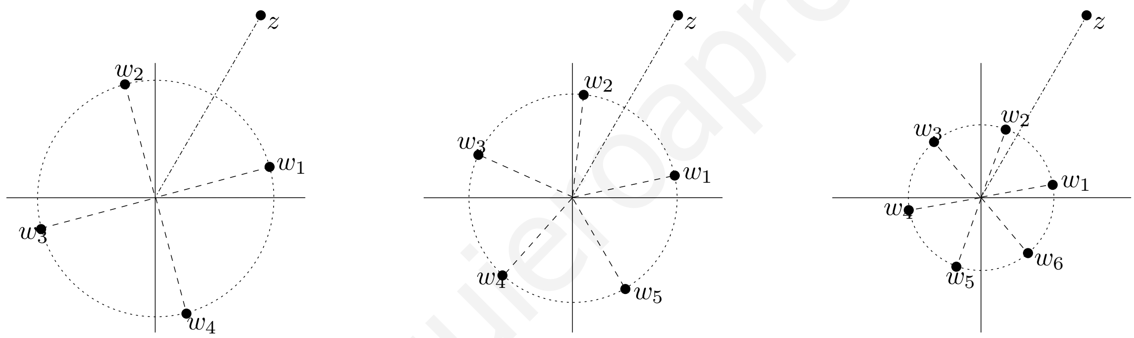
$$\left\{\begin{array}{l} \text{Para } k = 0 \text{ obtenemos la raíz } z_1 = \sqrt[n]{r_0}e^{i\frac{\theta_0}{n}} \\ \text{Para } k = 1 \text{ obtenemos la raíz } z_2 = \sqrt[n]{r_0}e^{i\frac{\theta_0+2\pi}{n}} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \text{Para } k = n-1 \text{ obtenemos la raíz } z_n = \sqrt[n]{r_0}e^{i\frac{\theta_0+2(n-1)\pi}{n}} \\ \text{Para } k = n \text{ obtenemos la raíz } z_{n+1} = \sqrt[n]{r_0}e^{i\frac{\theta_0+2n\pi}{n}} = \sqrt[n]{r_0}e^{i\left(\frac{\theta_0}{n}+2\pi\right)} \end{array}\right.$$

y esta última raíz $z_{n+1} = \sqrt[n]{r_0}e^{\frac{i\theta_0}{n}} = z_1$. Por consiguiente todo número complejo no nulo tiene n raíces n-ésimas.
Representación gráfica de las raíces. Observamos que todas las raíces n-ésimas del número complejo $z_0 = r_0e^{i\theta_0}$ tienen el mismo módulo $\sqrt[n]{r_0}$, y los argumentos de dos raíces obtenidas para $k = p$ y $k = p+1$, se diferencian en

$$\frac{\theta_0 + 2\,(p+1)\,\pi}{n} - \frac{\theta_0 + 2p\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}.$$

Por tanto, los puntos que representan a esas n raíces son los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio $\sqrt[n]{r_0}$.

En la siguiente figura hemos representado las raíces cuartas, quintas y sextas de un número complejo z de módulo mayor que 1 y argumento $\pi/3$.



Caso particular: Raíces n-ésimas de la unidad. El número $z_0 = 1$ es un número complejo que tiene módulo unidad y argumento cero, es decir, escrito en forma polar $z_0 = 1 = e^{i0}$. Entonces

$$\sqrt[n]{1} = e^{i\frac{0+2k\pi}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\frac{2k\pi}{n}, \text{ para } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} w_1 = e^{i0} = \cos 0 + i\,\text{sen}0 = 1 \\ w_2 = e^{i2\pi/n} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,\text{sen}\frac{2\pi}{n} \\ w_3 = e^{i4\pi/n} = \cos\frac{4\pi}{n} + i\,\text{sen}\frac{4\pi}{n} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ w_n = e^{i2(n-1)\pi/n} = \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\,\text{sen}\frac{2(n-1)\pi}{n} \end{array}\right.$$

que se denominan las raíces n-ésimas de la unidad.

En las figuras siguientes se esquematizan las raíces cuadradas, cúbicas y cuartas de 1 y de i.

Ejercicio resuelto

Dados $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ y $z_2 = \sqrt{2}(1-i)$, calcular $\dfrac{z_1^{100}}{z_2^{104}}$, expresando el resultado en la forma $a + bi$.

Puesto que necesitamos calcular productos con potencias altas de z_1 y z_2, comenzamos escribiéndolos en forma *polar* (calculamos su módulo y su argumento):

$$|z_1| \quad = \quad \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2,$$

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 1+\sqrt{3}\,i = 2(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1) \;\rightarrow\; \cos\theta_1 = \frac{1}{2}\,,\; \mathrm{sen}\,\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \;\rightarrow\; \theta_1 = \frac{\pi}{3},\\
|z_2| &= \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2,\\
z_2 &= \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i = 2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2) \;\rightarrow\; \cos\theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,,\; \mathrm{sen}\,\theta_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow\; \theta_2 = \frac{-\pi}{4},
\end{aligned}
$$

es decir,

$$z_1 = 1+\sqrt{3}\,i = 2\;e^{i\frac{\pi}{3}}, \qquad z_2 = \sqrt{2}(1-i) = 2\,e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Recordemos que si calculamos los argumentos usando $\mathrm{tg}\,\theta_1 = \sqrt{3}/1 = \sqrt{3}$ y $\mathrm{tg}\,\theta_2 = -\sqrt{2}/\sqrt{2} = -1$, como hay dos ángulos que tienen la misma tangente, debemos quedarnos, en el caso de θ_1, con el ángulo del primer cuadrante ($\pi/3$), pues es evidente que $z_1 = 1+\sqrt{3}\,i$ está en el primer cuadrante ($a = 1 > 0, b = \sqrt{3} > 0$) y que su argumento debe verificar $0 < \theta < \pi/2$. Mientras que en el caso de θ_2, hay que elegir el ángulo del cuarto cuadrante ($-\pi/4$), pues es evidente que $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$ está en el cuarto cuadrante ($a = \sqrt{2} > 0, b = -\sqrt{2} < 0$) y que su argumento debe verificar, por ejemplo, $-\pi/2 < \theta < 0$ (también es habitual elegir su argumento en $3\pi/2 < \theta < 2\pi$.

Trabajando con la forma polar–exponencial de z_1 y z_2 es fácil calcular z_1^{100}/z_2^{104}:

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1^{100}}{z_2^{104}} &= \frac{(2\;e^{i\frac{\pi}{3}})^{100}}{(2\,e^{-i\frac{\pi}{4}})^{104}} = \frac{2^{100}\;e^{i\frac{100\cdot\pi}{3}}}{2^{104}\,e^{-i\cdot\frac{104\pi}{4}}} = \frac{2^{100}}{2^{104}}e^{i\left[\frac{100}{3}\pi - (-26\pi)\right]} = \frac{1}{2^4}e^{i\left(\frac{100}{3}+26\right)\pi} = \frac{1}{16}\,e^{(29+\frac{2}{3})2\pi i}\\
&= \frac{1}{16}\,e^{29\cdot 2\pi i}e^{\frac{4}{3}\pi i} = \frac{1}{16}e^{i\frac{4\pi}{3}} = \frac{1}{16}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) = -\frac{1}{32}(1+\sqrt{3})i.
\end{aligned}
$$

Observemos que hemos visto el número de vueltas completas que aparecen en el ángulo obtenido, dividiéndolo por 2π y hemos obtenido así que $\left(\frac{100}{3}+26\right)\pi = (29+\frac{2}{3})2\pi$. Podíamos haber usado también que $e^{-26\pi i} = 1$, pues $e^{2k\pi i} = 1$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.

Notemos que, si preferimos escribir $z_2 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$, llegamos al mismo resultado

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1^{100}}{z_2^{104}} &= \frac{(2\;e^{i\frac{\pi}{3}})^{100}}{(2\,e^{i\frac{7\pi}{4}})^{104}} = \frac{2^{100}\;e^{i\frac{100\cdot\pi}{3}}}{2^{104}\,e^{i\cdot\frac{104\cdot 7\pi}{4}}} = \frac{2^{100}}{2^{104}}\frac{e^{i\frac{100\cdot\pi}{3}}}{e^{91\cdot 2\pi i}} = \frac{1}{2^4}e^{\frac{100}{3}\pi i} = \frac{1}{16}e^{(8+\frac{2}{3})2\pi i} = \frac{1}{16}\,e^{8\cdot 2\pi i}e^{\frac{4}{3}\pi i}\\
&= \frac{1}{16}e^{i\frac{4\pi}{3}} = \frac{1}{16}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) = -\frac{1}{32}(1+\sqrt{3})i.
\end{aligned}
$$

Ejercicio resuelto

Dados los números complejos $z_1 = -8+8\sqrt{3}\,i$ y $z_2 = 1-\sqrt{3}\,i$, calcular y representar en el plano complejo:

i) las raíces cuartas de z_1.

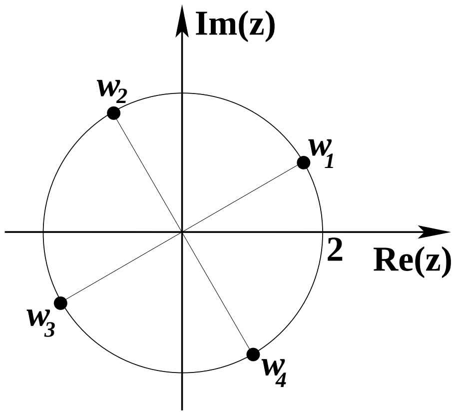
ii) el cociente z_1^{20}/z_2^{80}.

i) Puesto que necesitamos calcular raíces de z_1 y productos con potencias altas de z_1 y z_2, comenzamos escribiéndolos en forma *polar* (calculamos su módulo y su argumento):

$$
\begin{aligned}
|z_1| &= \sqrt{(8)^2 + (8\sqrt{3})^2} = 16 \rightarrow\; z_1 = -8+8\sqrt{3}\,i = 16(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1) \rightarrow\; \cos\theta_1 = -\frac{1}{2}\,,\; \mathrm{sen}\,\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \;\rightarrow\; \theta_1 = \frac{2\pi}{3},\\
|z_2| &= \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \;\rightarrow\; z_2 = 1-\sqrt{3}\,i = 2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2) \;\rightarrow\; \cos\theta_2 = \frac{1}{2}\,,\; \mathrm{sen}\,\theta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \;\rightarrow\; \theta_2 = \frac{-\pi}{3},
\end{aligned}
$$

es decir,

$$z_1 = -8+8\sqrt{3}\,i = 16\;e^{i\frac{2\pi}{3}}, \qquad z_2 = 1-\sqrt{3}\,i = 2\,e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$



Recordemos que si calculamos los argumentos usando $\mathrm{tg}\,\theta_1 = 8\sqrt{3}/(-8) = -\sqrt{3}$ y $\mathrm{tg}\,\theta_2 = -\sqrt{3}/1 = -\sqrt{3}$, aunque $\mathrm{tg}\,\theta_1 = \mathrm{tg}\,\theta_2$, los ángulos son distintos (pues hay dos ángulos que tienen la misma tangente). Debemos quedarnos, en el caso de θ_1, con el ángulo del segundo cuadrante ($2\pi/3$), pues es evidente que $z_1 = -8+8\sqrt{3}\,i$ está en el segundo cuadrante ($a = -8 < 0, b = 8\sqrt{3} > 0$) y que su argumento debe verificar $\pi/2 < \theta < \pi$. Mientras que en el caso de θ_2, hay que elegir el ángulo del cuarto cuadrante ($-\pi/3$), pues es evidente que $z_2 = 1-\sqrt{3}\,i$ está en el cuarto cuadrante ($a = 1 > 0, b = -\sqrt{3} < 0$) y que su argumento debe verificar (por ejemplo) $-\pi/2 < \theta < 0$.

Así, las cuatro raíces cuartas de z_1 vendrán dadas por

$$w_{k+1} = \sqrt[4]{16}\; e^{\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4} i} = 2\; e^{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}\right) i} \quad [\![k = 0, 1, 2, 3]\!],$$

es decir,

$$\begin{aligned}
w_1 &= 2\; e^{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi\cdot 0}{2}\right) i} = 2\; e^{\frac{\pi}{6} i} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i,\\
w_2 &= 2\; e^{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi\cdot 1}{2}\right) i} = 2\; e^{\frac{2\pi}{3} i} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \sqrt{3}\, i,\\
w_3 &= 2\; e^{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi\cdot 2}{2}\right) i} = 2\; e^{\frac{7\pi}{6} i} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} - i,\\
w_4 &= 2\; e^{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi\cdot 3}{2}\right) i} = 2\; e^{\frac{5\pi}{3} i} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3}\, i.
\end{aligned}$$

ii) Trabajando con la forma polar–exponencial de z_1 y z_2 es fácil calcular z_1^{20}/z_2^{80}. Por ejemplo,

$$\frac{z_1^{20}}{z_2^{80}} = \frac{16^{20}\; e^{i\frac{20\cdot 2\pi}{3}}}{2^{80}\; e^{-i\cdot 80\frac{\pi}{3}}} = \frac{16^{20}}{2^{80}} e^{i\left(\frac{40\pi}{3}+\frac{80\pi}{3}\right)} = 1 \cdot e^{40\pi i} = \left(e^{2\pi i}\right)^{20} = 1^{20} = 1,$$

o bien,

$$\frac{z_1^{20}}{z_2^{80}} = \left(\frac{z_1}{z_2^4}\right)^{20} = \left(\frac{16\; e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2^4\; e^{-i\frac{4\pi}{3}}}\right)^{20} = \left(\frac{16}{2^4} e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)}\right)^{20} = \left(e^{2\pi i}\right)^{20} = 1^{20} = 1.$$

Sin necesidad de hacer operaciones, si nos damos cuenta de que z_2 es una de las raíces cuartas de z_1, es decir, $z_1 = z_2^4$, se obtiene el resultado anterior:

$$\frac{z_1^{20}}{z_2^{80}} = \left(\frac{z_1}{z_2^4}\right)^{20} = 1^{20} = 1.$$

Ejercicio resuelto
Calcular todas las raíces sextas de un número $\omega \in \mathbb{C}$ sabiendo que $-\sqrt{3} + i$ es una de ellas.

Puesto que los puntos que representan a las raíces sextas de un número complejo están situadas sobre un hexágono regular, lo único que hay que hacer es, partiendo de $-\sqrt{3} + i$, sumar $2\pi/6$ (es decir, $\pi/3$) al argumento una y otra vez hasta obtener las cinco raíces que faltan. Es decir, escribiendo $-\sqrt{3} + i$ en forma exponencial (para facilitar los cálculos) encontraremos fácilmente las raíces que nos piden.

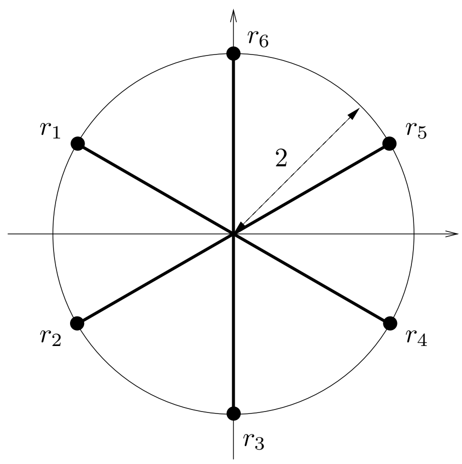
El módulo de $-\sqrt{3} + i$ es $\sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ y su argumento $\theta = 5\pi/6$, pues

$$-\sqrt{3} + i = 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right] = 2\left[\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta\right] \quad\rightarrow\quad \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}, \quad\rightarrow\quad \theta = \frac{5\pi}{6}.$$

También podemos llegar a ese valor del argumento teniendo en cuenta que, por tener parte real negativa y parte imaginaria positiva, ese número complejo viene representado por un punto del segundo cuadrante (argumento pues entre $\pi/2$ y π) y que $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{5\pi}{6}$. Es decir, $-\sqrt{3} + i = 2e^{(5\pi/6)\, i}$.

Por tanto, las seis raíces serán

$$\begin{aligned}
r_1 &= 2e^{(5\pi/6)\, i} = -\sqrt{3} + i,\\
r_2 &= 2e^{(5\pi/6+\pi/3)\, i} = 2e^{(7\pi/6)\, i} = -\sqrt{3} - i,\\
r_3 &= 2e^{(5\pi/6+2\pi/3)\, i} = 2e^{(3\pi/2)\, i} = -2i,\\
r_4 &= 2e^{(5\pi/6+3\pi/3)\, i} = 2e^{(11\pi/6)\, i} = \sqrt{3} - i,\\
r_5 &= 2e^{(5\pi/6+4\pi/3)\, i} = 2e^{(13\pi/6)\, i} = 2e^{(\pi/6)\, i} = \sqrt{3} + i,\\
r_6 &= 2e^{(5\pi/6+5\pi/3)\, i} = 2e^{(5\pi/2)\, i} = 2e^{(\pi/2)\, i} = 2i.
\end{aligned}$$



En la figura se puede observar cuál es la situación de estas raíces en el plano complejo.

Notemos que el número complejo que tiene esas seis raíces sextas es:

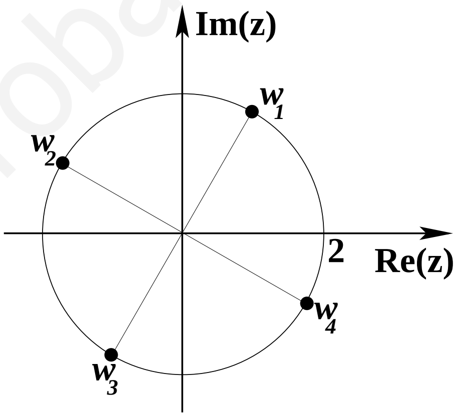
$$w = r_1^6 = r_2^6 = r_3^6 = r_4^6 = r_5^6 = r_6^6 = 2^6 e^{\pi i} = -64.$$

Ejercicio resuelto

Dados los números complejos $z_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{6}}{2} i$ y $z_2 = 1 + i$, encontrar las raíces cuartas del número $z = \dfrac{z_1^{16}}{z_2^8}$, expresarlas en la forma $a + bi$ y representarlas en el plano complejo.

Para calcular z lo más cómodo es trabajar con la forma polar–exponencial de z_1 y z_2 (calculamos su módulo y su argumento):

$$\begin{aligned}
|z_1| &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}, \qquad |z_2| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}, \\
z_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} i = \sqrt{2}(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) \;\rightarrow\; \cos\theta_1 = \frac{1}{2},\ \operatorname{sen}\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \;\rightarrow\; \theta_1 = \frac{\pi}{3}, \\
z_2 &= 1 + i = \sqrt{2}(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2) \;\rightarrow\; \cos\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \operatorname{sen}\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\rightarrow\; \theta_2 = \frac{\pi}{4},
\end{aligned}$$



es decir,

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} i = \sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{3}}, \qquad z_2 = 1 + i = \sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Recordemos que si calculamos el argumento usando $\operatorname{tg}\theta_1 = (\sqrt{6}/2)/(\sqrt{2}/2) = \sqrt{3}$, hay dos ángulos que tienen esa tangente y debemos quedarnos, en este caso, con el ángulo del primer cuadrante ($\pi/3$) y no con el del tercero ($4\pi/3$), pues es evidente que $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} i$ está en el primer cuadrante ($a = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0, b = \frac{\sqrt{6}}{2} > 0$) y que su argumento debe verificar $0 < \theta < \pi/2$. El mismo comentario es válido si usamos que $\operatorname{tg}\theta_2 = 1/1 = 1$.

De esta forma

$$z = \frac{z_1^{16}}{z_2^8} = \frac{(\sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{3}})^{16}}{(\sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{4}})^8} = \frac{(\sqrt{2})^{16}\ e^{i\frac{16\pi}{3}}}{(\sqrt{2})^8\ e^{i\frac{8\pi}{4}}} = \frac{2^8\ e^{i\frac{16\pi}{3}}}{2^4\ e^{2\pi i}} = 2^{(8-4)} e^{i(\frac{16\pi}{3} - 2\pi)} = 2^4 e^{i\frac{10\pi}{3}} = 2^4 e^{i\frac{4\pi}{3}} = -8 - 8\sqrt{3}\, i.$$

Aprovechando que hemos encontrado la forma polar–exponencial de z, deducimos que sus cuatro raíces cuartas vendrán dadas por

$$w_{k+1} = \sqrt[4]{2^4}\ e^{\frac{\frac{4\pi}{3} + 2\pi k}{4} i} = 2\ e^{\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{2}\right) i} \quad [\![k = 0, 1, 2, 3]\!],$$

es decir,

$$\begin{aligned}
w_1 &= 2\ e^{\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi\cdot 0}{2}\right)i} = 2\ e^{\frac{\pi}{3} i} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}, \\
w_2 &= 2\ e^{\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi\cdot 1}{2}\right)i} = 2\ e^{\frac{5\pi}{6} i} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i, \\
w_3 &= 2\ e^{\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi\cdot 2}{2}\right)i} = 2\ e^{\frac{4\pi}{3} i} = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}, \\
w_4 &= 2\ e^{\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi\cdot 3}{2}\right)i} = 2\ e^{\frac{11\pi}{6} i} = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i,
\end{aligned}$$

que aparecen representadas cualitativamente en la figura.

Observación.- Habitualmente, para obtener las raíces $n-$ésimas de un número complejo necesitamos conocer su argumento. Sin embargo, en el caso particular de las raíces cuadradas ($n = 2$) el problema se puede plantear directamente en forma binómica. Por ejemplo, para calcular las raíces cuadradas de $w = 3 + 4i$ basta plantear la ecuación $(x + iy)^2 = 3 + 4i$. Igualando parte real con parte real y parte imaginaria con parte imaginaria se obtiene un sistema de ecuaciones en (x, y) que puede resolverse reduciéndolo a una ecuación bicuadrada en x (o en y).

3. Las raíces de un polinomio real.

El Teorema fundamental del Álgebra. Todo polinomio

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \qquad a_n \neq 0, \text{ con } n \geq 1$$

donde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números complejos, tiene n raíces complejas.

Es decir, que dado cualquier polinomio como el anterior $P(z)$, podemos asegurar que existen n números complejos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ tales que

$$P(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

Además, se verifican las siguientes relaciones entre las raíces y los coeficientes:

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \qquad z_1 z_2 \cdots z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

De acuerdo con el teorema fundamental del álgebra, las ecuaciones polinómicas del tipo $x^2 + 1 = 0$, que justificaron la ampliación del conjunto de los números reales porque esas ecuaciones no tienen solución real, poseen solución en el conjunto de los números complejos. Concretamente esa ecuación tiene como raíces $z_1 = i$ y $z_2 = -i$, de manera que

$$x^2 + 1 = (x - i)(x + i).$$

No es cierto que todo polinomio no constante con coeficientes reales tenga alguna raíz real; sin embargo se verifica que:

- Todo polinomio de grado impar con coeficientes reales tiene alguna raíz real.
- En los polinomios con coeficientes reales las raíces complejas no reales aparecen por pares conjugados. Es decir, si $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ es una raíz de un polinomio con coeficientes reales, entonces su conjugada $\overline{z_0} = x_0 - iy_0 \in \mathbb{C}$ también lo es.

Ejercicio resuelto
Calcular y representar en el plano complejo todas las raíces del polinomio $z^4 - 8iz$.

Por tratarse de un polinomio de grado cuatro sabemos que va a tener cuatro raíces complejas. Vemos que el polinomio no tiene término independiente, por lo que se puede sacar z factor común:

$$p(z) = z^4 - 8iz = z\left(z^3 - 8i\right).$$

Igualando a cero, para obtener las raíces, tenemos dos posibilidades:

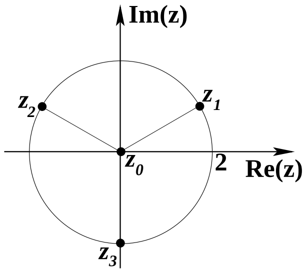
- o bien $z = 0$, que es la primera raíz (y la denotaremos por z_0),
- o bien $z^3 - 8i = 0$, que es equivalente a $z = \sqrt[3]{8i}$. Sólo tenemos, por tanto, que obtener las raíces cúbicas de $8i$. Como $8i$ tiene módulo 8 y argumento $\pi/2$, queda

$$z = \sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8}\, e^{\frac{\frac{\pi}{2}+k(2\pi)}{3} i} \; [\![k = 0,1,2]\!] = 2 \begin{cases} e^{\frac{\pi}{6} i} \\ e^{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right) i} \\ e^{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right) i} \end{cases} = 2 \begin{cases} e^{\frac{\pi}{6} i} \\ e^{\frac{5\pi}{6} i} \\ e^{\frac{3\pi}{2} i} \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{3} + i, \\ -\sqrt{3} + i, \\ -2i. \end{cases}$$

Así obtenemos tres raíces más, que denotaremos, respectivamente, por z_1, z_2 y z_3.

Resumiendo, las raíces son

$$\begin{aligned} z_0 &= 0, \\ z_1 &= \sqrt{3} + i, \\ z_2 &= -\sqrt{3} + i, \\ z_3 &= -2i. \end{aligned}$$



Ejercicio resuelto
Calcular todas las raíces del polinomio

$$P(z) = z^6 - 2z^3 + 2,$$

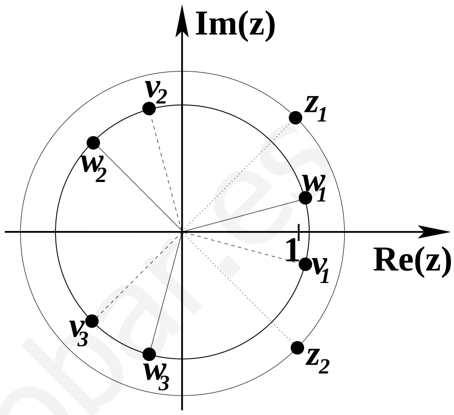
y representarlas en el plano complejo.

Puesto que $P(z) = z^6 - 2z^3 + 2 = 0$ es una ecuación tricuadrada

$$z^3 = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i,$$

necesitamos calcular las raíces cúbicas de $z_1 = 1 + i$ y de $z_2 = 1 - i$. Comencemos con z_1, escribiéndolo en forma *polar* (calculamos su módulo y su argumento):

$$\begin{aligned} |z_1| &= \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}, \\ z_1 &= 1 + i = \sqrt{2}(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \;\rightarrow\; \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,\; \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\rightarrow\; \theta = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$



es decir,

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\; e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Recordemos que si calculamos el argumento usando $\operatorname{tg}\theta = 1/1 = 1$, hay dos ángulos que tienen esa tangente y debemos quedarnos, en este caso, con el ángulo del primer cuadrante ($\pi/4$) y no con el del tercero ($5\pi/4$), pues es evidente que $z = 1 + i$ está en el primer cuadrante ($a = 1 > 0, b = 1 > 0$) y que su argumento debe verificar $0 < \theta < \pi/2$.

Sus tres raíces cúbicas vendrán dadas por

$$w_{k+1} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\; e^{\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} i} = \sqrt[6]{2}\; e^{\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}\right) i} \quad [\![k = 0, 1, 2]\!],$$

es decir,

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt[6]{2}\; e^{\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi\cdot 0}{3}\right) i} = \sqrt[6]{2}\; e^{\frac{\pi}{12} i} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right), \\ w_2 &= \sqrt[6]{2}\; e^{\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi\cdot 1}{3}\right) i} = \sqrt[6]{2}\; e^{\frac{3\pi}{4} i} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right), \\ w_3 &= \sqrt[6]{2}\; e^{\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi\cdot 2}{3}\right) i} = \sqrt[6]{2}\; e^{\frac{17\pi}{12} i} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{17\pi}{12}\right). \end{aligned}$$

Procediendo análogamente con z_2 (su argumento es $-\pi/4$) obtenemos

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2}\; e^{\frac{-\pi}{4} i},$$

con lo que sus tres raíces cúbicas vendrán dadas por

$$v_{k+1} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\; e^{\frac{\frac{-\pi}{4} + 2\pi k}{3} i} = \sqrt[6]{2}\; e^{\left(\frac{-\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}\right) i} \quad [\![k = 0, 1, 2]\!],$$

es decir,

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt[6]{2}\; e^{\left(\frac{-\pi}{12} + \frac{2\pi\cdot 0}{3}\right) i} = \sqrt[6]{2}\; e^{\frac{-\pi}{12} i} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{-\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{-\pi}{12}\right), \\ v_2 &= \sqrt[6]{2}\; e^{\left(\frac{-\pi}{12} + \frac{2\pi\cdot 1}{3}\right) i} = \sqrt[6]{2}\; e^{\frac{7\pi}{12} i} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}\right), \\ v_3 &= \sqrt[6]{2}\; e^{\left(\frac{-\pi}{12} + \frac{2\pi\cdot 2}{3}\right) i} = \sqrt[6]{2}\; e^{\frac{5\pi}{4} i} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Por tanto, las seis raíces del polinomio dado, que aparecen en la figura, son

$$w_1 = \sqrt[6]{2}\; e^{\frac{\pi}{12} i},\;\; w_2 = \sqrt[6]{2}\; e^{\frac{3\pi}{4} i},\;\; w_3 = \sqrt[6]{2}\; e^{\frac{17\pi}{12} i},\;\; v_1 = \sqrt[6]{2}\; e^{\frac{-\pi}{12} i},\;\; v_2 = \sqrt[6]{2}\; e^{\frac{7\pi}{12} i},\;\; v_3 = \sqrt[6]{2}\; e^{\frac{5\pi}{4} i}.$$

Ejercicio resuelto
Encontrar todas las soluciones de la ecuación

$$(3 - 2z)^3 + 27 = 0,$$

y expresarlas en la forma $a + bi$.

Como se trata de un polinomio de grado tres, sabemos que la ecuación tendrá tres soluciones. En vez de desarrollar el cubo del binomio (y luego ver si tenemos suerte y encontramos por Ruffini una primera raíz que nos permita bajar el grado del polinomio) es más fácil proceder de la siguiente forma.

Puesto que

$$(3-2z)^3+27=0 \quad\to\quad (3-2z)^3=-27 \quad\to\quad 3-2z=\sqrt[3]{-27} \quad\to\quad z=\frac{3-\sqrt[3]{-27}}{2}$$

necesitamos calcular las TRES raíces cúbicas de $u=-27$. Comenzamos escribiendo u en forma *polar* (calculamos su módulo y su argumento):

$$\begin{aligned} |u| &= \sqrt{(-27)^2+(0)^2}=27, \\ u &= -27+0i=27(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta) \quad\to\quad \cos\theta=-1\,,\ \mathrm{sen}\,\theta=0 \quad\to\quad \theta=\pi, \end{aligned}$$

es decir,

$$u=-27=27\,e^{i\pi}.$$

Recordemos que si calculamos el argumento usando $\mathrm{tg}\,\theta=0/1=0$, hay dos ángulos que tienen esa tangente, $0,\pi$, y debemos quedarnos, en este caso, con π (argumento de un número real negativo) y no con 0 (argumento de un número real positivo).

Sus tres raíces cúbicas vendrán dadas por

$$w_{k+1}=\sqrt[3]{27}\,e^{\frac{\pi+2\pi k}{3}i}=3\,e^{\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}\right)i} \quad [\![k=0,1,2]\!],$$

es decir,

$$\begin{aligned} w_1 &= 3\,e^{\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi\cdot 0}{3}\right)i}=3\,e^{\frac{\pi}{3}i}=3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)=3\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2}\,, \\ w_2 &= 3\,e^{\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi\cdot 1}{3}\right)i}=3\,e^{\pi i}=3\,(\cos\pi+i\,\mathrm{sen}\,\pi)=3\,(-1+i\cdot 0)=-3\,, \\ w_3 &= 3\,e^{\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi\cdot 2}{3}\right)i}=3\,e^{\frac{5\pi}{3}i}=3\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right)=3\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3}{2}-i\frac{3\sqrt{3}}{2}\,. \end{aligned}$$

De esta forma, las tres soluciones de la ecuación polinomial dada son

$$z_1=\frac{3-w_1}{2}=\frac{3}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{4}i\,, \qquad z_2=\frac{3-w_2}{2}=3, \qquad z_3=\frac{3-w_3}{2}=\frac{3}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}i\,.$$

Ejercicio resuelto

Encontrar todas las soluciones de la ecuación

$$z^6+8\sqrt{2}(1-i)z^2=0,$$

y representarlas en el plano complejo.

Puesto que $P(z)$ es un polinomio de grado 6, el teorema fundamental del Álgebra nos garantiza que tiene exactamente 6 raíces. Sacando factor común e igualando a cero

$$P(z)=z^6+8\sqrt{2}(1-i)z^2=0,=z^2[z^4+8\sqrt{2}(1-i)]=0 \ \to \ \begin{cases} z^2=0, \\ z^4+8\sqrt{2}(1-i)=0, \end{cases}$$

deducimos que $z=0$ es una raíz doble, mientras que las otras 4 raíces son las soluciones de

$$z^4+8\sqrt{2}(1-i)=0 \ \longrightarrow\ z^4=-8\sqrt{2}(1-i),$$

es decir, necesitamos calcular las raíces cuartas del número complejo $s=-8\sqrt{2}+8\sqrt{2}\,i$. Para ello comenzamos escribiéndolo en forma polar:

$$\begin{aligned} |s| &= \sqrt{(-8\sqrt{2})^2+(8\sqrt{2})^2}=16, \\ s &= -8\sqrt{2}+8\sqrt{2}\,i=16(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta) \ \to\ \cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\ \mathrm{sen}\,\theta=\frac{\sqrt{2}}{2} \ \to\ \theta=\frac{3\pi}{4}, \end{aligned}$$

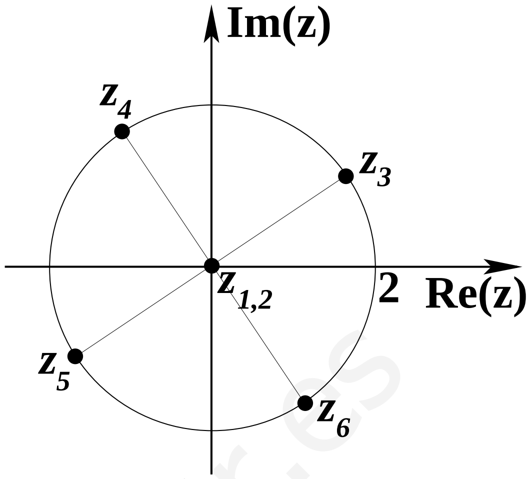
es decir,

$$s=-8\sqrt{2}+8\sqrt{2}\,i=16e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Recordemos que si calculamos el argumento usando $\operatorname{tg}\theta = 8\sqrt{2}/(-8\sqrt{2}) = -1$, hay dos ángulos que tienen esa tangente y debemos quedarnos, en este caso, con el ángulo del segundo cuadrante ($3\pi/4$) y no con el del cuarto ($7\pi/4$, o $-\pi/4$), pues es evidente que $s = -8\sqrt{2}+8\sqrt{2}\,i$ está en el segundo cuadrante ($a = -8\sqrt{2} < 0, b = 8\sqrt{2} > 0$) y que su argumento debe verificar $\pi/2 < \theta < \pi$.

Las cuatro raíces cuartas de s vendrán dadas por

$$w_{k+1} = \sqrt[4]{2^4}\; e^{\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{4} i} = 2\; e^{\left(\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi k}{2}\right)i} \quad [\![k = 0, 1, 2, 3]\!],$$



es decir,

$$\begin{aligned}
w_1 &= 2\,e^{\left(\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi\cdot 0}{2}\right)i} = 2\,e^{\frac{3\pi}{16}i} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{16} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{16}\right),\\
w_2 &= 2\,e^{\left(\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi\cdot 1}{2}\right)i} = 2\,e^{\frac{11\pi}{16}i} = 2\left(\cos\frac{11\pi}{16} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{11\pi}{16}\right),\\
w_3 &= 2\,e^{\left(\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi\cdot 2}{2}\right)i} = 2\,e^{\frac{19\pi}{16}i} = 2\left(\cos\frac{19\pi}{16} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{19\pi}{16}\right),\\
w_4 &= 2\,e^{\left(\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi\cdot 3}{2}\right)i} = 2\,e^{\frac{27\pi}{16}i} = 2\left(\cos\frac{27\pi}{16} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{27\pi}{16}\right).
\end{aligned}$$

Como las razones trigonométricas de los ángulos que han aparecido ($\frac{3\pi}{16}, \frac{11\pi}{16}, \frac{19\pi}{16}, \frac{27\pi}{16}$) no son fáciles de encontrar sin calculadora, nos basta con estimar el valor de uno de esos ángulos (por ejemplo, $\frac{3\pi}{16} \approx 33{,}75^{\mathrm{o}}$) y representarlo en el plano complejo. Las otras tres raíces cuartas de s están en la misma circunferencia (de radio 2) y separadas por noventa grados (son los cuatro vértices de un cuadrado inscrito en esa circunferencia).

Por tanto, las seis raíces de $P(z)$, que aparecen representadas cualitativamente en la figura, son:

$$z_1 = z_2 = 0, \quad z_3 = 2\,e^{\frac{3\pi}{16}i}, \quad z_4 = 2\,e^{\frac{11\pi}{16}i}, \quad z_5 = 2\,e^{\frac{19\pi}{16}i}, \quad z_6 = 2\,e^{\frac{27\pi}{16}i}.$$

Ejercicio resuelto

Dado el número complejo $z = re^{i\theta}$, encontrar los valores de r y θ para los que se verifica

$$z^4 = \overline{z}^2.$$

Expresar los números complejos encontrados en la forma $a + bi$.

(a.1) Nos piden que resolvamos una ecuación, $z^4 = \overline{z}^2$, usando la expresión polar o exponencial $z = re^{i\theta}$ (con $r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$):

$$z^4 = \overline{z}^2 \;\rightarrow\; \left(re^{i\theta}\right)^4 = \left(re^{-i\theta}\right)^2 \;\rightarrow\; r^4e^{i4\theta} = r^2e^{-i2\theta} \;\rightarrow\; \begin{cases} r^4 = r^2, \\ 4\theta = -2\theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

donde hemos usado que $\overline{z} = re^{-i\theta}$ (conjugado de un número complejo en forma polar o exponencial), que $z^n = r^ne^{in\theta}$ (potencia de un número complejo) y que, el que dos números complejos expresados en forma polar sean iguales, equivale a que sus módulos sean iguales y sus argumentos sean iguales salvo un múltiplo entero de 2π. Vamos a resolver las dos ecuaciones obtenidas. Comenzamos con la que obtuvimos al igualar los módulos:

$$r^4 = r^2 \;\rightarrow\; r^4 - r^2 = 0 \;\rightarrow\; r^2(r^2-1) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} r^2 = 0 \;\rightarrow\; r = 0, \\ r^2 = 1 \;\rightarrow\; r = \pm 1\ (r > 0) \;\rightarrow\; r = 1. \end{cases}$$

La ecuación a la que llegamos al *igualar* los argumentos nos lleva a

$$4\theta = -2\theta + 2k\pi \;\rightarrow\; 6\theta = 2k\pi \;\rightarrow\; \theta = \frac{k\pi}{3},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Veamos ahora a qué números complejos corresponden las soluciones obtenidas (dos valores de r, $r = 0, 1$, e infinitos valores de θ, $\theta = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$).

Así, $r = 0$ conduce, para cualquier valor de θ, a $z_0 = 0$, ya que $z = 0e^{i\theta} = 0$.

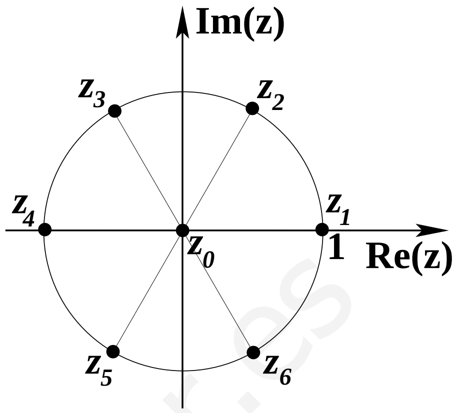
Los infinitos valores de θ que hemos obtenido, nos van a llevar a seis números complejos distintos, pues al ir dando valores a k se obtienen argumentos del tipo (donde $m \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned}
&\text{si } k = 6m && (k = ..., -12, -6, 0, 6, 12, ...): && \theta = 0 + 2\pi m,\\
&\text{si } k = 6m+1 && (k = ..., -11, -5, 1, 7, 13, ...): && \theta = \frac{\pi}{3} + 2\pi m,\\
&\text{si } k = 6m+2 && (k = ..., -10, -4, 2, 8, 14, ...): && \theta = \frac{2\pi}{3} + 2\pi m,\\
&\text{si } k = 6m+3 && (k = ..., -9, -3, 3, 9, 15, ...): && \theta = \pi + 2\pi m,
\end{aligned}$$

$$\text{si} \;\; k = 6m+4 \;\; (k = ..., -8, -2, 4, 10, 16, ...): \;\; \theta = \frac{4\pi}{3} + 2\pi m,$$
$$\text{si} \;\; k = 6m+5 \;\; (k = ..., -7, -1, 5, 11, 17, ...): \;\; \theta = \frac{5\pi}{3} + 2\pi m.$$

De esta forma, cuando $r = 1$ y con los valores de θ hallados, obtenemos los seis números complejos (que, casualmente, son las raíces sextas de la unidad)

$$\begin{aligned}
z_1 &= 1\, e^{i\cdot 0} = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1 + i \cdot 0 = 1, \\
z_2 &= 1\, e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\
z_3 &= 1\, e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\
z_4 &= 1\, e^{i\pi} = \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi = -1 + i \cdot 0 = -1, \\
z_5 &= 1\, e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\
z_6 &= 1\, e^{i\frac{5\pi}{3}} = \cos\frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$



Hemos representado en la figura los siete números complejos que verifican la ecuación dada

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 1, \quad z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_4 = -1, \quad z_5 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_6 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(observemos que el problema dado no equivale a encontrar las soluciones de una ecuación polinomial de grado cuatro en z, pues si así fuera, la ecuación tendría cuatro soluciones).

4. Aplicaciones geométricas de los números complejos: transformaciones en el plano.

Vamos a considerar aquí expresiones complejas que pueden ser usadas para las transformaciones más sencillas en el plano: traslaciones, homotecias, giros, simetrías y proyecciones ortogonales.

4.1. Traslaciones.

Como conocemos del estudio de los vectores en el plano y del estudio de los números complejos, la suma $u + v$ de dos vectores o la suma $z + w$ de dos números complejos se obtiene geométricamente sin más que hacer la traslación, según el vector v, del punto u (o viceversa). Así, la transformación del plano consistente en desplazar cada punto según un vector (a, b) (a unidades en horizontal y b en vertical) puede expresarse mediante

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longrightarrow & (x',y') = (x,y) + (a,b); \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longrightarrow & z + (a+bi). \end{array}$$

4.2. Homotecias.

Una homotecia de centro el origen de coordenadas y razón $\rho > 0$ es la transformación que a cada vector v con origen en el origen de coordenadas lo transforma en el vector $w = \rho v$, con lo que tenemos las expresiones

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \to & (x',y') = \rho(x,y) = (\rho x, \rho y); \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + yi & \longrightarrow & w = \rho z = \rho x + \rho y i. \end{array}$$

4.3. Giros.

Si un punto P del plano tiene como coordenadas polares $r > 0$ (su distancia al origen) y θ (el ángulo que forma su vector de posición con el semieje positivo de abscisas), entonces sus coordenadas cartesianas son

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x &=& r\cos(\theta) \\ y &=& r \operatorname{sen}(\theta) \end{array} \right. \tag{7}$$

y es fácil obtener las coordenadas cartesianas del punto que se obtiene al hacer un giro de centro el origen de coordenadas y ángulo ϕ, pues es el punto cuya distancia al origen es r (coincide con la de P) y cuyo vector de posición forma con el semieje positivo de abscisas el ángulo $\theta + \phi$, es decir, el punto cuyas coordenadas cartesianas son

$$\left\{ \begin{array}{lll} x' & = & r\cos(\theta+\phi) \quad = r\left[\cos(\theta)\cos(\phi) - \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi)\right] \\ y' & = & r\operatorname{sen}(\theta+\phi) \quad = r\left[\operatorname{sen}(\theta)\cos(\phi) + \cos(\theta)\operatorname{sen}(\phi)\right] \end{array} \right.$$

y teniendo en cuenta las relaciones (7) se obtiene

$$\left\{ \begin{array}{lll} x' & = & x\cos(\phi) - y\operatorname{sen}(\phi), \\ y' & = & y\cos(\phi) + x\operatorname{sen}(\phi). \end{array} \right.$$

Las relaciones anteriores las podemos expresar en forma matricial/vectorial:

$$\left[\begin{array}{c} x' \\ y' \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \cos(\phi) & -\operatorname{sen}(\phi) \\ \operatorname{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right],$$

donde la matriz G involucrada se denomina matriz del giro (de centro 0 y ángulo ϕ). Hacer la transformación anterior sobre el vector de coordenadas (x, y) es lo mismo que multiplicar al número complejo $z = x+iy$ por el número complejo de módulo 1 y argumento ϕ, es decir por $e^{i\phi}$. Así, tenemos la expresión del giro en forma compleja

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + yi & \longrightarrow & w = e^{i\phi}z \end{array}$$

Desde este punto geométrico, la multiplicación (de un número complejo genérico) por el número complejo de módulo ρ y argumento ϕ, es decir $\rho e^{i\phi}$, consiste en hacer un giro (de centro el origen y ángulo ϕ) y una homotecia (de centro el origen y razón ρ).

4.4. Proyecciones ortogonales.

Sabemos que calcular la parte real de un número complejo consiste simplemente en proyectar el punto que lo representa sobre el eje OX y calcular la parte imaginaria consiste en proyectar sobre el eje OY. Así, tenemos representaciones con números complejos para dichas transformaciones.

$$\begin{array}{lccccccc} & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \text{Proyección sobre } OX & (x,y) & \rightarrow & (x',y') = (x,0) & & z & \rightarrow & w = \operatorname{Re}(z) = \dfrac{1}{2}(z+\overline{z}) \\ \text{Proyección sobre } OY & (x,y) & \rightarrow & (x',y') = (0,y) & & z & \rightarrow & w = \operatorname{Im}(z)\, i = \dfrac{1}{2}(z-\overline{z}). \end{array}$$

4.5. Simetrías.

Podemos considerar dos tipos de simetría: simetría respecto a un punto o simetría respecto a una recta. Yendo a la situación más simple, tenemos la simetría respecto al origen de coordenadas,

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (-x, -y) \in \mathbb{R}^2,$$

que podemos expresar en forma compleja, respectivamente, como

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + yi & \longrightarrow & w = -z. \end{array}$$

La simetría respecto al eje OX tiene una expresión simple compleja como:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + yi & \longrightarrow & w = \overline{z}. \end{array}$$

4.6. Ejemplos:

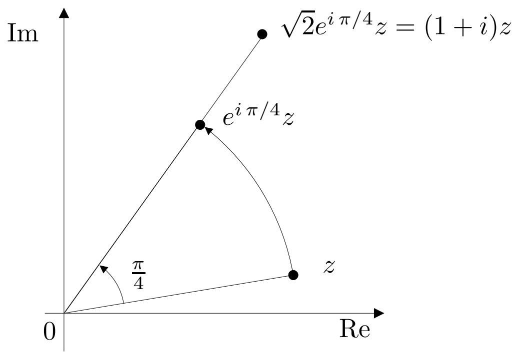
1. ¿Qué representa geométricamente la siguiente operación?

$$z \in \mathbb{C} \longrightarrow (1+i)z - 2 \in \mathbb{C}.$$

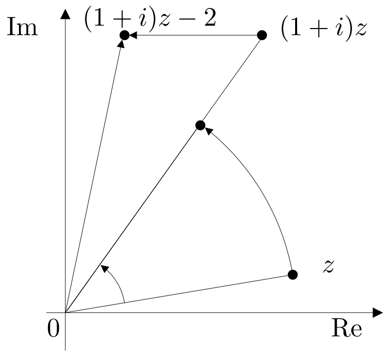
   Puesto que $1+i$ tiene módulo $\sqrt{2}$ y argumento $\dfrac{\pi}{4}$ rad., tenemos que

$$(1+i)z = \sqrt{2}\ e^{i\pi/4}\ z$$

   es el número complejo que se obtiene al hacer un giro de ángulo $\dfrac{\pi}{4}$ rad. (y centro el origen) y una homotecia de razón $\sqrt{2}$. Una vez hechas estas transformaciones, nos queda restar 2, es decir, hacer (sobre lo obtenido) la traslación de vector $(-2, 0)$.

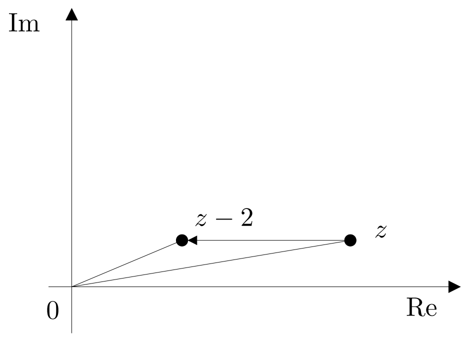


Primero giramos ...

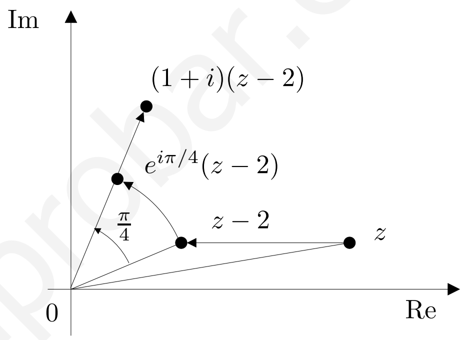


y luego trasladamos.

Notemos que, si bien hacer primero el giro y después la homotecia da el mismo resultado que hacer primero la homotecia y después el giro, esto no sucede con la traslación; no es lo mismo hacer primero el giro (o la homotecia) y después la traslación que hacerlo al revés. Si hicieramos primero la traslación y después el giro y la homotecia el resultado sería $(1+i)(z-2)$.



Primero trasladamos ...



y luego giramos.

2. ¿Cómo podemos expresar en términos complejos la transformación del plano consistente en hacer una simetría respecto al eje OY? En términos de parte real y parte imaginaria tenemos:

$$z = x + yi \in \mathbb{C} \to w = -x + yi$$

y teniendo en cuenta que $x = \mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$, $y = \mathrm{Im}(z) = \dfrac{1}{2i}(z-\overline{z})$, obtenemos

$$w = -\frac{1}{2}(z+\overline{z}) + \frac{1}{2i}(z-\overline{z})i = -\overline{z}.$$

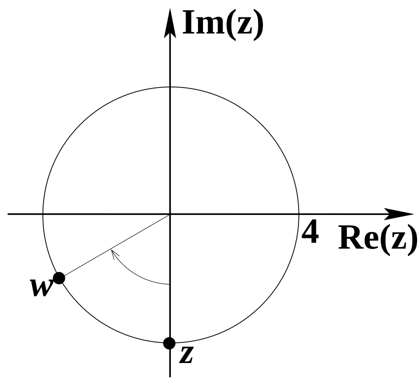
O sea, que hacer una simetría respecto al eje OY es lo mismo que hacer la simetría respecto al eje OX seguida de la simetría respecto al origen.

Ejercicio resuelto
Obtener, en la forma $a+bi$, el transformado del número $z = \frac{4}{i}$ mediante un giro con centro el origen y ángulo $-\frac{\pi}{3}$.

Para transformar cualquier número complejo z (punto del plano) con un giro de ángulo φ respecto del punto (a,b) basta con calcular

$$w = [z-(a+bi)]e^{i\varphi} + (a+bi)$$

(primero trasladamos el punto (a,b) al origen, después hacemos el giro de ángulo φ respecto del origen y, por último, deshacemos la traslación). Pero en nuestro caso, puesto que el giro es respecto del origen, no es necesaria la traslación. Como en nuestro caso $z = \frac{4}{i} = \frac{4i}{i^2} = -4i = 4e^{-i\frac{\pi}{2}}$ obtenemos



$$\begin{aligned} w &= ze^{-i\frac{\pi}{3}} = 4e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{-i\frac{\pi}{3}} = 4e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = 4e^{-i\frac{5\pi}{6}} \\ &= 4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right] = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{3} - 2i. \end{aligned}$$

Ejercicio resuelto
Dado el número complejo $z = \sqrt{3} + i$

a) Hallar la parte real e imaginaria de z^{25}.

b) Determinar el transformado del número z mediante un giro con centro en $(0, 1)$ y ángulo $\frac{\pi}{6}$.

c) Determinar, en la forma $a + bi$, las raíces cuartas del número z^4.

Comenzamos escribiendo el número $z = \sqrt{3} + i$ en forma polar:

$$\begin{aligned}|z| &= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2,\\ z &= \sqrt{3} + i = 2(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \ \rightarrow\ \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{6},\end{aligned}$$

es decir,

$$z = \sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Recordemos que si calculamos el argumento usando $\operatorname{tg}\theta = 1/\sqrt{3}$, hay dos ángulos que tienen esa tangente y debemos quedarnos, en este caso, con el ángulo del primer cuadrante $(\pi/6)$ y no con el del tercero $(7\pi/6)$, pues es evidente que $z = \sqrt{3} + i$ está en el primer cuadrante $(a = \sqrt{3} > 0, b = 1 > 0)$ y que su argumento, por tanto, debe verificar $0 < \theta < \pi/2$.
(a) Calculemos z^{25}:

$$z^{25} = [2e^{i\frac{\pi}{6}}]^{25} = 2^{25}e^{i\frac{25\pi}{6}} = 2^{25}e^{i(2\cdot 2\pi + \frac{\pi}{6})} = 2^{25}e^{i\frac{\pi}{6}} = 2^{25}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right) = 2^{24}(\sqrt{3} + i)$$

con lo que sus partes real e imaginaria son

$$Re(z^{25}) = 2^{24}\sqrt{3}, \qquad Im(z^{25}) = 2^{24}.$$

(b) Para transformar cualquier número complejo z (punto del plano) con el giro de ángulo $\pi/6$ respecto del punto $(0, 1)$ basta con calcular

$$w = (z - i)e^{i\frac{\pi}{6}} + i$$

(primero trasladamos el punto $(0, 1)$ al origen, después hacemos el giro de ángulo $\pi/6$ respecto del origen y después deshacemos la traslación). Como en nuestro caso $z = \sqrt{3} + i$ obtenemos

$$w = (\sqrt{3} + i - i)e^{i\frac{\pi}{6}} + i = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right) + i = \frac{3}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i,$$

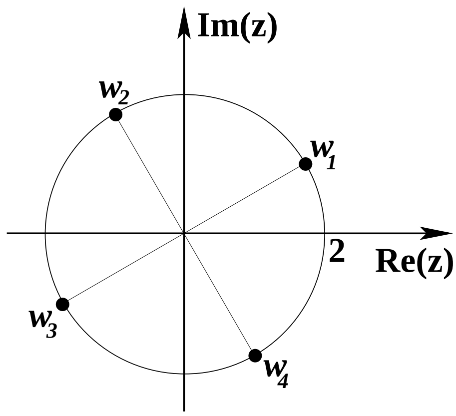
es decir, que el punto $(\sqrt{3}, 1)$ se transforma en el $\left(\frac{3}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(c) Las cuatro raíces cuartas de

$$z^4 = 2^4e^{i\frac{4\pi}{6}} = 2^4e^{i\frac{2\pi}{3}} = 16\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) = -8 + 8\sqrt{3}\,i$$

vendrán dadas por

$$w_{k+1} = \sqrt[4]{16}\ e^{\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{4}i} = 2e^{\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k\right)i} \quad [\![k = 0, 1, 2, 3]\!],$$



es decir,

$$\begin{aligned}w_1 &= 2e^{\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}0\right)i} = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i,\\ w_2 &= 2e^{\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}1\right)i} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \sqrt{3}\,i,\end{aligned}$$

$$w_3 = 2e^{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}2\right)i} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} - i,$$

$$w_4 = 2e^{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}3\right)i} = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3}\,i.$$

Ejercicio resuelto
Considerar el polinomio $p(z) = z^4 - 2z^2 + 2$.
(a) Calcular las raíces de p, indicando su módulo y argumento, y representarlas en el plano complejo.
(b) Encontrar, en forma binómica, el número complejo que se obtiene al girar, respecto del origen, la raíz que está en el primer cuadrante, un ángulo $5\pi/8$ en sentido positivo.

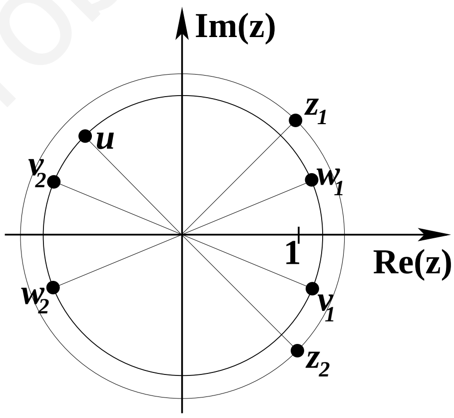
(a) Puesto que $z^4 - 2z^2 + 2 = 0$ es una ecuación bicuadrada

$$z^2 = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i,$$

necesitamos calcular las raíces cuadradas de $z_1 = 1 + i$ y de $z_2 = 1 - i$. Comencemos con z_1, escribiéndolo en forma *polar*:

$$|z_1| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2},$$

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \;\rightarrow\; \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}},\; \mathrm{sen}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\rightarrow\; \theta = \frac{\pi}{4},$$



es decir,

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\; e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Recordemos que si calculamos el argumento usando $\mathrm{tg}\,\theta = 1/1 = 1$, hay dos ángulos que tienen esa tangente y debemos quedarnos, en este caso, con el ángulo del primer cuadrante ($\pi/4$) y no con el del tercero ($5\pi/4$), pues es evidente que $z = 1 + i$ está en el primer cuadrante ($a = 1 > 0, b = 1 > 0$) y que su argumento debe verificar $0 < \theta < \pi/2$.

Sus dos raíces cuadradas vendrán dadas por

$$w_{k+1} = \sqrt{\sqrt{2}}\; e^{\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{2}i} = \sqrt[4]{2}\; e^{\left(\frac{\pi}{8}+\pi k\right)i} \quad [\![k = 0, 1]\!],$$

es decir,

$$w_1 = \sqrt[4]{2}\; e^{\left(\frac{\pi}{8}+\pi\cdot 0\right)i} = \sqrt[4]{2}\; e^{\frac{\pi}{8}i} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{8}\right),$$

$$w_2 = \sqrt[4]{2}\; e^{\left(\frac{\pi}{8}+\pi\cdot 1\right)i} = \sqrt[4]{2}\; e^{\frac{9\pi}{8}i} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{9\pi}{8}\right).$$

Procediendo análogamente con

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2}\; e^{\frac{-\pi}{4}i},$$

sus dos raíces cuadradas vendrán dadas por

$$v_{k+1} = \sqrt{\sqrt{2}}\; e^{\frac{\frac{-\pi}{4}+2\pi k}{2}i} = \sqrt[4]{2}\; e^{\left(\frac{-\pi}{8}+\pi k\right)i} \quad [\![k = 0, 1]\!],$$

es decir,

$$v_1 = \sqrt[4]{2}\; e^{\left(\frac{-\pi}{8}+\pi\cdot 0\right)i} = \sqrt[4]{2}\; e^{\frac{-\pi}{8}i} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{-\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{-\pi}{8}\right),$$

$$v_2 = \sqrt[4]{2}\; e^{\left(\frac{-\pi}{8}+\pi\cdot 1\right)i} = \sqrt[4]{2}\; e^{\frac{7\pi}{8}i} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{8}\right).$$

Por tanto, las cuatro raíces del polinomio dado son

$$w_1 = \sqrt[4]{2}\; e^{\frac{\pi}{8}i},\quad w_2 = \sqrt[4]{2}\; e^{\frac{9\pi}{8}i},\quad v_1 = \sqrt[4]{2}\; e^{\frac{-\pi}{8}i},\quad v_2 = \sqrt[4]{2}\; e^{\frac{7\pi}{8}i}$$

(b) Obviamente la raíz que está en el primer cuadrante es la que tiene su argumento en $(0, \pi/2)$, es decir, w_1. Para girarla, respecto del origen, un ángulo $5\pi/8$ en sentido positivo, basta con multiplicarla por $e^{\frac{5\pi}{8}i}$, es decir, obtenemos:

$$\begin{aligned} u = e^{\frac{5\pi}{8}i} w_1 &= e^{\frac{5\pi}{8}i}\sqrt[4]{2}\, e^{\frac{\pi}{8}i} = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{6\pi}{8}i} = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{3\pi}{4}i} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}} + i\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right). \end{aligned}$$

5. Ejercicios

Ejercicio 1. Efectuar las siguientes operaciones:

$$\frac{1+i}{1-i}, \quad \frac{(2-i)^2}{(-3i)^3}, \quad (3+2i)(2-i) + \frac{2-3i}{4-i}, \quad \frac{1}{i + \frac{1}{i + \frac{1}{i+1}}} - 1.$$

Ejercicio 2. Hallar b y c tales que $(9+bi)(c+3i) = 3+29i$.

Ejercicio 3. Escribir en forma polar los siguientes números complejos dados en la forma $a+bi$:

$$z_1 = 1+i, \quad z_2 = 1-i, \quad z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_4 = -i, \quad z_5 = -2, \quad z_6 = 3.$$

Ejercicio 4. Escribir en la forma $a+bi$ los siguientes números complejos, evaluando las correspondientes razones trigonométricas:

$$w_1 = \cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}, \quad w_2 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{11\pi}{3}\right), \quad w_3 = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}, \qquad w_4 = 3e^{i\pi}, \quad w_5 = e^{i\pi/2}.$$

Ejercicio 5. Dados los números complejos $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1-i$, $z_3 = 3+4i$ efectuar las siguientes operaciones:

$$5z_1 + 2z_2 - z_3,\ z_1^5,\ z_1\frac{z_2}{z_3},\ \frac{z_1 z_3}{z_2},\ |2z_1 - 3z_3|,\ \left|\frac{z_1 z_3}{z_2}\right|,\ \frac{z_1^n}{z_2^{n-2}}\ (n \in \mathbb{N}).$$

Ejercicio 6. Si $z_1 = 2+i$ y $z_2 = 3-2i$ calcular $\quad |3z_1 - 4z_2|, \quad |\overline{z_1}|^4, \quad \left(\frac{\overline{z_1}}{z_2+i}\right)^2, \quad \left|\frac{(4+3i)^4}{(7+i)^3}\right|$.

Ejercicio 7. Siendo $w_1 = 3(\cos(\pi/3) + i \operatorname{sen}(\pi/3))$ y $w_2 = \cos(\pi/4) + i \operatorname{sen}(\pi/4)$, calcular $|w_1 w_2|$, y $\left|\frac{w_1^4}{w_2^7}\right|$.

Ejercicio 8. Utilizando la fórmula de De Moivre, expresar $\operatorname{sen}(2\theta)$, $\cos(2\theta)$, $\operatorname{sen}(3\theta)$ y $\cos(3\theta)$ en función de $\operatorname{sen}(\theta)$ y $\cos(\theta)$.

Ejercicio 9. Calcular $\quad \sqrt[3]{-8i}, \quad \sqrt[5]{1}, \quad \sqrt[2]{3+4i}, \quad \sqrt[3]{-27}$.

Ejercicio 10. Uno de los vértices de un hexágono regular inscrito en una circunferencia con centro en el origen de coordenadas, tiene por coordenadas $V_1\,(1,1)$. Hallar las coordenadas de los otros cinco vértices.

Ejercicio 11. Dados los números complejos $z_1 = -2$, $z_2 = -2i$, $z_3 = 3-3i$, y $z_4 = -2+2\sqrt{3}i$:

1. Representarlos geométricamente y escribirlos en forma polar y exponencial.
2. Calcular y representar geométricamente: $z_1 + z_3$, $z_2 z_3$, $z_3 z_4$, $\frac{z_3}{z_4}$, z_3^{27}, z_4^{200}.
3. Calcular y representar geométricamente: $\sqrt[3]{z_1}$, $\sqrt[5]{z_3}$, $\sqrt[4]{z_4}$, $\sqrt[4]{z_1^2}$, $\left(\sqrt[4]{z_1}\right)^2$.

Ejercicio 12. Resolver las siguientes ecuaciones en $\mathbb{C}$ y factorizar el polinomio del primer miembro:

$$z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0, \quad z^2 - 2z + 2 = 0.$$

Ejercicio 13. Resolver las siguientes ecuaciones polinómicas y factorizar los polinomios correspondientes:

$$z^6 - 2z^3 + 2 = 0, \quad (-6 - z)^4 - 81 = 0, \quad z^2 + (i-1)z - i = 0, \quad z^8 - z^2 = 0.$$

Ejercicio 14. Expresa mediante operaciones con números complejos las siguientes transformaciones del plano:

1. Proyección ortogonal sobre el eje OY.
2. Giro con centro en el punto $(1,1)$ y ángulo $\frac{\pi}{3}$ rad (en sentido positivo).
3. Homotecia con centro en $(1,2)$ y razón 3.
4. Simetría respecto de la recta que pasa por los puntos $(1,1)$ y $(4,4)$.
5. Giro con centro en el punto $(0,1)$ que transforma el punto $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ en el punto $(0,2)$.
6. Proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$.

Ejercicio 15. **(a)** Encontrar las raíces cuartas del número $z = -8 - 8\sqrt{3}\,i$. Expresarlas en la forma $a + bi$ y representarlas en el plano complejo.

(b) Obtener, en la forma $a + bi$, el transformado del número $z = 3 + 2i$ mediante un giro con centro $1 - i$ y ángulo $\frac{\pi}{4}$.

Tema 4.- Sistemas de Ecuaciones Lineales.

1. Sistemas de ecuaciones lineales. Notación matricial.
2. Reducción por filas y formas escalonadas.
3. Vectores en $\mathbb{R}^n$: Combinaciones lineales.
4. El conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales.
5. Dependencia e independencia lineal.
6. Transformaciones lineales: matriz asociada, ejemplos geométricos en el plano y en el espacio.
7. Ejercicios.

A lo largo de todo este tema, en el que analizaremos la resolución de un sistema de ecuaciones lineales, consideraremos y nos referiremos a coeficientes reales aunque todos los enunciados y conceptos son válidos cuando se consideran coeficientes complejos. Por otra parte, y aunque en el tema siguiente estudiemos el álgebra de matrices, a lo largo de este tema haremos uso de las matrices y las operaciones definidas sobre ellas (suma y producto de matrices, multiplicación de un número por una matriz, multiplicación de una matriz por un vector) así como de las propiedades de dichas operaciones. Aunque nuestro punto de partida sea la manipulación elemental de sistemas de ecuaciones lineales con un número arbitrario de ecuaciones y de incógnitas, es **prerrequisito** para este tema (y los siguientes) el conocimiento básico sobre sistemas de ecuaciones lineales en dimensión pequeña (**sistemas con pocas ecuaciones y pocas incógnitas**):

- qué es y qué no es un sistema de ecuaciones lineales,
- qué es y qué no es una solución de un sistema de ecuaciones lineales,
- la resolución y discusión de un sistema de ecuaciones lineales con pocas incógnitas,
- los conceptos asociados a dicha resolución y discusión (compatibilidad e incompatibilidad, número de soluciones, rango de una matriz, determinante de una matriz cuadrada, regla de Cramer, ...).

así como la relación con la geometría analítica y vectorial del plano y del espacio tridimensional: vectores, combinaciones lineales, rectas y planos dados por distintos tipos de ecuaciones (vectoriales, paramétricas, implícitas),...

1. Sistemas de ecuaciones lineales. Notación matricial.

Consideraremos sistemas de $m = 1, 2, \ldots$ ecuaciones lineales con $n = 1, 2, \ldots$ incógnitas que denotaremos por $x_1, x_2, \ldots, x_n$, es decir sistemas de ecuaciones de la forma

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}.$$

Si los coeficientes de las incógnitas $a_{ij},\ i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n$, y los términos independientes $b_i,\ i = 1, \ldots, m$, son números reales, estudiaremos las soluciones reales del sistema. Si alguno de los coeficientes de las incógnitas o de los términos independientes fuera un número complejo (con parte imaginaria no nula) habría que estudiar las soluciones complejas de dicho sistema.

Asociadas al sistema dado, consideraremos la **matriz** $A = [a_{ij}]$ de los coeficientes de las incógnitas y la **matriz ampliada** $[A|b]$ de los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes, de forma que el sistema de ecuaciones lineales dado se expresa en forma matricial mediante $Ax = b$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad [A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Cada fila de la matriz $[A|b]$ está formada por los coeficientes de la correspondiente ecuación del sistema, cada una de las n primeras columnas está formada por los coeficientes de una de las incógnitas y la última columna está formada por los términos independientes de las ecuaciones del sistema. Salvo que se indique lo contrario consideraremos y manipularemos los vectores de coordenadas como vectores columna, indicando un vector-fila como el transpuesto de un vector columna. Sobre los vectores con un número finito de coordenadas consideraremos las operaciones, usuales para 2 y 3 coordenadas, de suma de vectores (suma coordenada a coordenada) y multiplicación de un número por un vector, además de la multiplicación matriz-vector. Salvo en la última sección, en la que consideraremos algunos ejemplos geométricos en el plano y el espacio, no consideraremos en este tema el producto escalar de vectores reales ni los conceptos asociados (norma, ortogonalidad,...).

2. Reducción por filas y formas escalonadas.

La herramienta básica para resolver (y estudiar) un sistema de ecuaciones lineales es el bien conocido **método** de eliminación o reducción de **Gauss** que, desde el punto de vista matricial, consiste en la **reducción (por filas)** de la matriz ampliada del sistema a **forma escalonada superior/por filas** mediante operaciones sobre las filas de la matriz ampliada (equivalentemente, sobre las ecuaciones del sistema) que no afectan a las posibles soluciones del sistema. Una vez obtenida dicha forma escalonada superior las soluciones del sistema resultante se obtienen mediante **sustitución regresiva**.

Se dice que una matriz es **escalonada por filas** si

- todos los elementos que están por debajo del primer elemento no nulo de cada fila son nulos,
- el primer elemento no nulo de cada fila está a la derecha del primer elemento no nulo de la fila anterior y
- las filas nulas (si las hay) están por debajo de las filas no nulas.

La definición análoga se aplica a un sistema de ecuaciones (escrito en forma desarrollada).

Ejemplo. La forma elemental de resolver un sistema de ecuaciones lineales como por ejemplo

$$\left.\begin{array}{rrrrrcr} E_1: & & 2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 2 \\ E_2: & x_1 & -x_2 & +x_3 & +3x_4 & = & -2 \\ E_3: & -2x_1 & +3x_2 & -x_3 & -2x_4 & = & 0 \end{array}\right\}$$

consiste en ir reduciendo el problema de obtener soluciones del sistema dado al de obtener soluciones de sistemas con cada vez menos ecuaciones y menos incógnitas, de forma que si resolvemos el último sistema de ecuaciones podamos obtener las soluciones del sistema original.

Reducción a forma escalonada del sistema: Volviendo a renombrar en cada paso cada una de las ecuaciones, para resolver el sistema anterior podemos hacer las siguientes operaciones sobre las ecuaciones del sistema dado

$$\left.\begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} \text{Intercambio} \\ \longrightarrow \\ E_1 \leftrightarrow E_2 \end{array} \left\{\begin{array}{rrrrrcr} E_1: & x_1 & -x_2 & +x_3 & +3x_4 & = & -2 \\ E_2: & & 2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 2 \\ E_3: & -2x_1 & +3x_2 & -x_3 & -2x_4 & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{c} E_3 \leftarrow E_3 + 2E_1 \\ \longrightarrow \end{array} \left\{\begin{array}{rrrrrcr} E_1: & x_1 & -x_2 & +x_3 & +3x_4 & = & -2 \\ E_2: & & 2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 2 \\ E_3: & & x_2 & +x_3 & +4x_4 & = & -4 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{c} E_3 \leftarrow E_3 - \frac{1}{2}E_2 \\ \longrightarrow \end{array} \left\{\begin{array}{rrrrrcr} E_1: & x_1 & -x_2 & +x_3 & +3x_4 & = & -2 \\ E_2: & & 2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 2 \\ E_3: & & & (3/2)x_3 & +(7/2)x_4 & = & -5 \end{array}\right\}$$

Del sistema obtenido al final podemos obtener varias consecuencias:

Sustitución regresiva: si damos a x_4 un valor arbitrario $x_4 = \alpha \in \mathbb{R}$, puesto que el coeficiente de x_3 en la ecuación E_3 es distinto de cero, podemos despejar x_3 en función de x_4,

$$x_3 = \frac{2}{3}\left(-5 - \frac{7}{2}\alpha\right) = -\frac{10}{3} - \frac{7}{3}\alpha,$$

de la ecuación E_2 podemos despejar x_2 en función de x_3 y x_4, y por tanto en función de x_4,

$$x_2 = \frac{1}{2}(2 + x_3 - x_4) = 1 - \frac{5}{3} - \frac{7}{6}\alpha - \frac{1}{2}\alpha = -\frac{2}{3} - \frac{5}{3}\alpha,$$

y de la ecuación E_1 podemos despejar x_1, en función de x_2, x_3 y x_4 y por tanto en función de x_4,

$$x_1 = -2 + x_2 - x_3 - 3x_4 = \frac{2}{3} - \frac{7}{3}\alpha.$$

Resumiendo, las soluciones del sistema dado son los vectores de la forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} - \frac{7}{3}\alpha \\ -\frac{2}{3} - \frac{5}{3}\alpha \\ -\frac{10}{3} - \frac{7}{3}\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{10}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{7}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Además de las soluciones del sistema, el proceso anterior permite obtener:

- las soluciones del sistema homogéneo asociado al dado que son

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3}\alpha \\ \\ -\frac{5}{3}\alpha \\ \\ -\frac{7}{3}\alpha \\ \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} \\ \\ -\frac{5}{3} \\ \\ -\frac{7}{3} \\ \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- ¿Para qué otros términos independientes tendría solución el sistema (con los mismos coeficientes de las incógnitas)? Siempre.
- ¿Cuantas soluciones tendría el sistema con otros términos independientes? Sea quién sea el término independiente tendríamos un sistema compatible indeterminado.
- ¿Qué puede suceder si al sistema original le añadimos o le quitamos una ecuación?

Ejercicio.- Trasladar las operaciones hechas sobre las ecuaciones del sistema anterior a operaciones-fila sobre la matriz ampliada del sistema.

Las tres operaciones elementales que hemos considerado, sobre las ecuaciones de un sistema de ecuaciones lineales,

- Intercambio de ecuaciones;
- Multiplicación de una ecuación por un número distinto de cero;
- Sumar a una ecuación un múltiplo (arbitrario) de otra (distinta);

no afectan a las (posibles) soluciones del sistema: Cualquier solución del sistema original lo es del que se obtiene y viceversa. Estas operaciones elementales, sobre las ecuaciones de un sistema, se corresponden con manipulaciones de las filas de la matriz ampliada del sistema, puesto que afectan exclusivamente a los coeficientes de las ecuaciones que intervienen y no a las incógnitas.

Definición. Llamaremos **operaciones elementales por filas** sobre una matriz a las operaciones:

(a) Intercambiar filas.

(b) Multiplicar una fila por un número distinto de cero.

(c) Sumar a una fila un múltiplo de otra (distinta).

Una propiedad importante de las operaciones elementales es que son reversibles, es decir, si al hacer una determinada operación elemental sobre una matriz M se obtiene la matriz N, entonces podemos recuperar la matriz M original haciendo una operación elemental (que además es del mismo tipo) sobre la matriz N.

Teorema. Toda matriz A puede ser reducida a forma escalonada por filas mediante operaciones elementales por filas.

Algoritmo de Gauss: Supongamos que A no es la matriz nula,

(1) Si la primera columna de A tiene algún elemento no nulo, seleccionamos uno de dichos elementos y mediante intercambio de filas lo llevamos a la posición $(1, 1)$. En caso contrario, pasamos a la siguiente columna.

(2) **Pivotamos** hacia abajo con el elemento no nulo seleccionado, llamado **pivote**, es decir, a cada una de las filas siguientes le restamos un múltiplo de la fila del pivote de forma que se anule el correspondiente elemento en la columna del pivote.

(3) Se repite el proceso con la matriz que queda al eleminar la fila y columna del pivote, es decir, pasamos a la siguiente columna y buscamos un pivote (elemento no nulo) en una fila posterior a la del pivote utilizado en el paso (2).

(4) El proceso se termina cuando, o bien no quedan columnas en las que obtener el siguiente pivote, o bien dichas columnas están formadas por ceros.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{fila}]{\text{operaciones}} U = \begin{bmatrix} \boxed{*} & * & * & * & \cdots & * & * & * \\ 0 & \boxed{*} & * & * & \cdots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{*} & \cdots & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \boxed{*} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{*} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observaciones.

(1) El algoritmo que acabamos de describir:

- buscar pivotes por columnas (de izquierda a derecha),
- intercambiar filas si es necesario,
- pivotar hacia abajo para hacer ceros por debajo del pivote,

no determina de forma única la **forma escalonada** superior por filas que se obtiene, sino que ésta depende de las operaciones fila que se hagan, es decir de la elección de pivote que se haga en cada columna donde sea posible.

(2) Si la matriz A es $m \times n$, el número r de pivotes que aparecen es menor o igual que m puesto que una fila tiene a lo sumo un pivote y menor o igual que n puesto que en una columna hay a lo sumo un pivote.

(3) **Forma escalonada reducida** (por filas). En cada una de las columnas donde se haya obtenido un pivote, de la misma forma que se pivota hacia abajo para anular los elementos por debajo del pivote, podemos **pivotar hacia arriba** para anular los elementos que están por encima. Por otra parte, cada fila donde aparezca un pivote podemos dividirla por dicho pivote y de esta forma tener un 1 en cada posición pivote. En la situación esquematizada antes pasaríamos a tener

$$U \xrightarrow[\text{fila}]{\text{operaciones}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & * & 0 & \cdots & 0 & 0 & * \\ 0 & \boxed{1} & * & 0 & \cdots & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \cdots & 0 & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \boxed{1} & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(4) Puede demostrarse que cualquier matriz A es equivalente, por filas, a una única matriz escalonada reducida por filas. Es decir, si mediante operaciones elementales (por filas) sobre la matriz A obtenemos una matriz U que está en forma escalonada reducida, al hacer otra serie de operaciones elementales para obtener una forma escalonada reducida obtendremos la misma matriz U aunque las operaciones intermedias sean distintas.

Para estudiar y resolver un sistema de ecuaciones $Ax = b$, basta con reducir (mediante operaciones por fila) la matriz ampliada del sistema $[A|b]$ a forma escalonada por filas.

En el resultado de dicha reducción tendremos un cierto número de pivotes en las primeras n columnas (la parte correspondiente a la matriz A) y la columna de los términos independientes podrá ser columna pivote o no.

La compatibilidad del sistema dependerá de que la columna de los términos independientes sea o no sea una columna pivote. Si dicha columna es una columna pivote aparecerá alguna fila de la (forma escalonada de la) matriz ampliada del tipo

$$\left[\, 0\, 0 \cdots 0 \mid \boxed{*} \neq 0 \,\right]$$

en cuyo caso el sistema no tendrá solución por no existir solución de la ecuación asociada a la fila dada. En caso contrario, cada fila de la matriz ampliada donde aparezca un pivote lo tendrá en la parte correspondiente a la matriz A y el sistema tendrá solución.

La determinación o indeterminación del sistema dependerá, suponiendo que el sistema es compatible, de que haya o no haya variables/incógnitas **libres**, es decir de que (en la matriz A) haya o no haya columnas que no sean columnas pivote.

Teorema. Si al reducir un sistema $m \times n$ de ecuaciones lineales $Ax = b$ a forma escalonada por filas obtenemos r pivotes en la matriz A, se verifica:

(1) $r \leq \min\{m, n\}$.

(2) El sistema es compatible $\Longleftrightarrow$ la columna del término independiente b NO es una columna pivote.

(3) Si $r = n$ el sistema puede ser

(a) compatible determinado o

(b) incompatible.

(4) Si $r = m$ el sistema es compatible y puede ser

(a) compatible determinado si $r = n$

(b) compatible indeterminado si $r < n$.

(5) Si $r = m = n$ el sistema $Ax = b$ es compatible determinado para cualquier $b \in \mathbb{R}^m$.

3. Vectores en $\mathbb{R}^n$: Combinaciones lineales.

La igualdad $Ax = b$ puede considerarse mediante la igualdad entre el vector columna b de los términos independientes y una suma de múltiplos de las columnas de A,

$$Ax = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Las sumas de múltiplos de unos vectores dados reciben el nombre de combinaciones lineales de dichos vectores.

Definición. Dados $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$, se llama combinación lineal de dichos vectores a todo vector de la forma

$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n,$$

con $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

Notemos que determinar si un cierto vector $v \in \mathbb{R}^m$ es o no combinación lineal de otros vectores $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ es lo mismo que determinar si un sistema de ecuaciones lineales tiene solución,

$$c_1 \begin{bmatrix} \vdots \\ v_1 \\ \vdots \end{bmatrix} + \cdots + c_n \begin{bmatrix} \vdots \\ v_n \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ v \\ \vdots \end{bmatrix},$$

en cuyo caso cada una de las posibles soluciones nos dará una forma de expresar v como combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n$.

Definición. Dado un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ en $\mathbb{R}^p$, se llama subespacio (vectorial) generado por dichos vectores al conjunto de todas las combinaciones lineales de dichos vectores,

$$\text{Gen}\,\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n : \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}.$$

Propiedades.

(1) Gen $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \supseteq$ Gen $\{v_2, \ldots, v_n\}$.

(2) Gen $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} =$ Gen $\{cv_1, v_2, \ldots, v_n\}$ si $c \neq 0$.

(3) Gen $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} =$ Gen $\{v_1 + \alpha v_2, v_2, \ldots, v_n\}$.

(4) El subespacio generado por un conjunto de vectores no cambia al añadir combinaciones lineales de dichos vectores o quitar vectores que sean combinación lineal de los restantes.

Teorema. Sea A una matriz (real) $m \times n$. Son equivalentes:

(a) $Ax = b$ tiene solución para cualquier $b \in \mathbb{R}^m$.

(b) Las columnas de A generan todo $\mathbb{R}^m$.

(c) A tiene un pivote en cada fila.

En dicho caso, tiene que ser $m \leq n$.

4. El conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales.

El conjunto de soluciones (lo que suele llamarse la **solución general** o conjunto-solución) de un sistema $Ax = b$ de m ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$$

tiene una estructura muy definida que es reflejo de la linealidad de las ecuaciones. Esta estructura puede expresarse mediante la relación entre el conjunto-solución de un sistema $Ax = b$ completo (no homogéneo) y el conjunto solución del sistema homogéneo asociado $Ax = 0$. La estructura citada se basa en las propiedades del producto matriz$\times$vector. Siendo A una matriz $m \times n$, u y v vectores-columna de m coordenadas y $c \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$A(u+v) = Au + Av, \qquad A(cu) = cAu.$$

4.1.- El conjunto solución de un sistema homogéneo.

Un sistema homogéneo (de m ecuaciones lineales con n incógnitas) $Ax = 0$ siempre tiene solución puesto que el vector nulo $0 \in \mathbb{R}^n$ verifica $A0 = 0 \in \mathbb{R}^m$. Esta solución se denomina **solución trivial** o nula. La cuestión para un sistema homogéneo es si tiene soluciones no triviales y cómo describirlas.

Teorema.- Consideremos un sistema homogéneo $Ax = 0$.

(a) $Ax = 0$ tiene alguna solución no trivial si, y sólo si, tiene alguna variable libre.

(b) Cualquier combinación lineal de soluciones de $Ax = 0$ es solución de $Ax = 0$.

- **(b1)** La suma de soluciones de $Ax = 0$ es otra solución de $Ax = 0$.
- **(b2)** Cualquier múltiplo de una solución de $Ax = 0$ es otra solución de $Ax = 0$.

Si al resolver un sistema homogéneo, por ejemplo con 5 incógnitas, obtenemos 2 variables libres, por ejemplo x_3 y x_5; asociada a cada una de las variables libres tenemos una solución y el conjunto solución del sistema homogéneo será el conjunto de todas las combinaciones lineales de las dos soluciones citadas.

Ejemplo. Supongamos que al reducir a forma escalonada un sistema homogéneo de 4 ecuaciones con 5 incógnitas obtenemos, en forma matricial,

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{2} & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Es decir tenemos 3 pivotes y 2 variables libres x_3 y x_5. Asociada a cada una de las variables libres tenemos una solución:

- solución que se obtiene para $x_3 = 1, x_5 = 0$. Sustituyendo en el sistema

$$\left[\begin{array}{cccccc} 2x_1 & -x_2 & +3 & +x_4 & = & 0 \\ 0 & -x_2 & +1 & -2x_4 & = & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3x_4 & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x_4 = 0 \\ x_2 = 1 \\ 2x_1 = x_2 - 3 - x_4 = -2 \end{array}\right] \Longrightarrow u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ \mathbf{1} \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

- solución que se obtiene para $x_3 = 0, x_5 = 1$. Sustituyendo en el sistema

$$\left[\begin{array}{cccccc} 2x_1 & -x_2 & +x_4 & +1 & = & 0 \\ 0 & -x_2 & -2x_4 & & = & 0 \\ & & 3x_4 & +4 & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x_3 = 0, \\ x_5 = 1, \\ x_4 = -\frac{4}{3}, \\ x_2 = -2x_4 = \frac{8}{3}, \\ 2x_1 = x_2 - x_4 - 1 = 3 \end{array}\right] \Longrightarrow u_2 = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 8/3 \\ \mathbf{0} \\ -4/3 \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

Cualquier combinación lineal de u_1 y u_2

$$\alpha u_1 + \beta u_2, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

es solución del sistema homogéneo dado y cualquier solución del sistema homogéneo se puede expresar como combinación lineal de u_1 y u_2. Para comprobar esto basta con despejar, en el sistema escalonado obtenido, las variables fijas x_1, x_2 y x_4 en función de las variables libres x_3 y x_5, a partir de

$$\left[\begin{array}{cccccc} 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 0 \\ 0 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & & = & 0 \\ & & & 3x_4 & +4x_5 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc} 2x_1 & -x_2 & +x_4 & = & -3x_3 - x_5 \\ 0 & -x_2 & -x_4 & = & -x_3 \\ & & 3x_4 & = & -4x_5 \end{array}\right].$$

Notemos que para cada valor que demos a x_3 y a x_5 el sistema anterior tiene una única solución (x_1, x_2, x_4),

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_4 & = & -\frac{4}{3}x_5, \\ x_2 & = & x_3 - 2x_4 = x_3 + \frac{8}{3}x_5, \\ x_1 & = & \frac{1}{2}(x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5) = \frac{1}{2}\big(x_3 + \frac{8}{3}x_5 - 3x_3 + \frac{4}{3}x_5 - x_5\big) \\ & = & \frac{1}{2}(-2x_3 + 3x_5) = -x_3 + \frac{3}{2}x_5, \end{array}\right.$$

y, por tanto, las soluciones $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ del sistema dado las podemos expresar en función de x_3 y x_5 mediante

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 + \frac{3}{2}x_5 \\ x_3 + \frac{8}{3}x_5 \\ x_3 \\ -\frac{4}{3}x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{8}{3} \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix},$$

es decir, como combinación lineal de u_1 y u_2. Dicho de otra forma, el conjunto solución del sistema dado es igual al subespacio generado por $\{u_1, u_2\}$.

Por otra parte, la estructura del conjunto solución de un sistema homogéneo $Ax = 0$ puede resumirse con el siguiente resultado:

Teorema. Si al reducir A a forma escalonada se obtienen r pivotes (o lo que es lo mismo $n - r$ variables libres), pueden obtenerse $n - r$ soluciones $u_1, \ldots, u_{n-r}$ tales que la solución general de $Ax = 0$ es

$$\{x = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{n-r} u_{n-r} \in \mathbb{R}^n : \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r} \in \mathbb{R}\}.$$

4.2.- El conjunto solución de un sistema no homogéneo.

Notemos que si consideramos un sistema de ecuaciones $Ax = b$ y el sistema homogéneo asociado $Ax = 0$, se verifica que:

(a) Al restar dos soluciones de $Ax = b$ se obtiene una solución del sistema homogéneo $Ax = 0$,

$$\left.\begin{array}{l} Av_1 = b \\ Av_2 = b \end{array}\right\} \Longrightarrow A(v_1 - v_2) = 0.$$

(b) Al sumar una solución del sistema completo $Ax = b$ y una solución del sistema homogéneo $Ax = 0$ se obtiene otra solución del sistema completo,

$$\left.\begin{array}{l} Av = b \\ Au = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow A(v + u) = b.$$

Ejemplo. Consideremos un sistema no homogéneo con la matriz A de los coeficientes de las incógnitas dada en el ejemplo anterior, por ejemplo, el sistema asociado a la matriz ampliada

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{2} & -1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Teniendo en cuenta cuáles son las variables fijas y las variables libres, podemos resolver el sistema anterior despejando (x_1, x_2, x_4) en función de (x_3, x_5) mediante sustitución regresiva:

$$\begin{cases} x_4 &= \frac{1}{3}(3-4x_5) = 1 - \frac{4}{3}x_5, \\ x_2 &= 1 + x_3 - 2x_4 = 1 + x_3 - \frac{2}{3}(3-4x_5) = -1 + x_3 + \frac{8}{3}x_5, \\ x_1 &= \frac{1}{2}(2 + x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5) = \frac{1}{2}\big(2 - 1 + x_3 + \frac{8}{3}x_5 - 3x_3 - 1 + \frac{4}{3}x_5 - x_5\big) = \\ &= \frac{1}{2}(-2x_3 + 3x_5) = -x_3 + \frac{3}{2}x_5. \end{cases}$$

Por tanto las soluciones del sistema completo son de la forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 + \frac{3}{2}x_5 \\ -1 + x_3 + \frac{8}{3}x_5 \\ x_3 \\ 1 - \frac{4}{3}x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{8}{3} \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix},$$

es decir, están expresadas como la suma de un cierto vector más todas las soluciones del sistema homogéneo asociado $Ax = 0$.

La relación entre el conjunto solución de un sistema completo y el del sistema homogéneo asociado está recogida en el siguiente resultado:

Teorema. Sea A una matriz $m \times n$ y b un vector $m \times 1$. Se verifica que

$$\begin{bmatrix} \text{solución general} \\ \text{del sistema completo} \\ Ax = b \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \text{solución particular} \\ \text{del sistema completo} \\ Ax = b \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \text{solución general} \\ \text{del sistema homogéneo} \\ \text{asociado } Ax = 0 \end{bmatrix}.$$

Es decir: si tenemos una solución particular v_p del sistema $Ax = b$, se verifica que

a) Cualquier otra solución v del sistema $Ax = b$ se puede expresar como v_p+ una solución $(v - v_p)$ del sistema homogéneo asociado.

b) Al sumar v_p con una solución del sistema homogéneo se obtiene una solución del sistema completo.

Observación. Desde un punto de vista geométrico:

- Si el conjunto solución de $Ax = 0$ es un punto (que necesariamente será $x = 0$), el conjunto solución de un sistema completo $Ax = b$ podrá ser o bien un punto (el origen desplazado según el vector v_p) o bien el conjunto vacío (el sistema $Ax = b$ no tiene solución).
- Si el conjunto solución de $Ax = 0$ es una recta (que necesariamente pasará por el origen de coordenadas), el conjunto solución de un sistema completo $Ax = b$ podrá ser, o bien una recta paralela a la anterior (la recta anterior desplazada según el vector v_p), o bien el conjunto vacío (el sistema $Ax = b$ no tiene solución).
- Si el conjunto solución de $Ax = 0$ es un plano (que necesariamente pasará por el origen de coordenadas), el conjunto solución de un sistema completo $Ax = b$ podrá ser o bien una plano paralelo al anterior (el plano anterior desplazado según el vector v_p) o bien el conjunto vacío (el sistema $Ax = b$ no tiene solución).

Ejercicio. Poner un ejemplo para cada una de las situaciones descritas anteriormente.

Ejercicio. Dado un sistema $Ax = b$ de 4 ecuaciones con 3 incógnitas, determina la solución general del sistema dado sabiendo que 2 de sus soluciones son

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

y que al reducir A a forma escalonada se obtienen 2 pivotes.

5. Dependencia e independencia lineal.

De forma similar a como el concepto de compatibilidad de un sistema está relacionado con el concepto de combinación lineal de vectores, el número de soluciones de un sistema está relacionado con el concepto de dependencia/independencia lineal.

Definición. Consideremos un conjunto finito de vectores

$$\{v_1, \ldots, v_n\} \qquad \text{en } \mathbb{R}^m.$$

(a) Se dice que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es **linealmente dependiente** (L.D.) si existe alguna combinación lineal no trivial de dichos vectores igual al vector nulo, es decir, existen coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ **no todos nulos** tales que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0.$$

(b) Se dice que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es **linealmente independiente** (L.I.) si no es linealmente dependiente.

Propiedades. Consideremos un conjunto finito de vectores

$$\{v_1, \ldots, v_n\} \qquad \text{en } \mathbb{R}^m.$$

(a) La dependencia o independencia lineal de $\{v_1, \ldots, v_n\}$ no depende del orden en el que estén dados los vectores.

(b) Siendo $c \neq 0$ ($c \in \mathbb{R}$),

$$\begin{array}{c} \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ es L.D.} \Leftrightarrow \{u_1 = cv_1, v_2, \ldots, v_n\} \text{ es L.D.} \\ \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ es L.I.} \Leftrightarrow \{u_1 = cv_1, v_2, \ldots, v_n\} \text{ es L.I.} \end{array}$$

(c) El conjunto $\{0, v_1, \ldots, v_n\}$ es L.D.

(d) Siendo $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{c} \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ es L.D.} \Leftrightarrow \{v_1, u_2 = v_2 + \alpha v_1, \ldots, v_n\} \text{ es L.D.} \\ \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ es L.I.} \Leftrightarrow \{v_1, u_2 = v_2 + \alpha v_1, \ldots, v_n\} \text{ es L.I.} \end{array}$$

(e)

- Al añadir vectores a un conjunto L.D. se obtiene un conjunto L.D.
- Al suprimir vectores de un conjunto L.I. se obtiene un conjunto L.I.

Teorema. Consideremos vectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ en $\mathbb{R}^m$ y consideremos la matriz A cuyas columnas son las coordenadas de los vectores dados

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{array}\right].$$

Son equivalentes:

(1) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ son linealmente **dependientes**.

(2) El sistema de ecuaciones $Ax = 0$ tiene infinitas soluciones.

(3) Al reducir A a forma escalonada se obtienen r pivotes, $r < n$.

(4) Alguno de los vectores v_k es combinación lineal de los restantes.

(5) Si el primer vector v_1 es no-nulo, alguno de los vectores es combinación lineal de los anteriores.

Observación. Interpretación de la reducción por filas de una matriz A en relación con la dependencia o independencia lineal de los vectores-columna de la matriz A.

Recordemos que dar una combinación lineal de unos ciertos vectores es lo mismo que multiplicar la matriz cuyas columnas son dichos vectores por el vector columna formado por los correspondientes coeficientes

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_1 & v_2 & \ddots & v_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right].$$

Si al reducir A a forma escalonada obtenemos U

$$A = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_1 & v_2 & \ddots & v_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{fila}]{\text{operaciones}} U = \begin{bmatrix} \boxed{*} & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & \boxed{*} & * & \cdots & * & * \\ & 0 & 0 & * & & \\ & & & \boxed{*} & & \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

cada columna de la matriz U en la que no hay pivote es combinación lineal de las anteriores columnas de U. Por tanto, esto mismo es cierto para las correspondientes columnas de A. Por otra parte, cada columna de U en la que aparece un pivote es linealmente independiente con las anteriores columnas de U y lo mismo es cierto para las correspondientes columnas de A. Es decir, en la situación del esquema anterior, se verifica que

- la columna 3 de U es combinación lineal de las columnas 1 y 2 (y lo mismo es cierto para las correspondientes columnas de A),
- las columnas $\{\text{columna1}, \text{columna2}, \text{columna4}\}$ de U son linealmente independientes (y lo mismo es cierto para las correspondientes columnas de A).

Definición. Sea A una matriz real $m \times n$,

(1) Se denomina espacio nulo de A al conjunto-solución del sistema homogéneo $Ax = 0$,

$$\text{Nul}\,(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}\,.$$

(2) Se denomina espacio columna de A al conjunto formado por todas las combinaciones lineales de las colmunas de A, es decir, siendo $v_1, v_2, \ldots, v_n$ los n vectores-columna de A

$$\text{Col}\,(A) = \text{Gen}\,\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n : \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}\,.$$

Puesto que cualquier combinación lineal de los vectores columna de A es un vector de la forma Ax, siendo $x \in \mathbb{R}^n$ el vector columna de los coeficientes de la combinación lineal, tenemos que

$$\text{Col}\,(A) = \{y \in \mathbb{R}^m : \exists x \in \mathbb{R}^n, y = Ax\} = \{y \in \mathbb{R}^m : Ax = y \text{ es un S.C.}\}\,.$$

Ejercicio. ¿Qué relación hay entre el espacio columna de una matriz y el de la matriz que se obtiene al hacer operaciones elementales columna sobre la matriz?

Observaciones.

(a) Cuando se describe un conjunto de vectores, de un cierto espacio de coordenadas $\mathbb{R}^n$ como el espacio nulo de una matriz A o el espacio columna de otra matriz B, dicho conjunto de vectores debe tener una cierta estructura que es la de ser un **subespacio vectorial**, es decir un conjunto (no vacío) de vectores S tal que

$$\alpha u + \beta v \in S,\ \forall \left\{ \begin{array}{l} \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ u, v \in S \end{array} \right.$$

El estudio de los subespacios vectoriales lo haremos con más detalle en el Tema 6.

(b) Describir un subespacio vectorial como el **espacio nulo** de una matriz es dar **unas ecuaciones implícitas** de dicho subespacio. De dichas ecuaciones implícitas se podrán suprimir las que sean redundantes, es decir las ecuaciones que sean combinación lineal de las restantes. Dichas ecuaciones las podemos localizar sin más que reducir a forma escalonada por filas la matriz dada. Las filas (tanto de la matriz original como de la matriz final) que contengan algún pivote nos darán unas ecuaciones implícitas, no redundantes, de dicho subespacio. Si resolvemos el sistema tendremos una descripción paramétrica del conjunto solución, es decir, del subespacio dado.

(c) Describir un subespacio como el **espacio columna** de una matriz es dar **unas ecuaciones paramétricas** de dicho subespacio. Es posible que, para describir dicho subespacio, no sea imprescindible considerar todos los vectores columna de la matriz porque alguno de ellos sea combinación lineal de los restantes. Si en la descripción paramétrica eliminamos los parámetros, llegaremos a unas ecuaciones homogéneas que darán una descripción implícita del subespacio considerado.

Ejemplo. Consideremos la matriz

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 1\\ -2 & 2 & 2 & 5 & 0\\ 1 & -4 & 0 & -3 & 3\\ -1 & 2 & 1 & 3 & -1\end{bmatrix}.$$

Con el mismo proceso de reducción a forma escalonada vamos a obtener: $S_1=\mathrm{Nul}\,(A)\subset\mathbb{R}^5$, unas ecuaciones paramétricas de S_1, $S_2=\mathrm{Col}\,(A)\subset\mathbb{R}^4$, unas ecuaciones implícitas de S_2, ...

Reducimos a forma escalonada un sistema de ecuaciones $Ax=y$ siendo y un vector genérico de $\mathbb{R}^4$,

$$[A|y]\ \xrightarrow{\substack{F_2-2F_1\\ F_3+F_1\\ F_4-F_1}}\left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{-1} & 0 & 1 & 2 & 1 & y_1\\ 0 & \boxed{2} & 0 & 1 & -2 & y_2-2y_1\\ 0 & -4 & 1 & -1 & 4 & y_3+y_1\\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & y_4-y_1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{F_3+2F_2\\ F_4-F_2}}\left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{-1} & 0 & 1 & 2 & 1 & y_1\\ 0 & \boxed{2} & 0 & 1 & -2 & y_2-2y_1\\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & -3y_1+2y_2+y_3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_1-y_2+y_4\end{array}\right].$$

Por tanto, tenemos:

(a) El espacio columna de A: El sistema $Ax=y$ es compatible si, y sólo si, el vector $y\in\mathbb{R}^4$ verifica

$$y_1-y_2+y_4=0.$$

Es decir $\mathrm{Col}\,(A)=\left\{y\in\mathbb{R}^4 : y_1-y_2+y_4=0\right\}$. Por otra parte, teniendo en cuenta la reducción que hemos hecho, los dos últimos vectores columna de A son combinación lineal de los tres primeros y estos tres primeros vectores columna son linealmente independientes. Si denotamos por $\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ los vectores columna de A, tenemos

$$\mathrm{Col}\,(A)=\mathrm{Col}\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix}$$

y cada vector $y\in\mathrm{Col}\,(A)$ se puede expresar de infinitas formas distintas (cada una de las soluciones del sistema $Ax=y$) como combinación lineal de los vectores columna de A, pero de una única forma como combinación lineal de $\{v_1,v_2,v_3\}$.

(b) El espacio nulo de A, las soluciones del sistema $Ax=0$: Puesto que al reducir hemos obtenido 2 variables libres, la solución general del sistema homogéneo se podrá expresar en función de 2 parámetros arbitrarios,

$$[A|0]\ \rightarrow\left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{-1} & 0 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & \boxed{2} & 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\xrightarrow{F_1-F_3}\left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{-1} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & \boxed{2} & 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x_1=x_4+x_5\\ x_2=-\frac{1}{2}x_4+x_5\\ x_3=-x_4\end{array}\right.\implies\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha+\beta\\ -\frac{1}{2}\alpha+\beta\\ -\alpha\\ \alpha\\ \beta\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Por tanto, el espacio nulo de A está generado por los vectores, linealmente independientes,

$$\left\{u_1=\begin{bmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-1\\1\\0\end{bmatrix},u_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

Notemos por último que, puesto que al hacer la reducción del sistema $Ax=0$ hemos obtenido una fila de ceros, dicha ecuación es redundante en el sistema homogéneo y por tanto tenemos que

$$\mathrm{Nul}\,(A)=\mathrm{Nul}\begin{bmatrix} \boxed{-1} & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & \boxed{2} & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0\end{bmatrix}=\mathrm{Nul}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 1\\ -2 & 2 & 2 & 5 & 0\\ 1 & -4 & 0 & -3 & 3\end{bmatrix}.$$

6. Transformaciones lineales: matriz asociada, ejemplos geométricos en el plano y en el espacio.

La relación que establece una matriz A $(m \times n)$ entre un vector $x \in \mathbb{R}^n$ y el vector correspondiente $y = Ax$ de $\mathbb{R}^m$ es un tipo de relación que se denomina **lineal** por verificarse

- Transforma una suma de vectores en la suma de los transformados,

$$A(x + x') = Ax + Ax', \qquad \forall x, x' \in \mathbb{R}^n.$$

- Transforma un múltiplo de un vector en el múltiplo del transformado,

$$A(\alpha x) = \alpha Ax, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ y } \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Equivalentemente,

- Transforma una combinación lineal de vectores en la combinación lineal de los transformados,

$$A(\alpha x + \beta x') = \alpha Ax + \beta Ax', \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ y } \forall x, x' \in \mathbb{R}^n.$$

Definición. Se dice que una transformación $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es lineal si se verifica que

$$\alpha x + \beta x' \longrightarrow T(\alpha x + \beta x') = \alpha T(x) + \beta T(x'), \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ y } \forall x, x' \in \mathbb{R}^n.$$

Usaremos de forma indistinta los términos transformación lineal y aplicación lineal.

Ejemplos. Como ejemplos geométricos de aplicaciones lineales en el plano cabe destacar los giros y las homotecias (con centro el origen de coordenadas) y las proyecciones y simetrías respecto a rectas que pasan por el origen de coordenadas.

Definición/Proposición. (Matriz asociada a una transformación lineal) Dada una Transformación Lineal $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, se llama matriz asociada a T (respecto a las bases canónicas, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ y $\{e'_1, \ldots, e'_m\}$ de $\mathbb{R}^m$) a la matriz M de dimensiones $m \times n$ cuyas columnas son las coordenadas de los vectores $\{T(e_1), \ldots, T(e_n)\}$,

$$M = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ T(e_1) & T(e_2) & \cdots & T(e_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{array}\right].$$

La matriz M (es la única matriz que) verifica que

$$x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow y = T(x) = Ax, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Es decir, *es la única matriz que al multiplicarla por un vector $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrario, da el vector transformado de x mediante T.*

$\mathbb{D}$.– Puesto que todo vector $x = [x_k] \in \mathbb{R}^n$ es combinación lineal de los vectores canónicos

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$$

y T es una aplicación lineal, tenemos que

$$y = T(x) = \quad T(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n) = x_1T(e_1) + x_2T(e_2) + \cdots + x_nT(e_n)$$

$$\Rightarrow \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ T(e_1) & T(e_2) & \cdots & T(e_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Ejemplos.

(1) Consideremos un giro de centro el origen de coordenadas y ángulo φ (en el sentido positivo). Tenemos entonces una transformación lineal y para determinar la matriz asociada basta con obtener los transformados de los vectores canónicos

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to T(e_1) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \operatorname{sen}(\varphi) \end{bmatrix}, \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to T(e_2) = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{bmatrix}.$$

Por tanto la matriz del giro es, como ya sabíamos,

$$G_\varphi = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\operatorname{sen}(\varphi) \\ \operatorname{sen}(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}.$$

(2) La transformación que asigna a cada vector de $\mathbb{R}^3$ su proyección ortogonal sobre un plano que pasa por el origen de coordenadas, por ejemplo $\pi \equiv x+y+z=0$, es una transformación lineal y, por tanto, para determinar la matriz asociada basta con obtener la proyección ortogonal sobre dicho plano de cada uno de los vectores canónicos. ¿Quiénes son el espacio nulo y el espacio columna de la matriz asociada a la proyección ortogonal dada?

(3) Para la misma transformación anterior (proyección ortogonal sobre un plano que pasa por el origen de coordenadas), podemos obtener la matriz asociada M teniendo en cuenta cuál es el resultado de multiplicar esta matriz por un vector (de $\mathbb{R}^3$). Si tenemos un vector $\vec{n}$ ortogonal al plano dado, en el caso anterior podemos tomar $\vec{n} = [1,\ 1,\ 1]^t$, y dos vectores $\{v_1, v_2\}$ que generen el plano, por ejemplo $\left\{v_1 = [1,\ -1,\ 0]^t, v_2 = [1,\ 0,\ -1]^t\right\}$, puesto que el transformado de $\vec{n}$ es el vector nulo y los transformados de v_1 y v_2 son ellos mismos, la matriz M debe verificar

$$M \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

y basta despejar M multiplicando a la derecha, en ambos miembros de la igualdad anterior, por la inversa de la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Tenemos

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Cuando se consideran las transformaciones lineales sin hacer referencia a la matriz asociada, se suele utilizar la siguiente terminología:

Definición. Consideremos una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

(1) Se denomina **núcleo** de T y se denota por $\ker(T)$ al conjunto (subespacio)

$$\ker(T) = \{x \in \mathbb{R}^n : T(x) = 0\}.$$

(2) Se denomina conjunto o **espacio imagen** de T al conjunto de vectores de $\mathbb{R}^m$ que tienen anti-imagen, es decir,

$$\text{Imagen}(T) = T(\mathbb{R}^n) = \{T(x) : x \in \mathbb{R}^m\} = \{y \in \mathbb{R}^m : \exists x \in \mathbb{R}^n, y = T(x)\}.$$

Si consideramos la matriz A asociada a T, tenemos

$$\begin{aligned} \ker(T) &= \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\} = \operatorname{Nul}(A) \\ \text{Imagen}(T) &= T(\mathbb{R}^n) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^m\} = \{y \in \mathbb{R}^m : \exists x \in \mathbb{R}^n, y = Ax\} = \\ &= \{y \in \mathbb{R}^m : Ax = y \text{ es un S.C.}\} = \operatorname{Col}(A). \end{aligned}$$

Ejercicio resuelto
Encontrar los vectores de $\mathbb{R}^4$ tales que: (i) la suma de sus componentes es 3; (ii) sus componentes segunda y cuarta son iguales; (iii) su tercera componente es el doble de su primera.

Los vectores de $\mathbb{R}^4$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, pedidos deben verificar el sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_3 = 0, \end{cases}$$

cuya resolución es trivial, por ejemplo, así:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3-2F_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3+2F_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & -6 \end{array}\right].$$

Tomamos x_4 como variable libre o parámetro, $x_4 \in \mathbb{R}$, y resolvemos mediante sustitución regresiva:

$$x_3 = \frac{6-4x_4}{3} = 2 - \frac{4}{3}x_4, \quad x_2 = x_4, \quad x_1 = 3 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 - \frac{2}{3}x_4,$$

es decir, los vectores buscados son:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{2}{3}x_4 \\ x_4 \\ 2-\frac{4}{3}x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1 \\ -4/3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_4 \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio resuelto

Considerar, para cada α y β reales, los vectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -\alpha \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \\ -\alpha \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \beta \\ 1 \end{bmatrix},$$

y la matriz $B = [v_1|v_2|v_3]$.

Discutir el sistema $Bx = v_4$ según los valores de α y β.

Discutimos el sistem $Bx = v_4$ aplicando eliminación gaussiana a la matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & 0 & -1 \\ -\alpha & 1 & -1 & \beta \\ 1 & -\alpha & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{F_2+F_1 \\ F_3+\alpha F_1 \\ F_4-F_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha+1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha+1 & \alpha-1 & \beta+\alpha \\ 0 & -(\alpha+1) & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ahora, como en la posición pivote aparece $\alpha+1$ (y aunque intercambiemos filas seguirá apareciendo) hay que separar los casos $\alpha+1=0$ y $\alpha+1 \neq 0$.

Así, para $\alpha = -1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \beta-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3+2F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

De donde deducimos que si $\beta = 1$ el sistema es compatible indeterminado mientras que si $\beta \neq 1$ el sistema es incompatible.

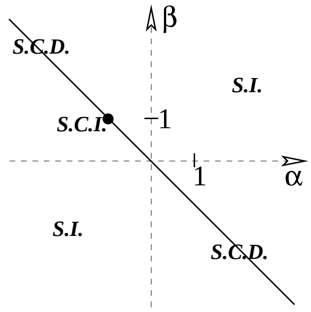
Si, por el contrario, $\alpha \neq -1$:

$$\xrightarrow{\substack{F_3-F_2 \\ F_4+F_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-2 & \beta+\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-2 & \beta+\alpha \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_4-(\alpha-2)F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta+\alpha \end{array}\right],$$

De manera que si $\beta+\alpha \neq 0$ el sistema es incompatible y si $\beta+\alpha = 0$ es compatible determinado.

En resumen, el sistema es siempre incompatible, excepto si los parámetros se encuentran en la recta $\beta+\alpha=0$. En este caso es compatible determinado si $\alpha \neq -1$ y compatible indeterminado cuando $\alpha = -1$, es decir, en el punto del plano de parámetros $(\alpha, \beta) = (-1, 1)$.



Ejercicio resuelto
Discutir, según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$, el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax_1+ x_2+ x_3+ x_4 &=& a, \\ x_1+ax_2+ x_3+ x_4 &=& a, \\ x_1+ x_2+ax_3+ x_4 &=& a, \\ x_1+ x_2+ x_3+ax_4 &=& a. \end{array}\right.$$

Escribimos el sistema que nos dan en forma matricial, $Ax = b$, y aplicamos eliminación gaussiana a la matriz ampliada.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & a & a \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 & a \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \\ F_4 - aF_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 & a(1-a) \end{array}\right].$$

Ahora, como en todos los términos no nulos aparece el factor $a - 1$, hay que separar los casos $a = 1$ y $a \neq 1$.

Así, para $a = 1$ obtenemos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

es decir, el sistema es compatible indeterminado (concretamente, aparecen infinitas soluciones dependientes de tres parámetros).

Si $a \neq 1$, dividiendo las tres últimas filas por $1 - a$ obtenemos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & a \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1+a & a \end{array}\right] \xrightarrow{F_4 + 2F_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & a \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2+a & a \end{array}\right] \xrightarrow{F_4 + F_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & a \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3+a & a \end{array}\right].$$

De donde deducimos que, cuando $a \neq 1$, si $a = -3$ el sistema es incompatible mientras que si $a \neq -3$ el sistema es compatible determinado.

En resumen, si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado, si $a = -3$ es incompatible y si $a \neq -3, 1$ es compatible determinado.

Observemos que es importante retrasar la discusión con los parámetros todo lo que sea posible (pues aparte de no complicar los cálculos se evitará la discusión de valores irrelevantes de los parámetros). Esto lo hicimos al principio, quitando de la posición pivote el parámetro a. Si no hubiéramos procedido así, tendríamos que haber separado dos casos: si $a = 0$,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \cdots$$

mientras que si $a \neq 0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & a & a \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{F_2 - \frac{1}{a}F_1 \\ F_3 - \frac{1}{a}F_1 \\ F_4 - \frac{1}{a}F_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a - \frac{1}{a} & 1 - \frac{1}{a} & 1 - \frac{1}{a} & a-1 \\ 0 & 1 - \frac{1}{a} & a - \frac{1}{a} & 1 - \frac{1}{a} & a-1 \\ 0 & 1 - \frac{1}{a} & 1 - \frac{1}{a} & a - \frac{1}{a} & a-1 \end{array}\right] \cdots$$

cuando, como hemos visto, el valor $a = 0$ es irrelevante en la discusión del sistema.

Ejercicio resuelto
Consideremos, para $\delta, \mu \in \mathbb{R}$, los vectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \; v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \mu - 1 \\ \delta + 3 \end{bmatrix} \text{ y } \; v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ \mu \\ 3 \end{bmatrix}.$$

y la matriz $A = [v_1 \mid v_2 \mid v_3 \mid v_4]$.

1.1 Calcular, según los valores de δ y μ, la forma escalonada reducida de A.

1.2 Determinar todos los valores de δ y μ para los que $v_4 \in \text{Gen}\,\{v_1, v_2, v_3\}$.

1.1 Recordemos que una matriz rectangular está en **forma escalonada** si tiene las siguientes tres propiedades:

1. Todas las filas diferentes de cero están arriba de las puramente ceros.
2. Cada entrada principal de una fila (o sea, la primera entrada distinta de cero de dicha fila) está en una columna a la derecha de la entrada principal de cada fila superior a ella.
3. Todas las entradas de una columna que estén por debajo de una entrada principal son cero.

Si una matriz en forma escalonada satisface las condiciones adicionales siguientes, entonces se dice que está en **forma escalonada reducida**:

4. La entrada principal de cada fila no nula es 1.
5. Cada 1 principal es la única entrada diferente de cero en su columna.

Las operaciones del método de eliminación de Gauss consiguen transformar **toda** matriz A en su **única** forma escalonada reducida. Recordemos que dichas transformaciones son de tres tipos: intercambio de dos filas, sumar a una fila un múltiplo de otra fila, multiplicar una fila por un número distinto de cero. Una vez aclarado esto procemos a efectuar los cálculos.

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&2&1&3\\-1&1&\mu-1&\mu\\2&6&\delta+3&3\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{F_3+F_1\\F_4-2F_1}}\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&2&1&3\\0&2&\mu-1&\mu+1\\0&4&\delta+3&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{F_3-F_2\\F_4-2F_2}}\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&2&1&3\\0&0&\mu-2&\mu-2\\0&0&\delta+1&-5\end{bmatrix}.$$

Caso 1 Si $\mu=2$, entonces la tercera fila es cero y la intercambiamos con la cuarta:

$$\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&2&1&3\\0&0&\mu-2&\mu-2\\0&0&\delta+1&-5\end{bmatrix}\xrightarrow{P_{3,4}}\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&2&1&3\\0&0&\delta+1&-5\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Como buscamos siempre las entradas principales, tenemos que distinguir que $\delta+1$ sea cero o no.

Caso 1.1 Si $\delta=-1$, entonces

$$\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&2&1&3\\0&0&0&-5\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{M_3\left(-1/5\right)}\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&2&1&3\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{F_2-3F_3\\F_1-F_3}}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{M_2\left(1/2\right)}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1/2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{F_1-F_2}\begin{bmatrix}1&0&-1/2&0\\0&1&1/2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$ (forma escalonada reducida para $\mu=2$ y $\delta=-1$).

Caso 1.2 Si $\delta\neq-1$, entonces

$$\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&2&1&3\\0&0&\delta+1&-5\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{M_3\left(1/\left(\delta+1\right)\right)}\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&2&1&3\\0&0&1&-5/\left(\delta+1\right)\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{F_3-F_2}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&2&0&3+5/\left(\delta+1\right)\\0&0&1&-5/\left(\delta+1\right)\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{M_2\left(1/2\right)}\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&1&0&3/2+5/\left(2\left(\delta+1\right)\right)\\0&0&1&-5/\left(\delta+1\right)\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{F_1-F_2}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&-1/2-5/\left(2\left(\delta+1\right)\right)\\0&1&0&3/2+5/\left(2\left(\delta+1\right)\right)\\0&0&1&-5/\left(\delta+1\right)\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$ (forma escalonada reducida para $\mu=2$ y $\delta\neq-1$).

Caso 2 Si $\mu \neq 2$, entonces:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \mu-2 & \mu-2 \\ 0 & 0 & \delta+1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{M_3\left(1/\left(\mu-2\right)\right)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \delta+1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_4-(\delta+1)\,F_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta-6 \end{bmatrix}.$$

Como buscamos siempre las entradas principales, tenemos que distinguir que $-\delta-6$ sea cero o no.

Caso 2.1 Si $\delta=-6$, entonces

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2-F_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{M_2\left(1/2\right)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1-F_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{(forma escalonada reducida para } \mu\neq 2 \text{ y } \delta=-6\text{).}$$

Caso 2.2 Si $\delta\neq-6$, entonces A es cuadrada, de rango máximo y su forma escalonada reducida es la matriz identidad.

1.2. Decir que un vector depende linealmente de otros es equivalente a decir que un cierto sistema de ecuaciones es compatible. Por otro lado, la forma más eficaz de analizar la compatibilidad de un sistema es efectuar la reducción gaussiana de la matriz ampliada $[A\,|b]$. El sistema es compatible si, y sólo si, no se obtienen pivotes en la última columna. Queremos estudiar si v_4 es combinación lineal de $\{v_1,v_2,v_3\}$. Eso equivale a saber si el sistema

$$[v_1,v_2,v_3]\,x=v_4$$

es compatible. Y eso equivale a ver si en la forma escalonada de $[v_1,v_2,v_3\,|v_4]$ aparece algún pivote en la cuarta columna. Como eso ya ha sido analizado en el apartado anterior, sólo tenemos que mirarlo en cada caso.

Caso 1. $\mu=2$.

Caso 1.1. $\delta=-1$. Se llega a la forma escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como hay pivote en la cuarta columna, podemos afirmar que v_4 no es combinación lineal de $\{v_1,v_2,v_3\}$. En el resto de los casos escribiremos sólo el resultado.

Caso 1.2. $\delta\neq-1$: v_4 sí es combinación lineal de $\{v_1,v_2,v_3\}$.

Caso 2. $\mu\neq 2$.

Caso 2.1. $\delta=-6$: v_4 sí es combinación lineal de $\{v_1,v_2,v_3\}$.

Caso 2.2. $\delta\neq-6$: v_4 no es combinación lineal de $\{v_1,v_2,v_3\}$.

Ejercicio resuelto
Consideremos los vectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}, \quad v_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

a) Sea la matriz $A = [v_1|v_2|v_3|v_4|v_5]$. Encontrar su forma escalonada reducida, según los valores de $a \in \mathbb{R}$. Usando este resultado, escribir, cuando sea posible, v_5 como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3 y como combinación lineal de v_1, v_2 y v_4.

b) Sea la matriz $B = [v_1|v_2|v_3|v_4]$. Discutir el sistema $Bx = v_5$, según los valores de $a \in \mathbb{R}$, encontrando su solución cuando sea compatible.

(a) Calculemos la forma escalonada reducida (en las columnas pivote todo son ceros excepto el pivote que vale 1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & a & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - 2F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & a & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ahora, la cuarta columna es pivote si $a + 1 \neq 0$, por lo que hay que separar los casos $a + 1 = 0$ y $a + 1 \neq 0$.

Así, para $a = -1$:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3/(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2 + 3F_3]{F_1 - 3F_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1 + F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ésta es la forma escalonada reducida de la matriz A.

Si, por el contrario, $a \neq -1$, entonces la cuarta columna es pivote con lo que

$$\xrightarrow{F_3/(a+1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{a+1} \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \frac{-3a-1}{a+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{a+1} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1 + F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & \frac{2}{a+1} \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \frac{-3a-1}{a+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{a+1} \end{bmatrix} \xrightarrow{-F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & \frac{2}{a+1} \\ 0 & 1 & -2 & 0 & \frac{3a+1}{a+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{a+1} \end{bmatrix},$$

y ésta es la forma escalonada reducida de la matriz A.

Recordando que las relaciones entre las columnas son las mismas en cada matriz equivalente por filas que vamos obteniendo, a partir de la forma escalonada reducida, es inmediato ver las combinaciones lineales que existen.

Así, para $a = -1$, puesto que la quinta columna de la forma escalonada reducida es linealmente independiente de las columnas primera, segunda y tercera (es decir, esa quinta columna no se puede escribir como combinación lineal de las otras tres) entonces v_5 no se puede escribir como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3. Haciendo el mismo razonamiento para las columnas primera, segunda, cuarta y quinta de la matriz escalonada reducida, deducimos que v_5 tampoco se puede escribir como combinación lineal de v_1, v_2 y v_4.

En el caso $a \neq -1$, también es evidente a partir de la forma escalonada reducida correspondiente que v_5 no se puede escribir como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3. Sin embargo, a partir de la relación existente entre las columnas primera, c_1, segunda, c_2, cuarta, c_4, y quinta, c_5, de la forma escalonada reducida:

$$c_5 = \frac{2}{a+1} c_1 + \frac{3a+1}{a+1} c_2 - \frac{2}{a+1} c_4$$

deducimos que

$$v_5 = \frac{2}{a+1} v_1 + \frac{3a+1}{a+1} v_2 - \frac{2}{a+1} v_4.$$

(b) Siendo $B = [v_1|v_2|v_3|v_4]$, para discutir el sistema $Bx = v_5$ (de tres ecuaciones y cuatro incógnitas), aprovechamos la eliminación hecha en el primer apartado, puesto que $A = (B|v_5)$ es la matriz ampliada del sistema y ya que $A \sim$ $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & -2 \end{array}\right]$ deducimos que para $a+1 = 0$ el sistema es incompatible (al ser la última columna pivote, la última fila representa a una ecuación imposible, $0 = -2$) y que si $a \neq -1$ el sistema es compatible indeterminado con infinitas soluciones dependientes de un parámetro (hay una columna no pivote, la tercera, por lo que tomaremos a x_3 como variable libre), con lo que la resolución inmediata nos lleva a

$$x_4 = \frac{-2}{a+1}, \quad x_3 \in \mathbb{R}, \quad x_2 = 2x_3 + \frac{3a+1}{a+1}, \quad x_1 = -3x_3 + \frac{2}{a+1}.$$

Es decir, el conjunto solución, cuando $a \neq -1$, es

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = x_3(-3, 2, 1, 0)^T + \left(\frac{2}{a+1}, \frac{3a+1}{a+1}, 0, \frac{-2}{a+1} \right)^T, \qquad x_3 \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio resuelto
Consideremos los vectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Sea la matriz $A = [v_1|v_2|v_3|v_4|v_5]$. Encontrar su forma escalonada reducida.

(b) Contestar, razonadamente, a partir de dicha forma escalonada, las siguientes preguntas:

- **(b.1)** ¿Son v_1, v_2 y v_3 linealmente independientes?
- **(b.2)** Escribir, si es posible, v_2 como combinación lineal de v_1, v_3 y v_4.
- **(b.3)** Escribir, si es posible, v_1 como combinación lineal de v_2, v_4 y v_5.

(a) Calculemos la forma escalonada reducida (en las columnas pivote todo son ceros excepto el pivote que vale 1) aplicando el método de eliminación de Gauss

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - 2F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3/2]{(-1)F_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 + F_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 - F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Recordando que las relaciones entre las columnas son las mismas en cada matriz equivalente por filas que vamos obteniendo, a partir de la forma escalonada reducida es inmediato ver las combinaciones lineales que existen. La justificación de este hecho es sencilla. Consideremos el sistema homogéneo $Ax = 0$. Supongamos que al aplicar eliminación a la matriz A vamos obteniendo $A \sim B \sim ... \sim C$ (siendo C la forma escalonada reducida). Entonces, los sistemas $Ax = 0$, $Bx = 0$, ..., $Cx = 0$ tienen el mismo conjunto solución, es decir, el mismo vector (o los mismos vectores) x es solución de todos esos sistemas. Si escribimos dichos sistemas mediante las ecuaciones vectoriales en las que aparecen las columnas de las matrices (siendo a_i las columnas de A, b_i las de B, ... y c_i las de C) junto con los escalares x_i que forman x obtenemos

$$x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_na_n = 0, \quad x_1b_1 + x_2b_2 + ... + x_nb_n = 0, \quad ..., \quad x_1c_1 + x_2c_2 + ... + x_nc_n = 0.$$

Por tanto, las relaciones entre las columnas son las mismas en cada matriz equivalente por filas.

Así, si llamamos c_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, a las columnas de la forma escalonada reducida podemos contestar de forma inmediata a las cuestiones planteadas, pues notemos que las columnas pivote de la forma escalonada reducida son vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y las columnas no pivote (c_3 y c_5 en este caso) se pueden expresar de forma inmediata en función de las pivote.

(b.1) v_1, v_2 y v_3 son linealmente dependientes porque c_3 es combinación lineal de c_1 y c_2, concretamente de la forma escalonada reducida deducimos trivialmente que $c_3 = 3c_1 - 2c_2$, luego la misma relación existe entre los v_i, $v_3 = 3v_1 - 2v_2$.

(b.2) Sí, es posible escribir v_2 como combinación lineal de v_1, v_3 y v_4, pues como de la forma escalonada reducida deducimos trivialmente que $c_3 = 3c_1 - 2c_2 + 0 \cdot c_4$ entonces $c_2 = \frac{3}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_3 + 0 \cdot c_4$ y, por tanto, $v_2 = \frac{3}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_3 + 0 \cdot v_4$.

(b.3) Sí, es posible escribir v_1 como combinación lineal de v_2, v_4 y v_5, pues como de la forma escalonada reducida deducimos trivialmente que $c_5 = c_1 + 2c_2 - c_4$ entonces $c_1 = -2c_2 + c_4 + c_5$ y, por tanto, $v_1 = -2v_2 + v_4 + v_5$.

Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifica

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Hallar la matriz A que representa a T cuando se trabaja en las bases canónicas.

(b) Encontrar los vectores $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $T(x) = 0$ (aquéllos que se transforman en el vector nulo).

(a) La aplicación lineal dada $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tiene asociada, respecto de las bases canónicas, la matriz A en cuyas columnas aparecen los transformados de la base canónica del espacio de partida, es decir, $A = [T(e_1)|T(e_2)|T(e_3)]$. Con esta matriz, podemos calcular fácilmente el transformado del vector x, sin más que $T(x) = Ax$.

Puesto que nos dan los transformados de tres vectores (que deben ser linealmente independientes) una posibilidad es plantear el sistema de ecuaciones vectoriales, donde, por comodidad llamamos $a = (1, 1, -2)^T$, $b = (1, -1, 2)^T$, $c = (1, 1, -2)^T$,

$$\begin{cases} T([1,0,1]^T) = T(e_1 + e_3) = T(e_1) + T(e_3) = a \\ T([0,1,-1]^T) = T(e_2 - e_3) = T(e_2) - T(e_3) = b \\ T([0,1,1]^T) = T(e_2 + e_3) = T(e_2) + T(e_3) = c \end{cases} \to \begin{cases} T(e_2) = \frac{1}{2}(b + c) = (1, 0, 0)^T, \\ T(e_3) = \frac{1}{2}(c - b) = (0, 1, -2)^T, \\ T(e_1) = a - T(e_3) = (1, 0, 0)^T, \end{cases}$$

que en este caso se resuelve trivialmente (en general, lo resolveremos mediante eliminación de Gauss).

Por tanto, obtenemos que

$$A = [T(e_1)|T(e_2)|T(e_3)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Conviene asegurarse de que la matriz encontrada es la correcta comprobando que

$$A[1, 0, 1]^T = [1, 1, -2]^T, \quad A[0, 1, -1]^T = [1, -1, 2]^T \quad A[0, 1, 1]^T = [1, 1, -2]^T.$$

Otra forma de encontrar A es escribir matricialmente las igualdades que da el enunciado:

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \; A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \; A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \to \quad A\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

de donde deducimos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

La matriz inversa que aparece la hemos calculado aplicando el método de Gauss–Jordan:

$$\begin{aligned} [C|I] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] = [I|C^{-1}]. \end{aligned}$$

(b) Encontrar los vectores $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $T(x) = 0$, es equivalente a hallar los vectores que verifican $Ax = 0$, es decir, los vectores del espacio nulo de A. Resolvemos pues el sistema homogéneo

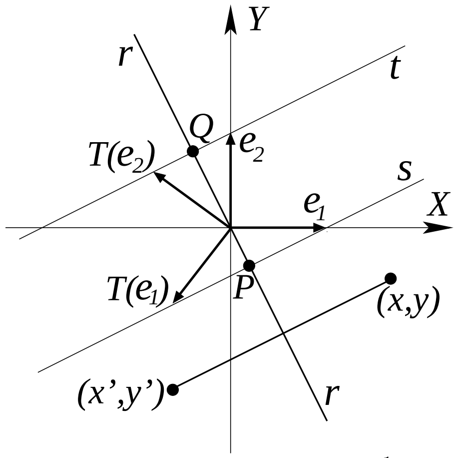
$$T(x) = Ax = 0 \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases} \to \; x = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; x_2 \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio resuelto

Sea r la recta de ecuación $2x + y = 0$. Calcular la matriz de la simetría respecto de dicha recta r. Encontrar el simétrico, respecto de la recta r, del vector $(2, 3)^T$.

Una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tiene asociada, respecto de las bases canónicas, la matriz A en cuyas columnas aparecen los transformados de la base canónica del espacio de partida, es decir, $A = [T(e_1)|T(e_2)]$.

Puesto que T asigna a cada vector su simétrico respecto de la recta r, $2x+y=0$, una primera forma de encontrar la matriz A_2 es calculando $T(e_i)$ mediante procedimientos geométricos (ver figura).
Para encontrar $T(e_1)$ escribimos la ecuación de la recta s, que pasa por el punto $(1,0)$ y es perpendicular a la recta r. A continuación hallamos el punto P, intersección entre r y s. Este punto P coincide con la proyección ortogonal sobre la recta r del vector e_1, es decir, es el punto medio del segmento de extremos e_1 y $T(e_1)$, lo que nos permite calcular $T(e_1)$.
Análogamente calcularemos $T(e_2)$. Para ello, escribimos la ecuación de la recta t, que pasa por el punto $(0,1)$ y es perpendicular a la recta r. A continuación hallamos el punto Q, intersección entre r y t. Este punto Q coincide con la proyección ortogonal sobre la recta r del vector e_2, es decir, es el punto medio del segmento de extremos e_2 y $T(e_2)$, lo que nos permite calcular $T(e_2)$.



Así, puesto que la recta r tiene pendiente $m=-2$, las rectas perpendiculares a ella tendrán pendiente $m=\frac{1}{2}$, con lo que podemos escribir las ecuaciones (punto-pendiente) de s y t y hallar sus intersecciones con la recta r

$$
\begin{aligned}
s: \quad & y-0=\frac{1}{2}(x-1) \;\rightarrow\; x-2y=1 \;\rightarrow\; r\cap s \equiv \left\{ \begin{array}{c} 2x+y=0 \\ x-2y=1 \end{array} \right\} \;\rightarrow\; P=\left(\frac{1}{5},-\frac{2}{5}\right), \\
t: \quad & y-1=\frac{1}{2}(x-0) \;\rightarrow\; x-2y=-2, \;\rightarrow\; r\cap s \equiv \left\{ \begin{array}{c} 2x+y=0 \\ x-2y=-2 \end{array} \right\} \rightarrow Q=\left(-\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right).
\end{aligned}
$$

Utilizando ahora que P y Q son los puntos medios de los segmentos correspondientes podemos ya encontrar $T(e_1)$ y $T(e_2)$

$$
\begin{aligned}
\vec{OP} &= \frac{e_1+T(e_1)}{2} \;\rightarrow\; \left(\frac{1}{5},-\frac{2}{5}\right)=\frac{(1,0)+(x,y)}{2} \;\rightarrow\; (x,y)=\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right) \;\rightarrow\; T(e_1)=\left[\begin{array}{c} -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{array}\right], \\
\vec{OQ} &= \frac{e_2+T(e_2)}{2} \;\rightarrow\; \left(-\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)=\frac{(0,1)+(x,y)}{2} \;\rightarrow\; (x,y)=\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right) \;\rightarrow\; T(e_2)=\left[\begin{array}{c} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{array}\right],
\end{aligned}
$$

con lo que la matriz A que representa la simetría respecto de la recta r es

$$
A=[T(e_1)|T(e_2)]=\left[\begin{array}{cc} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{array}\right]=\frac{1}{5}\left[\begin{array}{cc} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{array}\right].
$$

Una segunda forma de plantear el problema es hallando las imágenes de algunos vectores (dos, linealmente independientes, es decir, una base de $\mathbb{R}^2$) cuyo transformado sea fácil de calcular. Así, el transformado de cualquier vector que esté sobre la recta que pasa por el origen y tiene la dirección del vector normal a r, $(2,1)^T$, será su opuesto (pues buscamos el simétrico; si nos pidieran la proyección ortogonal, su imagen sería el vector nulo). Por ejemplo, $T(2,1)^T=-(2,1)^T=(-2,-1)^T$. Por otro lado, el simétrico de cualquier vector de la propia recta será el mismo vector. De esta forma, $T(1,-2)^T=(1,-2)^T$. Con este procedimiento, una posibilidad es plantear el sistema de ecuaciones vectoriales (donde, por comodidad llamamos $a=(1,-2)^T$, $b=(-2,-1)^T$)

$$
\left\{ \begin{array}{l} T([1,-2]^T)=T(e_1-2e_2)=T(e_1)-2T(e_2)=a \\ T([2,1]^T)=T(2e_1+e_2)=2T(e_1)+T(e_2)=b \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T(e_1)=\frac{1}{5}(a+2b)=(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5})^T, \\ T(e_2)=\frac{1}{5}(-2a+b)=(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})^T, \end{array} \right.
$$

que se puede resolver mediante eliminación de Gauss.

Por tanto, obtenemos nuevamente que

$$
A=[T(e_1)|T(e_2)]=\left[\begin{array}{cc} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{array}\right]=\frac{1}{5}\left[\begin{array}{cc} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{array}\right].
$$

Conviene asegurarse de que la matriz encontrada es la correcta comprobando que

$$
A[1,-2]^T=[1,-2]^T, \quad A[2,1]^T=[-2,-1]^T.
$$

Otra forma de encontrar A, por este segundo planteamiento, es escribir matricialmente las igualdades que hemos obtenido:

$$
A\left[\begin{array}{c} 1 \\ -2 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} 1 \\ -2 \end{array}\right], \quad A\left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} -2 \\ -1 \end{array}\right] \;\rightarrow\; A\left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{array}\right],
$$

de donde deducimos

$$
A=\left[\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{array}\right]^{-1}=\left[\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{array}\right]\frac{1}{5}\left[\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{array}\right]=\frac{1}{5}\left[\begin{array}{cc} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{array}\right].
$$

Un tercer planteamiento para resolver este problema consiste en descomponer la aplicación lineal que nos dan (simetría respecto de la recta r) en la composición de tres: la primera, T_φ, corresponde a un giro de ángulo φ respecto del origen que nos convierta la recta r en el eje X (representada por la matriz A_φ), la segunda, T_S, es la simetría respecto del eje X (representada por la matriz A_S) y la tercera, $T_{-\varphi}$, el giro de ángulo opuesto $-\varphi$ que convierte el eje X en la recta r (representada por la matriz $A_{-\varphi}$). Observemos que, para transformar la recta r en el eje X, el ángulo φ es tal que $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$ y $\operatorname{sen}\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$ y recordemos que la matriz que representa un giro de ángulo φ respecto del origen es

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Así, puesto que la matriz de una aplicación lineal composición de varias aplicaciones se obtiene multiplicando las matrices de las distintas aplicaciones, obtenemos

$$T(x) = T_{-\varphi}(T_S(T_\varphi(x))) = A_{-\varphi}A_SA_\varphi x = Ax \quad \rightarrow \quad A = A_{-\varphi}A_SA_\varphi,$$

es decir,

$$A = A_{-\varphi}A_SA_\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Como cuarta alternativa resolveremos este problema mediante números complejos. Sabemos que, en el plano complejo, la simetría respecto de la recta real se obtiene sin más que aplicar la conjugación. Ya que nos piden la simetría respecto de una recta distinta, el proceso a seguir será: primero llevamos la recta r a la recta real, para lo que será necesario realizar un giro de ángulo φ; segundo, realizamos la simetría, sin más que conjugar; tercero, deshacemos el giro para dejar la recta en su posición original. Así, el número $z = x + iy$ (asociado al punto del plano (x, y)) lo transformamos en el $w = f(z) = x' + iy'$, su simétrico respecto de la recta r (asociado al punto (x', y')):

$$\begin{aligned} x' + iy' &= w = e^{-i\varphi}\overline{e^{i\varphi}z} = e^{-i\varphi}e^{-i\varphi}\overline{z} = e^{-2i\varphi}\overline{z} = [\cos(2\varphi) - i\operatorname{sen}(2\varphi)][x - iy] \\ &= \frac{1}{5}(-3-4i)(x-iy) = \left(-\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y\right) + i\left(-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y\right) \end{aligned}$$

donde hemos usado que el conjugado del producto es el producto de los conjugados y que el conjugado de la suma es la suma de los conjugados y que

$$\operatorname{sen}(2\varphi) = 2\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi = 2\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}, \quad \cos(2\varphi) = \cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = -\frac{3}{5}.$$

Separando la parte real y la imaginaria obtenemos

$$\left\{\begin{array}{l} x' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y \\ y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{array}\right. \rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Así, para obtener las coordenadas (x', y') del punto simétrico al (x, y) respecto de la recta dada (ver figura) basta con multiplicar la matriz A por el vector $(x, y)^T = (2, 3)^T$:

$$T(v) = Av \;\rightarrow\; \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -18 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Aunque el problema no nos lo pide, vamos a comentar los cambios mínimos que hay que hacer para encontrar la matriz A_{proy} que representa la proyección ortogonal sobre la recta r en lugar de la simetría.

En el procedimiento geométrico, los puntos $P = (1/5, -2/5)$ y $Q = (-2/5, 4/5)$ corresponden, respectivamente, con las proyecciones ortogonales de e_1 y e_2 sobre r, con lo que

$$A_{proy} = [T(e_1)|T(e_2)] = \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & 4/5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Mediante el segundo procedimiento, para la proyección ortogonal sobre la recta r, podemos escribir $T(2,1)^T = (0,0)^T$, $T(1,-2)^T = (1,-2)^T$.

En el tercer planteamiento descomponemos la proyección en las tres aplicaciones correspondientes de forma que

$$A_{proy} = A_{-\varphi}A_PA_\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, en el cuarto procedimiento, con números complejos, plantearíamos

$$x' + iy' \;=\; w = e^{-i\varphi}Re(e^{i\varphi}z).$$

Ejercicio resuelto
Encontrar la matriz A asociada a la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que asigna a cada vector su proyección ortogonal sobre el plano $x - y + z = 0$.

La aplicación lineal dada $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tiene asociada, respecto de las bases canónicas, la matriz A en cuyas columnas aparecen los transformados de la base canónica del espacio de partida, es decir, $A = [T(e_1)|T(e_2)|T(e_3)]$.

Puesto que T asigna a cada vector su proyección ortogonal sobre el plano $x - y + z = 0$, una primera forma de resolver el problema es calculando $T(e_i)$ directamente, mediante la intersección de la recta que pasa por el punto correspondiente y tiene la dirección del vector normal al plano con el propio plano. Así, en el caso de $T(e_1)$, la intersección de la recta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z-0}{1} \to \left\{ \begin{array}{l} x - z = 1, \\ y + z = 0, \end{array} \right.$$

con el plano $x - y + z = 0$ nos lleva al punto

$$\left. \begin{array}{r} x - z = 1 \\ y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right\} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \to T(e_1) = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}.$$

Análogamente, para $T(e_2)$, la intersección de la recta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-0}{1} \to \left\{ \begin{array}{l} x - z = 0, \\ y + z = 1, \end{array} \right.$$

con el plano $x - y + z = 0$ nos lleva al punto

$$\left. \begin{array}{r} x - z = 0 \\ y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right\} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \to T(e_2) = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, para $T(e_3)$, la intersección de la recta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z-1}{1} \to \left\{ \begin{array}{l} x + y = 0, \\ x - z = -1, \end{array} \right.$$

con el plano $x - y + z = 0$ nos lleva al punto

$$\left. \begin{array}{r} x + y = 0, \\ x - z = -1 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right\} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \to T(e_3) = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

De esta forma,

$$A = [T(e_1)|T(e_2)|T(e_3)] = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Una segunda forma de plantear el problema es hallando las imágenes de algunos vectores cuyo transformado es inmediato. Así, el transformado de cualquier vector que esté sobre la recta que pasa por el origen y tiene la dirección del vector normal al plano, $(1, -1, 1)^T$, será el vector nulo. Por ejemplo, $T(1, -1, 1)^T = (0, 0, 0)^T$. Por otro lado, la proyección ortogonal dada de cualquier vector del propio plano será el mismo vector. De esta forma, elegimos dos vectores cualesquiera linealmente independientes que estén en el plano (por ejemplo, $(1, 1, 0)^T$ y $(1, 0, -1)^T$) con lo que $T(1, 1, 0)^T = (1, 1, 0)^T$ y $T(1, 0, -1)^T = (1, 0, -1)^T$. Con este procedimiento, una posibilidad es plantear el sistema de ecuaciones vectoriales, donde, por comodidad llamamos $a = (0, 0, 0)^T$, $b = (1, 1, 0)^T$, $c = (1, 0, -1)^T$,

$$\left\{ \begin{array}{l} T([1,-1,1]^T) = T(e_1 - e_2 + e_3) = T(e_1) - T(e_2) + T(e_3) = a \\ T([1,1,0]^T) = T(e_1 + e_2) = T(e_1) + T(e_2) = b \\ T([1,0,-1]^T) = T(e_1 - e_3) = T(e_1) - T(e_3) = c \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{l} T(e_1) = \frac{1}{3}(a + b + c) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3})^T, \\ T(e_2) = b - T(e_1) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})^T, \\ T(e_3) = T(e_1) - c = (\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})^T, \end{array} \right.$$

que en este caso se resuelve trivialmente (en general, lo resolveremos mediante eliminación de Gauss).

Por tanto, obtenemos nuevamente que

$$A = [T(e_1)|T(e_2)|T(e_3)] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Conviene asegurarse de que la matriz encontrada es la correcta comprobando que

$$A[1,-1,1]^T = [0,0,0]^T, \quad A[1,1,0]^T = [1,1,0]^T \quad A[1,0,-1]^T = [1,0,-1]^T.$$

Otra forma de encontrar A, por este segundo planteamiento, es escribir matricialmente las igualdades que hemos obtenido:

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \to \quad A\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

de donde deducimos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

La matriz inversa que aparece la hemos calculado aplicando el método de Gauss–Jordan:

$$\begin{aligned}
[C|I] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 6 & 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & -2/3 \end{array}\right] = [I|C^{-1}].
\end{aligned}$$

Los distintos pasos que hemos dado al aplicar el proceso de eliminación a la matriz *ampliada* nos han permitido evitar que aparezcan fracciones hasta el resultado final (aunque tampoco debe ser una tragedia que aparezcan en los cálculos intermedios).

Observemos que si nos piden la simetría respecto del plano $x-y+z=0$, para calcular la matriz A correspondiente, podemos plantear

$$T(1,-1,1)^T = -(1,-1,1)^T = (-1,1,-1)^T, \qquad T(1,1,0)^T = (1,1,0)^T, \qquad T(1,0,-1)^T = (1,0,-1)^T.$$

Ejercicio resuelto
Encontrar la matriz A asociada a la transformación lineal $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que asigna, a cada vector $\mathbf{x}$, su simétrico, $T(\mathbf{x})$, respecto del plano $x+y-z=0$.

La aplicación lineal dada $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tiene asociada, respecto de las bases canónicas, la matriz A en cuyas columnas aparecen los transformados de la base canónica del espacio de partida, es decir, $A = [T(e_1)|T(e_2)|T(e_3)]$.

Puesto que T asigna a cada vector su simétrico respecto del plano $x+y-z=0$, una primera forma de resolver el problema es calculando $T(e_i)$ directamente. Para ello calculamos la intersección de la recta que pasa por el punto correspondiente ($(1,0,0)$ en el caso de e_1, $(0,1,0)$ para e_2 y $(0,0,1)$ cuando se trate de e_3) y tiene la dirección del vector normal al plano con el propio plano. Esto nos da un punto (que es la proyección ortogonal) que es el punto medio del segmento de extremos e_i y $T(e_i)$ (éste último es el que queremos calcular). Así, en el caso de $T(e_1)$, la intersección de la recta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \;\to\; \frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{-1} \;\to\; \left\{\begin{array}{l} x-y=1, \\ y+z=0, \end{array}\right.$$

con el plano $x+y-z=0$ nos lleva al punto

$$\left.\begin{array}{r} x-y=1 \\ y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{array}\right\} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \to \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{(1,0,0)+(a,b,c)}{2} \to \left\{\begin{array}{l} a=1/3, \\ b=-2/3, \\ c=2/3, \end{array}\right.$$

con lo que $T(e_1) = \frac{1}{3}(1,-2,2)^T$.

Análogamente, para $T(e_2)$, la intersección de la recta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \to \frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-0}{-1} \to \left\{\begin{array}{l} x+z=0, \\ y-x=1, \end{array}\right.$$

con el plano $x+y-z=0$ nos lleva al punto

$$\left.\begin{array}{r} x+z=0 \\ y-x=1 \\ x+y-z=0 \end{array}\right\} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \to \left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{(0,1,0)+(a,b,c)}{2} \to \left\{\begin{array}{l} a=-2/3, \\ b=1/3, \\ c=2/3, \end{array}\right.$$

con lo que $T(e_2) = \frac{1}{3}(-2,1,2)^T$.

Finalmente, para $T(e_3)$, la intersección de la recta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \to \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-1}{-1} \to \left\{\begin{array}{l} x-y=0, \\ x+z=1, \end{array}\right.$$

con el plano $x+y-z=0$ nos lleva al punto

$$\left.\begin{array}{r} x-y=0, \\ x+z=1 \\ x+y-z=0 \end{array}\right\} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \to \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{(0,0,1)+(a,b,c)}{2} \to \left\{\begin{array}{l} a=2/3, \\ b=2/3, \\ c=1/3, \end{array}\right.$$

con lo que $T(e_3) = \frac{1}{3}(2,2,1)^T$.

De esta forma,

$$A = [T(e_1)|T(e_2)|T(e_3)] = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Una segunda forma de plantear el problema es hallando las imágenes de algunos vectores cuyo transformado sea fácil de calcular. Así, el transformado de cualquier vector que esté sobre la recta que pasa por el origen y tiene la dirección del vector normal al plano, $(1,1,-1)^T$, será su opuesto (pues buscamos el simétrico; si nos pidieran la proyección ortogonal, su imagen sería el vector nulo). Por ejemplo, $T(1,1,-1)^T = -(1,1,-1)^T = (-1,-1,1)^T$. Por otro lado, el simétrico de cualquier vector del propio plano será el mismo vector. De esta forma, elegimos dos vectores cualesquiera linealmente independientes que estén en el plano (por ejemplo, $(1,-1,0)^T$ y $(1,0,1)^T$) con lo que $T(1,-1,0)^T = (1,-1,0)^T$ y $T(1,0,1)^T = (1,0,1)^T$. Con este procedimiento, una posibilidad es plantear el sistema de ecuaciones vectoriales, donde, por comodidad llamamos $a = (-1,-1,1)^T$, $b = (1,-1,0)^T$, $c = (1,0,1)^T$,

$$\left\{\begin{array}{l} T([1,1,-1]^T) = T(e_1+e_2-e_3) = T(e_1)+T(e_2)-T(e_3) = a \\ T([1,-1,0]^T) = T(e_1-e_2) = T(e_1)-T(e_2) = b \\ T([1,0,1]^T) = T(e_1+e_3) = T(e_1)+T(e_3) = c \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} T(e_1) = \frac{1}{3}(a+b+c) = (\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3})^T, \\ T(e_2) = T(e_1) - b = (\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})^T, \\ T(e_3) = c - T(e_1) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})^T, \end{array}\right.$$

que en este caso se resuelve trivialmente (en general, lo resolveremos mediante eliminación de Gauss).

Por tanto, obtenemos nuevamente que

$$A = [T(e_1)|T(e_2)|T(e_3)] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Conviene asegurarse de que la matriz encontrada es la correcta comprobando que

$$A[1,1,-1]^T = [-1,-1,1]^T, \quad A[1,-1,0]^T = [1,-1,0]^T \quad A[1,0,1]^T = [1,0,1]^T.$$

Otra forma de encontrar A, por este segundo planteamiento, es escribir matricialmente las igualdades que hemos obtenido:

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to A\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

de donde deducimos

$$A=\begin{bmatrix}-1&1&1\\-1&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&1\\-1&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&-2&-1\\1&1&2\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-2&2\\-2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}.$$

La matriz inversa que aparece la hemos calculado aplicando el método de Gauss–Jordan:

$$\begin{aligned}
[C|I] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\-1&0&1&0&0&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&-2&-1&-1&1&0\\0&1&2&1&0&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&2&1&0&1\\0&-2&-1&-1&1&0\end{array}\right]\\
&\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&2&1&0&1\\0&0&3&1&1&2\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}6&6&6&6&0&0\\0&3&6&3&0&3\\0&0&3&1&1&2\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}6&6&0&4&-2&-4\\0&3&0&1&-2&-1\\0&0&3&1&1&2\end{array}\right]\\
&\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}6&0&0&2&2&-2\\0&3&0&1&-2&-1\\0&0&3&1&1&2\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/3&1/3&-1/3\\0&1&0&1/3&-2/3&-1/3\\0&0&1&1/3&1/3&2/3\end{array}\right]=[I|C^{-1}].
\end{aligned}$$

Los distintos pasos que hemos dado al aplicar el proceso de eliminación a la matriz *ampliada* nos han permitido evitar que aparezcan fracciones hasta el resultado final (aunque tampoco debe ser una tragedia que aparezcan en los cálculos intermedios).

Observemos que si nos piden la proyección ortogonal respecto del plano $x+y-z=0$, para calcular la matriz A correspondiente, podemos plantear

$$T(1,1,-1)^T=(0,0,0)^T,\qquad T(1,-1,0)^T=(1,-1,0)^T,\qquad T(1,0,1)^T=(1,0,1)^T.$$

Ejercicio resuelto

(a) Encontrar la matriz A_1 asociada a la transformación lineal $T_1:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ que gira cada vector $\mathbf{x}$ un ángulo $\pi/2$ (en sentido positivo) respecto del eje OZ.

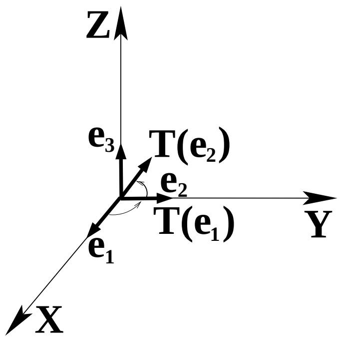
(b) Hallar la matriz A_2 asociada a la transformación lineal $T_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ que asigna, a cada vector $\mathbf{x}$, su simétrico, $T_2(\mathbf{x})$, respecto del plano $x-y-z=0$.

(c) Escribir la matriz A_3 asociada a la transformación lineal $T_3:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, que primero gira cada vector $\mathbf{x}$ un ángulo $\pi/2$ (en sentido positivo) respecto del eje OZ y después calcula su simétrico respecto del plano $x-y-z=0$. Calcular el transformado del vector $v=(-3,6,3)^T$, es decir, $T_3(v)$.

Sabemos que una aplicación lineal $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tiene asociada, respecto de las bases canónicas, la matriz A en cuyas columnas aparecen los transformados de la base canónica del espacio de partida, es decir, $A=[T(e_1)|T(e_2)|T(e_3)]$. En este problema nos definen tres aplicaciones.

(a) La transformación lineal $T_1:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ gira cada vector $\mathbf{x}$ un ángulo $\pi/2$ (en sentido positivo) respecto del eje OZ. Para calcular su matriz asociada A_1 vamos a ver cómo transforma T_1 a los vectores de la base canónica, e_i. Es inmediato ver que $T_1(e_1)=e_2$, $T_1(e_2)=-e_1$, $T_1(e_3)=e_3$. De esta forma,

$$A_1=[T_1(e_1)|T_1(e_2)|T_1(e_3)]=[e_2|-e_1|e_3]=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$



(b) La aplicación lineal $T_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tiene asociada, respecto de las bases canónicas, la matriz A_2 en cuyas columnas aparecen los transformados de la base canónica del espacio de partida, es decir, $A_2=[T_2(e_1)|T_2(e_2)|T_2(e_3)]$.

Puesto que T_2 asigna a cada vector su simétrico respecto del plano $x-y-z=0$, una primera forma de encontrar la matriz A_2 es calculando $T_2(e_i)$ directamente. Para ello calculamos la intersección de la recta que pasa por el punto correspondiente ($(1,0,0)$ en el caso de e_1, $(0,1,0)$ para e_2 y $(0,0,1)$ cuando se trate de e_3) y tiene la dirección del vector normal al plano con el propio plano. Esto nos da un punto (que es la proyección ortogonal) que es el punto medio del segmento de extremos e_i y $T_2(e_i)$ (éste último es el que queremos calcular). Así, en el caso de $T_2(e_1)$, la intersección de la recta

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\;\to\;\frac{x-1}{1}=\frac{y-0}{-1}=\frac{z-0}{-1}\;\to\;\left\{\begin{array}{l}x+y=1,\\y-z=0,\end{array}\right.$$

con el plano $x-y-z=0$ nos lleva al punto

$$\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ y-z=0 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{(1,0,0)+(a,b,c)}{2} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1/3, \\ b=2/3, \\ c=2/3, \end{array}\right.$$

con lo que $T_2(e_1) = \frac{1}{3}(1,2,2)^T$.

Observemos que una manera más sencilla de encontrar la intersección entre la recta y el plano es encontrar el valor del parámetro λ para el que el punto de la recta $(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)) = (1+\lambda, -\lambda, -\lambda)$ verifica la ecuación del plano, $x-y-z=0$, es decir, $1+\lambda-(-\lambda)-(-\lambda)=0$, con lo que $\lambda=-1/3$ y el punto buscado es el $(x,y,z)=(2/3,1/3,1/3)$.

Análogamente, para $T_2(e_2)$, la intersección de la recta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-0}{-1} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+z=0, \\ y-z=1, \end{array}\right.$$

con el plano $x-y-z=0$ nos lleva al punto

$$\left.\begin{array}{r} x+z=0 \\ y-z=1 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right) = \frac{(0,1,0)+(a,b,c)}{2} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=2/3, \\ b=1/3, \\ c=-2/3, \end{array}\right.$$

con lo que $T_2(e_2) = \frac{1}{3}(2,1,-2)^T$.

Finalmente, para $T_2(e_3)$, la intersección de la recta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z-1}{-1} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=0, \\ y-z=-1, \end{array}\right.$$

con el plano $x-y-z=0$ nos lleva al punto

$$\left.\begin{array}{r} x+y=0, \\ y-z=-1 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{(0,0,1)+(a,b,c)}{2} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=2/3, \\ b=-2/3, \\ c=1/3, \end{array}\right.$$

con lo que $T_2(e_3) = \frac{1}{3}(2,-2,1)^T$.

De esta forma,

$$A_2 = [T_2(e_1)|T_2(e_2)|T_2(e_3)] = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Una segunda forma de plantear el problema es hallando las imágenes de algunos vectores cuyo transformado sea fácil de calcular. Así, el transformado de cualquier vector que esté sobre la recta que pasa por el origen y tiene la dirección del vector normal al plano, $(1,-1,-1)^T$, será su opuesto (pues buscamos el simétrico; si nos pidieran la proyección ortogonal, su imagen sería el vector nulo). Por ejemplo, $T_2(1,-1,-1)^T = -(1,-1,-1)^T = (-1,1,1)^T$. Por otro lado, el simétrico de cualquier vector del propio plano será el mismo vector. De esta forma, elegimos dos vectores cualesquiera linealmente independientes que estén en el plano (por ejemplo, $(1,1,0)^T$ y $(1,0,1)^T$) con lo que $T_2(1,1,0)^T = (1,1,0)^T$ y $T_2(1,0,1)^T = (1,0,1)^T$. Con este procedimiento, una posibilidad es plantear el sistema de ecuaciones vectoriales, donde, por comodidad llamamos $a=(-1,1,1)^T$, $b=(1,1,0)^T$, $c=(1,0,1)^T$,

$$\left\{\begin{array}{l} T_2([1,-1,-1]^T) = T_2(e_1-e_2-e_3) = T_2(e_1)-T_2(e_2)-T_2(e_3) = a \\ T_2([1,1,0]^T) = T_2(e_1+e_2) = T_2(e_1)+T_2(e_2) = b \\ T_2([1,0,1]^T) = T_2(e_1+e_3) = T_2(e_1)+T_2(e_3) = c \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} T_2(e_1) = \frac{1}{3}(a+b+c) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T, \\ T_2(e_2) = b - T(e_1) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3})^T, \\ T_2(e_3) = c - T(e_1) = (\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3})^T, \end{array}\right.$$

que en este caso se resuelve trivialmente (en general, lo resolveremos mediante eliminación de Gauss).

Por tanto, obtenemos nuevamente que

$$A_2 = [T_2(e_1)|T_2(e_2)|T_2(e_3)] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Conviene asegurarse de que la matriz encontrada es la correcta comprobando que

$$A_2[1,-1,-1]^T = [-1,1,1]^T, \quad A_2[1,1,0]^T = [1,1,0]^T \quad A_2[1,0,1]^T = [1,0,1]^T.$$

Otra forma de encontrar A_2, por este segundo planteamiento, es escribir matricialmente las igualdades que hemos obtenido:

$$A_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad A_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad A_2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad A_2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

de donde deducimos

$$A_2=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz inversa que aparece la hemos calculado aplicando el método de Gauss–Jordan:

$$\begin{aligned}
[C|I] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \\
&\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 6 & 6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 6 & 0 & 4 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right] \\
&\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right]=[I|C^{-1}].
\end{aligned}$$

Los distintos pasos que hemos dado al aplicar el proceso de eliminación a la matriz *ampliada* nos han permitido evitar que aparezcan fracciones hasta el resultado final (aunque tampoco debe ser una tragedia que aparezcan en los cálculos intermedios).

Observemos que si nos piden la proyección ortogonal sobre el plano $x-y-z=0$, para calcular la matriz A correspondiente, podemos plantear

$$T(1,-1,-1)^T=(0,0,0)^T,\qquad T(1,1,0)^T=(1,1,0)^T,\qquad T(1,0,1)^T=(1,0,1)^T.$$

(c) La aplicación T_3 aparece como la composición de T_1 y T_2:

$$T_3(\mathbf{x})=T_2(T_1(\mathbf{x}))=A_2(A_1\mathbf{x})=(A_2A_1)\mathbf{x}$$

es decir, $A_3=A_2A_1$:

$$A_3=A_2A_1=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

De esta forma, el transformado del vector v es

$$T_3(v)=A_3v=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

7. Ejercicios.

Ejercicio 1. Resolver los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= 3 \\ 2x_1+3x_2+x_3 &= 6 \\ x_1+5x_2+2x_3 &= 8 \end{aligned}\right.\qquad\left\{\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3 &= 5 \\ 2x_1+4x_2-x_3 &= 7 \\ x_1-x_2 &= 1 \end{aligned}\right.\qquad\left\{\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_3 &= 1 \\ x_1-x_2+2x_3 &= -1 \\ x_1+x_2+3x_3 &= 1 \end{aligned}\right.$$

Ejercicio 2. Resolver los siguientes sistemas y escribir la solución en forma vectorial paramétrica:

$$\left\{\begin{aligned} x_1+x_2+2x_3+2x_4 &= 0 \\ x_1+x_2-3x_3-3x_4 &= 0 \\ x_1+x_2+4x_3+4x_4 &= 0 \\ x_1+x_2+5x_3+5x_4 &= 0 \end{aligned}\right.\qquad\left\{\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3 &= 3 \\ 2x_1+4x_2+3x_3+x_4 &= 9 \\ -x_1-2x_2+x_3+x_4 &= 2 \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\ x_1+x_2+x_3+x_4 = 1\right.\qquad\left\{\ x_1=x_4 = 2\right.$$

Ejercicio 3. Discutir, según los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$, el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+\ y+\ z & = & a \\ x+ay-\ z & = & 1 \\ 3x+\ y+bz & = & 2 \\ x-\ y-\ z & = & 1 \end{array}\right.$$

Ejercicio 4. Consideremos el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & a & 1 \\ b & 4 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ b-4 \end{bmatrix}.$$

Determinar las condiciones a satisfacer por a y b para que dicho sistema sea:

1. incompatible;
2. compatible determinado;
3. compatible indeterminado.

Ejercicio 5. Dados los vectores de $\mathbb{R}^5$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \ y \qquad v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

1. ¿Son v_1, v_2, v_3 y v_4 linealmente independientes?
2. ¿Es v_4 combinación lineal de v_1, v_2 y v_3?
3. ¿Es v_1 combinación lineal de v_2, v_3 y v_4?
4. ¿Es v_4 combinación lineal de v_1 y v_2?
5. ¿Es v_4 combinación lineal de v_2 y v_3?
6. ¿Son v_1, v_2 y v_3 linealmente independientes?

Ejercicio 6. ¿Para qué valores de a y b se verifica que el vector $(0, a, b, 1)$ pertenece al subespacio vectorial

$$Gen\{(1, 2, 3, 4), (1, 0, 3, 1)\}?$$

Ejercicio 7.

1. Encontrar los vectores $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$ para los que es compatible el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1+\ x_2 \qquad +x_4 & = & b_1, \\ 2x_1 \qquad +3x_3+x_4 & = & b_2, \\ 2x_2+\ x_3 \qquad & = & b_3, \\ x_1+\ x_2+4x_3 \qquad & = & b_4, \end{array}\right.$$

2. Describir mediante una ecuación los vectores $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$ que pertenecen al conjunto

$$Gen\{(1, 2, 0, 1), (1, 0, 2, 1), (0, 3, 1, 4), (1, 1, 0, 0)\}.$$

Ejercicio 8. Calcular unos vectores tales que el subespacio generado por ellos coincida con el conjunto solución del sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 \qquad +x_3-x_4+2x_5 & = & 0, \\ -x_1+2x_2 \qquad +x_4 \qquad & = & 0, \\ -x_1+2x_2+x_3 \qquad +2x_5 & = & 0. \end{array}\right.$$

Ejercicio 9. (Comparar con los resultados obtenidos en el Ejercicio 4) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal dada por

$$f(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & a & 1 \\ b & 4 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Determinar las condiciones a satisfacer por a y b para que el vector $v = (-1, 3, 2, b-4)$ verifique respectivamente:

1. No pertenezca a la imagen de f.
2. Sea la imagen de un único vector de $\mathbb{R}^3$.
3. Sea la imagen de infinitos vectores de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 10. Encontrar ecuaciones implícitas de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

1. $E = Gen\{(-1, 1, 0, 1), (2, 0, 1, -3)\}$.
2. $E = Gen\{(-1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, -2), (0, 2, 1, -1)\}$.
3. $E = Gen\{(1, 1, 1, -1)\}$.
4. $E = Gen\{(1, -1, 0, 0), (7, -7, 3, 9), (0, 0, 1, 1)\}$.

Ejercicio 11. Encontrar los vectores de $\mathbb{R}^4$ tales que la suma de sus componentes es 2 y, además, sus componentes segunda y cuarta son iguales.

Ejercicio 12. Encontrar la matriz 2×2 que representa en $\mathbb{R}^2$: (a) la proyección ortogonal sobre el eje OX; (b) la proyección ortogonal sobre el eje OY; (c) la simetría respecto del eje OX; (d) la simetría respecto del eje OY.

Ejercicio 13. Sea r la recta de ecuación $x + 2y = 0$.

(a) Calcular la matriz de la proyección ortogonal sobre r.

(b) Calcular la matriz de la simetría respecto de r.

Tema 5.- Álgebra de Matrices.

1. Operaciones con matrices. Propiedades.
2. Matriz inversa de una matriz cuadrada.
3. Matrices elementales. Método de Gauss-Jordan.
4. Factorización $A = LU$ o $PA = LU$ de una matriz.
5. Determinantes: Definición y propiedades. Regla de Cramer.
6. Ejercicios.

En este tema vamos a considerar las operaciones con matrices (reales) y sus propiedades. En los temas anteriores ya hemos hecho uso de la terminología y operaciones matriciales, así como de algunos resultados básicos asociados al álgebra matricial, puesto que ya eran conocidos en los casos de dimensión baja. Aunque en este tema también citemos propiedades ya conocidas, y utilizadas, incidiremos en los aspectos que sean más relevantes y en la interpretación de la reducción a forma escalonada de una matriz como la multiplicación sucesiva de dicha matriz por cierto tipo de matrices.

1. Operaciones con matrices. Propiedades.

Definición.

Suma de matrices: Dadas dos matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ con las mismas dimensiones $m \times n$, la matriz suma $A + B$ es la matriz $C = [c_{ij}]$ con entradas $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Producto de un número por una matriz: Dada una matriz $A = [a_{ij}]$ y un escalar α (número), la matriz producto αA es la matriz $\alpha A = [\alpha a_{ij}]$.

Producto de matrices: Dada una matriz $A, m \times n$ y una matriz $B, n \times p$, la matriz producto AB es la matriz $C = [c_{ij}]$ de dimensiones $m \times p$ con entradas $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$. En el caso de una matriz A cuadrada, las potencias A^r de exponente natural $r = 1, 2, \dots$ están definidas mediante $A^2 = AA$, $A^3 = A^2 A, \dots$

Matriz Transpuesta: Dada una matriz A de dimensiones $m \times n$, su matriz transpuesta (o traspuesta) es la matriz, que denotaremos mediante A^T, de dimensiones $n \times m$, cuyo elemento $(h, j), h = 1, \dots, n;\ j = 1, \dots m$ es el elemento a_{jh} de la matriz A.

Se dice que una matriz A es **simétrica** si coincide con su transpuesta, $A^T = A$ (para lo cual A tiene que ser cuadrada).

No vamos a detallar aquí cada una de las propiedades de las operaciones matriciales, aunque sí citamos algunas a continuación.

(Algunas) Propiedades.

(1) El **producto** de matrices **no es conmutativo**, es decir, dadas dos matrices A y B **puede suceder** que $AB \neq BA$ aunque ambos productos tengan sentido y los resultados sean matrices con las mismas dimensiones (cosa que sucede si A y B son matrices cuadradas del mismo orden). No obstante:

- Hay matrices cuadradas que conmutan con cualquier otra del mismo orden. Dichas matrices son los múltiplos de la matriz identidad. Siendo I la matriz identidad de orden n, para cualquier matriz A de orden n y para cualquier escalar α se verifica que
$$(\alpha I)\, A = A\, (\alpha I) = \alpha A.$$
- Hay parejas de matrices que conmutan. **Ejercicio.-** Busca dos matrices A y B, cuadradas del mismo orden $n > 1$, tales que $AB = BA$ y de forma que ninguna de ellas sea un múltiplo de la identidad.

(2) La transpuesta de un producto es el producto de las transpuestas en orden inverso,
$$(AB)^T = B^T A^T.$$

(3) Si dos matrices (cuadradas del mismo orden) conmutan, $AB = BA$, es válida la fórmula del binomio de Newton, es decir, para $n = 1, 2, \dots$ se verifica que

- $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$,

- $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$,
- para un número natural genérico $n = 1, 2, \ldots$ se verifica que

$$\begin{aligned}(A+B)^n = &\ \binom{n}{0}A^nB^0 + \binom{n}{1}A^{n-1}B^1 + \cdots + \binom{n}{k}A^{n-k}B^k + \cdots + \binom{n}{n}A^{n-n}B^n = \\ = &\ A^n + nA^{n-1}B + \cdots + \binom{n}{k}A^{n-k}B^k + \cdots + nAB^{n-1} + B^n,\end{aligned}$$

siendo los coeficientes de las potencias $A^{n-k}B^k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, los números combinatorios

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}, \qquad 0! = 1.$$

En relación con el producto de matrices, notemos que cada columna de una matriz producto AB es una combinación lineal de las columnas de A. Los coeficientes de cada una de dichas combinaciones lineales vienen dados por la correspondiente columna de B.

Si A es una matriz $m \times n$, B una matriz $n \times p$ y denotamos por $b_1, \ldots, b_p$ a los vectores-columna de B (vectores pertenecientes a $\mathbb{R}^n$), tenemos que

$$AB = A \left[\begin{array}{c|c|c|c} \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_p \\ \\ \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \\ Ab_1 & Ab_2 & \ldots & Ab_p \\ \\ \end{array} \right].$$

De forma paralela, la matriz producto AB también puede ser descrita **por filas**: cada fila de AB es una combinación lineal de las filas de B, los coeficientes de cada una de dichas combinaciones lineales vienen dados por la correspondiente fila de A.

2. Matriz inversa de una matriz cuadrada.

Definición. Matriz inversa. Decimos que una matriz **cuadrada** A tiene inversa si existe una matriz X (cuadrada del mismo orden que A) tal que

$$AX = I \quad \text{y} \quad XA = I,$$

en cuyo caso, dicha matriz X, que es única, se denomina **la inversa de** A y se denota por A^{-1}.

Si una matriz A tiene inversa A^{-1}, entonces A^{-1} tiene inversa que es $\left[A^{-1}\right]^{-1} = A$.

Las matrices (cuadradas) que no tienen inversa suelen denominarse singulares y las que tienen inversa suelen denominarse **no-singulares** o regulares.

Observación.- Puede suceder que para una cierta matriz A pueda obtenerse otra matriz X de forma que AX o XA sea "una" matriz identidad y sin embargo la matriz A no tenga inversa. Esto sólo puede suceder para matrices no-cuadradas.

Si tenemos una matriz (real) $A, m \times n$, tal que cualquier sistema de ecuaciones $Ax = b, b \in \mathbb{R}^m$, tenga solución (no única), es decir el número de pivotes coincide con el número de filas, pero no con el número de columnas, cada uno de los sistemas $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^m$ tendrá infinitas soluciones. En particular, siendo $e_1, \ldots, e_m$ los vectores canónicos de $\mathbb{R}^m$, cada uno de los sistemas

$$Ax = e_1,\ Ax = e_2, \ldots, Ax = e_m$$

tendrá infinitas soluciones y podremos obtener una matriz X (de hecho podrán obtenerse muchas) tal que AX sea igual a la matriz identidad (de orden m). Esto sucede, por ejemplo, para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

La matriz

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

verifica que $AX = I$ pero sin embargo A no tiene inversa.

Por otra parte, de algunas igualdades matriciales referidas a una cierta matriz cuadrada A puede deducirse la existencia de su inversa y su expresión en función de A. Por ejemplo, si sabemos que A verifica que un cierto polinomio en A es igual a la matriz nula, pongamos por caso que

$$3A^7 - 4A^5 + A^4 - A^2 + 5A - 3I = 0,$$

operando sobre esta expresión tenemos que

$$3A^7 - 4A^5 + A^4 - A^2 + 5A = 3I \Longrightarrow A(3A^6 - 4A^4 + A^3 - A + 5I) = 3I$$

y, por tanto, la inversa de A es

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\big(3A^6 - 4A^4 + A^3 - A + 5I\big).$$

En lo que se refiere a la *aritmética* de las matrices no singulares, tenemos las siguientes propiedades.

Propiedades.- Sean A y B matrices cuadradas $n \times n$ y sea α un número.

(1) La matriz producto AB tiene inversa si, y sólo si, A y B tienen inversa en cuyo caso la inversa del producto es igual al producto de las inversas en orden contrario,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

En particular, si una matriz A tiene inversa, cualquier potencia $A^k, k = 1, 2, 3, \ldots$ tiene inversa y

$$\left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k.$$

(2) Un múltiplo αA de A tiene inversa si y sólo si $\alpha \neq 0$ y la matriz A tiene inversa. En dicho caso

$$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}.$$

(3) Aunque A y B tengan inversa, puede suceder que $A + B$ no tenga inversa. **Ejercicio.-** Busca un ejemplo.

Por otra parte, tenemos el siguiente teorema sobre la relación entre la resolución de sistemas de ecuaciones y la existencia de inversa de la matriz de los coeficientes (en caso de que sea cuadrada).

Teorema.- Consideremos una matriz **cuadrada** de orden n.

(1) La matriz A tiene inversa si, y sólo si, existe una matriz cuadrada X tal que $AX = I$, en cuyo caso dicha matriz X es la inversa de A. Es decir, dicha matriz X también verifica que $XA = I$.

(2) La matriz A tiene inversa si, y sólo si, para cada $y \in \mathbb{R}^n$ el sistema de ecuaciones $Ax = y$ es compatible. En dicho caso el sistema será compatible determinado y la solución es $x = A^{-1}y$.

(2') La matriz A tiene inversa si, y sólo si, $\mathrm{Col}\,(A) = \mathbb{R}^n$.

(3) La matriz A tiene inversa si, y sólo si, el sistema homogéneo $Ax = 0$ tiene solución única.

(3') La matriz A tiene inversa si, y sólo si, $\mathrm{Nul}\,(A) = \{0\}$.

(3") La matriz A tiene inversa si, y sólo si, los n vectores columna de A (vectores de $\mathbb{R}^n$) son linealmente independientes.

(4) La matriz A tiene inversa si, y sólo si, al reducir A a forma escalonada se obtienen n **pivotes**.

(5) La matriz A tiene inversa si, y sólo si, transforma cualquier conjunto de vectores linealmente independientes en un conjunto de vectores linealmente independientes.

3. Método de Gauss-Jordan. Matrices elementales.

3.1. Método de Gauss-Jordan.

Una matriz cuadrada $A, n \times n$, tiene inversa X si, y sólo si, la ecuación matricial $AX = I$ tiene solución. El método de Gauss-Jordan consiste en plantear el cálculo de la inversa de A como la resolución simultánea de los sistemas de ecuaciones que resultan al considerar cada uno de los vectores columna de X como vector incógnita y el correspondiente vector columna de I como término independiente. Si llamamos $X_j, j = 1, \dots, n$, a los vectores columna de la matriz incógnita X y $e_j, j = 1, \dots, n$, a los vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$, tenemos

$$AX = I \Longleftrightarrow AX_j = e_j, \quad j = 1, \dots, n \iff$$

$$A\left[\begin{array}{c|c|c|c} X_1 & X_2 & \dots & X_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{array}\right], \quad e_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \ (\leftarrow j) \ , \quad j = 1, \dots, n.$$

El método de Gauss-Jordan consiste en calcular la inversa de una matriz cuadrada A resolviendo simultáneamente los sistemas $AX_j = e_j, j = 1, 2, \dots, n$, mediante la reducción, de A, a forma escalonada por filas y, puesto que la matriz A tiene inversa si y sólo si se obtienen n pivotes, dividiendo cada fila por el pivote correspondiente obtenemos 1 en la posición de cada pivote y, pivotando hacia arriba podemos anular todos los elementos que están en cada columna, salvo el pivote que ocupa la correspondiente posición diagonal, con lo cual se obtiene como forma escalonada de A la matriz identidad y tenemos

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right] \xrightarrow[\text{pivotando hacia abajo}]{\text{posibles intercambios}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{*} & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & \boxed{*} & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{*} & * & * & \cdots & * \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{por su pivote}]{\text{dividiendo cada fila}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & \boxed{1} & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{1} & * & * & \cdots & * \end{array}\right] \xrightarrow[\text{hacia arriba}]{\text{pivotando}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \boxed{1} & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{1} & * & * & \cdots & * \end{array}\right],$$

es decir, mediante operaciones-fila obtenemos

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c|c} I & B \end{array}\right]$$

y, por tanto, la primera columna de la matriz B es la solución del sistema $Ax = e_1$, la segunda columna de la matriz B es la solución del sistema $Ax = e_2$, ..., es decir, cuando a la izquierda del esquema es posible obtener la matriz identidad, la matriz A tiene inversa y la matriz B que se obtiene a la derecha es la inversa de A.

Ejemplo.- Aplicando el método de Gauss-Jordan, calculemos, si existe, la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Haciendo operaciones fila en la matriz $[A|I]$ tenemos que obtener la matriz identidad en la posición que ocupa A.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{-1} & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 + 2F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{-1} & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 - 5F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{-1} & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-12} & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \left(\Rightarrow \begin{array}{c} \text{la matriz} \\ A \text{ tiene} \\ \text{inversa} \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\frac{1}{-1}F_1 \\ \frac{1}{-12}F_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{5}{12} & \frac{-2}{12} & -\frac{1}{12} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{F_1 - 3F_3 \\ F_2 - 2F_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -2 & 0 & -\frac{15}{12} & -1 + \frac{6}{12} & \frac{3}{12} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 - \frac{10}{12} & \frac{4}{12} & \frac{2}{12} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{5}{12} & \frac{-2}{12} & -\frac{1}{12} \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 + 2F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & -\frac{5}{4} + \frac{2}{6} & -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} & \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{2}{12} & \frac{4}{12} & \frac{2}{12} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{5}{12} & \frac{-2}{12} & -\frac{1}{12} \end{array}\right].$$

Por tanto la inversa de A es $\quad A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -11 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$

El esquema de resolución de la ecuación matricial $AX = I$ dado por el método de Gauss-Jordan puede aplicarse a la resolución de una ecuación matricial del tipo $AX = B$. Si la matriz A tiene inversa, mediante operaciones elementales (por filas) podremos pasar de la matriz $\left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right]$ a una matriz del tipo $\left[\begin{array}{c|c} I & M \end{array}\right]$ con lo cual la matriz M que obtenemos en la derecha es la solución de $AX = B$, es decir la matriz $X = M = A^{-1}B$. Si la matriz A no tiene inversa puede suceder que la ecuación matricial $AX = B$ no tenga solución o que tenga infinitas soluciones que se podrían obtener a partir de la forma escalonada que obtuviéramos.

3.2. Matrices elementales.

La reducción de una matriz, o de un sistema de ecuaciones, a forma escalonada mediante operaciones fila puede obtenerse mediante la multiplicación de la matriz considerada, o de los dos miembros de la igualdad en el caso de un sistema, por una cierta matriz que tiene inversa. Por ejemplo, si en una matriz A, o en un sistema $Ax = b$, hacemos una operación fila, la matriz resultante A', o el sistema resultante $A'x = b'$, son

$$A' = EA, \qquad (EA)x = Eb,$$

donde E es una matriz (cuadrada) que tiene inversa (con lo cual de la matriz EA o sistema $EAx = Eb$ podríamos obtener la matriz o sistema original) y que está asociada a la operación fila que hayamos hecho, no a la matriz sobre la que hacemos la operación fila.

Ejemplo.- Si en la matriz A siguiente hacemos la operación fila $F_4 - 2F_2$ obtenemos

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & -1 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\qquad\qquad} A' = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & -1 & 1 & 4 \\ -9 & -5 & -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

La matriz A' obtenida coincide con la matriz EA siendo E la matriz

$$E = E_{42}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que es la matriz que se obtiene si a la matriz identidad (de orden 4) le hacemos la operación fila considerada.

Cada uno de los tres tipos de operaciones elementales que hemos considerado tiene asociada una cierta matriz. Se llaman **matrices elementales** a las matrices, cuadradas, que se obtienen al hacer una operación elemental fila/columna sobre la matriz identidad. Las operaciones elementales que se consideran son:

(a) A una fila/columna se le suma un múltiplo de otra (distinta).

(b) Se intercambian dos filas/columnas.

(c) Se multiplica una fila/columna por un número distinto de cero.

Se obtienen las matrices:

(a) A una fila/columna se le suma un múltiplo de otra (distinta).

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{C'_j = C_j + \alpha C_i \\ (i > j)}]{F'_i = F_i + \alpha F_j} E_{ij}(\alpha) = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 \; \cdots & \cdots & \\ & & \vdots \;\; \ddots & & \\ & & \alpha \; \cdots \; 1 & \cdots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array}$$

(b) Matrices de permutación

$$I=\left[\begin{array}{cccc}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{array}\right]\xrightarrow[C_i\leftrightarrow C_j]{F_i\leftrightarrow F_j}E_{ij}=\begin{array}{cl}\left[\begin{array}{ccccccc}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&0&\cdots&1&&\\&&\vdots&\ddots&\vdots&&\\&&1&\cdots&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{array}\right]&\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow j\\ \\ \leftarrow i\\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

(c) Se multiplica una fila/columna por un número distinto de cero.

$$I=\left[\begin{array}{cccc}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{array}\right]\xrightarrow[C_i'=cC_i]{F_i'=cF_i}E_i(c)=\begin{array}{cl}\left[\begin{array}{ccccccc}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&c&&\cdots&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{array}\right]&\begin{array}{l}\\ \\ \\ \leftarrow i\\ \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

Propiedades.-

(a) La matrices elementales tienen inversa y sus respectivas inversas vienen dadas mediante

$$[E_{ij}(\alpha)]^{-1}=E_{ij}(-\alpha),\qquad [E_{ij}]^{-1}=E_{ij},\qquad [E_i(c)]^{-1}=E_i\left(\frac{1}{c}\right).$$

(b) Sea E una matriz elemental $n\times n$. Al multiplicar a la izquierda o la derecha por E

(b.1) Dada una matriz $A, n\times m$, la matriz $E\,A$ es la matriz que se obtiene de A al hacer sobre ella la **operación elemental-fila** asociada a la matriz E.

(b.2) Dada una matriz $B, m\times n$, la matriz $B\,E$ es la matriz que se obtiene de B al hacer sobre ella la **operación elemental-columna** asociada a la matriz E.

Es decir, si multiplicamos una matriz por una matriz de permutación, por ejemplo E_{12}, la matriz producto $E_{12}A$ es la matriz que se obtiene de A al intercambiar las filas 1 y 2. Por otra parte, una matriz producto BE_{12} es la matriz que se obtiene de B al intercambiar las columnas 1 y 2.

Ejemplo.- Si tenemos una matriz $A, n\times n$, al multiplicar dicha matriz por la matriz

$$B=\left[\begin{array}{cccc}1&&&\\&2&&\\&&\ddots&\\&&&n\end{array}\right]$$

tenemos que la matriz producto BA es la matriz que se obtiene de A al multiplicar: la primera fila por 1, la segunda **fila** por 2, ..., la $n-$ésima fila por n. Por otra parte, la matriz producto AB es la matriz que se obtiene de A al multiplicar: la primera columna por 1, la segunda **columna** por 2, ..., la $n-$ésima columna por n.

Ejemplo.- Sea E la matriz

$$E=\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&3&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right].$$

- La matriz producto EA (siendo A una matriz $4\times n$) es la matriz que se obtendría de A al hacer la operación fila $F_2'=F_2+3F_3$.
- La matriz producto BE (siendo B una matriz $m\times 4$) es la matriz que se obtendría de B al hacer la operación fila $C_3'=C_3+3C_2$.

Desde un punto de vista matricial, cuando por ejemplo aplicamos el método de Gauss-Jordan para obtener la inversa de una matriz A, lo que estamos haciendo es ir multiplicando a la izquierda en los dos miembros de la ecuación

$$AX = I$$

por las matrices elementales asociadas a las operaciones elementales fila que hacemos

$$\begin{aligned} AX = I \quad &\Leftrightarrow \quad E_1AX = E_1I \Leftrightarrow E_2E_1AX = E_2E_1 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad (E_p \cdots E_1)A\, X = E_p \cdots E_1 \equiv I\, X = E_p \cdots E_1 \end{aligned}$$

con lo cual la inversa de A es

$$A^{-1} = E_p \cdots E_1$$

que viene expresada como producto de matrices elementales. Además, la expresión anterior también da una factorización de A como producto de matrices elementales

$$A = \left[A^{-1}\right]^{-1} = [E_p \cdots E_1]^{-1} = E_1^{-1} \cdots E_p^{-1}.$$

4. Factorización $A = LU$ o $PA = LU$ de una matriz.

En términos generales, una factorización de un cierto tipo de una matriz A consiste en la expresión de dicha matriz A como producto de matrices, de un cierto tipo prefijado, que permite simplificar/reducir determinados problemas planteados sobre la matriz A. En concreto se conoce como factorización LU de una matriz $A, m \times n$, a la expresión de dicha matriz A como producto de dos matrices L y U siendo

- L una matriz cuadrada $m \times m$, triangular inferior, con elementos diagonales iguales a 1,
- U una matriz "triangular" superior de las mismas dimensiones que A.

Dicha factorización, cuando es posible, permite reducir el problema de la resolución de un sistema de ecuaciones $Ax = b \;\equiv\; LUx = b$ a la resolución consecutiva

- del sistema

  $$Lz = b \quad \equiv \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

  que es un sistema cuadrado, triangular inferior, y con solución única. La solución se puede obtener directamente mediante **sustitución progresiva**: despejando z_1 de la primera ecuación, $z_1 = b_1$, sustituyendo se puede despejar z_2 de la segunda ecuación,...

- y a continuación del sistema $Ux = z$, con la solución z obtenida de $Lz = b$,

  $$Ux = z \quad \equiv \quad \begin{bmatrix} \boxed{*} & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & \boxed{*} & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \boxed{*} & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}.$$

  La solución, o soluciones, de este último sistema $Ux = z$, rectangular en general, cuando existen, se pueden obtener mediante **sustitución regresiva**.

La determinación de la factorización LU de una matriz A es útil cuando, por ejemplo, es necesario resolver una gran cantidad de sistemas de ecuaciones $Ax = b$ para distintos términos independientes b, que se van obteniendo de manera sucesiva por algún proceso que puede necesitar de la solución de los sistemas que se van resolviendo. Es decir, se trata de no repetir el trabajo que se ha hecho para resolver un sistema $Ax = b$ cuando se cambia de término independiente.

No siempre es posible obtener la factorización LU de una matriz A. A continuación veremos que si podemos reducir la matriz A a forma escalonada utilizando **exclusivamente** operaciones fila del tipo

$$F_i + (\text{múltiplo})F_j, \qquad i > j,$$

entonces la matriz A tiene factorización LU donde la matriz U es la forma escalonada (por filas) resultante y la matriz L tiene debajo de la diagonal los coeficientes utilizados para anular los elementos que aparecen por debajo de la posición-pivote (en cada columna). Si se llega a una situación en la que tenemos un cero, en la que tiene que ser la posición-pivote, y debajo hay algún elemento no-nulo (en la columna correspondiente), entonces para obtener la forma escalonada es necesario hacer un intercambio de filas y la matriz A no tiene factorización LU.

No obstante, aunque una matriz A no tenga factorización LU, siempre puede obtenerse la llamada factorización $PA = LU$, siendo la matriz P una cierta **matriz de permutación**. Es decir, si sobre la matriz A hacemos ciertos intercambios de filas, obtenemos una matriz PA para la que es posible obtener la factorización LU.

Veamos en qué condiciones, y cómo, podemos obtener una factorización LU de una matriz A,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

- Si $a_{11} = 0$ y algún elemento $a_{j1} \neq 0$, la matriz A no tiene factorización y para obtener una factorización LU hay que recurrir a un intercambio de filas con lo cual obtendríamos la factorización LU de una matriz PA obtenida de A mediante intercambio de filas.

- Si $a_{11} = 0$ y todos los elementos de la primera columna son nulos, $a_{j1} = 0, j = 2, \ldots, m$, pasamos a trabajar con la siguiente columna.

- Si $a_{11} \neq 0$, podemos pivotar sobre este elemento para anular todos los elementos que están debajo $(j, 1)$, con $j = 2, ..., m$ mediante las operaciones

  $$F_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}F_1, \cdots, F_m - \frac{a_{m1}}{a_{11}}F_1$$

  y obtenemos

  $$A \longrightarrow A' = E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{m1}}{a_{11}} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{bmatrix}$$

  donde la matriz

  $$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{m1}}{a_{11}} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

  recoge todas las operaciones elementales que hemos hecho pivotando sobre el elemento $(1, 1)$. La matriz inversa de esta matriz es

  $$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{m1}}{a_{11}} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

  es decir, es la matriz que se obtiene al cambiar el signo de los coeficientes utilizados al pivotar.

- Ahora pasamos a trabajar sobre la submatriz que se obtiene al suprimir la primera fila y la primera columna de A' (la fila y columna del elemento pivote).
  - Si $a'_{22} = 0$, tenemos que comprobar si algún elemento $a'_{j2}, j > 2$ es no nulo y procederíamos como hemos descrito antes.
  - Si $a'_{22} \neq 0$ podemos anular los elementos que están en las posiciones $(j, 2), j = 3, \ldots, m$,
  - etc.

y así sucesivamente hasta agotar las filas o las columnas.

En resumen, si no necesitamos hacer intercambios de filas para pivotar *hacia abajo* llegaremos a una forma escalonada de A del tipo

$$(E_{m-1}\cdots E_2E_1)A = U = \left[\begin{array}{cccccc} \boxed{*} & * & * & \cdots & * & \cdots \\ 0 & 0 & \boxed{*} & \cdots & * & \cdots \\ & & & \ddots & \vdots & \cdots \\ & & & & \boxed{*} & \cdots \\ & & & & & \cdots \end{array}\right]$$

donde cada matriz E_k es una matriz triangular inferior del tipo

$$E_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & * & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & * & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -\alpha_{k+1,k} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -\alpha_{m,k} & & & 1 \end{bmatrix}$$

y su inversa es

$$E_k^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \alpha_{k+1,k} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & \alpha_{m,k} & & & 1 \end{bmatrix}.$$

De esta forma tenemos

$$(E_{m-1}\cdots E_2E_1)A = U \Longrightarrow A = (E_{m-1}\cdots E_2E_1)^{-1}U = \left(E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_{m-1}^{-1}\right)U$$

siendo la matriz $L = E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_{m-1}^{-1}$ una matriz triangular inferior con unos en la diagonal, de hecho la matriz L se obtiene sin más que situar los multiplicadores $\alpha_{i,k}, k > i$, en la correspondiente posición

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \alpha_{k+1,k} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \cdots & \cdots & \alpha_{m,k} & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Observaciones.

- Si en una cierta columna no hay que hacer ninguna operación porque los elementos por debajo del pivote sean nulos, los correpondientes multiplicadores α_{jk} son nulos y la correspondiente E_k es la matriz identidad.
- El producto de las matrices $E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_{m-1}^{-1}$ se obtiene, como consecuencia del orden en el que se hace el producto de matrices, conservando los unos de la diagonal y añadiendo todos los elementos (de las matrices E_k^{-1}) por debajo de la diagonal.
- Al ir obteniendo la forma escalonada U podemos ir almacenando los multiplicadores α_{jk} por debajo de los pivotes (en la posición de los elementos nulos que vamos obteniendo).

Ejemplo. Comprobemos que la siguiente matriz A tiene factorización LU y obtengamos dicha factorización

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Reducimos A a forma escalonada mediante operaciones fila

$$\begin{bmatrix} \boxed{-1} & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2+3F_1} \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{7} & 8 & 5 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3-\frac{-3}{7}F_2} U = \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{7} & 8 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{38}{7} & \frac{36}{7} \end{bmatrix}.$$

El único tipo de operación fila que hemos utilizado para obtener la forma escalonada U es la de pivotar hacia abajo (puesto que por tener elementos no-nulos en las posiciones pivote no ha sido necesario hacer intercambio de filas), es decir sólo hemos hecho operaciones fila del tipo (fila) + (múltiplo de alguna fila anterior). Por tanto, la matriz A tiene factorización LU y, teniendo en cuenta las operaciones filas que hemos hecho sobre A para obtener U, tenemos que $U = E_2E_1A$, siendo

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{7} & 1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto $A = (E_2E_1)^{-1}U = \left(E_1^{-1}E_2^{-1}\right)U$ siendo

$$L = E_1^{-1}E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{7} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{7} & 1 \end{bmatrix}.$$

Desde un punto de vista operativo, los elementos de la matriz L que están debajo de la diagonal pueden irse almacenado simultáneamente con la matriz U de forma que no sea preciso llegar al final del proceso para tener la matriz L. Almacenado en las posiciones que vamos anulando de la forma escalonada los (opuestos de los) coeficientes de las operaciones fila, que son los coeficientes que aparecerán en la matriz L, tenemos

$$\begin{bmatrix} \boxed{-1} & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2+3F_1} \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 2 & 3 & 0 \\ \boxed{\frac{3}{-1}} & \boxed{7} & 8 & 5 \\ \boxed{0} & -3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3-\frac{-3}{7}F_2} \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 2 & 3 & 0 \\ \boxed{-3} & \boxed{7} & 8 & 5 \\ \boxed{0} & \boxed{\frac{-3}{7}} & \frac{38}{7} & \frac{36}{7} \end{bmatrix}$$

que se corresponde con las matrices L y U siguientes,

$$U = \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{7} & 8 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{38}{7} & \frac{36}{7} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{-3} & 1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{\frac{-3}{7}} & 1 \end{bmatrix}.$$

Si cuando en la posición $(2,2)$ hemos obtenido 7 (y hemos seguido pivotando hacia abajo) hubiéramos obtenido cero (y todo lo demás igual), para seguir calculando la forma escalonada habríamos necesitado intercambiar las filas 2 y 3 (puesto que debajo del cero citado tendríamos un elemento no-nulo) y la matriz A considerada no tendría factorización LU en el sentido citado. No obstante, haciendo un intercambio de filas tendríamos una matriz PA para la cual podría obtenerse la factorización LU en el sentido considerado.

Ejercicio resuelto
Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

a) Encontrar, cuando exista, la factorización LU de la matriz A según los valores de a.

b) Para $a = 5$, usar dicha factorización para resolver el sistema $Ax = b$, siendo $b = (3, 4, 3)^T$.

(a) Para encontrar la factorización LU de una matriz aplicamos la eliminación de Gauss pero solamente sumando a una fila un múltiplo de otra (no se puede ni intercambiar filas ni multiplicar una fila por un número distinto de cero):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \frac{F_2-2F_1}{F_3+F_1} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a-4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \frac{F_3-\frac{1}{a-4}F_2}{(a\neq 4)} \longrightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a-4 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{3a-11}{a-4} \end{bmatrix}$$

Hemos llegado a una matriz escalonada superior U siempre que $a \neq 4$, porque, si $a = 4$, en la posición pivote aparece un cero y, por debajo de ella, hay elementos no nulos, con lo que para anularlos necesitaríamos intercambiar filas, operación no permitida en nuestro cálculo de la LU.

De esta forma, concluimos que cuando $a = 4$ no existe factorización LU. En los demás casos, la matriz triangular inferior L (con unos en la diagonal) y la matriz escalonada superior U pedidas son

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{a-4} & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a-4 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{3a-11}{a-4} \end{bmatrix}, \qquad a \neq 4.$$

Recordemos que los elementos l_{ij} de L que aparecen por debajo de la diagonal principal corresponden, con el signo opuesto, al número de veces que a la fila i le hemos sumado la j. Así, $l_{21} = 2$ porque hicimos $F_2 - 2 \cdot F_1$, mientras que $l_{31} = -1$ porque hicimos $F_3 + 1 \cdot F_1$ y $l_{32} = \frac{1}{a-4}$ puesto que hicimos $F_3 - \frac{1}{a-4} \cdot F_2$.

No olvidemos comprobar con las matrices L y U halladas, para detectar algún posible error, que $LU = A$.

(b) Para $a = 5$ tenemos $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. Además nos dan el vector $b = (3, 4, 3)^T$.

Para resolver, mediante la factorización $A = LU$, el sistema $Ax = b$, resolvemos dos sistemas triangulares: primero $Ly = b$ y a continuación $Ux = y$.

El primero de ellos, se resuelve mediante sustitución progresiva (es decir, primero calculamos con la primera ecuación y_1, después introducimos este valor en la segunda y calculamos y_2, ...):

$$Ly = b \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{lcl} y_1 & = & 3 \\ 2y_1 + y_2 & = & 4 \\ -y_1 + y_2 + y_3 & = & 3 \end{array} \right\} \iff y = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

El segundo sistema, $Ux = y$, se resuelve mediante sustitución regresiva (de la tercera ecuación encontramos x_3, introducimos este valor en la segunda y calculamos x_2, ...):

$$Ux = y \iff \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 3 \\ x_2 - x_3 & = & -2 \\ 4x_3 & = & 8 \end{array} \right\} \iff x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

No olvidemos comprobar que la solución hallada es la correcta, es decir, que verifica el sistema original $Ax = b$.

Ejercicio resuelto
Consideremos los vectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}, \quad v_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Encontrar la factorización LU de $A = [v_1|v_2|v_3|v_4|v_5]$, según los valores de $a \in \mathbb{R}$.

Para encontrar la factorización LU de una matriz aplicamos la eliminación de Gauss pero solamente sumando a una fila un múltiplo de otra (no se puede ni intercambiar filas ni multiplicar una fila por un número distinto de cero):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & a & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - 2F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & a & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, la factorización LU de A existe para cualquier valor del parámetro a puesto que tras los dos primeros pasos del proceso de eliminación llegamos (sin necesidad de intercambiar filas o multiplicar una fila por una constante no nula) a la matriz escalonada superior, a la que llamaremos U,

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & -2 \end{bmatrix}$$

(observemos que sigue siendo escalonada cuando $a + 1 = 0$, pues aunque el pivote se anule y la cuarta columna deje de ser pivote, no hay ningún elemento no nulo debajo de él). Por tanto, no es necesario separar los casos $a + 1 = 0$ y $a + 1 \neq 0$.

Para determinar la matriz cuadrada $L = [l_{ij}]$ (triangular inferior con unos en la diagonal) basta con fijarse en los coeficientes de las combinaciones lineales que hemos llevado a cabo. Así, puesto que hemos hecho $F_2 - 2F_1$ (entonces $l_{21} = +2$), $F_3 - F_1$ (entonces $l_{31} = +1$) y $F_3 + F_2$ (entonces $l_{32} = -1$) la matriz L será

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

con lo que la factorización pedida, válida para $a \in \mathbb{R}$, es

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Conviene comprobar que el producto de las matrices L y U da A, para tener garantía de que no nos hemos equivocado.

5. Determinantes: Definición y propiedades. Regla de Cramer.

El **determinante** de una matriz cuadrada es un número que depende de las entradas de la matriz. A pesar de lo complicada que pueda ser la definición, tiene varias propiedades importantes en relación con: operaciones fila y operaciones columna sobre la matriz, dependencia e independencia lineal (de las filas y de las columnas), producto de matrices, etc. Vamos a describir los determinantes por sus propiedades. Para ello definimos el determinante de una matriz de forma recursiva: el determinante de una matriz 1×1 es la entrada de la matriz $\det(a) = a$, el determinante de una matriz 2×2 y de una matriz 3×3 también son conocidos por el alumno, así como sus propiedades. Para dichos determinantes y para determinantes de orden superior utilizamos como definición el desarrollo por los elementos de una fila, que reduce un determinante de orden n al cálculo de n determinantes de orden $n-1$.

5.1. Definición y propiedades.

Si en la matriz A, de orden n, suprimimos la fila r y la columna s, se obtiene una matriz de orden $n-1$ que denotamos por A_{rs}.

Definición. (recursiva)

- Determinante de orden 2: $\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

- Determinante de orden $n = 3, 4, \dots$ (Desarrollo por los elementos de la primera fila)

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \cdots + (-1)^{1+j}a_{1j}\det(A_{1j}) + \cdots + (-1)^{1+n}\det(A_{1n}).$$

Ejemplo. El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos diagonales,

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \cdots 0 \\ \vdots & B \end{bmatrix} = a_{11}\det(B), \qquad \det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Teorema. (Desarrollo por los elementos de una fila o columna)

- **Desarrollo por los elementos de una fila.** Para cada $i = 1, 2, \dots, n$ se verifica

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\det(A_{ij}).$$

- **Desarrollo por los elementos de una columna.** Para cada $j = 1, 2, \dots, n$ se verifica

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\det(A_{ij}).$$

Propiedades. Determinantes y operaciones-fila.

(1) Si en una matriz se intercambian dos filas (distintas) el determinante cambia de signo.

(2) Si en una matriz una fila se multiplica por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número.

(3) Si en una matriz a una fila se le suma un múltiplo de otra fila (distinta), el determinante no cambia.

(4) Si reducimos a forma escalonada U una matriz cuadrada A mediante operaciones-fila que sean o bien intercambio de filas o suma a una fila de un múltiplo de otra, entonces

$$\det(A) = \pm\det(U) = \pm \text{producto de los elementos diagonales de U}$$

donde el signo $\pm = (-1)^r$ depende de que el número r de intercambios de fila que se hagan sea par o impar.

(5) $\det(A) = 0 \Longleftrightarrow \text{rango}(A) = \dim[\text{Col}(A)] < n \Longleftrightarrow$ los vectores columna de A son linealmente dependientes $\Longleftrightarrow$ los vectores fila de A son linealmente dependientes.

Los determinantes tienen dos propiedades básicas: una de ellas es la **linealidad** en cada fila y en cada columna (propiedad **(8)** que se cita a continuación) y la otra es la **antisimetría** (propiedad **(1)** citada anteriormente) tanto respecto a filas como a columnas.

Propiedades (continuación).

(6) $\det(A^T) = \det(A)$. Como consecuencia, en cada una de las propiedades anteriores podemos sustituir filas por columnas.

(7) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Si A tiene inversa, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

(8) La función determinante es lineal en cada columna (y en cada fila). Es decir, si tenemos por ejemplo una columna v_j expresada como combinación lineal de dos vectores $v_j = \alpha v'_j + \beta v''_j$, se verifica

$$\det\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} v_1 & \cdots & v_j & \cdots & v_n \end{array}\right] = \alpha\det\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} v_1 & \cdots & v'_j & \cdots & v_n \end{array}\right] + \beta\det\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} v_1 & \cdots & v''_j & \cdots & v_n \end{array}\right].$$

5.2. Regla de Cramer. Fórmula de la inversa.

La regla de Cramer y la fórmula compañera de la matriz inversa de una matriz dada son dos resultados que tienen cierto interés desde el punto de vista teórico o cuando se trabaja en dimensión pequeña (dos o tres). Desde el punto de vista numérico en dimensión grande son completamente ineficientes.

Para establecer la relación entre las dos fórmulas, notemos que si tenemos una matriz cuadrada A de orden n, entonces son equivalentes:

- $Ax = b$ es un sistema compatible (determinado) para cualquier $b \in \mathbb{R}^n$.
- Siendo $e_1, \cdots, e_n$ los vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$, cada uno de los sistemas de ecuaciones

  $$Ax = e_1, \cdots, Ax = e_n$$

  es un sistema compatible (determinado).
- Al reducir A a forma escalonada se obtienen n pivotes.
- $\det(A) \neq 0$.
- La matriz A tiene inversa.

Además, siendo $\det(A) \neq 0$, la solución de cada uno de los sistemas

$$Ax = e_1, \cdots, Ax = e_n$$

es la correspondiente columna de la matriz inversa de A. Una (la) matriz cuadrada X de orden n es la inversa de A si verifica $AX = I$. Interpretando esta igualdad matricial columna por columna, tenemos

$$\left[\begin{array}{c} \\ A \\ \\ \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c|c|c} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{array}\right] \Longleftrightarrow AX_k = e_k,\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Por otra parte, dado un término independiente arbitrario $b \in \mathbb{R}^n$, puesto que

$$b = b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n$$

la solución del sistema de ecuaciones $Ax = b$ es la correspondiente combinación lineal de las soluciones de los sistemas $Ax = e_1, \ldots, Ax = e_n$,

$$x = b_1 X_1 + \ldots + b_n X_n = A^{-1} b.$$

Dada una matriz cuadrada A de orden n, un vector columna $b \in \mathbb{R}^n$ y un índice $i = 1, 2, \ldots, n$, denotamos por $A_i(b)$ a la matriz que se obtiene al sustituir en A la columna $i-$ésima por el vector b. Es decir, siendo $a_1, \cdots, a_n$ los vectores columna de A,

$$A_i(b) = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} & & & & \\ a_1 & \cdots & b & \cdots & a_n \\ & & & & \end{array}\right].$$
$$\begin{array}{c}\uparrow \\ \text{columna } i\end{array}$$

La matriz cuyas entradas son

$$\det[A_r(e_s)] = \left[\begin{array}{c} \text{desarrollando por} \\ \text{los elementos} \\ \text{de la columna } r \end{array}\right] = (-1)^{r+s} \det[A_{rs}]$$

se suele denominar **matriz adjunta** de A (cuidado: no en todos los textos significa lo mismo este nombre),

$$\operatorname{adj}(A) = \left[\begin{array}{cccc} \det[A_{11}] & -\det[A_{12}] & \cdots & \pm\det[A_{1n}] \\ -\det[A_{21}] & \det[A_{22}] & \cdots & \mp\det[A_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm\det[A_{n1}] & \mp\det[A_{n2}] & \cdots & \det[A_{nn}] \end{array}\right].$$

Teorema. Sea A una matriz cuadrada de orden n con $\det(A) \neq 0$. Se verifica:

(1) (Regla de Cramer) Para cada $b \in \mathbb{R}^n$ el sistema de ecuaciones $Ax = b$ tiene solución única x dada por

$$x_i = \frac{\det[A_i(b)]}{\det(A)}, \quad x = \frac{1}{\det(A)} \left[\begin{array}{c} \det[A_1(b)] \\ \vdots \\ \det[A_i(b)] \\ \vdots \\ \det[A_n(b)] \end{array}\right].$$

(2) (Fórmula de la inversa) A tiene inversa y su inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} [\operatorname{adj}(A)]^T,$$

es decir, el elemento (i,j) de la matriz inversa de A es

$$\frac{1}{\det(A)} (-1)^{i+j} \det(A_{ji}).$$

Ejercicio resuelto
Consideremos la matriz

$$A = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 10 \\ 2 & 5 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \end{array}\right].$$

Calcular, razonadamente, el determinante de las matrices $B = -A^7$ y $C = 3A^{-1}$.

Calculemos en primer lugar el determinante de $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 10 \\ 2 & 5 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} F_2-3F_1 \\ F_3-2F_1 \\ F_4-2F_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} F_3-F_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_4+F_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \,.$$

Usando que $|A^7| = |A|^7$ y que, para una matriz $n \times n$, $|-D| = (-1)^n|D|$ obtenemos

$$|B| = |-A^7| = (-1)^4|A^7| = (-1)^4|A|^7 = |A|^7 = (-2)^7 = (-1\cdot 2)^7 = (-1)^7 2^7 = -2^7 = -128.$$

Teniendo en cuenta que si A es no singular entonces $|A^{-1}| = 1/|A|$, y que $|3D| = 3^n|D|$ obtenemos

$$|C| = |3A^{-1}| = 3^4|A^{-1}| = \frac{3^4}{|A|} = \frac{3^4}{-2} = -\frac{81}{2}.$$

Ejercicio resuelto

Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 10 \\ 2 & 5 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$.

a) Encontrar su factorización LU. Usando dicha factorización, resolver el sistema $Ax = b$, con $b = (3, 9, 9, 5)^T$.

b) Calcular, razonadamente, el determinante de las matrices $B = -A^9(2A)^T$ y $C = 3(5A)^{-1}$.

(a) Para encontrar la factorización LU de una matriz aplicamos la eliminación de Gauss pero solamente sumando a una fila un múltiplo de otra (no se puede ni intercambiar filas ni multiplicar una fila por un número distinto de cero):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 10 \\ 2 & 5 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} F_2-3F_1 \\ F_3-2F_1 \\ F_4-2F_1 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} F_3-F_2 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} F_4+F_3 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = U.$$

Es decir, la matriz triangular inferior L (con unos en la diagonal) y la matriz escalonada superior U pedidas son

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Recordemos que los elementos l_{ij} de L que aparecen por debajo de la diagonal principal corresponden, con el signo opuesto, al número de veces que a la fila i le hemos sumado la j. Así, $l_{21} = 3$ porque hicimos $F_2 - 3\cdot F_1$, mientras que $l_{31} = 2$ porque hicimos $F_3 - 2\cdot F_1$, $l_{41} = 2$ porque hicimos $F_4 - 2\cdot F_1$, $l_{32} = 1$ puesto que hicimos $F_3 - 1\cdot F_2$, $l_{42} = 0$ ya que hicimos $F_4 - 0\cdot F_2$ y $l_{43} = -1$ ya que hicimos $F_4 + 1\cdot F_3$

No olvidemos comprobar con las matrices L y U halladas, para detectar algún posible error, que $LU = A$.

Para resolver, mediante la factorización $A = LU$, el sistema $Ax = b$, con $b = (3, 9, 9, 5)^T$, resolvemos dos sistemas triangulares: primero $Ly = b$ y a continuación $Ux = y$.

El primero de ellos, se resuelve mediante sustitución progresiva (es decir, primero calculamos con la primera ecuación y_1, después introducimos este valor en la segunda y calculamos y_2, ...):

$$Ly = b \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{lcl} y_1 & = & 3 \\ 3y_1 + y_2 & = & 9 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 & = & 9 \\ 2y_1 - y_3 + y_4 & = & 5 \end{array} \right\} \to y = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

El segundo sistema, $Ux = y$, se resuelve mediante sustitución regresiva (de la cuarta ecuación encontramos x_4, introducimos este valor en la tercera y calculamos x_3, ...):

$$Ux = y \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 & = & 3 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 0 \\ -x_3 + 2x_4 & = & 3 \\ 2x_4 & = & 2 \end{array} \right\} \to x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

No olvidemos comprobar que la solución hallada es la correcta, es decir, que verifica el sistema original $Ax = b$.

(b) Calculemos en primer lugar el determinante de $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 10 \\ 2 & 5 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 2F_1 \\ F_4 - 2F_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left(F_3 - F_2 \right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(F_4 + F_3 \right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 2 = -2\ .$$

Calculamos los determinantes que nos piden

$$\begin{aligned} |B| &= |-A^9(2A)^T| = |-A^9||(2A)^T| = (-1)^4|A^9||2A| = (-1)^4|A|^9 2^4|A| = 2^4|A|^{10} \\ &= 2^4(-2)^{10} = 2^{14}, \\ |C| &= |3(5A)^{-1}| = 3^4|(5A)^{-1}| = 3^4\frac{1}{|5A|} = 3^4\frac{1}{5^4|A|} = 3^4\frac{1}{5^4(-2)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^4, \end{aligned}$$

donde las propiedades del determinante de una matriz A de dimensión n que hemos usado son

$$|-A| = (-1)^n|A|, \quad |aA| = a^n|A|, \quad |A^T| = |A|, \quad |A^n| = |A|^n, \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}\ ,$$

y que el determinante del producto de dos matrices es el producto de los determinantes, es decir, $|AB| = |A||B|$.

Ejercicio resuelto
Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & a \\ 0 & 1 & a-1 & a+1 \end{bmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

a) Determinar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que A admite factorización LU, especificando las matrices L y U.

b) Determinar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que la matriz A es invertible. Calcular, para dichos valores, el determinante de la matriz $B = [(-2A^3)^{-1}(A^T)^2]^{-1}$.

c) Para $a = 1$, encontrar unas ecuaciones implícitas del espacio columna de A, $Col(A)$, y un conjunto generador linealmente independiente del espacio nulo de A, $Nul(A)$.

Solución:

(a) Para encontrar la factorización LU de la matriz $A = [v_1|v_2|v_3|v_4]$ aplicamos la eliminación de Gauss pero solamente sumando a una fila un múltiplo de otra (no se puede ni intercambiar filas ni multiplicar una fila por un número distinto de cero).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & a \\ 0 & 1 & a-1 & a+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{c} F_2 - 2F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & a+1 \\ 0 & 1 & a-1 & a+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{c} F_3 + F_2 \\ F_4 + F_2 \end{array}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & a-1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_4 - [(a-1)/4]F_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(5-a)/4 \end{bmatrix} = U.$$

La factorización LU de A existe para todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ (existe también cuando $a = 1$ o cuando $a = 5$, pues aunque se anule el elemento U_{44}, la matriz sigue siendo escalonada superior: no hay ningún elemento nulo, debajo de una posición pivote que tenga un cero, que obligaría a intercambiar filas para poder llegar a una matriz escalonada).

Deducimos que la matriz triangular inferior L (con unos en la diagonal) y la matriz escalonada superior U pedidas son

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & (a-1)/4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(5-a)/4 \end{bmatrix}.$$

Recordemos que los elementos l_{ij} de L que aparecen por debajo de la diagonal principal corresponden, con el signo opuesto, al número de veces que a la fila i le hemos sumado la j. Así, $l_{21} = 2$ porque hicimos $F_2 - 2 \cdot F_1$, mientras que $l_{31} = -1$ porque hicimos $F_3 + 1 \cdot F_1$, $l_{41} = 0$ porque hicimos $F_4 + 0 \cdot F_1$, $l_{32} = -1$ puesto que hicimos $F_3 + 1 \cdot F_2$, $l_{42} = -1$ ya que hicimos $F_4 + 1 \cdot F_2$ y $l_{43} = \frac{a-1}{4}$ ya que hicimos $F_4 - \frac{a-1}{4} \cdot F_3$.

No olvidemos comprobar con las matrices L y U halladas, para detectar algún posible error, que $LU = A$.

(b) Del proceso de eliminación llevado a cabo en el apartado anterior deducimos que

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & a \\ 0 & 1 & a-1 & a+1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 - 2F_1 \\ F_3 + F_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & a+1 \\ 0 & 1 & a-1 & a+1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} F_3 + F_2 \\ F_4 + F_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & a-1 \end{vmatrix} = \left(F_4 - \tfrac{a-1}{4} F_3 \right) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(5-a)/4 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (-1) \cdot 4 \cdot \frac{(a-1)(5-a)}{4} = (a-1)(a-5). \end{aligned}$$

Por tanto, A es invertible cuando $a \neq 1, 5$ puesto que para dichos valores $|A| \neq 0$ y, por tanto, no tiene inversa si $a = 1$ o $a = 5$, pues se anula su determinante.

Calculemos el determinante de la matriz $B = [(-2A^3)^{-1}(A^T)^2]^{-1}$:

$$\begin{aligned} |B| &= |[(-2A^3)^{-1}(A^T)^2]^{-1}| = \frac{1}{|(-2A^3)^{-1}(A^T)^2|} = \frac{1}{|(-2A^3)^{-1}||(A^T)^2|} = \frac{1}{\frac{1}{|-2A^3|}|A^T|^2} = \frac{|-2A^3|}{|A|^2} \\ &= \frac{(-2)^4|A^3|}{|A|^2} = \frac{2^4|A|^3}{|A|^2} = 16|A| = 16(a-1)(a-5), \end{aligned}$$

donde las propiedades del determinante de una matriz A de dimensión n que hemos usado son

$$|aA| = a^n|A|, \quad |A^T| = |A|, \quad |A^k| = |A|^k, \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|},$$

y que el determinante del producto de dos matrices es el producto de los determinantes, es decir, $|AB| = |A||B|$.

(c) Si llamamos v_i a las columnas de A, $A = [v_1|v_2|v_3|v_4]$, entonces su espacio columna, $Col(A) = \text{Gen}\,\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, que está contenido en $\mathbb{R}^4$.

Dado un conjunto generador $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de un subespacio $E \subset \mathbb{R}^4$, encontrar las ecuaciones implícitas de E es hallar las condiciones que deben verificar las componentes de un vector de $\mathbb{R}^4$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, para que pertenezca a E, es decir, para que se pueda escribir como combinación lineal del conjunto generador, $x = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4$, es decir, para que existan esos escalares c_i, o lo que es equivalente, para que el sistema

$$(v_1|v_2|v_3|v_4)c = x, \quad \text{con} \quad c = (c_1, c_2, c_3, c_4)^T$$

sea compatible. Para exigir esto construimos la matriz ampliada $(v_1|v_2|v_3|v_4|x)$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & x_1 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & x_2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & x_4 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 + F_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & x_3 + x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & x_4 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{F_3 + F_2 \\ F_4 + F_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & x_3 + x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_4 + x_2 - 2x_1 \end{array}\right]$$

es decir, una ecuación implícita para $Col(A)$ es

$$2x_1 - x_2 - x_4 = 0.$$

La garantía de que el resultado al que hemos llegado es correcto se tiene comprobando que todos los vectores v_i verifican todas las ecuaciones implícitas obtenidas (una en nuestro caso).

Observemos, aunque no lo pide el enunciado, que de la eliminación gaussiana hecha deducimos que una base de $Col(A)$ es

$$B_{Col(A)} = \{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(al ver tras el proceso de eliminación que las tres primeras columnas son pivote, tenemos garantía de que las tres primeras columnas de la matriz A son linealmente independientes y, en consecuencia, forman una base). Por tanto, unas ecuaciones paramétricas de $Col(A)$ son

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, $dim(Col(A)) = 3$.

El espacio nulo de A está formado por los vectores $x \in \mathbb{R}^4$ que verifican $Ax = 0$. La eliminación llevada a cabo para estudiar el espacio columna de A (para $a = 1$) nos sirve también ahora para resolver dicho sistema $Ax = 0$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3+F_1]{F_2-2F_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_4+F_2]{F_3+F_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con lo que, tomando x_4 como variable libre (al ser la cuarta columna no pivote), obtenemos

$$\left. \begin{array}{l} x_4 \in \mathbb{R} \\ x_3 = 0 \\ x_2 = -2x_4 \\ x_1 = x_2 - 2x_3 - x_4 = -3x_4 \end{array} \right\} \to x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to Nul(A) = \text{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

y una base de $Nul(A)$ es $\{(3, 2, 0, -1)^T\}$. Conviene comprobar que este vector verifica el sistema $Ax = 0$.

Aunque no lo pide el enunciado, observemos que conjuntos de ecuaciones implícitas para $Nul(A)$, sin que sobre ninguna, son por ejemplo,

$$\left. \begin{array}{r} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{r} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ -x_2 - 2x_4 = 0, \\ 4x_3 = 0, \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{r} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_4 = 0, \\ x_3 = 0, \end{array} \right\}.$$

Es evidente que unas ecuaciones paramétricas para $Nul(A)$ son $x = x_4(-3, -2, 0, 1)^T$, $x_4 \in \mathbb{R}$ (escritas ya arriba) y que $dim(Nul(A)) = 1$.

Notemos que, como debe ser, se verifica $dim(Col(A)) + dim(Nul(A)) = n$, para una matriz A, $m \times n$. En nuestro caso, $dim(Col(A)) + dim(Nul(A)) = 3 + 1 = 4$.

Ejercicio resuelto

Consideremos, para $\gamma, \mu \in \mathbb{R}$, los vectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} \gamma+2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} \gamma \\ \gamma \\ \gamma \\ \gamma \end{bmatrix}, \quad v_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \mu \end{bmatrix}.$$

a) Determinar los valores de γ y μ para los que $\text{Gen}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = \mathbb{R}^4$ (es decir, que existen cuatro vectores linealmente independientes).

b) Consideremos la matriz $A = [\ v_1 \mid v_2 \mid v_4 \mid v_5\ ]$. Tomando $\gamma = -2$ y $\mu = 2$, encontrar la factorización LU de A y resolver, mediante dicha factorización, el sistema $Ax = v_3$.

c) Obtener la matriz canónica M de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = v_1 \quad \text{y} \quad T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = v_2.$$

(a) Construiremos una matriz 4×5 adjuntando los vectores dados, y posteriormente realizaremos la eliminación de Gauss. De esta forma, se cumplirá que $\text{Gen}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = \mathbb{R}^4$ (es decir, que existen cuatro vectores linealmente independientes) si tenemos un pivote en cada fila. Para aprovechar las operaciones de la eliminación en el apartado **(b)**, vamos a ordenar los vectores de la siguiente forma:

$$[v_1|v_2|v_4|v_5|v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \gamma & 1 & \gamma+2 \\ 1 & 2 & \gamma & 1 & 2 \\ 0 & -1 & \gamma & 1 & -2 \\ -1 & 0 & \gamma & \mu & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} F_2 - F_1 \\ F_4 + F_1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \gamma & 1 & \gamma+2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & -1 & \gamma & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2\gamma & \mu+1 & \gamma+4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} F_3 + F_2 \\ F_4 - F_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \gamma & 1 & \gamma+2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & 0 & \gamma & 1 & -2-\gamma \\ 0 & 0 & 2\gamma & \mu+1 & 2\gamma+4 \end{bmatrix}$$

Si $\gamma \neq 0$**:** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \gamma & 1 & \gamma+2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & 0 & \gamma & 1 & -2-\gamma \\ 0 & 0 & 2\gamma & \mu+1 & 2\gamma+4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} F_4 - 2F_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \gamma & 1 & \gamma+2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & 0 & \gamma & 1 & -2-\gamma \\ 0 & 0 & 0 & \mu-1 & 4\gamma+8 \end{bmatrix}.$

En este caso, la cuarta fila **no** tiene pivote si $\mu = 1$ y $\gamma = -2$.

Si $\gamma = 0$**:** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \mu+1 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} F_4 - (\mu+1)F_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu+6 \end{bmatrix}.$

En este caso, la cuarta fila **no** tiene pivote si $\mu = -3$.

En definitiva, se cumple que $\mathrm{Gen}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = \mathbb{R}^4$ en todos los casos, excepto si

$$\gamma = -2, \mu = 1, \quad \text{o si } \gamma = 0, \mu = -3.$$

Veamos que se llega al mismo resultado si se trabaja con los vectores en el orden que nos dan, es decir,

$$[v_1|v_2|v_3|v_4|v_5] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \gamma+2 & \gamma & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \gamma & 1 \\ 0 & -1 & -2 & \gamma & 1 \\ -1 & 0 & 2 & \gamma & \mu \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} F_2 - F_1 \\ F_4 + F_1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \gamma+2 & \gamma & 1 \\ 0 & 1 & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & \gamma & 1 \\ 0 & 1 & \gamma+4 & 2\gamma & \mu+1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} F_3 + F_2 \\ F_4 - F_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \gamma+2 & \gamma & 1 \\ 0 & 1 & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma-2 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & 2\gamma+4 & 2\gamma & \mu+1 \end{bmatrix}$$

Si $\gamma \neq -2$**:** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \gamma+2 & \gamma & 1 \\ 0 & 1 & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma-2 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & 2\gamma+4 & 2\gamma & \mu+1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} F_4 + 2F_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \gamma+2 & \gamma & 1 \\ 0 & 1 & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\gamma+2) & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4\gamma & \mu+3 \end{bmatrix}.$

En este caso, la cuarta fila **no** tiene pivote si $\gamma = 0$ y $\mu = -3$.

Si $\gamma = -2$**:** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & \mu+1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} F_4 - 2F_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu-1 \end{bmatrix}.$

En este caso, la cuarta fila **no** tiene pivote si $\mu = 1$.

En definitiva, se cumple que $\mathrm{Gen}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = \mathbb{R}^4$ en todos los casos, excepto si

$$\gamma = -2, \mu = 1;, \quad \text{o si } \gamma = 0, \mu = -3.$$

(b) Nos piden que encontremos la factorización LU de A y que, usándola, resolvamos $Ax = v_3$, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

A partir de la eliminación de Gauss realizada anteriormente para $\gamma = -2 \neq 0$ y $\mu = 2$ (la matriz A dada se obtiene simplemente borrando la quinta columna), se tiene:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Recordemos que los elementos l_{ij} de L que aparecen por debajo de la diagonal principal corresponden, con el signo opuesto, al número de veces que a la fila i le hemos sumado la j. Así, $l_{21} = 1$ porque hicimos $F_2 - 1 \cdot F_1$, $l_{31} = 0$ porque hicimos $F_3 - 0 \cdot F_1$, $l_{41} = -1$ ya que calculamos $F_4 + 1 \cdot F_1$, $l_{32} = -1$ puesto que hicimos $F_3 + 1 \cdot F_2$, $l_{42} = 1$ porque hicimos $F_4 - 1 \cdot F_2$, $l_{43} = 2$ porque hicimos $F_4 - 2 \cdot F_3$.

No olvidemos comprobar con las matrices L y U halladas, para detectar algún posible error, que $LU = A$.

Para resolver, mediante la factorización $A = LU$, el sistema $Ax = v_3$, resolvemos dos sistemas triangulares: primero $Ly = v_3$ y a continuación $Ux = y$.

El primero de ellos, se resuelve mediante sustitución progresiva (es decir, primero calculamos con la primera ecuación y_1, después introducimos este valor en la segunda y calculamos y_2, ...):

$$Ly = v_3 \iff \left\{ \begin{array}{lcr} y_1 & = & 0 \\ y_1 + y_2 & = & 2 \\ \quad - y_2 + y_3 & = & -2 \\ -y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 & = & 2 \end{array} \right\} \iff y = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Obsérvese que este vector coincide con la quinta columna de la forma escalonada del apartado **(a)**, cuando se sustituye $\gamma = -2$ y $\mu = 2$.

El segundo se resuelve mediante sustitución regresiva (de la cuarta ecuación encontramos x_4, introducimos este valor en la tercera y calculamos x_3, ...):

$$Ux = y \iff \left\{ \begin{array}{rcr} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_2 \quad\quad\quad & = & 2 \\ -2x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_4 & = & 0 \end{array} \right\} \iff x = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

No olvidemos comprobar que la solución hallada es la correcta, es decir, que verifica el sistema original $Ax = v_3$.

(c) La matriz M de la transformación lineal T es una matriz 4×2. Si escribimos dicha matriz por columnas: $M = [C_1|C_2]$, se cumple que $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2C_1 + C_2 = v_1$, $T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = -C_1 + C_2 = v_2$. Despejando, obtenemos $C_1 = \frac{1}{3}(v_1 - v_2)$, $C_2 = \frac{1}{3}(v_1 + 2v_2)$, es decir,

$$C_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \; C_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \to \quad M = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 5 \\ 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nótese que hemos planteado un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas vectoriales (cada columna de M). También se puede resolver planteando un sistema con incógnitas escalares, es decir, ocho ecuaciones con ocho incógnitas (los elementos de la matriz M). Este método es claramente más desaconsejable a medida que el número de filas de la matriz aumenta. Si la matriz es 40×2, es decir, si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{40}$ tal que $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = v_1 \in \mathbb{R}^{40}$ y $T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = v_2 \in \mathbb{R}^{40}$. la resolución con incógnitas vectoriales sería la misma ($C_1 = (v_1 - v_2)/3,\ C_2 = (v_1 + 2v_2)/3$), mientras que con incógnitas escalares tendríamos un sistema de ochenta ecuaciones lineales y ochenta incógnitas.

Otra alternativa sería plantear matricialmente $M\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = v_1$, $M\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = v_2$:

$$M\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [v_1|v_2] \quad \to \quad M = [v_1|v_2]\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1},$$

es decir,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 5 \\ 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

6. Ejercicios.

Ejercicio 1. Sean P_{12} y $A = [a_{ij}]$ las matrices cuadradas de orden 4 definidas por:

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad a_{ij} = \begin{cases} -3 & \text{si } i = j, \\ 2 & \text{si } i = j+1, \\ 1 & \text{si } i = j+2, \\ 0 & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

1. Explicar el resultado que se obtiene al multiplicar $P_{12}A$; al efectuar AP_{12}^T; y al multiplicar $P_{12}AP_{12}^T$.
2. Demostrar que la matriz P_{12} del apartado anterior es no singular y calcular su inversa.

Ejercicio 2. Encontrar todas las matrices cuadradas A de orden 2 tales que:

$$A \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} A, \qquad \text{con } \; a, b \in \mathbb{R},\ a \neq b.$$

Ejercicio 3. Encontrar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & a & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

admiten factorización LU. Realizar dicha factorización en los casos en que exista.

Ejercicio 4. Sea A una matriz $n \times n$ y supongamos que $\det(A) = -3$, calcula el determinante de las siguientes matrices:

1. $A^T, 2A, 2A^{-1}, (2A)^{-1}, 2A^3, A^4, AA^T$.
2. La matriz que se obtiene de A al multiplicarla por la izquierda por la matriz diagonal cuyos elementos diagonales son $(1, 2, \ldots, n)$.

Ejercicio 5. Sea A una matriz 6×6. Calcula el determinante de la matriz B, 7×7, que se obtiene al intercalar entre las filas 4 y 5 de A la fila $(0, 0, 2, 0, 0, 0, 0)$ y entre las columnas 2 y 3 de A la columna $(-3, 1, 0, -1, 2, 5, 3)$, es decir, A se obtiene de B suprimiendo la fila y la columna indicada (en las posiciones correspondientes).

Ejercicio 6. Consideremos los vectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ a \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} a \\ 2a-2 \\ -a-5 \\ -6 \end{bmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

y las matrices $A = [v_1|v_2|v_3|v_4]$ y $B = [v_1|v_2|v_3]$.

(c.1) Discutir el sistema $Bx = v_4$, según los valores de $a \in \mathbb{R}$.

(c.2) Determinar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que A admite factorización LU, especificando las matrices L y U.

(c.3) Determinar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que la matriz A es invertible. Calcular, para dichos valores, el determinante de la matriz $(-3A^4A^T)^{-1}$.

Tema 6.- El espacio $\mathbb{R}^n$.

1. Subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$.
2. Ejercicios.

En este tema estudiamos la estructura vectorial del espacio $\mathbb{R}^n$, de las $n-$uplas ordenadas de números reales, es decir, la estructura relacionada con las operaciones suma (de vectores) y multiplicación de un número (real) por un vector. El espacio $\mathbb{R}^n$ es uno de los modelos para el estudio de los denominados espacios vectoriales (generales). Sin entrar en más detalles y definiciones, un espacio vectorial es un conjunto de elementos sobre el que hay definida una operación suma (de dichos elementos) y una operación producto de un número por uno de dichos elementos. Por ejemplo, son espacios vectoriales:

- el conjunto de las matrices de unas dimensiones dadas, con la operación suma de matrices y producto de un escalar (real, complejo) por una matriz,
- el conjunto de todos los polinomios en una variable, con las operaciones suma de polinomios y producto de un escalar por un polinomio,
- el conjunto de todos los polinomios en una variable y con grado menor o igual que un cierto valor prefijado. Por ejemplo, el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual que 3.

1. Subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$.

Los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ serán los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que se pueden caracterizar mediante ecuaciones lineales homogéneas (ecuaciones implícitas en las n variables dadas por las coordenadas de un vector genérico). Como ya hemos visto al estudiar los espacios nulo y columna de una matriz, cualquier conjunto de vectores descrito como el conjunto de todas las combinaciones lineales de ciertos vectores también puede caracterizarse mediante ecuaciones lineales homogéneas. A la hora de manipular subespacios vectoriales recurriremos, de forma habitual, a su expresión mediante ecuaciones implícitas (como espacio nulo de una determinada matriz) o a su expresión mediante ecuaciones paramétricas (como subespacio generado por unos ciertos vectores o lo que es lo mismo como espacio columna de otra matriz). Una de las cuestiones que trataremos es el número mínimo de ecuaciones implícitas mediante las que se puede caracterizar un subespacio y el número mínimo de vectores que permiten generar dicho subespacio. En el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$, los subespacios vectoriales son, además del subespacio nulo $\{0\}$ y del total $\mathbb{R}^3$, las rectas y los planos que pasan por el origen de coordenadas. Recordemos que cualquier recta o plano se puede caracterizar mediante ecuaciones implícitas y mediante ecuaciones paramétricas. En $\mathbb{R}^3$, para caracterizar una recta que pasa por el origen de coordenadas necesitamos dos ecuaciones (no redundantes) o un vector, y para caracterizar un plano que pasa por el origen de coordenadas necesitamos una ecuación o dos vectores linealmente independientes (una base de dicho plano).

1.1. Subespacios vectoriales.

Definición. Se llama subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ a todo subconjunto no vacío $S \subset \mathbb{R}^n$ que verifica:

(1) Si un vector está en S, también lo está cualquiera de sus múltiplos, es decir,

$$v \in S \Longrightarrow \alpha v \in S, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R},$$

(2) Si dos vectores están en S, también lo está la suma de ambos, es decir,

$$v_1, v_2 \in S \Longrightarrow v_1 + v_2 \in S.$$

La propiedad (1) nos dice que si tenemos un vector no nulo de un subespacio vectorial, la recta determinada por dicho vector está contenida en el subespacio. La propiedad (2) nos dice que si tenemos dos vectores (no colineales) de un subespacio vectorial, el plano determinado por dichos vectores está contenido en el subespacio.

Las dos propiedades anteriores se pueden expresar de forma conjunta: Si dos vectores están en S, también lo está cualquiera de sus combinaciones lineales:

$$\forall \left\{ \begin{array}{c} v_1, v_2 \in S \\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Longrightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in S.$$

En particular el vector nulo pertenece a cualquier subespacio vectorial.

Obviamente $S = \left\{ \vec{0} \right\}$ y $S = \mathbb{R}^n$ son subespacios vectoriales (a veces llamados subespacios triviales).

En el espacio bidimensional, $\mathbb{R}^2$, además de esos dos subespacios triviales, cualquier recta que pase por el origen es un subespacio vectorial. Sin embargo, los vectores de posición determinados por los puntos de una parábola NO forman un subespacio vectorial.

En el espacio tridimensional, $\mathbb{R}^3$, además de los dos subespacios triviales ($\left\{ \vec{0} \right\}$ y $\mathbb{R}^3$), cualquier recta o plano que pase por el origen es un subespacio vectorial.

Ejercicio resuelto
Encontrar unas ecuaciones implícitas del subespacio de $\mathbb{R}^4$

$$E = \text{Gen}\{(1,1,1,0)^T, (2,0,1,2)^T, (0,2,1,-2)^T, (0,-2,-1,2)^T, (-1,1,0,-2)^T\}.$$

Dado un conjunto generador $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ de un subespacio $E \subset \mathbb{R}^4$, encontrar las ecuaciones implícitas de E es hallar las condiciones que deben verificar las componentes de un vector de $\mathbb{R}^4$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, para que pertenezca a E, es decir, para que se pueda escribir como combinación lineal del conjunto generador $x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 + c_5 v_5$, es decir, para que existan esos escalares c_i, o lo que es equivalente, para que el sistema

$$(v_1|v_2|v_3|v_4|v_5)c = x, \quad \text{con} \quad c = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)^T$$

sea compatible. Para exigir esto construimos la matriz ampliada $(v_1|v_2|v_3|v_4|v_5|x)$:

$$\left[\begin{array}{ccccc|l} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & x_1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & x_3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & -2 & x_4 \end{array} \right] \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - F_1} \left[\begin{array}{ccccc|l} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & x_1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 & x_2 - x_1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & x_3 - x_1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & -2 & x_4 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[F_4 + F_2]{F_3 - F_2/2} \left[\begin{array}{ccccc|l} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & x_1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 - x_1/2 - x_2/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_4 + x_2 - x_1 \end{array} \right],$$

es decir, el sistema es compatible cuando

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 - x_1/2 - x_2/2 = 0, \\ x_4 + x_2 - x_1 = 0, \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_4 = 0, \end{array} \right.$$

que son unas ecuaciones implícitas de E.

Observemos que podíamos haber buscado primero una base de E, aplicando eliminación gaussiana a la matriz $(v_1|v_2|v_3|v_4|v_5)$:

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - F_1} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow[F_4 + F_2]{F_3 - F_2/2} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

de donde deducimos que $E = \text{Gen}\{v_1, v_2\}$, es decir, una base de E es $B_E = \{v_1, v_2\}$. Dada una base $\{v_1, v_2\}$ de un subespacio $E \subset \mathbb{R}^4$, encontrar las ecuaciones implícitas de E es hallar las condiciones que deben verificar las componentes de un vector de $\mathbb{R}^4$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, para que pertenezca a E, es decir, para que se pueda escribir como combinación lineal de los vectores de la base $x = c_1 v_1 + c_2 v_2$, es decir, para que existan esos escalares c_i, o lo que es equivalente, para que el sistema

$$(v_1|v_2)c = x, \quad \text{con} \quad c = (c_1, c_2)^T$$

sea compatible. Para exigir esto construimos la matriz ampliada $(v_1|v_2|x)$:

$$\left[\begin{array}{cc|l} 1 & 2 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 0 & 2 & x_4 \end{array} \right] \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - F_1} \left[\begin{array}{cc|l} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & -2 & x_2 - x_1 \\ 0 & -1 & x_3 - x_1 \\ 0 & 2 & x_4 \end{array} \right] \xrightarrow[F_4 + F_2]{F_3 - F_2/2} \left[\begin{array}{cc|l} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & -2 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1/2 - x_2/2 \\ 0 & 0 & x_4 + x_2 - x_1 \end{array} \right],$$

es decir, el sistema es compatible cuando

$$\left\{\begin{array}{l} x_3 - x_1/2 - x_2/2 = 0, \\ x_4 + x_2 - x_1 = 0, \end{array}\right. \quad \to \quad \left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_4 = 0, \end{array}\right.$$

que son unas ecuaciones implícitas de E.

La garantía de que el resultado al que hemos llegado es correcto se obtiene comprobando que todos los vectores v_i verifican todas las ecuaciones implícitas obtenidas.

1.2. Espacio nulo y espacio columna de una matriz.

Asociados a una matriz $A, m \times n$,

$$A = [v_1|v_2|...|v_n] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

hemos considerado los denominados

- **Espacio nulo** de la matriz A, esto es, el conjunto de vectores reales $x \in \mathbb{R}^n$ caracterizados por las ecuaciones implícitas

$$Ax = 0 \quad \longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right\}.$$

- **Espacio columna** de la matriz A, subespacio generado por las columnas de A, esto es, el conjunto de vectores y que se pueden escribir como combinación lineal de dichas columnas

$$y = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n,$$

caracterizado por las ecuaciones paramétricas

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1 & = & \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \cdots + \alpha_n a_{1n} \\ y_2 & = & \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \cdots + \alpha_n a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_m & = & \alpha_1 a_{m1} + \alpha_2 a_{m2} + \cdots + \alpha_n a_{mn} \end{array}\right. , \text{ con } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

Resolviendo el sistema homogéneo $Ax = 0$ podemos obtener los vectores del espacio nulo de A como el conjunto de vectores que se pueden expresar como combinación lineal (arbitraria) de determinados vectores, es decir, como el subespacio generado por ciertos vectores o como el espacio columna de la matriz que tiene a dichos vectores como vectores columna. Por otra parte, puesto que el espacio columna de una matriz A está formado por los vectores y tales que el sistema de ecuaciones $Ax = y$ es compatible, obteniendo las condiciones de compatibilidad de este sistema (en función del término independiente y), tendremos unas ecuaciones lineales homogéneas que permiten expresar el citado espacio columna como espacio nulo de otra matriz.

Por tanto, hablar de espacio nulo o espacio columna de una matriz (o subespacio generado por ciertos vectores) no es hablar de conjuntos de vectores con características distintas, sino que es hablar de un mismo tipo de conjunto de vectores, que son los denominados **subespacios vectoriales**, pero expresados en forma distinta:

- cuando uno de dichos conjuntos de vectores viene dado como espacio nulo de una matriz tenemos una descripción implícita (**ecuaciones implícitas**) de dicho conjunto (un vector está en el conjunto considerado si, y sólo si, sus coordenadas verifican el sistema homogéneo asociado a la matriz),
- cuando uno de dichos conjuntos de vectores viene dado como espacio columna de una matriz tenemos una descripción paramétrica (**ecuaciones paramétricas**) de dicho conjunto (un vector está en el conjunto considerado si, y sólo si, puede expresarse como combinación lineal de determinados vectores).

Entre las descripciones paramétricas de un subespacio vectorial unas serán mejores que otras en el sentido de que unas involucren menos vectores que otras. Es decir, si tenemos el espacio columna de una cierta matriz $A, m \times n$, y los vectores columna de A son linealmente dependientes, suprimiendo vectores que sean combinación lineal de los que quedan, tendremos que el espacio columna de la matriz original también es el espacio columna de la matriz que resulta de la matriz anterior suprimiendo algunas columnas. Si nos quedamos con un conjunto de vectores linealmente independiente, tendremos que dichos vectores generan el espacio columna de la matriz original y cada vector de dicho espacio se puede expresar de forma única como combinación lineal de los vectores linealmente independientes obtenidos. Dichos vectores constituyen lo que se denomina una **base** (es decir, un conjunto de vectores linealmente independiente que genera el subespacio) del subespacio vectorial considerado, el espacio columna de la matriz original.

De forma paralela, entre las descripciones implícitas de un subespacio vectorial también habrá unas mejores que otras, en el sentido de que una puede tener ecuaciones redundantes y otra no. Si mediante operaciones fila reducimos una matriz A a forma escalonada y obtenemos la matriz U, las soluciones del sistema $Ux = 0$ coinciden con las del sistema $Ax = 0$, es decir los espacios nulos de la matriz A y de la matriz U coinciden. Si de la matriz U eliminamos las filas nulas, que proceden de ecuaciones originales redundantes en el sistema $Ax = 0$, tendremos un sistema de ecuaciones **sin ecuaciones redundantes** y cuyas soluciones forman el espacio nulo de la matriz A original.

Ejemplo.- Consideremos el espacio nulo de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

es decir, estamos considerando el conjunto S de los vectores $x \in \mathbb{R}^4$ cuyas coordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4) verifican las ecuaciones (implícitas)

$$\left.\begin{array}{rcl} -x_1 + 2x_2 + \phantom{x_3 +{}} 3x_4 & = & 0 \\ 3x_1 + \phantom{2x_2 +{}} x_3 - x_4 & = & 0 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Haciendo operaciones fila sobre la matriz A (que se corresponden con operaciones sobre las ecuaciones del sistema) tenemos

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3 + F_1]{F_2 + 3F_1} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 8 \\ 0 & 6 & 1 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} U = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De hecho, refiriéndonos a la matriz original tenemos que $F_3(A) = F_2(A) + 2F_1(A)$. Equivalentemente, la tercera ecuación del sistema original es combinación lineal de las dos primeras con lo cual si un vector es solución de las dos primeras también lo es de la tercera. Resumiendo, tenemos que

$$S = \mathrm{Nul}\,(A) = \mathrm{Nul} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \mathrm{Nul}\,(U) = \mathrm{Nul} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

con lo cual nuestro conjunto S de vectores está caracterizado por las ecuaciones (no redundantes)

$$\left.\begin{array}{rcl} -x_1 + 2x_2 + \phantom{x_3 +{}} 3x_4 & = & 0 \\ 6x_2 + x_3 + 8x_4 & = & 0 \end{array}\right\} \quad \left(\text{o por} \quad \left.\begin{array}{rcl} -x_1 + 2x_2 + \phantom{x_3 +{}} 3x_4 & = & 0 \\ 3x_1 + \phantom{2x_2 +{}} x_3 + x_4 & = & 0 \end{array}\right\} \right).$$

Resolviendo el sistema $Ux = 0$ tenemos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{-1} & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{6} & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{pmatrix} \text{Variables libres} \\ x_3 \text{ y } x_4. \\ \text{Variables fijas} \\ x_1 \text{ y } x_2. \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{1}{6}(-x_3 - 8x_4) \\ \\ x_1 = 2x_2 + 3x_4 = \frac{2}{6}(-x_3 - 8x_4) + 3x_4 = -\frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto,

$$\mathrm{Nul}\,(A) = \quad \mathrm{Gen}\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \mathrm{Gen}\left\{ 6v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, 3v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \quad \mathrm{Col}\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{8}{6} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Col}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \\ 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Los vectores $\{v_1, v_2\}$ forman una base de $S = \mathrm{Nul}\,(A)$. Los vectores de $\mathrm{Nul}\,(A)$ son los que pueden expresarse como combinación lineal de v_1 y v_2 y, como consecuencia de la independencia lineal, cada vector de S sólo puede expresarse de una única forma como combinación lineal de v_1 y v_2. Los coeficientes que aparezcan en dicha combinación lineal son las coordenadas del vector de S respecto a la base $\{v_1, v_2\}$ (de S). El vector $v = [-8\ 5\ 18\ -6]$ está en S y sus coordenadas respecto a $\{v_1, v_2\}$ son la solución de

$$v = \lambda v_1 + \mu v_2 \quad \equiv \quad \left[\begin{array}{c} v \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} v_1 & v_2 \end{array}\right]\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \quad \equiv \quad \left[\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -8 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{4}{3} & 5 \\ 1 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & -6 \end{array}\right],$$

es decir, $\lambda = 18, \mu = -6$ ($v = 18v_1 - 6v_2$).

Ejemplo.- Vamos a utilizar la misma matriz A del ejemplo anterior. El espacio columna de dicha matriz es, por definición de espacio columna, el conjunto de vectores y que se pueden expresar como combinación lineal de las columnas de A, es decir los vectores y (¡con 3 coordenadas!) que se pueden expresar mediante

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \delta\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

para ciertos $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Esto es lo mismo que decir que el espacio columna está formado por los vectores $y \in \mathbb{R}^3$ para los que el sistema de ecuaciones $Ax = y$ tiene solución. En dicho caso, cada solución del sistema $Ax = y$ nos daría una forma de expresar y como combinación lineal de las columnas de A. Obtengamos, para un vector genérico $y \in \mathbb{R}^3$ las condiciones de compatibilidad del sistema $Ax = y$, reduciendo la matriz ampliada del sistema $[A|y]$ a forma escalonada. Haciendo las mismas operaciones fila que hemos hecho cuando hemos obtenido el espacio nulo tenemos

$$[A|y] = \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & 3 & y_1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & y_2 \\ 1 & 4 & 1 & 5 & y_3 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3 + F_1]{F_2 + 3F_1} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & 3 & y_1 \\ 0 & 6 & 1 & 8 & y_2 + 3y_1 \\ 0 & 6 & 1 & 8 & y_3 + y_1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 - F_2} U = \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{-1} & 2 & 0 & 3 & y_1 \\ 0 & \boxed{6} & 1 & 8 & y_2 + 3y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_3 - y_2 - 2y_1 \end{array}\right].$$

Por tanto, el sistema $Ax = y$ es compatible (determinado o indeterminado) $\Longleftrightarrow y_3 - y_2 - 2y_1 = 0$. Es decir, el espacio columna de A está formado por los vectores $y \in \mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas verifican la ecuación (lineal homogénea) $y_3 - y_2 - 2y_1 = 0$. Se trata, por tanto, de un plano (en $\mathbb{R}^3$) que pasa por el origen de coordenadas. Además, teniendo la forma escalonada U que hemos obtenido, puesto que:

- Las columnas 1 y 2 de U son linealmente independientes y
- Las columnas 3 y 4 son combinación lineal de las columnas 1 y 2,

lo mismo sucede con las columnas correspondientes de la matriz A con lo cual, el espacio columna de A (generado por las 4 columnas) coincide con el espacio generado por las columnas 1 y 2 de A (¡no de U!). Los vectores dados por las columnas 1 y 2 de A forman una base de $\mathrm{Col}\,(A)$ puesto que son linealmente independientes y generan dicho espacio. Si denotamos por v_1, v_2, v_3 y v_4 a los vectores columna de A, cada vector $y \in \mathrm{Col}\,(A)$ se puede expresar de infinitas formas distintas como combinación lineal de v_1, v_2, v_3 y v_4 puesto que el sistema de ecuaciones $Ax = y$ es compatible (puesto que $y \in \mathrm{Col}\,(A)$) indeterminado (puesto que hay 2 variables libres). Sin embargo, dicho vector $y \in \mathrm{Col}\,(A)$ sólo puede expresarse de una única forma como combinación lineal de v_1 y v_2 puesto que el sistema de ecuaciones

$$\left[\begin{array}{c|c} v_1 & v_2 \end{array}\right]\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

tendrá solución única. Para discutir, y resolver, este sistema basta con suprimir las columnas 3 y 4 de la reducción que hemos hecho del sistema $Ax = y$ con lo cual tenemos

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & y_1 \\ 3 & 0 & y_2 \\ 1 & 4 & y_3 \end{array}\right] \longrightarrow \cdots \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{-1} & 2 & y_1 \\ 0 & \boxed{6} & y_2 + 3y_1 \\ 0 & 0 & y_3 - y_2 - 2y_1 \end{array}\right].$$

La solución única (λ, μ) de este sistema (compatible cuando $y \in \mathbb{R}^3$) nos dará los coeficientes para los cuales se verifica

$$y = \lambda v_1 + \mu v_2.$$

Estos coeficientes (λ, μ) (únicos para cada vector $y \in \mathrm{Col}\,(A)$) se denominan coordenadas de y respecto de la base $\{v_1, v_2\}$. Por ejemplo, las coordenadas del vector

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad (\in \mathrm{Col}\,(A) \text{ puesto que } y_3 - y_2 - 2y_1 = 3 - 1 - 2 = 0)$$

respecto a la base $\{v_1, v_2\}$ de $\mathrm{Col}\,(A)$ vienen dadas por la solución del sistema

$$\left[\begin{array}{c|c} v_1 & v_2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{-1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{6} & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{6} \end{bmatrix}.$$

Ejercicio resuelto
Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & a \end{bmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R},$$

encontrar, según los valores del parámetro a, unas ecuaciones implícitas del espacio columna de A, $Col(A)$. Para $a = 1$, escribir razonadamente, si es que existe, una matriz C, 4×5, tal que $Col(C) = Col(A)$.

Si llamamos v_i a las columnas de A, $A = [v_1|v_2|v_3]$, entonces su espacio columna, $Col(A) = \mathrm{Gen}\,\{v_1, v_2, v_3\}$, que está contenido en $\mathbb{R}^4$.

Dado un conjunto generador $\{v_1, v_2, v_3\}$ de un subespacio $E \subset \mathbb{R}^4$, encontrar las ecuaciones implícitas de E es hallar las condiciones que deben verificar las componentes de un vector de $\mathbb{R}^4$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, para que pertenezca a E, es decir, para que se pueda escribir como combinación lineal del conjunto generador, $x = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$, es decir, para que existan esos escalares c_i, o lo que es equivalente, para que el sistema

$$(v_1|v_2|v_3)c = x, \quad \text{con} \quad c = (c_1, c_2, c_3)^T$$

sea compatible. Para exigir esto construimos la matriz ampliada $(v_1|v_2|v_3|x)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & x_1 \\ 1 & -1 & -3 & x_2 \\ -2 & 0 & 4 & x_3 \\ -1 & 2 & a & x_4 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_1 \\ -2 & 0 & 4 & x_3 \\ -1 & 2 & a & x_4 \end{array}\right] \xrightarrow[F_4 + F_1]{F_3 + 2F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -2 & -2 & x_3 + 2x_2 \\ 0 & 1 & a-3 & x_4 + x_2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_4 - F_2]{F_3 - 2F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 + 2x_2 + 2x_1 \\ 0 & 0 & a-4 & x_4 + x_2 - x_1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_4 \leftrightarrow F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & a-4 & x_4 + x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 + 2x_2 + 2x_1 \end{array}\right],$$

es decir, si $a \neq 4$ aparecen tres pivotes y el sistema es compatible cuando

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

(si $a \neq 4$, $Col(A) \subset \mathbb{R}^4$ tiene una sola ecuación implícita pues al ser las tres columnas linealmente independientes, $dim(Col(A)) = 3$). Sin embargo, si $a = 4$, sólo aparecen dos pivotes (sólo hay dos columnas linealmente independientes, con lo que $dim(Col(A)) = 2$ y ese subespacio tendrá dos ecuaciones implícitas) y, por tanto, el sistema es compatible cuando

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_4 = 0, \end{array} \right.$$

que son unas ecuaciones implícitas de $Col(A)$ cuando $a = 4$.

La garantía de que el resultado al que hemos llegado es correcto se tiene comprobando que todos los vectores v_i verifican todas las ecuaciones implícitas obtenidas (una en el caso $a \neq 4$ y dos cuando $a = 4$).

Nos piden después que, para $a = 1$, encontremos si es posible alguna matriz C, 4×5, tal que $Col(C) = Col(A)$. Es decir, $C = [u_1|u_2|u_3|u_4|u_5]$ y como los $u_i \in \mathbb{R}^4$, entonces $Col(C) \subset \mathbb{R}^4$ con lo que sí puede darse $Col(C) = Col(A)$. (Si C no tuviera 4 filas, entonces los $u_i \notin \mathbb{R}^4$ y no existiría C tal que $Col(C) = Col(A)$).

Para escribir una matriz C, 4×5, cuyo espacio columna coincida con $Col(A)$ basta con que sus cinco columnas sean combinación lineal de v_1, v_2 y v_3 (columnas de A) y que tres de ellas sean linealmente independientes (pues las tres columnas de A lo son para $a = 1$). Por ejemplo, nos sirven las matrices siguientes (por comodidad repetimos las tres primeras columnas de A, aunque basta con que las cinco columnas verifiquen la ecuación implícita de $Col(A)$, $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$, y que haya tres linealmente independientes):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 27 & 0 \end{bmatrix}, \ldots$$

Observemos que para las matrices $B_1 = [v_1|v_1|v_1|v_1|v_1]$, $B_2 = [v_1|v_2|v_1 - v_2|0|2v_1 - 3v_2]$, $B_3 = [v_2|v_2|v_3 - v_2|v_3|4v_2 - 5v_3]$, se verifica $Col(B_i) \subset Col(A)$ pero no se da la igualdad $Col(B_i) = Col(A)$ (que es lo que nos pide el enunciado; por tanto, tres columnas deben ser linealmente independientes) ya que $dim(Col(B_1)) = 1$, $dim(Col(B_2)) = dim(Col(B_3)) = 2$, mientras que $dim(Col(A)) = 3$.

Ejercicio resuelto

Dada la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & b & -1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad b \in \mathbb{R},$$

encontrar, según los valores del parámetro b, un conjunto generador linealmente independiente del espacio nulo de B, $Nul(B)$.

El espacio nulo de B está formado por los vectores $x \in \mathbb{R}^4$ tales que $Bx = 0$. Nos piden que encontremos un conjunto generador linealmente independiente (una base) de dicho espacio nulo, en función del parámetro b. Para ello basta con resolver el sistema $Bx = 0$ (homogéneo, de tres ecuaciones y cuatro incógnitas):

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & b & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & b & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 - \frac{b}{3}F_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{b}{3} - 1 & 2(\frac{b}{3} - 1) \end{bmatrix}.$$

Entonces, cuando $b = 3$, la matriz que representa al sistema es

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con lo que tomando x_3, x_4 como variables libres (al ser las columnas tercera y cuarta columnas no pivote) obtenemos

$$\left.\begin{array}{l} x_3, x_4 \in \mathbb{R} \\ x_2 = \frac{1}{3}(x_3 + 2x_4) \\ x_1 = x_2 - x_3 - x_4 = -\frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \end{array}\right\} \to x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

con lo que

$$Nul(B) = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

y una base de $Nul(B)$, para $b = 3$, es $\{(-2, 1, 3, 0)^T, (-1, 2, 0, 3)^T\}$. Conviene comprobar que estos vectores verifican el sistema $Bx = 0$.

Si $b \neq 3$, la matriz que representa el sistema (hemos dividido la tercera fila por $\frac{b}{3} - 1 \neq 0$) es

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

con lo que, tomando x_4 como variable libre (al ser la cuarta columna no pivote), obtenemos

$$\left.\begin{array}{l} x_4 \in \mathbb{R} \\ x_3 = -2x_4 \\ x_2 = \frac{1}{3}(x_3 + 2x_4) = 0 \\ x_1 = x_2 - x_3 - x_4 = x_4 \end{array}\right\} \rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow Nul(B) = \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

y una base de $Nul(B)$, para $b \neq 3$, es $\{(1, 0, -2, 1)^T\}$. Conviene comprobar que este vector verifica el sistema $Bx = 0$.

Ejercicio resuelto
Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix}$, escribir, si es posible, dos matrices cuadradas de orden 3 y dos matrices 3×4 cuyo espacio columna coincida con el espacio nulo de A, $Nul(A)$.

Vamos a calcular, en primer lugar el espacio nulo de A, $Nul(A)$, es decir vamos a encontrar los vectores x tales que $Ax = 0$. Puesto que A es una matriz 2×3, para que se pueda hacer el producto Ax, debe verificarse que $x \in \mathbb{R}^3$. Así, $Ax = 0$ nos proporciona las ecuaciones implícitas de $Nul(A)$:

$$Nul(A) \equiv \left\{\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{array}\right. \quad \rightarrow \; Nul(A) = \text{Gen}\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Por tanto, una base de $Nul(A)$ es $\{v_1, v_2\}$. Para escribir matrices 3×3 cuyo espacio columna coincida con $Nul(A)$ basta con que sus tres columnas sean combinación lineal de v_1 y v_2 (o, equivalentemente, que verifiquen su ecuación implícita $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$) y que dos sean linealmente independientes:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \ldots$$

Observemos que para la matriz $B = [v_1|v_1|v_1]$ se verifica $Col(B) \subset Nul(A)$ pero no se da la igualdad $Col(B) = Nul(A)$ (que es lo que nos pide el enunciado). Por tanto, dos columnas deben ser linealmente independientes.

Si las matrices son 3×4, se aplica el mismo razonamiento sobre las cuatro columnas: todas deben ser combinación lineal de v_1 y v_2 y, simultáneamente, dos deben ser linealmente independientes:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 & -7 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots$$

2. Ejercicios.

Ejercicio 1. Determinar si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente:

(a) $H = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0 \right\}$.

(b) $H = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0 \right\}$.

Ejercicio 2. Sea E el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^4$ cuyas dos primeras coordenadas suman cero.

(a) Probar que E es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

(b) Calcular un sistema generador linealmente independiente para dicho subespacio.

(c) Hallar unas ecuaciones implícitas del subespacio E.

Ejercicio 3. Probar que el espacio nulo y columna de una matriz A de orden $m \times n$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente.

Ejercicio 4. Dados la matriz A y el vector b por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Determinar si el vector b pertenece al espacio columna de la matriz A.

(b) Obtener los vectores pertenecientes al espacio nulo de la matriz A.

Ejercicio 5. Sean las matrices A, B y el vector b dados por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Determinar unas ecuaciones implícitas y paramétricas del espacio columna de las matrices A y B.

(b) Determinar unas ecuaciones implícitas linealmente independientes y unas ecuaciones paramétricas del espacio nulo de A y B.

(c) Hallar un sistema generador linealmente independiente para el espacio nulo y columna de dichas matrices.

(d) Razonar si el vector b pertenece al espacio nulo de la matriz A. ¿Y al espacio nulo de la matriz B?