ÁLGEBRA
INGENIERÍA INDUSTRIAL

EXÁMENES RESUELTOS
CURSO 2003-2004

Ejercicios resueltos por los profesores:

Fernando Fernández Sánchez
Estanislao Gamero Gutiérrez
Fernando Mayoral Masa
Alejandro José Rodríguez Luis
Juan Manuel Virués Gavira

Departamento de Matemática Aplicada II
Escuela Técnica Superior de Ingeneros
Universidad de Sevilla

ÍNDICE

PRIMER PARCIAL - PRIMERA PARTE DEL EXAMEN DE FEBRERO

26 de Enero de 2004

Ejercicio 1

1.1 (6 PUNTOS) Representar gráficamente la cónica de ecuación

$$4x^2 - y^2 - 24x + 8y + 36 = 0,$$

determinando sus elementos notables (centro, ejes, focos, asíntotas, vértices, ...).

1.2 (4 PUNTOS) Determinar, completando cuadrados, el tipo de cuádrica que corresponde a la ecuación

$$x^2 + \alpha y^2 + z^2 - 6x + 4z + 8 - \alpha = 0,$$

para cada valor $\alpha \in \mathbb{R}$.

SOLUCIÓN:

1.1 Puesto que en la ecuación de la cónica no aparece el término xy, sabemos que basta con hacer una traslación adecuada $x' = x - x_0,\ y' = y - y_0$ que lleve el origen de las nuevas coordenadas al centro (elipse o hipérbola) o al vértice (parábola) de la cónica. Tras dicha traslación será fácil identificar la cónica pues llegaremos a

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = \pm 1, \quad y' = \alpha x'^2 \ \left(\text{o } x' = \beta y'^2\right),$$

si se trata de una elipse, una hipérbola o una parábola, respectivamente.

Notemos que, antes de hacer ningún cálculo, en el caso en que no aparece término xy, podemos saber si estamos ante un *caso elíptico* (elipse, un punto o nada) si los dos coeficientes de x^2 e y^2 tienen el mismo signo, ante un *caso hiperbólico* (hipérbola o dos rectas que se cortan) si los dos coeficientes de x^2 e y^2 tienen signo opuesto o ante un *caso parabólico* (parábola, dos rectas paralelas, una recta doble o nada) cuando no aparece término x^2 o y^2. Es obvio, pues, que nuestra ecuación corresponde al caso hiperbólico.

Para determinar la traslación a realizar basta con completar cuadrados en la ecuación de la cónica:

$$4x^2 - 24x = 4\left(x^2 - 6x\right) = 4\left((x-3)^2 - 9\right) = 4(x-3)^2 - 36,$$

$$-y^2 + 8y = -\left(y^2 - 8y\right) = -\left((y-4)^2 - 16\right) = -(y-4)^2 + 16.$$

Luego,

$$4x^2 - 24x - y^2 + 8y + 36 = 4(x-3)^2 - 36 - (y-4)^2 + 16 + 36 = 4(x-3)^2 - (y-4)^2 + 16 = 0$$

es equivalente a

$$4(x-3)^2 - (y-4)^2 = -16$$

y, a su vez, a

$$\frac{(x-3)^2}{2^2} - \frac{(y-4)^2}{4^2} = -1.$$

Es decir, que la traslación

$$x' = x - 3, \quad y' = y - 4,$$

nos lleva a la ecuación de la hipérbola

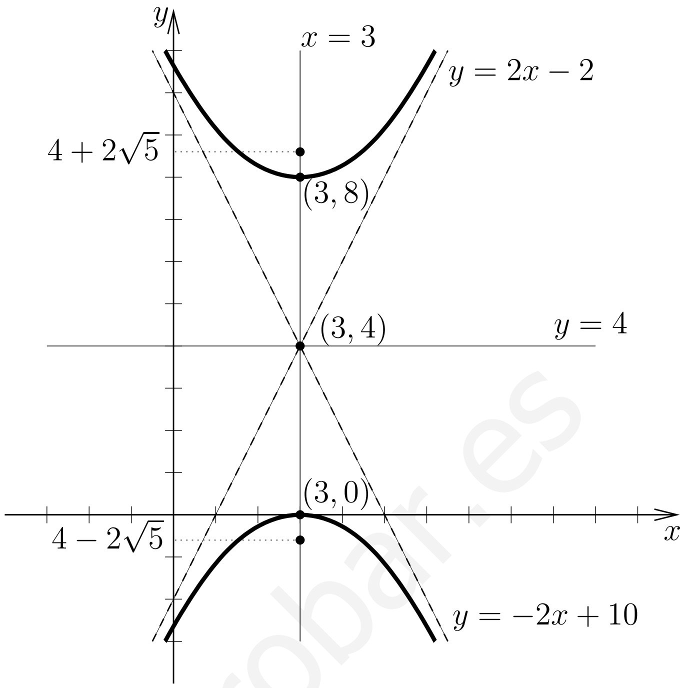
$$\frac{x'^2}{2^2} - \frac{y'^2}{4^2} = -1.$$

En las nuevas coordenadas, (x', y'), el centro de la hipérbola es el origen, sus semiejes miden 2 y 4, con lo que su intersección con los ejes de coordenadas (no corta al OX', sólo al OY'), que son sus ejes de simetría, se produce en los puntos $(0, \pm 4)$, vértices de la hipérbola. Los focos están en los puntos $(0, \pm c)$ siendo $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Y, finalmente, las asíntotas son las rectas $y' = \pm \frac{b}{a} x'$, es decir, $y' = \pm 2x'$.

Pasando esta información a las coordenadas originales (x, y) vemos que la hipérbola está centrada en el punto $(3, 4)$, los vértices son los puntos $(3, 0)$ y $(3, 8)$, los focos son los puntos $\left(3, 4+2\sqrt{5}\right)$ y $\left(3, 4-2\sqrt{5}\right)$. Tiene dos ejes de simetría, las rectas $x = 3$ e $y = 4$ (los ejes OY' y OX', respectivamente). Las asíntotas, que se pueden obtener al factorizar la ecuación

$$\frac{(x-3)^2}{2^2} - \frac{(y-4)^2}{4^2} = 0,$$

son las rectas $y - 4 = \pm 2(x-3)$, es decir, $y = 2x - 2$ e $y = -2x + 10$.
Representamos estos elementos notables en la gráfica cualitativa de la hipérbola.



Podemos plantearnos también, para dibujar con más exactitud la cónica, calcular algunos de sus puntos, como por ejemplo sus cortes con los ejes OX y OY. Así, los posibles cortes con el eje OX los calculamos haciendo $y = 0$ en la ecuación de la cónica.

De esta forma:

$$y = 0 \;\rightarrow\; 4x^2 - 24x + 36 = 0 \;\rightarrow\; 4(x-3)^2 = 0 \;\rightarrow\; x = 3 \;\text{ (doble)},$$

con lo que la hipérbola es tangente al eje OX en el punto $(3, 0)$. Las posibles intersecciones con el eje OY salen de

$$x = 0 \;\rightarrow\; -y^2 + 8y + 36 = 0 \;\rightarrow\; -(y-11)(y+3) = 0 \;\rightarrow\; y = 11,\; -3,$$

es decir, corta al eje OY en $(0, -3)$ y en $(0, 11)$.

Notemos que si quisiéramos calcular más puntos de la hipérbola bastaría con fijar $x = x_0$ (alternativamente, $y = y_0$) en la ecuación de la cónica y resolver la ecuación de segundo grado en y (alternativamente, en x) que se obtiene.

Por ejemplo, haciendo $x = x_0$ en la ecuación de la cónica ésta se convierte en la ecuación

$$-y^2 + 8y + (36 - 24x_0 + 4x_0^2) = 0,$$

cuyo discriminante Δ es

$$\Delta = 8^2 - 4(-1)(36 - 24x_0 + 4x_0^2) = 16(x_0^2 - 6x_0 + 13) = 16\left[(x_0-3)^2 + 4\right] > 0.$$

Al ser su discriminante siempre positivo (ecuación con dos raíces reales distintas), concluimos que la recta $x = x_0$ corta en dos puntos a la hipérbola para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$.

Análogamente, si hacemos $y = y_0$ en la ecuación de la cónica obtenemos:

$$4x^2 - 24x + (36 - y_0^2 + 8y_0) = 0,$$

cuyo discriminante Δ es

$$\Delta = (-24)^2 - 4 \cdot 4(36 - y_0^2 + 8y_0) = 16(y_0^2 - 8y_0) = 16y_0(y_0 - 8).$$

Así, cuando el discriminante es negativo (ecuación sin soluciones reales), $y_0 \in (0,8)$, no hay intersección entre la recta y_0 y la cónica, si es nulo (solución doble), $y_0 = 0,8$, hay un punto común (recta tangente a la cónica) y si es positivo (ecuación con dos raíces reales distintas), $y_0 < 0$ o $y_0 > 8$, concluimos que la recta $y = y_0$ corta en dos puntos a la hipérbola.

1.2 Completamos cuadrados en la ecuación de la cuádrica. Puesto que

$$x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9, \quad z^2 + 4z = (z+2)^2 - 4,$$

obtenemos

$$x^2 - 6x + \alpha y^2 + z^2 + 4z + 8 - \alpha = (x-3)^2 + \alpha y^2 + (z+2)^2 - 4 - 9 + 8 - \alpha = 0.$$

Luego la ecuación es equivalente a

$$(x-3)^2 + \alpha y^2 + (z+2)^2 = \alpha + 5.$$

El tipo de cuádrica depende de los signos de los coeficientes cuadráticos (cuántos son positivos, cuántos negativos y cuántos nulos) y del signo del término independiente. Aparecen por tanto las siguientes posibilidades.

Caso 1. En primer lugar, distinguimos el caso en que los tres coeficientes de la parte cuadrática de la ecuación son positivos. Esto ocurre si $\alpha > 0$. Entonces $\alpha + 5$ será también estrictamente positivo y la ecuación corresponde a un elipsoide (de revolución, pues tiene dos semiejes iguales) centrado en el punto $(3, 0, -2)$.

Caso 2. En segundo lugar, distinguimos el caso en que $\alpha = 0$. Entonces la ecuación

$$(x-3)^2 + (z+2)^2 = 5$$

corresponde a un cilindro elíptico (circular, en este caso) cuyo eje de simetría es la recta paralela al eje OY de ecuaciones $x = 3$, $z = -2$.

Caso 3. Por último, estudiamos el caso en que $\alpha < 0$, pues la parte cuadrática tiene dos coeficientes positivos y uno negativo. Sabemos que si el término independiente es positivo se obtiene un hiperboloide de una hoja (o hiperboloide hiperbólico), si dicho coeficiente es negativo será un hiperboloide de dos hojas (o hiperboloide elíptico), mientras que si es cero entonces se tratará de un cono. Estos tres subcasos son, en ese orden: $\alpha \in (-5, 0)$, $\alpha \in (-\infty, -5)$ y $\alpha = -5$. Los tres tipos de cuádricas de este tercer caso son de revolución y están centradas en el punto $(3, 0, -2)$.

Resumiendo, los cinco tipos de cuádricas que aparecen según los valores de α son:

- $\alpha > 0$: elipsoide.
- $\alpha = 0$: cilindro elíptico.
- $-5 < \alpha < 0$: hiperboloide de una hoja (hiperboloide hiperbólico).
- $\alpha = -5$: cono.
- $\alpha < -5$: hiperboloide de dos hojas (hiperboloide elíptico).

Ejercicio 2

2.1 (4 PUNTOS) Escribir la forma cuadrática

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = (3 - \beta)\, x_1^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 10x_1x_3 + 2x_2x_3$$

como suma de cuadrados y clasificarla según los valores de $\beta \in \mathbb{R}$.

2.2 (3 PUNTOS) Expresar, mediante una función de números complejos, la simetría respecto de la recta que pasa por los puntos $(2, 0)$ y $(0, 2)$ del plano. Desarrollar la expresión hasta determinar las partes real e imaginaria de la función.

2.3 (3 PUNTOS) Calcular todas las raíces sextas de un número $\omega \in \mathbb{C}$ sabiendo que $-\sqrt{3} + i$ es una de ellas.

SOLUCIÓN:

2.1 Para escribir la forma cuadrática como suma de cuadrados es conveniente elegir, en cada paso, el término cuadrático puro cuyo coeficiente sea el más sencillo. En particular, siempre que sea posible, es una buena idea dejar los parámetros para el final para así evitar posibles discusiones de casos que al final pueden ser irrelevantes. De ese modo comenzamos eligiendo el término que corresponde a x_2^2. Así agrupamos todos los términos que contienen a x_2 y completamos cuadrados en dicha variable.

$$\begin{aligned}\Phi(x_1, x_2, x_3) &= (3 - \beta)\, x_1^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 10x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ &= -[x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3] + (3 - \beta)\, x_1^2 - 4x_3^2 + 10x_1x_3.\end{aligned}$$

Para reproducir el término entre corchetes con un cuadrado nos basta tomar

$$(x_2 - x_1 - x_3)^2 = \underline{x_2^2} + x_1^2 + x_3^2 \underline{- 2x_1x_2 - 2x_2x_3} + 2x_1x_3,$$

donde hemos subrayado aquellos sumandos que aparecen entre corchetes en la ecuación anterior. Despejándolos y sustituyendo en la ecuación anterior queda

$$\begin{aligned}\Phi(x_1, x_2, x_3) &= -[(x_2 - x_1 - x_3)^2 - x_1^2 - x_3^2 - 2x_1x_3] + (3 - \beta)\, x_1^2 - 4x_3^2 + 10x_1x_3 \\ &= -(x_2 - x_1 - x_3)^2 + (4 - \beta)\, x_1^2 - 3x_3^2 + 12x_1x_3.\end{aligned}$$

A partir de ahora olvidamos el primer sumando, donde ya hemos completado cuadrados en x_2, y nos centramos en las dos variables que quedan. En particular, agrupamos todos los términos que contienen a x_3, al ser más simple el coeficiente de x_3^2 que el de x_1^2, quedando

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = -(x_2 - x_1 - x_3)^2 - 3[x_3^2 - 4x_1x_3] + (4 - \beta)\, x_1^2.$$

El término entre corchetes proviene del cuadrado

$$(x_3 - 2x_1)^2 = \underline{x_3^2 - 4x_1x_3} + 4x_1^2,$$

donde hemos subrayado aquellos términos que aparecen en el corchete de la ecuación anterior. Despejando y sustituyendo queda

$$\begin{aligned}\Phi(x_1, x_2, x_3) &= -(x_2 - x_1 - x_3)^2 - 3[(x_3 - 2x_1)^2 - 4x_1^2] + (4 - \beta)\, x_1^2 \\ &= -(x_2 - x_1 - x_3)^2 - 3(x_3 - 2x_1)^2 + (16 - \beta)\, x_1^2.\end{aligned}$$

Ya hemos completado cuadrados. Simplemente quedaría un cambio lineal, por ejemplo,

$$y_1 = x_2 - x_1 - x_3, \qquad y_2 = x_3 - 2x_1, \qquad y_3 = x_1,$$

para obtener una forma canónica de la forma cuadrática:

$$\Phi(y_1, y_2, y_3) = -y_1^2 - 3y_2^2 + (16 - \beta)\, y_3^2.$$

La segunda parte del apartado pide clasificar la forma cuadrática dependiendo de los valores de $\beta \in \mathbb{R}$. Está claro que hemos de centrarnos en el signo del coeficiente de y_3^2, ya que los otros dos son negativos y no dependen de β. De este modo se obtienen las tres posibilidades siguientes:

- $\boldsymbol{\beta > 16}$: Los tres coeficientes son negativos, por lo que la forma cuadrática es **Definida Negativa**.
- $\boldsymbol{\beta = 16}$: Dos coeficientes son negativos y uno nulo, por lo que la forma cuadrática es **Semidefinida Negativa**.
- $\boldsymbol{\beta < 16}$: Los coeficientes son de distinto signo (en concreto, dos negativos y uno positivo), por lo que la forma cuadrática es **Indefinida**.

Veamos que si hubiéramos procedido completando cuadrados en otro orden llegamos a una suma de cuadrados en la que se conserva el número de coeficientes positivos, negativos y nulos (ley de inercia de Sylvester). Por ejemplo, si comenzamos completando cuadrados en la tercera variable:

$$\begin{aligned}
\Phi &= (3-\beta)\, x_1^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 10x_1x_3 + 2x_2x_3 \\
&= -4\left(x_3^2 - \frac{5}{2}x_1x_3 - \frac{1}{2}x_2x_3\right) + (3-\beta)\, x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 \\
&= -4\left[\left(x_3 - \frac{5}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2\right)^2 - \frac{25}{16}x_1^2 - \frac{1}{16}x_2^2 - \frac{5}{8}x_1x_2\right] + (3-\beta)\, x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 \\
&= -4\left(x_3 - \frac{5}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2\right)^2 + \left(\frac{37}{4} - \beta\right) x_1^2 - \frac{3}{4}x_2^2 + \frac{9}{2}x_1x_2 \\
&= -4\left(x_3 - \frac{5}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2\right)^2 - \frac{3}{4}\left(x_2^2 - 6x_1x_2\right) + \left(\frac{37}{4} - \beta\right)\, x_1^2 \\
&= -4\left(x_3 - \frac{5}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2\right)^2 - \frac{3}{4}\left[(x_2 - 3x_1)^2 - 9x_1^2\right] + \left(\frac{37}{4} - \beta\right)\, x_1^2 \\
&= -4\left(x_3 - \frac{5}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2\right)^2 - \frac{3}{4}\left(x_2 - 3x_1\right)^2 + (16-\beta)\, x_1^2 = -4y_1^2 - \frac{3}{4}y_2^2 + (16-\beta)\, y_3^2,
\end{aligned}$$

donde hemos introducido el cambio lineal de coordenadas $y_1 = x_3 - \frac{5}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2,\ y_2 = x_2 - 3x_1,\ y_3 = x_1$. Obtenemos, nuevamente, una suma de cuadrados con dos coeficientes negativos y uno que depende de β (exactamente el mismo, $16 - \beta$). Llegamos pues al mismo resultado, pero con unas cuentas un poco más engorrosas pues nos aparecen fracciones.

Veamos, por último, el camino que NO debemos seguir (porque es mucho más largo y engorroso, con lo que seguramente nos equivocaremos), el de comenzar completando cuadrados en x_1 (variable acompañada del parámetro β):

$$\begin{aligned}
\Phi &= (3-\beta)\, x_1^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 10x_1x_3 + 2x_2x_3 \\
&= [\beta \neq 3] = (3-\beta)\, \left[x_1^2 + \frac{2}{3-\beta}x_1x_2 + \frac{10}{3-\beta}x_1x_3\right] - x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_2x_3 \\
&= (3-\beta)\, \left[\left(x_1 + \frac{1}{3-\beta}x_2 + \frac{5}{3-\beta}x_3\right)^2 - \frac{x_2^2 + 25x_3^2 + 10x_2x_3}{(3-\beta)^2}\right] - x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_2x_3 \\
&= (3-\beta)\, \left(x_1 + \frac{1}{3-\beta}x_2 + \frac{5}{3-\beta}x_3\right)^2 - \frac{4-\beta}{3-\beta}x_2^2 - \frac{37-4\beta}{3-\beta}x_3^2 - \frac{4+2\beta}{3-\beta}x_2x_3
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= [\beta \neq 4] = (3-\beta)\left(x_1+\frac{1}{3-\beta}x_2+\frac{5}{3-\beta}x_3\right)^2-\frac{4-\beta}{3-\beta}\left[x_2^2+\frac{4+2\beta}{4-\beta}x_2x_3\right]-\frac{37-4\beta}{3-\beta}x_3^2\\
&= (3-\beta)\left(x_1+\frac{1}{3-\beta}x_2+\frac{5}{3-\beta}x_3\right)^2-\frac{4-\beta}{3-\beta}\left[\left(x_2+\frac{2+\beta}{4-\beta}x_3\right)^2-\frac{(2+\beta)^2}{(4-\beta)^2}x_3^2\right]-\frac{37-4\beta}{3-\beta}x_3^2\\
&= (3-\beta)\left(x_1+\frac{1}{3-\beta}x_2+\frac{5}{3-\beta}x_3\right)^2-\frac{4-\beta}{3-\beta}\left(x_2+\frac{2+\beta}{4-\beta}x_3\right)^2+3\frac{\beta-16}{4-\beta}x_3^2\\
&= (3-\beta)\,y_1^2+\frac{\beta-4}{3-\beta}y_2^2+3\frac{\beta-16}{4-\beta}y_3^2,
\end{aligned}
$$

donde hemos hecho el cambio lineal

$$
y_1 = x_1+\frac{1}{3-\beta}x_2+\frac{5}{3-\beta}x_3, \quad y_2 = x_2+\frac{2+\beta}{4-\beta}x_3, \quad y_3 = x_3.
$$

El estudio que hemos hecho vale para $\beta \neq 3, 4$, valores que tendremos que estudiar aparte. El primer coeficiente, $3-\beta$ es positivo si $\beta < 3$ y negativo si $\beta > 3$. El coeficiente de y_2^2 es negativo si $\beta < 3$ o $\beta > 4$ y positivo cuando $3 < \beta < 4$. El coeficiente de y_3^2 es negativo si $\beta < 4$ o $\beta > 16$, positivo cuando $4 < \beta < 16$ y nulo si $\beta = 16$. Si representamos con un signo más $(+)$ si el coeficiente es positivo, con un signo menos $(-)$ al coeficiente negativo y con un cero (0) al coeficiente nulo, nuestro estudio (válido si $\beta \neq 3, 4$) nos dice que el signo de los tres coeficientes es el siguiente

$$
\beta < 3: \ +--; \quad 3<\beta<4: \ -+-; \quad 4<\beta<16: \ --+; \quad \beta = 16: \ --0; \quad \beta > 16: \ ---,
$$

es decir, que la forma cuadrática es indefinida (con dos coeficientes negativos y uno positivo) cuando $\beta < 16$ ($\beta \neq 3, 4$), es semidefinida negativa (con dos coeficientes negativos y uno nulo) cuando $\beta = 16$ y es definida negativa para $\beta > 16$. Veamos los casos $\beta = 3, 4$:

$$
\begin{aligned}
\Phi(\beta=3) &= -x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+10x_1x_3+2x_2x_3\\
&= -\left(x_2^2-2x_1x_2-2x_2x_3\right)-4x_3^2+10x_1x_3\\
&= -\left[(x_2-x_1-x_3)^2-x_1^2-x_3^2-2x_1x_3\right]-4x_3^2+10x_1x_3\\
&= -(x_2-x_1-x_3)^2+x_1^2-3x_3^2+12x_1x_3\\
&= -(x_2-x_1-x_3)^2+\left[(x_1+6x_3)^2-36x_3^2\right]-3x_3^2\\
&= -(x_2-x_1-x_3)^2+(x_1+6x_3)^2-39x_3^2 = -y_1^2+y_2^2-39y_3^2;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi(\beta=4) &= -(x_1-x_2-5x_3)^2+21x_3^2+12x_2x_3\\
&= -(x_1-x_2-5x_3)^2+21\left[x_3^2+\frac{4}{7}x_2x_3\right]\\
&= -(x_1-x_2-5x_3)^2+21\left[\left(x_3+\frac{2}{7}x_2\right)^2-\frac{4}{49}x_2^2\right]\\
&= -(x_1-x_2-5x_3)^2+21\left(x_3+\frac{2}{7}x_2\right)^2-\frac{12}{7}x_2^2 = -y_1^2+21y_2^2-\frac{12}{7}y_3^2,
\end{aligned}
$$

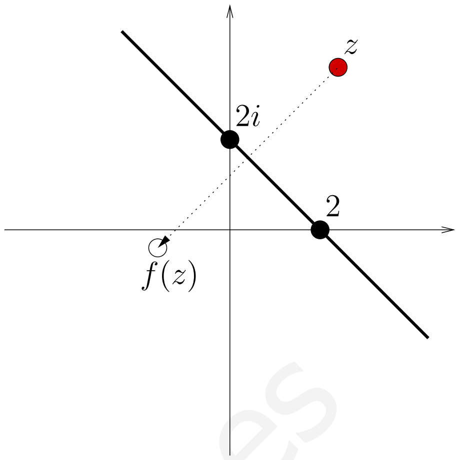
con lo que vemos que tanto para $\beta = 3$ como para $\beta = 4$ la forma cuadrática es indefinida (con dos coeficientes negativos y uno positivo).

Por tanto, por este camino mucho más largo y engorroso llegamos también a que la forma cuadrática es indefinida (con dos coeficientes negativos y uno positivo) cuando $\beta < 16$, es semidefinida negativa (con dos coeficientes negativos y uno nulo) cuando $\beta = 16$ y es definida negativa para $\beta > 16$.

La moraleja, como ya se dijo al principio de esta cuestión es clara: conviene retrasar la discusión con los parámetros todo lo que sea posible (aparte de no complicar los cálculos se evitará la discusión de valores irrelevantes de los parámetros: $\beta = 3, 4$ en este problema).

2.2 Representando en el plano complejo los puntos que nos dan como dato y la recta que los une se obtiene un dibujo como el que se muestra en la figura lateral, donde hemos incluido, además, un punto genérico z y su imagen por la simetría, $f(z)$.

Sabemos perfectamente que, en el plano complejo, la simetría respecto de la recta real se obtiene sin más que aplicar la conjugación. Ya que nos piden la simetría respecto de una recta distinta, el proceso a seguir será:

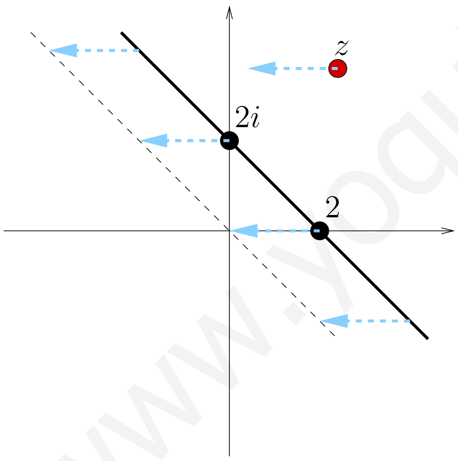


- Llevar la recta que nos dan a la recta real. Para esto será necesario realizar una traslación y un giro.
- Realizar la simetría, sin más que conjugar.
- Deshacer el giro y la traslación (en el orden inverso al que se realizaron en el primer paso) para dejar la recta en su posición original.

Procedamos, paso a paso, con cada una de estas etapas. Denotaremos por w_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, a los sucesivos puntos en que se transforma el punto inicial z tras cada etapa.

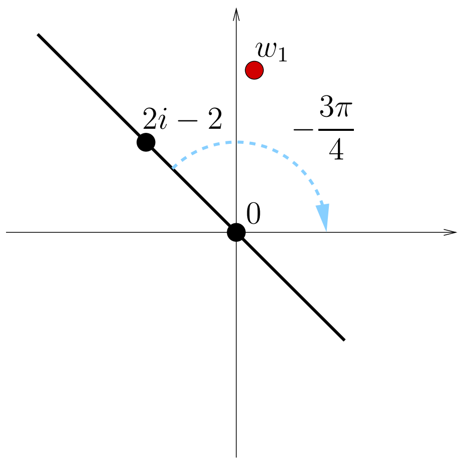
En primer lugar realizamos una traslación que lleve la recta al origen. Hay varias posibilidades, entre las que escogemos

$$\boxed{w_1 = z - 2.}$$



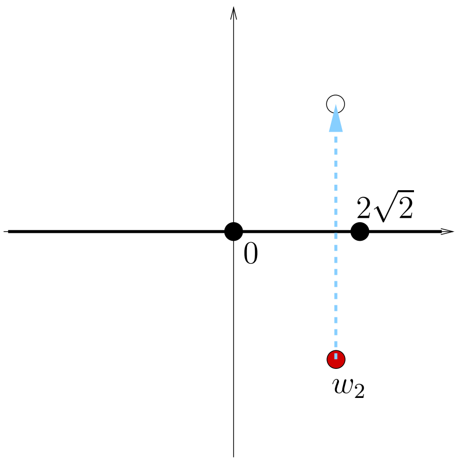
Los puntos 2 y $2i$ se transforman en 0 y $2i - 2$ respectivamente. Analizando este segundo punto vemos que su argumento es $3\pi/4$, por lo que realizamos un giro de $-3\pi/4$ alrededor del origen, quedando

$$\boxed{w_2 = e^{-(3\pi/4)\,i} w_1.}$$



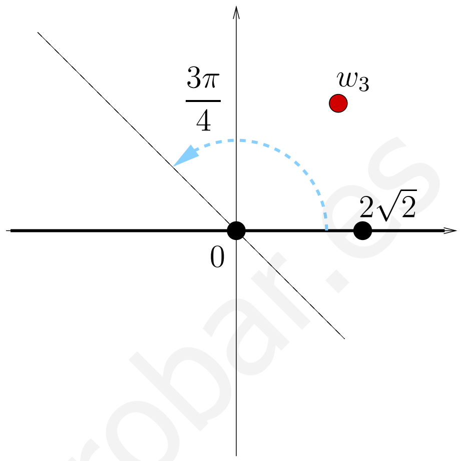
Los puntos 0 y $2i-2$ se transforman en 0 y $2\sqrt{2}$ respectivamente. Éste es el momento de realizar la simetría,

$$\boxed{w_3 = \overline{w_2}.}$$



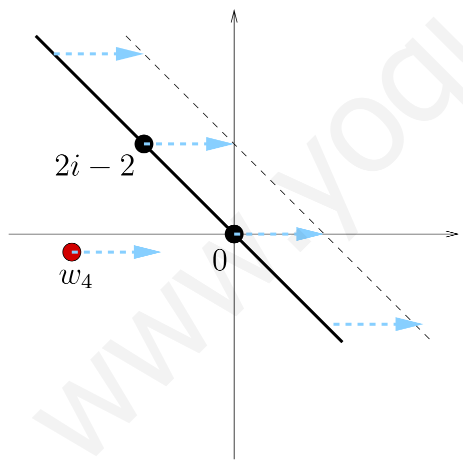
Los puntos 0 y $2\sqrt{2}$ se transforman en ellos mismos por estar en la recta de simetría. En este momento comienza la vuelta atrás. Hay que deshacer el giro y la traslación para volver a las coordenadas originales. Realizamos, pues, un giro de $3\pi/4$ alrededor del origen, quedando

$$\boxed{w_4 = e^{(3\pi/4)\,i} w_3.}$$



Mediante este cambio volvemos a tener los puntos 0 y $2i-2$. Ahora hemos de realizar una traslación que anule la original:

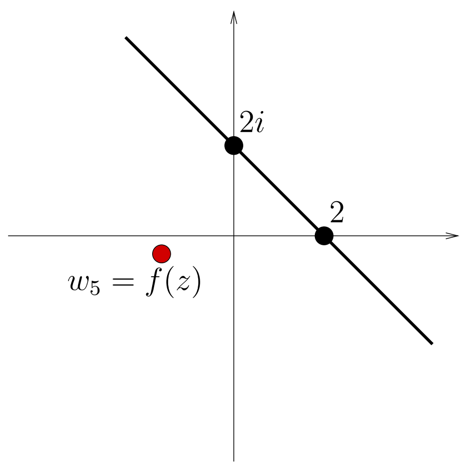
$$\boxed{w_5 = w_4 + 2.}$$



Sustituyendo cada uno de los cambios en el posterior queda la función

$$\boxed{w_5 = f(z) = \left[e^{(3\pi/4)\,i}\,\overline{e^{-(3\pi/4)\,i}\,(z-2)}\right] + 2,}$$

que representa la simetría que buscábamos.



Operando convenientemente en la última expresión obtenemos (usamos que el conjugado del producto es el producto de los conjugados y que el conjugado de la suma es la suma de los conjugados)

$$f(z) = \left[e^{(3\pi/4)\,i}\,e^{(3\pi/4)\,i}\,(\overline{z}-2)\right] + 2 = e^{(3\pi/2)\,i}\,(\overline{z}-2) + 2 = -i\,(\overline{z}-2) + 2 = -i\,\overline{z} + 2 + 2\,i.$$

Para terminar el apartado sólo queda obtener la parte real e imaginaria de esta transformación compleja. Ponemos $z = x + yi$ y desarrollamos la expresión obtenida para f. De tal modo que

$$f(x+yi) \;=\; \boxed{(2-y) + (2-x)\,i}.$$

Esto significa que el simétrico del número $x+yi$ respecto de la recta dada es el $(2-y)+(2-x)\,i$, o hablando de puntos de $\mathbb{R}^2$, que el simétrico del punto (x,y) del plano respecto de dicha recta, que tiene por ecuación $x+y=2$, es $(2-y, 2-x)$. Para comprobar que el resultado es correcto, vemos que a cualquier punto de esa recta (x_0,y_0) le corresponde como simétrico él mismo

$$(x_0,y_0)=(x_0,2-x_0)\to(2-(2-x_0),2-x_0)=(x_0,2-x_0),\quad \forall x_0\in\mathbb{R},$$

y que el simétrico del $(2,2)$ es el $(2-2,2-2)=(0,0)$, como debe ser.
Nota: Distintas elecciones de las operaciones intermedias (trasladar el punto $2i$ al origen, girar $\pi/4$ en vez de $-3\pi/4$, ...) llevan exactamente a la misma expresión (una vez desarrollada) de f. Veámoslo con algún ejemplo. Si trasladamos al origen el punto $2i$ y giramos $\pi/4$ obtenemos

$$\begin{aligned} f(z) &= \left[e^{-(\pi/4)\,i}\,\overline{e^{(\pi/4)\,i}\,(z-2\,i)}\right]+2\,i=\left[e^{-(\pi/4)\,i}\,\overline{e^{(\pi/4)\,i}}\;\overline{(z-2\,i)}\right]+2\,i\\ &= \left[e^{-(\pi/4)\,i}\,e^{-(\pi/4)\,i}\,(\overline{z}+2\,i)\right]+2\,i=e^{-(\pi/2)\,i}\,(\overline{z}+2\,i)+2\,i=-i(\overline{z}+2\,i)+2\,i=-i\,\overline{z}+2+2\,i. \end{aligned}$$

Si preferimos trasladar al origen otro punto de la recta, como por ejemplo el punto $1+i$, y seguimos girando $\pi/4$, obtendremos obviamente lo mismo:

$$\begin{aligned} f(z) &= \left[e^{-(\pi/4)\,i}\,\overline{e^{(\pi/4)\,i}\,(z-1-i)}\right]+1+\,i=\left[e^{-(\pi/4)\,i}\,\overline{e^{(\pi/4)\,i}}\;\overline{(z-1-i)}\right]+1+i\\ &= \left[e^{-(\pi/4)\,i}\,e^{-(\pi/4)\,i}\,(\overline{z}-1+i)\right]+1+i=e^{-(\pi/2)\,i}\,(\overline{z}-1-i)+1+i=-i\,\overline{z}+2+2\,i. \end{aligned}$$

Para hacer coincidir la recta dada con el eje OX hicimos primero una traslación y después un giro. Éste es el camino más fácil. Si nos planteamos hacer primero un giro y después la traslación, también es posible, pero un poco más complicado (recordemos que giro y traslación no conmutan). Veamos cómo se puede proceder. Al ser la recta dada $x+y=2$, si hacemos un giro de $\pi/4$ radianes la pondremos horizontal (paralela al eje OX). Pero ahora tenemos que ver en qué punto se ha transformado alguno de los puntos de la recta original, que con números complejos será $z_0\to e^{(\pi/4)\,i}\,z_0$. Por ejemplo, el $(1,1)$, es decir el número $1+i$ se ha transformado en $e^{(\pi/4)\,i}(1+i)=\sqrt{2}\,i$, o sea, en el punto $(0,\sqrt{2})$. Ahora ya podemos proceder con las cinco operaciones (dos giros, dos traslaciones y una simetría, en el orden adecuado) que nos llevan a:

$$\begin{aligned} f(z) &= \left[\overline{\left(e^{(\pi/4)\,i}\,z-\sqrt{2}\,i\right)}+\sqrt{2}\,i\right]e^{-(\pi/4)\,i}=\left(e^{-(\pi/4)\,i}\,\overline{z}+\sqrt{2}\,i+\sqrt{2}\,i\right)\,e^{-(\pi/4)\,i}\\ &= e^{-(\pi/2)\,i}\,\overline{z}+2\sqrt{2}\,i\,e^{-(\pi/4)\,i}=-i\,\overline{z}+2\sqrt{2}\,i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)=-i\,\overline{z}+2+2\,i. \end{aligned}$$

Veamos que si hubiéramos trabajado directamente en $\mathbb{R}^2$, es decir, con la matriz que representa el giro y haciendo las traslaciones, habríamos llegado al mismo resultado. Queremos obtener las coordenadas (x',y') del punto simétrico al (x,y) respecto de la recta dada. Recordemos que la matriz de un giro de ángulo φ respecto del origen viene dada por

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi\\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

Trasladar el punto $(2,0)$ al origen, girar $\pi/4$ radianes, hacer la simetría respecto al eje OX, deshacer el giro y deshacer la traslación nos conduce a:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-2\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-y\\ 2-x\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si preferimos realizar primero el giro de $\pi/4$ radianes y después la traslación que nos lleve esa recta girada al origen (cogiendo cualquier punto de ella, por ejemplo, el transformado del $(1,1)$, es decir, el $(0,\sqrt{2})$), luego hacer la simetría respecto al eje OX, deshacer la traslación y deshacer el giro obtendremos el mismo resultado:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} 2-y \\ 2-x \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

2.3 Lo único que hay que hacer en el tercer apartado es, partiendo de $-\sqrt{3}+i$, sumar $2\pi/6$ (es decir, $\pi/3$) al argumento una y otra vez hasta obtener las cinco raíces que faltan. Es decir, escribiendo $-\sqrt{3}+i$ en forma exponencial (para facilitar los cálculos) encontraremos fácilmente las raíces que nos piden.

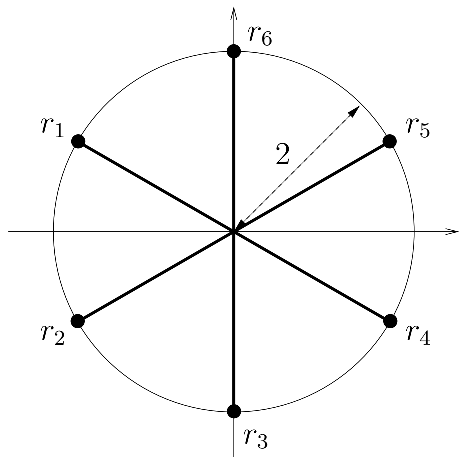
El módulo de $-\sqrt{3}+i$ es $\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$ y su argumento $\theta=5\pi/6$, pues

$$-\sqrt{3}+i = 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right] = 2\left[\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta\right] \quad\rightarrow\quad \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}, \quad\rightarrow\quad \theta = \frac{5\pi}{6}.$$

También podemos llegar a ese valor del argumento teniendo en cuenta que, por tener parte real negativa y parte imaginaria positiva, ese número complejo viene representado por un punto del segundo cuadrante (argumento pues entre $\pi/2$ y π) y que $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{5\pi}{6}$. Es decir, $-\sqrt{3}+i = 2e^{(5\pi/6)\,i}$.

Por tanto, las seis raíces serán

$$\begin{aligned} r_1 &= 2e^{(5\pi/6)\,i} = -\sqrt{3}+i, \\ r_2 &= 2e^{(5\pi/6+\pi/3)\,i} = 2e^{(7\pi/6)\,i} = -\sqrt{3}-i, \\ r_3 &= 2e^{(5\pi/6+2\pi/3)\,i} = 2e^{(3\pi/2)\,i} = -2i, \\ r_4 &= 2e^{(5\pi/6+3\pi/3)\,i} = 2e^{(11\pi/6)\,i} = \sqrt{3}-i, \\ r_5 &= 2e^{(5\pi/6+4\pi/3)\,i} = 2e^{(13\pi/6)\,i} = 2e^{(\pi/6)\,i} = \sqrt{3}+i, \\ r_6 &= 2e^{(5\pi/6+5\pi/3)\,i} = 2e^{(5\pi/2)\,i} = 2e^{(\pi/2)\,i} = 2i. \end{aligned}$$



En la figura se puede observar cuál es la situación de estas raíces en el plano complejo.

Notemos que el número complejo que tiene esas seis raíces sextas es:

$$w = r_1^6 = r_2^6 = r_3^6 = r_4^6 = r_5^6 = r_6^6 = 2^6 e^{\pi i} = -64.$$

Ejercicio 3 Consideremos, para $\gamma, \mu \in \mathbb{R}$, los vectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} \gamma+2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} \gamma \\ \gamma \\ \gamma \\ \gamma \end{bmatrix}, \quad v_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \mu \end{bmatrix}.$$

3.1 (4 PUNTOS) Determinar los valores de γ y μ para los que $\text{Gen}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = \mathbb{R}^4$.

3.2 (3 PUNTOS) Consideremos la matriz $A = [\ v_1 \mid v_2 \mid v_4 \mid v_5\ ]$. Tomando $\gamma = -2$ y $\mu = 2$, encontrar la factorización LU de A y resolver, mediante dicha factorización, el sistema $Ax = v_3$.

3.3 (3 PUNTOS) Obtener la matriz canónica M de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = v_1 \quad \text{y} \quad T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = v_2.$$

SOLUCIÓN:
(3.1) Construiremos una matriz 4×5 adjuntando los vectores dados, y posteriormente realizaremos la eliminación de Gauss (de esta forma, se cumplirá que $\text{Gen}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = \mathbb{R}^4$ si tenemos un pivote en cada fila). Para aprovechar las operaciones de la eliminación en el apartado **(3.2)**, vamos a ordenar los vectores de la siguiente forma:

$$[v_1|v_2|v_4|v_5|v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \gamma & 1 & \gamma+2 \\ 1 & 2 & \gamma & 1 & 2 \\ 0 & -1 & \gamma & 1 & -2 \\ -1 & 0 & \gamma & \mu & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} F_2 - F_1 \\ F_4 + F_1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \gamma & 1 & \gamma+2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & -1 & \gamma & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2\gamma & \mu+1 & \gamma+4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} F_3 + F_2 \\ F_4 - F_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \gamma & 1 & \gamma+2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & 0 & \gamma & 1 & -2-\gamma \\ 0 & 0 & 2\gamma & \mu+1 & 2\gamma+4 \end{bmatrix}$$

Si $\gamma \neq 0$: $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \gamma & 1 & \gamma+2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & 0 & \gamma & 1 & -2-\gamma \\ 0 & 0 & 2\gamma & \mu+1 & 2\gamma+4 \end{bmatrix} \longrightarrow \left(F_4 - 2F_3 \right) \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \gamma & 1 & \gamma+2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & 0 & \gamma & 1 & -2-\gamma \\ 0 & 0 & 0 & \mu-1 & 4\gamma+8 \end{bmatrix}.$$

En este caso, la cuarta fila **no** tiene pivote si $\mu = 1$ y $\gamma = -2$.

Si $\gamma = 0$: $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \mu+1 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \left(F_4 - (\mu+1)F_3 \right) \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu+6 \end{bmatrix}.$$

En este caso, la cuarta fila **no** tiene pivote si $\mu = -3$.

En definitiva, se cumple que $\text{Gen}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = \mathbb{R}^4$ en todos los casos, excepto si

$$\gamma = -2, \mu = 1, \quad \text{o si } \gamma = 0, \mu = -3.$$

Veamos que se llega al mismo resultado si se trabaja con los vectores en el orden que nos dan, es decir,

$$[v_1|v_2|v_3|v_4|v_5] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \gamma+2 & \gamma & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \gamma & 1 \\ 0 & -1 & -2 & \gamma & 1 \\ -1 & 0 & 2 & \gamma & \mu \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} F_2 - F_1 \\ F_4 + F_1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \gamma+2 & \gamma & 1 \\ 0 & 1 & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & \gamma & 1 \\ 0 & 1 & \gamma+4 & 2\gamma & \mu+1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} F_3+F_2 \\ F_4-F_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \gamma+2 & \gamma & 1 \\ 0 & 1 & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma-2 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & 2\gamma+4 & 2\gamma & \mu+1 \end{bmatrix}$$

Si $\gamma \neq -2$**:** $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \gamma+2 & \gamma & 1 \\ 0 & 1 & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma-2 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & 2\gamma+4 & 2\gamma & \mu+1 \end{bmatrix} \longrightarrow \left(F_4+2F_3 \right) \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \gamma+2 & \gamma & 1 \\ 0 & 1 & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\gamma+2) & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4\gamma & \mu+3 \end{bmatrix}.$$

En este caso, la cuarta fila **no** tiene pivote si $\gamma = 0$ y $\mu = -3$.

Si $\gamma = -2$**:** $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & \mu+1 \end{bmatrix} \longrightarrow \left(F_4-2F_3 \right) \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu-1 \end{bmatrix}.$$

En este caso, la cuarta fila **no** tiene pivote si $\mu = 1$.

En definitiva, se cumple que $\text{Gen}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = \mathbb{R}^4$ en todos los casos, excepto si

$$\gamma = -2, \mu = 1;, \quad \text{o si } \gamma = 0, \mu = -3.$$

(3.2) Nos piden que encontremos la factorización LU de A y que, usándola, resolvamos $Ax = v_3$, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

A partir de la eliminación de Gauss realizada anteriormente para $\gamma = -2 \neq 0$ y $\mu = 2$ (la matriz A dada se obtiene simplemente borrando la quinta columna), se tiene:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Recordemos que los elementos l_{ij} de L que aparecen por debajo de la diagonal principal corresponden, con el signo opuesto, al número de veces que a la fila i le hemos sumado la j. Así, $l_{21} = 1$ porque hicimos $F_2 - 1 \cdot F_1$, $l_{31} = 0$ porque hicimos $F_3 - 0 \cdot F_1$, $l_{41} = -1$ ya que calculamos $F_4 + 1 \cdot F_1$, $l_{32} = -1$ puesto que hicimos $F_3 + 1 \cdot F_2$, $l_{42} = 1$ porque hicimos $F_4 - 1 \cdot F_2$, $l_{43} = 2$ porque hicimos $F_4 - 2 \cdot F_3$.

No olvidemos comprobar con las matrices L y U halladas, para detectar algún posible error, que $LU = A$.

Para resolver, mediante la factorización $A = LU$, el sistema $Ax = v_3$, resolvemos dos sistemas triangulares: primero $Ly = v_3$ y a continuación $Ux = y$.

El primero de ellos, se resuelve mediante sustitución progresiva (es decir, primero calculamos con la primera ecuación y_1, después introducimos este valor en la segunda y calculamos y_2, ...):

$$Ly = v_3 \iff \left\{ \begin{array}{rcr} y_1 & = & 0 \\ y_1 + y_2 & = & 2 \\ -y_2 + y_3 & = & -2 \\ -y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 & = & 2 \end{array} \right\} \iff y = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Obsérvese que este vector coincide con la quinta columna de la forma escalonada del apartado **(3.1)**, cuando se sustituye $\gamma = -2$ y $\mu = 2$.

El segundo se resuelve mediante sustitución regresiva (de la cuarta ecuación encontramos x_4, introducimos este valor en la tercera y calculamos x_3, ...):

$$Ux = y \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_2 \qquad\qquad & = & 2 \\ -2x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_4 & = & 0 \end{array} \right\} \iff x = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

No olvidemos comprobar que la solución hallada es la correcta, es decir, que verifica el sistema original $Ax = v_3$.

(3.3) La matriz M de la transformación lineal T es una matriz 4×2. Si escribimos dicha matriz por columnas: $M = [C_1|C_2]$, se cumple que $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2C_1 + C_2 = v_1$, $T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = -C_1 + C_2 = v_2$. Despejando, obtenemos $C_1 = \frac{1}{3}(v_1 - v_2)$, $C_2 = \frac{1}{3}(v_1 + 2v_2)$; es decir:

$$C_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \; C_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

En definitiva:

$$M = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 5 \\ 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nótese que hemos planteado un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas vectoriales (cada columna de M). También se puede resolver planteando un sistema con incógnitas escalares, es decir, ocho ecuaciones con ocho incógnitas (los elementos de la matriz M). Este método es claramente más desaconsejable a medida que el número de filas de la matriz aumenta. Si la matriz es 40×2, es decir, si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{40}$ tal que $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = v_1 \in \mathbb{R}^{40}$ y $T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = v_2 \in \mathbb{R}^{40}$. la resolución con incógnitas vectoriales sería la misma ($C_1 = (v_1 - v_2)/3$, $C_2 = (v_1 + 2v_2)/3$), mientras que con incógnitas escalares tendríamos un sistema de ochenta ecuaciones lineales y ochenta incógnitas.

Otra alternativa sería plantear matricialmente $M\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = v_1$, $M\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = v_2$:

$$M\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [v_1|v_2] \quad \to \quad M = [v_1|v_2]\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1},$$

es decir,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 5 \\ 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

SEGUNDA PARTE DEL EXAMEN DE FEBRERO

26 de Enero de 2004

Ejercicio 4

4.1 (4 PUNTOS) Determinar para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ es diagonalizable la matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & -a \\ 0 & a & 0 & 2-a \\ 0 & a & 1 & -a \\ 0 & 2-a & 0 & a \end{bmatrix}.$$

4.2 (4 PUNTOS) Diagonalizar ortogonalmente la matriz M cuando sea posible.

4.3 (2 PUNTOS) Sean A una matriz diagonalizable y P tal que $P^{-1}AP$ es diagonal. Demuestra que A^2 y A^T son diagonalizables y calcula matrices de paso que las diagonalicen.

SOLUCIÓN:

4.1 El polinomio característico se puede calcular fácilmente desarrollando por las columnas primera y tercera, obteniendo

$$p(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & a & 0 & -a \\ 0 & a-\lambda & 0 & 2-a \\ 0 & a & 1-\lambda & -a \\ 0 & 2-a & 0 & a-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(\lambda-2)(\lambda+2-2a).$$

- Si $a \neq 3/2, 2$, sus autovalores son $\lambda = 1$ (doble), $\lambda = 2$ (simple) y $\lambda = 2(a-1) \neq 1, 2$ (simple). Sólo necesitamos analizar la multiplicidad geométrica de $\lambda = 1$, que es

$$m_g(\lambda = 1) = 4 - \operatorname{rang}(M - I) = 4 - \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & -a \\ 0 & a-1 & 0 & 2-a \\ 0 & a & 0 & -a \\ 0 & 2-a & 0 & a-1 \end{bmatrix} = 4 - 2 = 2,$$

  siendo M, por tanto, diagonalizable.

- Si $a = 3/2$, sus autovalores son $\lambda = 1$ (triple) y $\lambda = 2$ (simple). Igual que en el caso anterior, basta con analizar la multiplicidad geométrica de $\lambda = 1$. En este caso es

$$m_g(\lambda = 1) = 4 - \operatorname{rang}(M - I) = 4 - \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 0 & 3/2 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 3/2 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = 4 - 2 = 2,$$

  y, de ese modo, la matriz M no es diagonalizable.

- Si $a = 2$, sus autovalores son $\lambda = 1$ (doble) y $\lambda = 2$ (doble). Necesitamos analizar las multiplicidades geométricas de ambos autovalores. La multiplicidad geométrica de $\lambda = 1$ es

$$m_g(\lambda = 1) = 4 - \operatorname{rang}(M - I) = 4 - \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4 - 2 = 2,$$

  y la de $\lambda = 2$ es

$$m_g(\lambda = 2) = 4 - \operatorname{rang}(M - 2I) = 4 - \operatorname{rang} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 4 - 2 = 2,$$

  siendo M, por tanto, diagonalizable.

4.2 Para que la matriz M sea ortogonalmente diagonalizable, ha de ser simétrica, lo que se corresponde, en este caso, con $a = 0$. Para este valor, los autovalores de M son $\lambda = 1$ (doble), $\lambda = 2$ (simple) y $\lambda = -2$ (simple). Calculemos autovectores:

- $\lambda = 1$:
$$\text{Nul}\,(M - I) = \text{Nul}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}.$$
(Obsérvese que estos autovectores son perpendiculares y unitarios)

- $\lambda = 2$:
$$\text{Nul}\,(M - 2I) = \text{Nul}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \text{Gen}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

- $\lambda = -2$:
$$\text{Nul}\,(M + 2I) = \text{Nul}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \text{Gen}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Obsérvese que los autovectores obtenidos son unitarios y ortogonales: los dos primeros porque los hemos elegido así y los otros dos porque corresponden a autovalores distintos.

Finalmente, se tiene $P^T M P = D$, donde

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{es ortogonal} \quad (P^{-1} = P^T), \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

4.3 La matriz A es diagonalizable si, y sólo si, existen una matriz de paso invertible P y una matriz diagonal D tales que $P^{-1}AP = D$ o, equivalentemente, $A = PDP^{-1}$.

Entonces:

- $A^2 = AA = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$. Como D^2 también es diagonal, la matriz A^2 es diagonalizable y la misma matriz P es la matriz de paso que la diagonaliza.

- $A^T = (PDP^{-1})^T = (P^{-1})^T D^T P^T$. Por un lado, tenemos que $D = D^T$ porque D es diagonal y, por el otro, llamando $Q = (P^{-1})^T$ tenemos $A^T = QDQ^{-1}$. Consecuentemente, A^T es diagonalizable y $Q = (P^{-1})^T$ es la matriz de paso que la diagonaliza.

Ejercicio 5 Consideremos los vectores

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

y sean $E = \text{Gen}\{w_1, w_2\}$ y $F = \text{Gen}\{w_3, w_4\}$

5.1 (2 PUNTOS) Calcular una base de $E^{\perp}$.

5.2 (3 PUNTOS) Sea $b = [2\ 1\ 0\ \ -3]^T$. Calcular la proyección ortogonal de b sobre $E + F$.

5.3 (3 PUNTOS) Sea $H = [\ w_1 \mid w_2 \mid w_3 \mid w_4\ ]$. Encontrar la solución en el sentido de los mínimos cuadrados del sistema $Hx = b$.

5.4 (2 PUNTOS) Calcular una base del subespacio de $\mathbb{R}^4$ formado por todos los vectores de F que son perpendiculares a b.

SOLUCIÓN:

5.1 Unas ecuaciones implícitas de $E^{\perp}$ se pueden obtener usando las componentes de cada uno de los vectores w_1, w_2, como coeficientes de dichas ecuaciones. De ese modo tenemos las siguientes ecuaciones implícitas de $E^{\perp}$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x_1 + 2x_2 & & +x_4 & = 0, \\ 2x_1 + x_2 & & +x_4 & = 0. \end{array} \right.$$

De aquí, resolviendo el sistema, obtenemos fácilmente una base de $E^{\perp}$:

$$\mathcal{B}_{E^{\perp}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}.$$

5.2 Para poder llegar al resultado necesitamos calcular una base de $E + F$ aunque, debido a la dimensión del subespacio y, por tanto, al número de vectores que hay que manejar, es más conveniente trabajar en $(E + F)^{\perp}$.

De ese modo calculamos unas ecuaciones implícitas de $(E + F)^{\perp}$, procediendo de la misma manera que en el apartado anterior, obteniendo

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x_1 + 2x_2 & & +x_4 & = 0, \\ 2x_1 + x_2 & & +x_4 & = 0, \\ x_1 - x_2 & & & = 0, \\ x_1 & +x_3 & & = 0. \end{array} \right.$$

Resolviendo el sistema obtenemos una base de $(E + F)^{\perp}$:

$$\mathcal{B}_{(E+F)^{\perp}} = \left\{ v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}.$$

Por tanto, la proyección ortogonal de b sobre $(E + F)^{\perp}$ es

$$\text{proy}_{\,(E+F)^{\perp}}(b) = \frac{b \cdot v}{v \cdot v} v = \frac{12}{12} v = v.$$

Finalmente, la proyección ortogonal de b sobre $E+F$ resulta

$$\operatorname{proy}_{E+F}(b) = b - v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5.3 Lo habitual para resolver un sistema de ecuaciones lineales en el sentido de mínimos cuadrados es, como sabemos, recurrir a las ecuaciones normales de Gauss. En este caso, sin embargo, no hace falta, ya que basta encontrar la solución en el sentido clásico del sistema

$$Hx = \operatorname{proy}_{E+F}(b),$$

al haber calculado en el apartado anterior esa proyección. La solución del sistema es

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde α es un parámetro que puede tomar cualquier valor real.

5.4 Unas ecuaciones implícitas de F se pueden obtener, mediante una eliminación de Gauss:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ -1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_1+x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_1+x_2 \\ 0 & 0 & x_3-(x_1+x_2) \\ 0 & 0 & x_4 \end{array}\right].$$

De ese modo, unas ecuaciones implícitas de F son

$$\left\{\begin{array}{r} x_1+x_2-x_3 \qquad =0, \\ x_4=0. \end{array}\right.$$

Queremos que los vectores sean ortogonales a b, por ello tendremos que imponer también la condición

$$2x_1 + x_2 - 3x_4 = 0.$$

Uniendo todas las ecuaciones tendremos unas ecuaciones implícitas del subespacio intersección de F con Gen $\{b\}^{\perp}$:

$$\left\{\begin{array}{r} x_1+x_2-x_3 \qquad =0, \\ x_4=0, \\ 2x_1+x_2 \qquad -3x_4=0. \end{array}\right.$$

Resolviendo, obtenemos fácilmente una base:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

SEGUNDO PARCIAL

12 de Junio de 2004

Ejercicio 1 Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

1.1 (3 PUNTOS) Determinar una base y unas ecuaciones implícitas de $E = \mathrm{Col}(A) \cap (\mathrm{Nul}(A))^{\perp}$ y de $E^{\perp}$.

1.2 (2 PUNTOS) Obtener una base ortonormal de $\mathrm{Col}(A)$ y calcular la matriz de la proyección ortogonal sobre dicho subespacio.

1.3 (2 PUNTOS) Siendo $b = [0 \;\; 2 \;\; 2]^T$, encontrar las soluciones en el sentido de los mínimos cuadrados de $Ax = b$. Determinar, entre ellas, las que tengan norma $\sqrt{5/4}$.

1.4 (3 PUNTOS) Sea $S = \{v_1, \ldots, v_p\}$ un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^n$. Probar que S es linealmente independiente.

SOLUCIÓN:
1.1 Comentamos una de las diversas formas que hay para resolver este apartado.
• Ecuaciones implícitas de $\mathrm{Col}(A)$: Como sabemos, para encontrar unas ecuaciones implícitas de un subespacio generado por varios vectores (en este caso los vectores columna de A) basta considerar un vector genérico $[x_1 \;\; x_2 \;\; x_3]^T$ e imponer que sea combinación lineal de dichos vectores.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & x_1 \\ 2 & 2 & 0 & x_2 \\ 2 & 0 & 2 & x_3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & \boxed{-2} & 2 & x_3 - x_1 \end{array}\right].$$

Comprobamos que la ecuación implícita

$$x_2 = x_1 \tag{1}$$

define a $\mathrm{Col}(A)$.
• Ecuaciones implícitas de $(\mathrm{Nul}(A))^{\perp}$: Comenzamos hallando una base de $\mathrm{Nul}(A)$, lo que se consigue sin más que resolver $Ax = 0$. De la eliminación de Gauss anterior se desprende que unas ecuaciones equivalentes al sistema son

$$\left\{ \begin{array}{r} 2x_1 + 2x_2 \qquad = 0, \\ -2x_2 + 2x_3 = 0, \end{array} \right.$$

las cuales, una vez resueltas nos dan la siguiente base

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Nul}(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Para obtener unas ecuaciones implícitas de $(\mathrm{Nul}(A))^{\perp}$ simplemente hemos de utilizar las componentes de los vectores (sólo uno en este caso) de la base como coeficientes en dichas ecuaciones. Así tenemos que

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 0 \tag{2}$$

es una ecuación implícita de $(\mathrm{Nul}(A))^{\perp}$.
• Ecuaciones implícitas y base de E: Uniendo las ecuaciones (1) y (2) tenemos unas ecuaciones implícitas de E:

$$\boxed{\text{Ecs. Impl. } E \equiv \left\{ \begin{array}{r} x_1 - x_2 \qquad = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \end{array} \right.}$$

y resolviéndolas hallamos una base de E:

$$\boxed{\boxed{\mathcal{B}_E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.}}$$

Nota: Podemos sustituir la segunda ecuación implícita de E por $x_3 = 0$.

• Ecuaciones implícitas y base de $E^\perp$: Para obtener una base de $E^\perp$ basta tomar los vectores formados por los coeficientes de las ecuaciones implícitas de E, es decir

$$\boxed{\boxed{\mathcal{B}_{E^\perp} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.}}$$

Por el proceso análogo podemos obtener unas ecuaciones implícitas de $E^\perp$:

$$\boxed{\boxed{\text{Ecs. Impl. } E^\perp \equiv x_1 + x_2 = 0.}}$$

Nota: Podemos sustituir el segundo vector de $\mathcal{B}_{E^\perp}$ por $[0 \ \ 0 \ \ 1]^T$.

1.2 Como ya hemos hecho una eliminación de Gauss con la matriz A, sabemos que una base del espacio $\text{Col}(A)$ puede estar formada por las dos primeras columnas de la matriz. Sin embargo, estos dos vectores no son ortogonales, así que tendríamos que ortogonalizar los vectores mediante el método de Gram-Schmidt.

Para evitar esos cálculos sólo tenemos que darnos cuenta (por simple inspección) de que las dos últimas columnas de A también forman una base de $\text{Col}(A)$ y, además, es ortogonal. Dividiendo los dos vectores por su norma tendremos la base ortonormal que pide el enunciado:

$$\boxed{\boxed{\mathcal{B}_{\text{Col}(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.}}$$

Siendo ahora

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

la matriz de la proyección ortogonal sobre $\text{Col}(A)$ se puede calcular como

$$\boxed{\boxed{P = QQ^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.}}$$

Nota: Esta matriz es siempre la misma, independientemente de la base ortonormal escogida.

1.3 Podemos resolver el problema usando las ecuaciones normales de Gauss, pero ya que tenemos, del apartado anterior, la matriz P de la proyección ortogonal sobre $\text{Col}(A)$, es más corto calcular la proyección del vector b sobre $\text{Col}(A)$ y después resolver

$$Ax = \text{Proy}_{\text{Col}(A)} b.$$

Entonces, como

$$\text{Proy}_{\text{Col}(A)} b = Pb = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

el sistema que hemos de resolver es

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Realizamos ahora la una eliminación de Gauss, que es análoga a la que hicimos en el primer apartado,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

llegando a la forma escalonada reducida

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Es inmediato, tomando como variable libre $x_3 \in \mathbb{R}$, que la solución del sistema es

$$\boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - x_3 \\ -1/2 + x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}.}$$

Veamos ahora cuál de esas soluciones verifica que su norma es $\sqrt{5/4}$.

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 - x_3 \\ -1/2 + x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{(1 - x_3)^2 + (-1/2 + x_3)^2 + x_3^2} = \sqrt{3x_3^2 - 3x_3 + \frac{5}{4}}.$$

Imponiendo que la norma sea $\sqrt{5/4}$ queda la condición

$$3x_3^2 - 3x_3 = 0,$$

que nos da los valores $x_3 = 0$ y $x_3 = 1$. Sustituyendo en la solución del sistema de mínimos cuadrados tenemos las dos soluciones que pide el enunciado:

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}.}$$

1.4 Escribamos una combinación lineal de los vectores de S igualada a cero:

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_p v_p = 0.$$

En caso de que probemos que todos los coeficientes han de ser nulos tendremos que S es linealmente independiente.

Multiplicando escalarmente la expresión anterior por cualquiera de los vectores de S (digamos v_i) tendremos

$$\alpha_1(v_i \cdot v_1) + \ldots + \alpha_{i-1}(v_i \cdot v_{i-1}) + \alpha_i(v_i \cdot v_i) + \alpha_{i+1}(v_i \cdot v_{i+1}) + \ldots + \alpha_p(v_i \cdot v_p) = 0.$$

Por ser S ortonormal, $v_i \cdot v_j = 0$ siempre que $j \neq i$ y además $v_i \cdot v_i = 1$. Llevando todo esto a la expresión anterior tendremos

$$\alpha_1 \overbrace{(v_i \cdot v_1)}^{=0} + \ldots + \alpha_{i-1} \overbrace{(v_i \cdot v_{i-1})}^{=0} + \alpha_i \overbrace{(v_i \cdot v_i)}^{=1} + \alpha_{i+1} \overbrace{(v_i \cdot v_{i+1})}^{=0} + \ldots + \alpha_p \overbrace{(v_i \cdot v_p)}^{=0} = 0,$$

quedando, por tanto,

$$\alpha_i = 0.$$

Como el razonamiento no depende del subíndice i escogido, acabamos de probar que todos los coeficientes de la combinación lineal son nulos y, de ese modo, S es linealmente independiente.

Ejercicio 2 Consideremos la matriz $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \delta & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

2.1 (3 PUNTOS) Para $\beta = -1$, determinar todos los valores α y δ reales para los que B es diagonalizable.

2.2 (3 PUNTOS) Calcular α, β y δ de tal modo que la matriz B tenga un autovalor 0 doble, con $[1 \;\; 1 \;\; 0]^T$ como uno de sus autovectores asociados.

2.3 (4 PUNTOS) Para $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $\delta = 0$, considere la cónica de ecuación $[x \;\; y \;\; 1]\, B \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$.

Hallar su ecuación canónica mediante los cambios de coordenadas adecuados, clasificarla y hacer un dibujo esquemático de la misma.

SOLUCIÓN:
2.1 Nos piden que estudiemos cuándo es diagonalizable la matriz

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & 0 \\ \delta & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \delta \in \mathbb{R}.$$

Para ello calculamos en primer lugar sus autovalores:

$$\begin{aligned} |B - \lambda I| &= \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & \alpha-\lambda & 0 \\ \delta & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & -1 \\ -1 & \alpha-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)[(\alpha-\lambda)^2 - 1] \\ &= (2-\lambda)[\lambda - (\alpha+1)][\lambda - (\alpha-1)] = 0. \end{aligned}$$

Es decir, que los autovalores de B son:

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \alpha + 1, \quad \lambda_3 = \alpha - 1.$$

La matriz es diagonalizable si, y sólo si, todos sus autovalores tienen la misma multiplicidad algebraica que geométrica. Sabemos que esa igualdad de multiplicidades se cumple para los autovalores simples, pero para los múltiples hay que analizarlo. Nos planteamos, por tanto, si puede haber autovalores dobles (e incluso triples):

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_2 \;\to\; 2 = \alpha + 1 \;\to\; \alpha = 1, \\ \lambda_1 &= \lambda_3 \;\to\; 2 = \alpha - 1 \;\to\; \alpha = 3, \\ \lambda_2 &= \lambda_3 \;\to\; \alpha + 1 = \alpha - 1 \;\to\; \lambda_2 \neq \lambda_3 \; \forall \alpha. \end{aligned}$$

Vemos pues que aparece un autovalor doble si $\alpha = 1$ o $\alpha = 3$. Además, no es posible la existencia de un autovalor triple ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$) puesto que $\lambda_2 \neq \lambda_3 \; \forall \alpha$.

Así, si $\alpha \neq 1, 3$, los tres autovalores de B son distintos (simples) y, por tanto, B es diagonalizable (para cualquier $\delta \in \mathbb{R}$). Sin embargo, hay que estudiar, por separado, los casos en que aparecen autovalores dobles, es decir, $\alpha = 1$ y $\alpha = 3$.

En el caso $\alpha = 1$, tenemos $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 0$. Puesto que

$$r(B - 2I) = r \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ \delta & 0 & 0 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \delta = 0, \\ 2 & \text{si } \delta \neq 0, \end{array} \right.$$

la multiplicidad geométrica del autovalor doble es:

$$m_g(\lambda = 2) = 3 - r(B - 2I) = \begin{cases} 3 - 1 = 2 & \text{si } \delta = 0, \\ 3 - 2 = 1 & \text{si } \delta \neq 0, \end{cases}$$

es decir, cuando $\alpha = 1$, B es diagonalizable si $\delta = 0$ (ya que $m_a(\lambda = 2) = m_g(\lambda = 2) = 2$) y no es diagonalizable si $\delta \neq 0$ (puesto que entonces $m_a(\lambda = 2) = 2 \neq m_g(\lambda = 2) = 1$).

Procediendo análogamente, en el caso $\alpha = 3$, tenemos $\lambda_1 = \lambda_3 = 2$, $\lambda_2 = 4$. Puesto que para este valor de α

$$r(B - 2I) = r \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \delta & 0 & 0 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta = 0, \\ 2 & \text{si } \delta \neq 0, \end{cases}$$

obtenemos que la multiplicidad geométrica del autovalor doble es:

$$m_g(\lambda = 2) = 3 - r(B - 2I) = \begin{cases} 3 - 1 = 2 & \text{si } \delta = 0, \\ 3 - 2 = 1 & \text{si } \delta \neq 0, \end{cases}$$

es decir, cuando $\alpha = 3$, B es diagonalizable si $\delta = 0$ (ya que $m_a(\lambda = 2) = m_g(\lambda = 2) = 2$) y no es diagonalizable si $\delta \neq 0$ (puesto que entonces $m_a(\lambda = 2) = 2 \neq m_g(\lambda = 2) = 1$).

Resumiendo, B es diagonalizable si:

- $\alpha \neq 1, 3$ y δ cualquiera.
- $\alpha = 1$ y $\delta = 0$.
- $\alpha = 3$ y $\delta = 0$.

Y, por tanto, B no es diagonalizable si:

- $\alpha = 1$ y $\delta \neq 0$.
- $\alpha = 3$ y $\delta \neq 0$.

Nótese que si $\delta = 0$ la matriz es simétrica y sabemos que va a ser diagonalizable (y, más exactamente, ortogonalmente diagonalizable).

2.2 Por una parte, exigiendo que $v = [1 \quad 1 \quad 0]^T$ sea autovector de B asociado al autovalor 0 obtenemos:

$$Bv = 0v = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \delta & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 0, \\ \delta = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Por otra, podemos exigir que la suma de los autovalores de B (uno es trivialmente 2 y el otro debe ser 0 doble) coincida con su traza:

$$\alpha + \alpha + 2 = 2 + 0 + 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = 0,$$

con lo que combinando esta ecuación con (3) obtenemos

$$\alpha = \beta = \delta = 0.$$

También podíamos calcular los autovalores de B de forma análoga a como hicimos en el primer apartado:

$$\begin{aligned} |B - \lambda I| &= \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & \beta & 0 \\ \beta & \alpha - \lambda & 0 \\ \delta & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda) \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ \beta & \alpha - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)[(\alpha - \lambda)^2 - \beta^2] \\ &= (2 - \lambda)[\lambda - (\alpha + \beta)][\lambda - (\alpha - \beta)]. \end{aligned}$$

Como los autovalores son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \alpha + \beta$ y $\lambda_3 = \alpha - \beta$, exigiendo que $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (autovalor cero doble) obtenemos $\alpha = \beta = 0$, que combinada con la segunda ecuación de (3) nos lleva nuevamente a que $\alpha = \beta = \delta = 0$.

Nótese que si exigimos que el determinante de B coincida con el producto de sus autovalores, obtenemos

$$|B| = 2(\alpha^2 - \beta^2) = 2 \cdot 0 \cdot 0 = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha^2 = \beta^2,$$

pero no imponemos así la condición de autovalor cero doble, con lo que combinando esta última ecuación con (3) no llegamos a la solución pedida.

2.3 Sin más que operar, para $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $\delta = 0$, obtenemos la ecuación de la cónica:

$$[x \;\; y \;\; 1]\, B \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = [x \;\; y \;\; 1] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = x^2 + y^2 + 4xy + 2 = 0.$$

Puesto que la ecuación de la cónica tiene término en xy necesitamos hacer un giro para colocar los ejes en las direcciones de los autovectores de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (la que recoge los términos cuadráticos). Calculamos pues sus autovalores y después sus autovectores. En primer lugar:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad (1-\lambda)^2 = 4 \quad \rightarrow \quad (1-\lambda) = \pm 2 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1.$$

Podemos pues calcular los autovectores:

$$\lambda_1 = 3: \quad \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow x_1 - x_2 = 0 \longrightarrow v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = -1: \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow x_1 + x_2 = 0 \longrightarrow v_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Construimos la matriz P mediante la siguiente base ortonormal de autovectores:

$$\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

donde el primer autovector da la dirección y sentido del nuevo eje X' (que corresponde a girar un ángulo $\theta = 45^{\text{o}}$ el eje X, pues del autovector sacamos que $\mathrm{tg}\theta = v/u = 1/1 = 1$) y el segundo autovector (que hemos elegido en el sentido adecuado para que el eje Y' se obtenga girando el eje X' 90^{o} en sentido positivo o antihorario) marca la dirección y sentido del nuevo eje Y'. El cambio:

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}' \longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

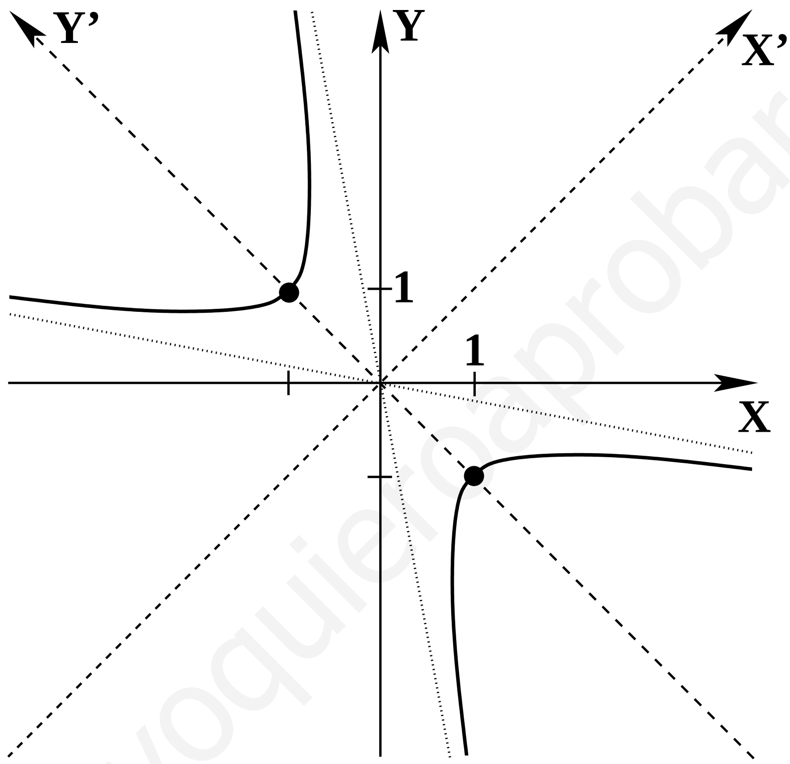
eliminará el término mixto $x'y'$ dejando la parte cuadrática como $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$, modificará los coeficientes de los términos lineales (que en nuestro caso no había), y no alterará el término independiente. Concretamente obtenemos:

$$x^2 + y^2 + 4xy + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad 3x'^2 - y'^2 + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x'^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} - \frac{y'^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = -1.$$

Se trata pues de una hipérbola de semiejes $a = \sqrt{\frac{2}{3}}, b = \sqrt{2}$, centrada en el origen $(x', y') = (0, 0)$, con asíntotas $y' = \pm\frac{b}{a}x' = \pm\sqrt{3}x'$ y vértices en $(x', y') = (0, \pm\sqrt{2})$ (observemos que corta al eje Y' y no al X'). Es inmediato ver que la hipérbola no corta ni al eje X ni al Y, pues las ecuaciones que se obtienen al hacer $y = 0$ ($x^2 + 2 = 0$) y $x = 0$ ($y^2 + 2 = 0$) no tienen solución real.

Teniendo en cuenta la relación entre las coordenadas antiguas y las nuevas es fácil ver que los vértices de la hipérbola están en $(x, y) = (-1, 1)$ y en $(x, y) = (1, -1)$ y que las asíntotas tienen por ecuaciones $(\sqrt{3}-1)y + (\sqrt{3}+1)x = 0$ y $(\sqrt{3}+1)y + (\sqrt{3}-1)x = 0$ (ambas tienen pendientes negativas y, por tanto, están en el segundo y cuarto cuadrante). Recordemos que $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, $\sqrt{3} \approx 1{,}73$.

Con toda la información que hemos obtenido a lo largo del apartado, comenzamos dibujando los ejes X' e Y' sabiendo que pasan por el origen de las coordenadas X-Y y que tienen la dirección y sentido del autovector correspondiente a λ_1 y λ_2, respectivamente. Es decir, en este caso, con la elección que hicimos de autovalores y autovectores, los ejes X' e Y' se obtienen rotando un ángulo de 45º a los ejes X e Y. Finalmente, ayudados por sus asíntotas, dibujamos cualitativamente la hipérbola.



Ejercicio 3 Consideremos la matriz $C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

3.1 Calcular una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores y autovectores generalizados de la matriz C.

3.2 Encontrar el término general de la recurrencia vectorial $u_n = Cu_{n-1}$ siendo el vector inicial $u_0 = [-1 \ \ 0 \ \ 1]^T$.

3.3 Diagonalizar ortogonalmente la matriz $M = C + C^T$.

3.1 Calcularemos en primer lugar el polinomio caracterstico de C

$$\begin{aligned} \det[C - \lambda I] &= \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -3-\lambda & 2 \\ 1 & -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \overset{\mathrm{C_2+C_3}}{=} \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 1-\lambda \end{bmatrix} \overset{\mathrm{F_3-F_2}}{=} \\ &= \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (-1-\lambda)\det \begin{bmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = \\ &= (-1-\lambda)((-3-\lambda)(-1-\lambda)+1) = (-1-\lambda)(\lambda^2+4\lambda+4) = -(\lambda+1)(\lambda+2)^2. \end{aligned}$$

Los autovalores de C son, por tanto: $\lambda = -1$ simple y $\lambda = -2$ doble. Calculemos ahora los autovectores correspondientes:

$\lambda = -1$:

$$\mathrm{Nul}\,[C+I] = \mathrm{Nul} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{Gen} \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\lambda = -2$:

$$\mathrm{Nul}\,[C+2I] = \mathrm{Nul} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \mathrm{Gen} \left\{ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Obsrvese que la matriz no es diagonalizable. Por ltimo, calculemos un autovector generalizado para el autovalor $\lambda = -2$:

$$\mathrm{Nul}\,[C+2I]^2 = \mathrm{Nul} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \mathrm{Gen} \left\{ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Hay diversas opciones para el autovector generalizado: podramos tomar cualquier vector v_3 del subespacio $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0$ que sea linealmente independiente con el autovector v_2.

Los vectores $\{v_1, v_2, v_3\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.

3.2 Nos piden calcular $u_n = A^n u_0$. Para ello, expresamos el vector inicial $u_0 = [-1 \ \ 0 \ \ 1]^T$ como combinacin lineal de los autovectores y autovectores generalizados que obtuvimos antes:

$$u_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta + 2\gamma = -1, \\ \alpha + 2\beta = 0, \\ \alpha + \beta - \gamma = 1. \end{array} \right.$$

La solucin de este sistema es $\alpha = 2, \beta = -1, \gamma = 0$, de forma que $u_0 = 2v_1 - v_2$. En consecuencia,

$$u_n = A^n u_0 = 2A^n v_1 - A^n v_2 = 2(-1)^n v_1 - (-2)^n v_2,$$

(puesto que v_1 y v_2 son autovectores de C). En definitiva:

$$u_n = 2(-1)^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - (-2)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} -2^n \\ 2 - 2^{n+1} \\ 2 - 2^n \end{pmatrix}.$$

3.3 Tenemos que

$$M = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

La ecuacin caracterstica de esta matriz es

$$\begin{aligned} \det[M - \lambda I] &= \det \begin{bmatrix} -6-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -6-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)\det \begin{bmatrix} -6-\lambda & 1 \\ 1 & -6-\lambda \end{bmatrix} = \\ &= (2-\lambda)[(-6-\lambda)^2 - 1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2, \\ (-6-\lambda)^2 = 1 \Leftrightarrow -6-\lambda = \pm 1 \Leftrightarrow \lambda = -5, -7. \end{cases} \end{aligned}$$

Tenemos, por tanto, tres autovalores simples: $\lambda = 2, -5, -7$. Calculemos ahora los autovectores correspondientes. Ya sabemos que, al ser la matriz M simtrica, stos deben ser ortogonales. Nosotros los tomaremos adems unitarios.

$\lambda = 2$:

$$\mathrm{Nul}\,[M - 2I] = \mathrm{Nul} \begin{bmatrix} -8 & 1 & 0 \\ 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\lambda = -5$:

$$\mathrm{Nul}\,[M + 5I] = \mathrm{Nul} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \mathrm{Gen} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\lambda = -7$:

$$\mathrm{Nul}\,[M + 7I] = \mathrm{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \mathrm{Gen} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Por ltimo, tenemos $P^{-1}MP = P^T MP = D$ siendo

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ortogonal, y } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \text{ diagonal.}$$

EXAMEN FINAL

1 de Julio de 2004

Ejercicio 1. (SÓLO PRIMER PARCIAL)
Consideremos, para $\delta, \mu \in \mathbb{R}$, los vectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \ v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \mu - 1 \\ \delta + 3 \end{bmatrix} \ \text{y} \ \ v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ \mu \\ 3 \end{bmatrix}.$$

y la matriz $A = [v_1 \mid v_2 \mid v_3 \mid v_4]$.

1.1 (4 PUNTOS) Calcular, según los valores de δ y μ, la forma escalonada reducida de A.

1.2 (2 PUNTOS) Determinar todos los valores de δ y μ para los que $v_4 \in \text{Gen}\{v_1, v_2, v_3\}$.

1.3 (2 PUNTOS) Obtener todos los valores de δ y μ para los que es posible realizar la factorización LU de la matriz A.

1.4 (2 PUNTOS) Para $\mu = 1$ y $\delta = 1$, calcular la factorización LU de A.

SOLUCIÓN:
1.1 Convendría conocer el concepto de forma escalonada reducida. Recogemos el contenido del libro de Lay acerca de ello.

Definición: Una matriz rectangular está en **forma escalonada** si tiene las siguientes tres propiedades:

1. Todas las filas diferentes de cero están arriba de las puramente ceros.
2. Cada entrada principal de una fila (o sea, la primera entrada distinta de cero de dicha fila) está en una columna a la derecha de la entrada principal de cada fila superior a ella.
3. Todas las entradas de una columna que estén por debajo de una entrada principal son cero.

Si una matriz en forma escalonada satisface las condiciones adicionales siguientes, entonces se dice que está en **forma escalonada reducida**:

4. La entrada principal de cada fila no nula es 1.
5. Cada 1 principal es la única entrada diferente de cero en su columna.

Las operaciones del método de eliminación de Gauss consiguen transformar **toda** matriz A en su **única** forma escalonada reducida. Recordemos que dichas transformaciones son de tres tipos: intercambio de dos filas, sumar a una fila un múltiplo de otra fila, multiplicar una fila por un número distinto de cero. Una vez aclarado esto procemos a efectuar los cálculos.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & \mu - 1 & \mu \\ 2 & 6 & \delta + 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_4 - 2F_1]{F_3 + F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \mu - 1 & \mu + 1 \\ 0 & 4 & \delta + 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_4 - 2F_2]{F_3 - F_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \mu - 2 & \mu - 2 \\ 0 & 0 & \delta + 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Caso 1 Si $\mu = 2$, entonces la tercera fila es cero y la intercambio con la cuarta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \mu - 2 & \mu - 2 \\ 0 & 0 & \delta + 1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{3,4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \delta + 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como buscamos siempre las entradas principales, tenemos que distinguir que $\delta + 1$ sea cero o no.

Caso 1.1 Si $\delta=-1$, entonces

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{M_3(-1/5)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1-F_3]{F_2-3F_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{M_2(1/2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1-F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (forma escalonada reducida para } \mu=2 \text{ y } \delta=-1).$$

Caso 1.2 Si $\delta\neq-1$, entonces

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \delta+1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{M_3(1/(\delta+1))} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5/(\delta+1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3+5/(\delta+1) \\ 0 & 0 & 1 & -5/(\delta+1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{M_2(1/2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2+5/(2(\delta+1)) \\ 0 & 0 & 1 & -5/(\delta+1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1-F_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2-5/(2(\delta+1)) \\ 0 & 1 & 0 & 3/2+5/(2(\delta+1)) \\ 0 & 0 & 1 & -5/(\delta+1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (forma escalonada reducida para } \mu=2 \text{ y } \delta\neq-1).$$

Caso 2 Si $\mu\neq 2$, entonces:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \mu-2 & \mu-2 \\ 0 & 0 & \delta+1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{M_3(1/(\mu-2))} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \delta+1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_4-(\delta+1)F_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta-6 \end{bmatrix}.$$

Como buscamos siempre las entradas principales, tenemos que distinguir que $-\delta-6$ sea cero o no.

Caso 2.1 Si $\delta=-6$, entonces

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2-F_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{M_2(1/2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1-F_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (forma escalonada reducida para } \mu\neq 2 \text{ y } \delta=-6).$$

Caso 2.2 Si $\delta \neq -6$, entonces A es cuadrada, de rango máximo y su forma escalonada reducida es la identidad.

1.2. Decir que un vector depende linealmente de otros es equivalente a decir que un cierto sistema de ecuaciones es compatible. Por otro lado, la forma más eficaz de analizar la compatibilidad de un sistema es efectuar la reducccíón gaussiana de la matriz ampliada $[A\,|b]$. El sistema es compatible si y sólo si no se obtienen pivotes en la última columna. Yo quiero saber si v_4 es combinación lineal de $\{v_1, v_2, v_3\}$. Eso equivale a saber si el sistema

$$[v_1, v_2, v_3]\,x = v_4$$

es compatible. Y eso equivale a saber si en la forma escalonada de $[v_1, v_2, v_3\,|v_4]$ aparece algún pivote en la cuarta columna. Como eso ya ha sido analizado en el apartado anterior, sólo tenemos que mirarlo en cada caso.

Caso 1. $\mu = 2$.

Caso 1.1. $\delta = -1$. Se llega a la forma escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\text{-5}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como hay pivote en la cuarta columna, podemos afirmar que v_4 no es combinación lineal de $\{v_1, v_2, v_3\}$. En resto de los casos escribiré sólo el resultado

Caso 1.2. $\delta \neq -1$: v_4 sí es combinación lineal de $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Caso 2. $\mu \neq 2$.

Caso 2.1. $\delta = -6$: v_4 sí es combinación lineal de $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Caso 2.2. $\delta \neq -6$: v_4 no es combinación lineal de $\{v_1, v_2, v_3\}$.

1.3. La factorización LU se da cuando la matriz A se puede llevar a una forma escalonada con una eliminación gaussiana sin intercambio de filas. Como eso se ha estudiado en el primer apartado, sólo tenemos que recuperar los datos. La primera parte de la eliminación era común a todos los casos y no contenía intercambios de filas. Recordemos qué pasó en cada caso:

Caso 1. Si $\mu = 2$, entonces la tercera fila es cero

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta + 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Como no podemos intercambiar filas y en la última siempre hay un elemento no nulo (que es -5, independientemente de lo que valga δ), no es posible obtener la factorización LU.

Caso 2. Si $\mu \neq 2$, entonces llegamos a la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \mu - 2 & \mu - 2 \\ 0 & 0 & \delta + 1 & -5 \end{bmatrix}$$

y podemos seguir haciendo un cero en la posición $(4, 3)$.

En conclusión, A siempre posee factorización LU, excepto el caso en que $\mu = 2$.

1.4. La factorización LU se recupera de la eliminación gaussiana sin intercambios de filas. En este caso queda

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. (SÓLO PRIMER PARCIAL)

2.1 (2 PUNTOS) Calcular y representar en el plano complejo todas las raíces del polinomio $z^4 - 8iz$.

2.2 (3 PUNTOS) Expresar, mediante una función de números complejos, la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(1,3)$. Desarrollar la expresión hasta determinar las partes real e imaginaria de la función.

2.3 (5 PUNTOS) Escribir la forma cuadrática

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + \alpha x_2^2 + 4\alpha x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + (6 - 4\alpha)x_2x_3$$

como suma de cuadrados y clasificarla según los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

SOLUCIÓN:

2.1 Vemos que el polinomio no tiene término independiente, por lo que se puede sacar z factor común:

$$p(z) = z^4 - 8iz = z\left(z^3 - 8i\right).$$

Igualando a cero, para obtener las raíces, tenemos dos posibilidades:

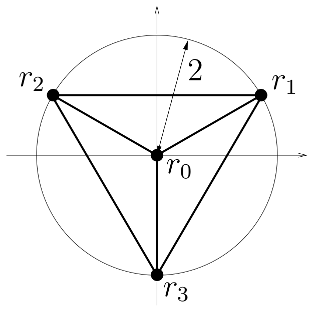
- o bien $z = 0$, que es la primera raíz (y la denotaremos por z_0),
- o bien $z^3 - 8i = 0$, que es equivalente a $z = \sqrt[3]{8i}$. Sólo tenemos, por tanto, que obtener las raíces cúbicas de $8i$. Como $8i$ tiene módulo 8 y argumento $\pi/2$, queda

$$z = \sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8}\; e^{\frac{\frac{\pi}{2}+k(2\pi)}{3}} \quad [\![k = 0,1,2]\!] = 2\left\{\begin{array}{l} e^{\frac{\pi}{6}} \\ e^{\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}} \\ e^{\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}} \end{array}\right. = 2\left\{\begin{array}{l} e^{\frac{\pi}{6}} \\ e^{\frac{5\pi}{6}} \\ e^{\frac{3\pi}{2}} \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} \sqrt{3}+i, \\ -\sqrt{3}+i, \\ -2i. \end{array}\right.$$

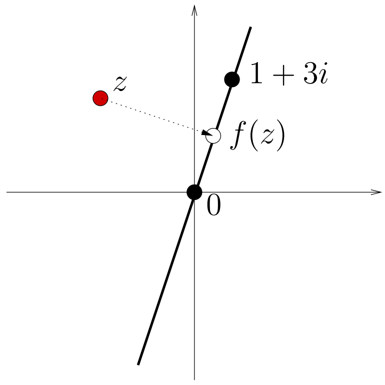
Así obtenemos tres raíces más, que denotaremos, respectivamente, por z_1, z_2 y z_3.

Resumiendo, las raíces son

$$\begin{aligned} r_0 &= 0, \\ r_1 &= \sqrt{3}+i, \\ r_2 &= -\sqrt{3}+i, \\ r_3 &= -2i. \end{aligned}$$



2.2 Representando, en el plano complejo, los puntos que nos dan como dato y la recta que los une se obtiene un dibujo como el que se muestra en la figura siguiente, donde hemos incluido, además, un punto genérico z y su imagen por la proyección ortogonal, $f(z)$.



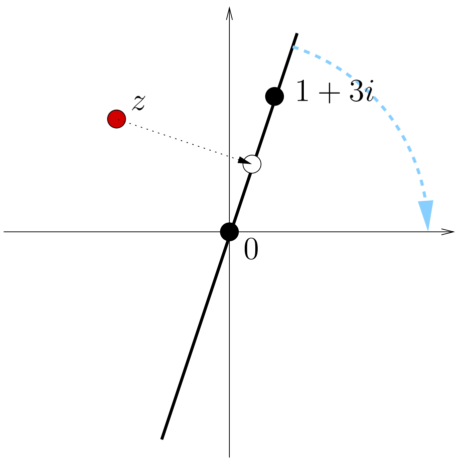
Sabemos perfectamente que, en el plano complejo, la proyección ortogonal sobre la recta real se obtiene sin más que tomar la parte real. Ya que nos piden la proyección ortogonal sobre una recta distinta, el proceso a seguir será:

- Llevar la recta que nos dan a la recta real. Para esto será necesario realizar un giro.
- Realizar la proyección ortogonal, tomando la parte real.
- Deshacer el giro para dejar la recta en su posición original.

Procedamos, paso a paso, con cada una de estas etapas. Denotaremos por w_i, $i = 1, 2, 3$, a los sucesivos puntos en que se transforma el punto inicial z tras cada etapa.

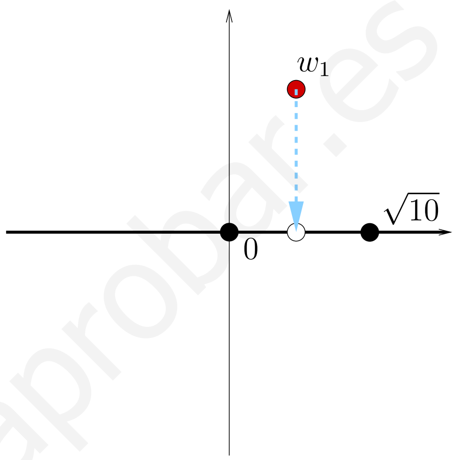
En primer lugar realizamos un giro que lleva la recta al eje real. Para ello sólo hemos de multiplicar por el conjugado de $1 + 3i$, previamente normalizado, es decir,

$$\boxed{w_1 = \frac{1-3i}{\sqrt{10}} z.}$$



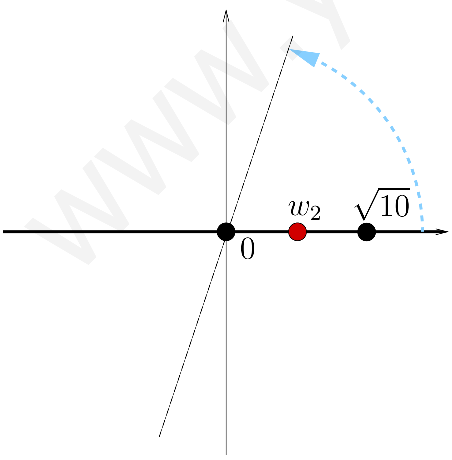
Los puntos 0 y $1+3i$ se transforman en 0 y $\sqrt{10}$, respectivamente. La recta se ha convertido en el eje real. Éste es el momento de realizar la proyección ortogonal

$$\boxed{w_2 = \mathrm{Re}(w_1).}$$



Realizamos ahora el giro inverso:

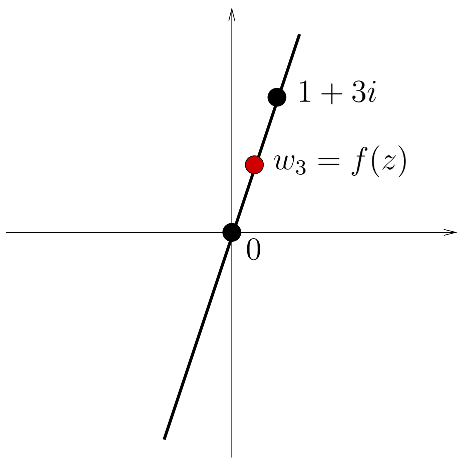
$$\boxed{w_3 = \frac{1+3i}{\sqrt{10}} w_2.}$$



Sustituyendo cada uno de los cambios en el posterior queda la función

$$\boxed{w_3 = f(z) = \frac{1+3i}{\sqrt{10}} \mathrm{Re}\left(\frac{1-3i}{\sqrt{10}} z\right),}$$

que representa la proyección ortogonal que buscábamos.



Tomando $z = x+yi$ y operando convenientemente en la última expresión, obtenemos las partes real e imaginaria de la función:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1+3i}{\sqrt{10}}\mathrm{Re}\left(\frac{1-3i}{\sqrt{10}}(x+yi)\right) = \frac{1+3i}{\sqrt{10}}\mathrm{Re}\left(\frac{(x+3y)}{\sqrt{10}} + \frac{(y-3x)}{\sqrt{10}}i\right) \\ &= \frac{1+3i}{\sqrt{10}}\,\frac{(x+3y)}{\sqrt{10}} = \frac{x+3y}{10} + \frac{3(x+3y)}{10}i. \end{aligned}$$

2.3 Para escribir la forma cuadrática como suma de cuadrados es conveniente elegir, en cada paso, el término cuadrático puro cuyo coeficiente sea el más sencillo. En particular, siempre que sea posible, es una buena idea dejar los parámetros para el final para así evitar posibles discusiones de casos que al final pueden ser irrelevantes. De ese modo comenzamos eligiendo el término que corresponde a x_1^2. Así agrupamos todos los términos que contienen a x_1 y completamos cuadrados en dicha variable.

$$\begin{aligned} \Phi(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2 + \alpha x_2^2 + 4\alpha x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + (6-4\alpha)x_2x_3 \\ &= [x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3] + \alpha x_2^2 + 4\alpha x_3^2 + (6-4\alpha)x_2x_3. \end{aligned}$$

Para reproducir el término entre corchetes con un cuadrado nos basta tomar

$$(x_1+x_2+x_3)^2 = \underline{x_1^2} + x_2^2 + x_3^2 \underline{+2x_1x_2 + 2x_1x_3} + 2x_2x_3,$$

donde hemos subrayado aquellos sumandos que aparecen entre corchetes en la ecuación anterior. Despejándolos y sustituyendo en la ecuación anterior queda

$$\begin{aligned} \Phi(x_1,x_2,x_3) &= [(x_1+x_2+x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3] + \alpha x_2^2 + 4\alpha x_3^2 + (6-4\alpha)x_2x_3 \\ &= (x_1+x_2+x_3)^2 + (\alpha-1)x_2^2 + (4\alpha-1)x_3^2 + 4(1-\alpha)x_2x_3. \end{aligned}$$

A partir de ahora olvidamos el primer sumando, donde ya hemos completado cuadrados en x_1, y nos centramos en las dos variables que quedan. En particular, agrupamos todos los términos que contienen a x_2, quedando

$$\Phi(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2+x_3)^2 + (\alpha-1)[x_2^2 - 4x_2x_3] + (4\alpha-1)x_3^2.$$

El término entre corchetes proviene del cuadrado

$$(x_2-2x_3)^2 = \underline{x_2^2 - 4x_2x_3} + 4x_3^2,$$

donde hemos subrayado aquellos términos que aparecen en el corchete de la ecuación anterior. Despejando y sustituyendo queda

$$\begin{aligned} \Phi(x_1,x_2,x_3) &= (x_1+x_2+x_3)^2 + (\alpha-1)[(x_2-2x_3)^2 - 4x_3^2] + (4\alpha-1)x_3^2 \\ &= (x_1+x_2+x_3)^2 + (\alpha-1)(x_2-2x_3)^2 + 3x_3^2. \end{aligned}$$

Ya hemos completado cuadrados. Simplemente quedaría un cambio,

$$y_1 = x_1+x_2+x_3, \qquad y_2 = x_2 - 2x_3, \qquad y_3 = x_3,$$

para obtener una forma canónica de la forma cuadrática:

$$\Phi(y_1,y_2,y_3) = y_1^2 + (\alpha-1)y_2^2 + 3y_3^2.$$

La segunda parte del apartado pide clasificar la forma cuadrática dependiendo de los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$. Está claro que hemos de centrarnos en el signo del coeficiente de y_2^2, ya que los otros dos son positivos y no dependen de α. De este modo se obtienen las tres posibilidades siguientes :

- $\boldsymbol{\alpha > 1}$: Los tres coeficientes son positivos, por lo que la forma cuadrática es **definida positiva**.
- $\boldsymbol{\alpha = 1}$: Dos coeficientes son positivos y uno nulo, por lo que la forma cuadrática es **semidefinida positiva**.
- $\boldsymbol{\alpha < 1}$: Los coeficientes son de distinto signo, por lo que la forma cuadrática es **indefinida**.

Ejercicio 3. (SÓLO PRIMER PARCIAL)
Consideremos la aplicación lineal T que verifica

$$T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ y } T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3.1 (2 PUNTOS) Obtener la matriz canónica de T.

3.2 (4 PUNTOS) Calcular, para cada valor $\beta \in \mathbb{R}$, los vectores de $\mathbb{R}^2$ cuya imagen, mediante T, es $[3 \;\; 1 \;\; \beta]^T$.

3.3 (4 PUNTOS) Calcular el foco, la directriz y el vértice de la parábola $y^2 + 4y + 4x = 0$. Hacer un dibujo esquemático de la misma.

SOLUCIÓN:
3.1 La matriz canónica de T, que denotaremos por A, es una matriz 3×2 que cumple:

$$A\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Estas igualdades vectoriales equivalen a la igualdad matricial

$$A\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

De aquí despejamos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

3.2 Queremos obtener los vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Se trata de un sistema de 3 ecuaciones y dos incógnitas, cuya matriz ampliada es

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & \beta \end{array}\right].$$

La eliminación de Gauss para esta matriz resulta:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & \beta \end{array}\right] \to (F_3 + 2F_1) \to \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & \beta + 6 \end{array}\right] \to (F_3 - 5F_2) \to \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \beta + 1 \end{array}\right].$$

- Si $\beta \neq -1$, la columna del término independiente resulta ser pivote y el sistema es incompatible, de forma que en este caso no existe ningún vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ cuya imagen sea $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}$.

- Si $\beta = -1$, continuamos el proceso de eliminación hasta llegar a la forma escalonada reducida, que nos proporcionará la solución del sistema (que ahora sí es compatible):

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to (-F_1) \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to (F_1 + 4F_2) \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

  En este caso, existe un único vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ cuya imagen es $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

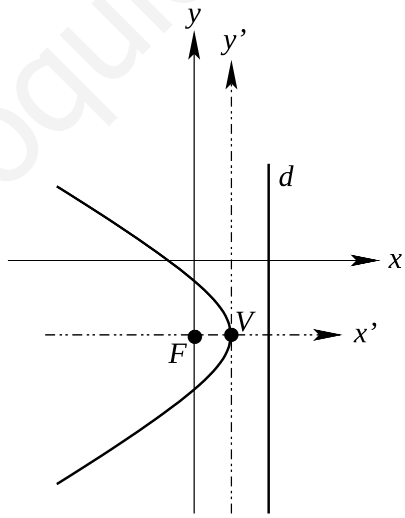
3.3 En primer lugar, hallaremos la ecuación canónica de la parábola $y^2+4y+4x = 0$, completando cuadrados:

$$y^2 + 4y + 4x = (y + 2)^2 + 4x - 4 = (y + 2)^2 + 4(x - 1) = y'^2 + 4x' = 0,$$

siendo $x' = x - 1$, $y' = y + 2$.

La ecuación anterior puede escribirse en la forma $y'^2 = 2px'$, con $p = -2$. De aquí obtenemos que el vértice V está en $x' = y' = 0 \Leftrightarrow x = 1, y = -2$, el foco F en $x' = -1, y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = -2$, y la directriz d es la recta $x' = 1 \Leftrightarrow x = 2$.

Un dibujo esquemático de la parábola sería:



Ejercicio 4. (SÓLO SEGUNDO PARCIAL)
Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & -a & a-3 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 3 & -1 \\ 0 & 4-a & 0 & a \end{bmatrix}.$$

4.1 (3 PUNTOS) Calcular, para cada valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, los autovalores de A, determinando sus multiplicidades algebraicas y geométricas.

4.2 (4 PUNTOS) Para $a = 2$, determinar una base de $\mathbb{R}^4$ formada por autovectores y autovectores generalizados de A.

4.3 (3 PUNTOS) Para $a = 2$, calcular los autovalores y autovectores de A^4, $A - 4I$ y A^{-1}.

SOLUCIÓN:
4.1 Comencemos hallando los autovalores de A, es decir, determinando las raíces de su polinomio característico:

$$0 = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} a-\lambda & -a & a-3 & 1 \\ 0 & a-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 4-a & 0 & a-\lambda \end{bmatrix}\right) = (a-\lambda)^3(3-\lambda).$$

Aunque la matriz sea 4×4, es inmediato calcular el determinante desarrollando por filas y columnas. Por ejemplo, podemos elegir esta secuencia: columna 1, fila 2, columna 3.

Obtenemos que:

- Si $a \neq 3$, entonces $\lambda = a$ es un autovalor triple y $\lambda = 3$ es simple.
- Si $a = 3$, entonces $\lambda = 3$ es un autovalor cuádruple.

Ya tenemos, por tanto, las multiplicidades algebraicas. Calculemos ahora las geométricas según los casos anteriores.

Caso $a \neq 3$. La multiplicidad geométrica de $\lambda = 3$ es $m_g(3) = 1$, ya que el autovalor es simple. En cuanto al autovalor $\lambda = a$ pueden surgir más casos puesto que es un autovalor triple.

Estudiemos el rango de $A - aI$, ya que la multiplicidad geométrica se puede obtener como la dimensión del espacio vectorial (en este caso 4) menos el rango de dicha matriz. Desde otro punto de vista, esta cantidad coincide con el número de variables libres del sistema lineal $(A - aI)x = 0$. Comenzamos por realizar una eliminación de Gauss para llevar $A - aI$ a forma escalonada. Tras unas primeras operaciones elementales queda

$$A - aI = \begin{bmatrix} 0 & -a & a-3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 3-a & -1 \\ 0 & 4-a & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -a & a-3 & 1 \\ 0 & 4-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aquí se comprueba que:

- Si $a = 4$ entonces la matriz tiene rango 1 y, por tanto, el autovalor tiene multiplicidad geométrica igual a $4 - 1 = 3$ (y la matriz sería diagonalizable, por tanto).

- Si $a \neq 4$ entonces podemos operar un poco más para llevar la matriz a la forma escalonada
$$\begin{bmatrix} 0 & \boxed{4-a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{a-3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
que tiene siempre rango 2. Por ello la multiplicidad geométrica de $\lambda = a$ sería $4-2=2$.

Caso $a = 3$. Analicemos el rango de la matriz $A-3I$ con el mismo objetivo del apartado anterior. La llevamos a forma escalonada (en este caso, reducida),

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

para ver que la matriz tiene rango 2 y, por tanto, la multiplicidad geométrica de $\lambda = 3$ es $4-2=2$.

4.2 A partir de ahora tomamos $a = 2$. Por los cálculos previos comprobamos que la matriz A quedará
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
y los autovalores serán $\lambda = 2$ (con $m_a(2) = 3$ y $m_g(2) = 2$) y $\lambda = 3$ ($m_a(3) = m_g(3) = 1$). De ese modo comprobamos que necesitaremos calcular autovectores generalizados en el caso del autovalor $\lambda = 2$.

Comencemos calculando los autovectores de $\lambda = 3$. Resolvamos, para ello, el sistema $(A - 3I)x = 0$. Realizamos una eliminación de Gauss a la matriz para obtener su forma canónica reducida:
$$A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Quedan las ecuaciones $x_1 + x_3 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_4 = 0$. Tomando x_3 como variable libre obtenemos la solución del sistema:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y un primer autovector } v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para $\lambda = 2$ tenemos:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las ecuaciones son, por tanto, $x_2 = 0$ y $x_3 - x_4 = 0$. Tomando como variables libres x_1 y x_4 obtenemos la solución general del sistema $(A - 2I)x = 0$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y los autovectores } v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pasemos ahora a calcular el autovector generalizado que necesitamos. Para ello hemos de resolver el sistema $(A - 2I)^2 x = 0$:

$$(A - 2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La única ecuación que obtenemos es $x_3 - x_4 = 0$, así que, tomando x_1, x_2 y x_4 como variables libres queda la solución general del sistema $(A - 2I)^2 x = 0$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tenemos que elegir, entre todas estas soluciones, un vector que sea linealmente independiente de v_2 y v_3. Poniendo $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_4 = 0$ obtenemos el autovector generalizado que necesitamos

$$v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La base que nos piden puede ser, por ejemplo, $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

4.3 Supongo que nadie, a estas alturas de curso, pensará que, para hacer este apartado, es imprescindible calcular A^4, $A - 4I$ y A^{-1}. Obviamente es una posibilidad, pero quizás lleve más tiempo de la cuenta. Así que preferimos utilizar alguno de los resultados teóricos sobre autovalores y autovectores que se suelen explicar y demostrar justo después de la definición de estos importantes conceptos. Estos resultados afirman que si λ es un autovalor de una matriz cuadrada M con un autovector asociado v entonces:

- para cualquier k natural, λ^k es autovalor de M^k con v como autovector asociado,
- para cualquier μ real, $\lambda - \mu$ es autovalor de $M - \mu I$ con v como autovector asociado.

Además, M es invertible si, y sólo si, no tiene ningún autovalor nulo. En este caso, los autovalores de M^{-1} son los inversos de los de M, con los mismos autovectores asociados.

Teniendo estos resultados en cuenta podemos determinar los autovalores y autovectores de las matrices que nos piden, los cuales aparecen recogidos en la siguiente tabla.

Matriz	Autovalores	Autovectores
$\boldsymbol{A^4}$	$3^4 = 81$ (simple)	v_1
	$2^4 = 16$ (triple)	v_2, v_3
$\boldsymbol{A - 4I}$	$3 - 4 = -1$ (simple)	v_1
	$2 - 4 = -2$ (triple)	v_2, v_3
$\boldsymbol{A^{-1}}$	3^{-1} (simple)	v_1
	2^{-1} (triple)	v_2, v_3

Ejercicio 5. (SÓLO SEGUNDO PARCIAL y TODA LA ASIGNATURA)
Consideremos la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$.

5.1 (2 PUNTOS) Determinar las matrices de cambio de base entre $\mathcal{B}$ y la base canónica.

5.2 (2 PUNTOS) Calcular todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas son las mismas en la base $\mathcal{B}$ que en la base canónica.

5.3 (4 PUNTOS) Calcular la proyección ortogonal del vector $[3 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 2 \ \ 1]^T$ sobre el subespacio de $\mathbb{R}^5$ cuyas ecuaciones implícitas son $\left\{ \begin{array}{rl} x_1+x_2 \quad + \ x_4-x_5 &=0, \\ 2x_1 \quad +x_3+2x_4 &=0. \end{array} \right.$

5.4 (2 PUNTOS) Demostrar que $\mathrm{Nul}\,(M) \subset \mathrm{Nul}\,(M^2)$ para cualquier matriz cuadrada M.

SOLUCIÓN:
5.1 Tenemos que encontrar dos matrices. La primera de ellas, correspondiente al paso de la base $\mathcal{B}$ a la base canónica (que denotaremos por $\mathcal{E}$), no es más que

$$P_{\mathcal{B}} = \underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix},$$

donde hemos situado, por columnas, los vectores de la base $\mathcal{B}$. La matriz de paso de la base canónica a la base $\mathcal{B}$ es la inversa de la anterior, es decir,

$$\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}{P} = \underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 6 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta inversa se puede calcular, por ejemplo, por Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 4/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2/3 & 4/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right].$$

5.2 Queremos aquellos vectores de $\mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas coinciden en la base canónica y en $\mathcal{B}$, es decir, aquellos vectores $v = [x \ \ y \ \ z]^T$, tales que $P_{\mathcal{B}}v = v$. Escrito en forma de sistema queda

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

o, equivalentemente,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ya que este último sistema no es más que $(P_{\mathcal{B}} - I)v = 0$.

Una simple eliminación de Gauss transforma este sistema en otro equivalente,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que, una vez resuelto da

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{siendo } z \in \mathbb{R}, \text{ una variable libre.}$$

5.3 Para simplificar, llamemos S al subespacio y u al vector que nos dan. Ya que la dimensión de S es 3 y estamos trabajando en $\mathbb{R}^5$, es conveniente calcular la proyección ortogonal sobre $S^{\perp}$, que tiene menor dimensión.

Una base de $S^{\perp}$ se obtiene directamente de los coeficientes de las ecuaciones implícitas de S, ya que dan lugar a dos vectores linealmente independientes:

$$\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Estos vectores no son ortogonales, así que vamos a aplicarles el método de Gram-Schmidt:

$$w_1 = v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \qquad w_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De este modo, hemos obtenido una base ortogonal de $S^{\perp}$:

$$\mathcal{B}_{S^{\perp}} = \left\{ w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Si nos pidiesen la matriz de la proyección ortogonal, necesitaríamos normalizar los vectores y después multiplicar la matriz que se obtuviese a partir de ellos, colocándolos por columnas, por su traspuesta. Esto nos llevaría a trabajar con fracciones y radicales hasta llegar a una matriz 5×5, que en este caso, no es necesaria. Para proyectar ortogonalmente un vector sobre un subespacio basta con tener una base ortogonal de éste:

$$\mathrm{Proy}_{S^{\perp}} u = \frac{u \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 + \frac{u \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{7}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/5 \\ -2/5 \\ 7/5 \\ 12/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}.$$

Volviendo al subespacio original, S, el vector pedido no es más que

$$\mathrm{Proy}_S u = u - \mathrm{Proy}_{S^\perp} u = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12/5 \\ -2/5 \\ 7/5 \\ 12/5 \\ 2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 2/5 \\ -2/5 \\ -2/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}.$$

5.4 Si un vector v pertenece a $\mathrm{Nul}\,(M)$ significa que $Mv = 0$. Si multiplicamos esta expresión por M quedará $M^2 v = M0 = 0$, por lo que v también pertenece a $\mathrm{Nul}\,(M^2)$.

Ejercicio 6. (SÓLO SEGUNDO PARCIAL y TODA LA ASIGNATURA)
Sea $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

6.1 Diagonalizar B, indicando la matriz de paso.

6.2 Obtener una forma casi-diagonal real semejante a B, indicando la matriz de paso.

6.3 Consideremos la cónica de ecuación $14x^2 + 11y^2 + 4xy = 30$. Hallar su ecuación canónica mediante los cambios de coordenadas adecuados, clasificarla y hacer un dibujo esquemático de la misma.

SOLUCIÓN:
6.1 Calcularemos en primer lugar los autovalores de B:

$$\begin{aligned}\det(B-\lambda I) &= \det\begin{bmatrix} -1-\lambda & 4 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (-1-\lambda)\det\begin{bmatrix} -1-\lambda & 4 \\ -2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = \\ &= (-1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+5) = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda=-1, \lambda = \frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2} = 1\pm 2i.\end{aligned}$$

Observemos que, al tener todos los autovalores simples, B es diagonalizable.

A continuación, calcularemos autovectores:

$\lambda = -1$**:**

$$\mathrm{Nul}\,(B+I) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

$\lambda = 1+2i$**:**

$$\begin{aligned}\mathrm{Nul}\,(B-(1+2i)I) &= \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} -2-2i & 4 & 0 \\ -2 & 2-2i & 2 \\ 0 & 0 & -2-2i \end{bmatrix} = (\text{Elim. Gauss}) = \\ &= \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & -1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Gen}\left\{\begin{pmatrix} \frac{2}{1+i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \mathrm{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.\end{aligned}$$

$\lambda = 1-2i$**:** Basta conjugar:

$$\mathrm{Nul}\,(B-(1-2i)I) = \mathrm{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

De esta manera, tenemos que $P^{-1}BP = D$, siendo

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+2i & 0 \\ 0 & 0 & 1-2i \end{bmatrix} \text{ diagonal, y } P = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 1+i \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6.2 Para obtener una forma casi-diagonal real semejante a B, basta tomar parte real e imaginaria en uno de los autovalores complejos (por ejemplo, nos centraremos en $\lambda = 1+2i$), y repetir el proceso con uno de sus autovectores asociados:

$$\begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De esta forma, tenemos $Q^{-1}BQ = C$, siendo

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ casi-diagonal real, y } Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6.3 La ecuación de la cónica, $14x^2 + 11y^2 + 4xy = 30$, en forma matricial, es

$$(x\ y) \begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 11 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 30 = (x\ y) M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 30 = 0.$$

Para hallar su ecuación canónica, realizaremos un giro. Con este fin, necesitaremos los autovalores y autovectores de la matriz simétrica M:

$$\det(M - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 14-\lambda & 2 \\ 2 & 11-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 25\lambda + 150 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{25 \pm \sqrt{25}}{2} = 15, 10.$$

$\lambda = 15$**:**

$$\mathrm{Nul}\,(M - 15I) = \mathrm{Nul} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \mathrm{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\lambda = 10$**:**

$$\mathrm{Nul}\,(M - 10I) = \mathrm{Nul} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Los autovectores que hemos obtenido son ortogonales (puesto que la matriz es simétrica). Por nuestra parte, los tomaremos además unitarios para construir una matriz de paso ortogonal:

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

que cumple $P^{-1}MP = P^T MP = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ diagonal.

El cambio de coordenadas adecuado se corresponde con el giro

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

con el que la ecuación de la cónica se transforma en

$$(x'\ y') P^T M P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 30 = (x'\ y') \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 30 = 15x'^2 + 10y'^2 - 30 = 0,$$

de donde deducimos fácilmente su ecuación canónica:

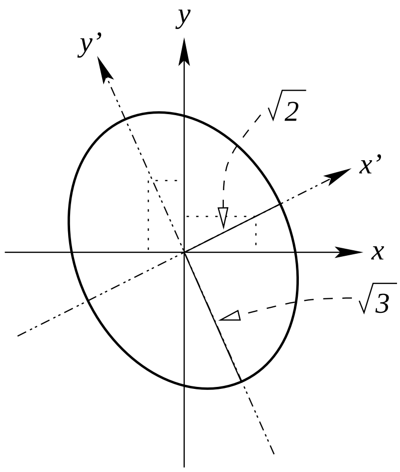
$$\frac{x'^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y'^2}{(\sqrt{3})^2} = 1.$$

Se trata, por tanto, de una elipse. Para hacer un dibujo esquemático de la elipse, dibujemos en el plano xy los ejes de simetría de la elipse. Para ello, escribimos el cambio de coordenadas en la forma:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(2x + y)\,, \\ y' = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(-x + 2y)\,. \end{array} \right. ,$$

El semieje mayor ($\sqrt{3}$) corresponde al eje y', cuya ecuación es $x' = 0 \Leftrightarrow y = -2x$; mientras que el semieje menor ($\sqrt{2}$) está situado sobre el eje x', cuya ecuación es $y' = 0 \Leftrightarrow y = \frac{x}{2}$.

En la figura siguiente mostramos un dibujo esquemático de la elipse.


y
y'
$\sqrt{2}$
x'
x
$\sqrt{3}$

Ejercicio 7. (TODA LA ASIGNATURA)
Consideremos, para $\delta, \mu \in \mathbb{R}$, los vectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \; v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \mu - 1 \\ \delta + 3 \end{bmatrix} \text{ y } v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ \mu \\ 3 \end{bmatrix}.$$

y la matriz $A = [v_1 \mid v_2 \mid v_3 \mid v_4]$.

7.1 (4 PUNTOS) Calcular, según los valores de δ y μ, la forma escalonada reducida de A.

7.2 (2 PUNTOS) Para $\mu = 1$ y $\delta = 1$, calcular la factorización LU de A.

7.3 (2 PUNTOS) Calcular y representar en el plano complejo todas las raíces del polinomio $z^4 - 8iz$.

7.4 (2 PUNTOS) Obtener la matriz canónica de la aplicación lineal T que verifica

$$T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ y } T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN:
7.1 Convendría conocer el concepto de forma escalonada reducida. Recogemos el contenido del libro de Lay acerca de ello.

Definición: Una matriz rectangular está en **forma escalonada** si tiene las siguientes tres propiedades:

1. Todas las filas diferentes de cero están arriba de las puramente ceros.
2. Cada entrada principal de una fila (o sea, la primera entrada distinta de cero de dicha fila) está en una columna a la derecha de la entrada principal de cada fila superior a ella.
3. Todas las entradas de una columna que estén por debajo de una entrada principal son cero.

Si una matriz en forma escalonada satisface las condiciones adicionales siguientes, entonces se dice que está en **forma escalonada reducida**:

4. La entrada principal de cada fila no nula es 1.
5. Cada 1 principal es la única entrada diferente de cero en su columna.

Las operaciones del método de eliminación de Gauss consiguen transformar **toda** matriz A en su **única** forma escalonada reducida. Recordemos que dichas transformaciones son de tres tipos: intercambio de dos filas, sumar a una fila un múltiplo de otra fila, multiplicar una fila por un número distinto de cero. Una vez aclarado esto procemos a efectuar los cálculos.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & \mu - 1 & \mu \\ 2 & 6 & \delta + 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_4 - 2F_1]{F_3 + F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \mu - 1 & \mu + 1 \\ 0 & 4 & \delta + 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_4 - 2F_2]{F_3 - F_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \mu - 2 & \mu - 2 \\ 0 & 0 & \delta + 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Caso 1 Si $\mu = 2$, entonces la tercera fila es cero y la intercambio con la cuarta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \mu-2 & \mu-2 \\ 0 & 0 & \delta+1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{3,4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \delta+1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como buscamos siempre las entradas principales, tenemos que distinguir que $\delta + 1$ sea cero o no.

Caso 1.1 Si $\delta = -1$, entonces

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{M_3(-1/5)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - 3F_3 \\ F_1 - F_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{M_2(1/2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 - F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ (forma escalonada reducida para $\mu = 2$ y $\delta = -1$).

Caso 1.2 Si $\delta \neq -1$, entonces

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \delta+1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{M_3(1/(\delta+1))} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5/(\delta+1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3+5/(\delta+1) \\ 0 & 0 & 1 & -5/(\delta+1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{M_2(1/2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2+5/(2(\delta+1)) \\ 0 & 0 & 1 & -5/(\delta+1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 - F_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2-5/(2(\delta+1)) \\ 0 & 1 & 0 & 3/2+5/(2(\delta+1)) \\ 0 & 0 & 1 & -5/(\delta+1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ (forma escalonada reducida para $\mu = 2$ y $\delta \neq -1$).

Caso 2 Si $\mu \neq 2$, entonces:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \mu-2 & \mu-2 \\ 0 & 0 & \delta+1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{M_3(1/(\mu-2))} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \delta+1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_4 - (\delta+1)F_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta-6 \end{bmatrix}.$$

Como buscamos siempre las entradas principales, tenemos que distinguir que $-\delta - 6$ sea cero o no.

Caso 2.1 Si $\delta = -6$, entonces

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{M_2\,(1/2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 - F_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{(forma escalonada reducida para } \mu \neq 2 \text{ y } \delta = -6\text{).}$$

Caso 2.2 Si $\delta \neq -6$, entonces A es cuadrada, de rango máximo y su forma escalonada reducida es la identidad.

7.2. Basta rescatar los coeficientes que han aparecido en el apartado anterior y se obtiene la factorización LU de A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

7.3. El polinomio se puede factorizar como

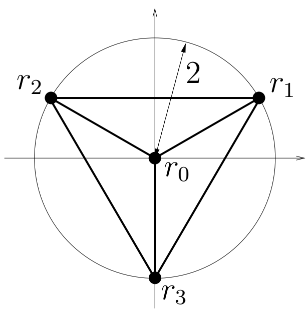
$$z^4 - 8iz = z\left(z^3 - 8i\right).$$

Por lo tanto $z = 0$ es raíz. Las otras tres son las raíces cúbicas de $8i$. Escribimos el número complejo en forma polar y calculamos sus tres raíces cúbicas

$$8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \sqrt[3]{8i} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}e^{i\frac{2k\pi}{3}}; \qquad k = 0, 1, 2.$$

Como $e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + i\right)$ nos basta con multiplicar por las tres raíces cúbicas de la unidad que son muy conocidas:

$$\begin{cases} z_0 = 2\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)\right) \cdot 1 = \sqrt{3} + i \\ z_1 = 2\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}i\right)\right) = -\sqrt{3} + i \\ z_2 = 2\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{3}i\right)\right) = -2i \end{cases}$$



La representación gráfica se ha obtenidone fácilmente teniendo en cuenta que la expresión $2e^{i\frac{\pi}{6}}e^{i\frac{2k\pi}{3}}$ nos dice que las tres raíces cúbicas de la unidad se han girado $\frac{\pi}{6}$ radianes (equivalente a 30 grados) y sus radios se han multiplicado por 2.

7.4. Si llamamos A a la matriz canónica de la aplicación lineal T, nos dicen que

$$\left[A \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right] = A \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para despejar A necesitamos que la matriz $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ sea invertible pues, para determinar una aplicación lineal, es necesario conocer las imágenes de los elementos de una base. La inversa de una matriz dos por dos es muy sencilla de calcular

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Bastará multiplicar por la inversa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

EXAMEN DE SEPTIEMBRE

14 de Septiembre de 2004

Ejercicio 1 Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

1.1 (2 PUNTOS) Determinar una base y unas ecuaciones implícitas de $\mathrm{Col}(A)$.

1.2 (3 PUNTOS) Calcular la matriz de la proyección ortogonal sobre $\mathrm{Col}(A)$.

1.3 (3 PUNTOS) Resolver el sistema $Ax = b$ en el sentido de los mínimos cuadrados, comprobando previamente que el sistema es incompatible.

1.4 (2 PUNTOS) Calcular todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ que tienen la misma proyección ortogonal sobre $\mathrm{Col}(A)$ que el vector b.

SOLUCIÓN:

1.1 Como sabemos, para encontrar unas ecuaciones implícitas de un subespacio generado por varios vectores (en este caso los vectores columna de A) basta considerar un vector genérico $[x_1 \ \ x_2 \ \ x_3 \ \ x_4]^T$ e imponer que sea combinación lineal de dichos vectores. Realizamos una eliminación de Gauss sobre la matriz ampliada para llegar a una forma escalonada superior:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 4 & -1 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & x_2 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x_4 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathrm{F_1 \leftrightarrow F_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{-1} & 1 & -2 & -1 & x_3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & x_2 \\ 2 & -4 & 4 & -1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x_4 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathrm{F3+2F_1 \to F_3}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{-1} & 1 & -2 & -1 & x_3 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & -1 & x_2 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & x_1 + 2x_3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x_4 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathrm{F3-2F_2 \to F_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{-1} & 1 & -2 & -1 & x_3 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & -1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & x_1 + 2x_3 - 2x_2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x_4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathrm{F4-F_3 \to F_4}} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{-1} & 1 & -2 & -1 & x_3 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & -1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & x_1 + 2x_3 - 2x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_4 - x_1 - 2x_3 + 2x_2 \end{array}\right].$$

Para que el sistema sea compatible, el último elemento de la matriz ha de ser nulo. De ese modo obtenemos una ecuación implícita de $\mathrm{Col}(A)$:

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \tag{4}$$

Comprobación: Esta ecuación se puede probar viendo que los vectores columna de A la verifican.

Por otro lado, como también nos piden una base y las columnas 1, 2 y 4 son columnas pivote de A bastará tomar dichas columnas, es decir,

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Col}(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

1.2 Es inmediato comprobar, de los resultados del apartado anterior, que la dimensión de $\mathrm{Col}(A)$ es tres, mientras que la dimensión de $\mathrm{Col}(A)^{\perp}$ es sólo uno. Por ello es preferible trabajar con el espacio ortogonal y deducir luego los resultados sobre el espacio original.

Como ya hemos calculado unas ecuaciones implícitas de $\mathrm{Col}(A)$, tomando sus coeficientes, tendremos los vectores de un conjunto generador de $\mathrm{Col}(A)^{\perp}$. En este caso, al ser un único vector no nulo, formará además una base:

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Col}(A)^{\perp}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

De nuevo, por tener sólo un vector, la base es ortogonal. Para hallar una base ortonormal de $\mathrm{Col}(A)^{\perp}$, necesaria para el cálculo de la matriz de proyección, sólo hemos de dividir el vector por su norma. De ese modo

$$\mathcal{BON}_{\mathrm{Col}(A)^{\perp}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

es una base ortonormal de $\mathrm{Col}(A)^{\perp}$.

La matriz de la proyección ortogonal sobre $\mathrm{Col}(A)^{\perp}$ es, entonces,

$$P_{\mathrm{Col}(A)^{\perp}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-2}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para terminar, debido a que la suma de las matrices de proyección ortogonal sobre dos subespacios que sean complementarios ortogonalmente es la matriz identidad, entonces

$$P_{\mathrm{Col}(A)} = I_{4\times 4} - P_{\mathrm{Col}(A)^{\perp}} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 9 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

Comprobación: Podemos comprobar que la matriz es correcta viendo que los vectores columna de A no cambian al ser multiplicados por ella y que $[1 \quad -2 \quad 2 \quad -1]$, vector que es ortogonal a $\mathrm{Col}(A)$, se transforma en el vector nulo.

Nota: Como ya hemos comentado, otra posibilidad para calcular la matriz de proyección ortogonal es trabajar directamente con una base de $\mathrm{Col}(A)$, ortogonalizando por el método de Gram-Schmidt y normalizando posteriormente. Por ese camino, ya que la base posee tres elementos, los cálculos son más complicados y numerosos, con lo que aumenta considerablemente la posibilidad de error.

1.3 Para comprobar que el sistema es incompatible basta con sustituir las componentes de b en la ecuación implícita (4) antes obtenida para $\mathrm{Col}(A)$ y ver que no la verifica, cosa que es inmediata:

$$1 - 2\cdot(-3) + 2\cdot 1 - 1\cdot(-1) = 1 + 6 + 2 + 1 = 10 \neq 0.$$

Nota: Realizar la eliminación de Gauss sobre la matriz ampliada $[A|b]$ requiere más cálculos y, además, la mayoría de ellos ya han sido realizados en el primer apartado.

En lo que respecta al cálculo de la solución en el sentido de los mínimos cuadrados, como ya poseemos la matriz de la proyección ortogonal sobre $\mathrm{Col}(A)$, basta calcular $P_{\mathrm{Col}(A)}b$ y resolver después el sistema $Ax = P_{\mathrm{Col}(A)}b$.

La proyección de b sobre el espacio columna de A es

$$P_{\mathrm{Col}(A)}b = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 9 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora resolvemos el sistema $Ax = P_{\mathrm{Col}(A)}b$, teniendo en cuenta que la mayoría de operaciones se han realizado en el apartado primero. La solución es

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2x_3 \\ 1 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ con } x_3 \in \mathbb{R} \text{ libre.}$$

Comprobación: Para comprobar el resultado basta ver que el vector $b - Au$ es ortogonal al espacio columna de A, siendo u la solución en el sentido de los mínimos cuadrados que se ha obtenido.

Nota: Obviamente, se puede resolver el problema mediante las ecuaciones normales de Gauss. Obviamente también, el número de cálculos será más elevado.

1.4 El enunciado pide todos los vectores v cuya proyección ortogonal sobre $\mathrm{Col}(A)$ coincide con la de b. Como ya conocemos la matriz de la proyección ortogonal sobre $\mathrm{Col}(A)$, no tenemos más que obtener aquellos vectores $v = [x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4]^T \in \mathbb{R}^4$ tales que

$$P_{\mathrm{Col}(A)}v = P_{\mathrm{Col}(A)}b.$$

Resolviendo el sistema se obtiene la solución que más adelante mostramos.

Otra forma igual de válida, más geométrica y más simple que la que acabamos de describir, no necesita el uso de la matriz de la proyección ortogonal. Los vectores $v \in \mathbb{R}^4$ que poseen la misma proyección ortogonal sobre $\mathrm{Col}(A)$ que b se deben escribir como $v = b + w$, de tal modo que la proyección ortogonal de w sobre $\mathrm{Col}(A)$ sea cero. Para ello, w tiene que ser ortogonal a $\mathrm{Col}(A)$.

Como los vectores ortogonales a $Col(A)$ han sido ya obtenidos y se corresponden con los múltiplos de $[1 \;\; -2 \;\; 2 \;\; -1]$, los vectores que nos están pidiendo son aquellos tales que

$$v = b + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ para } \alpha \in \mathbb{R} \text{ cualquiera.}$$

Comprobación: Multiplicando por la matriz $P_{\mathrm{Col}(A)}$ vemos que la proyección de estos vectores coincide con la de b.

Nota: Por muy mal que se pongan las cosas, este problema tiene que poseer al menos una solución: el propio vector b. De ese modo, si al obtener la solución no está dicho vector, significaría que el ejercicio está mal resuelto.

Ejercicio 2 Consideremos la misma matriz A que en el ejercicio anterior.

2.1 (2 PUNTOS) Calcular los autovalores de A y sus respectivas multiplicidades algebraicas.

2.2 (4 PUNTOS) Obtener una base de $\mathbb{R}^4$ formada por autovectores y autovectores generalizados de A.

2.3 (4 PUNTOS) Calcular $A^n \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ para todo valor de $n \in \mathbb{N}$.

SOLUCIÓN:

2.1. Desarrollando por los elementos de la cuarta fila y de la segunda fila, como máximo hay que calcular los autovalores de una matriz dos por dos. El resultado es que A posee dos autovalores dobles:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0, & m_a(\lambda_1) = 2, \\ \lambda_2 = -1, & m_a(\lambda_2) = 2. \end{cases}$$

2.2. Calculamos los autovectores:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \overset{\text{Gauss}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\text{resolver}}{\longrightarrow} Nul(A) = lin \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Como $\lambda_1 = 0$ es doble y sólo posee un autovector (independiente) calculamos un autovector generalizado para $\lambda_1 = 0$.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\text{resolver}}{\longrightarrow} Nul(A^2) = lin \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

De los tres vectores obtenidos, sólo dos de ellos son linealmente independientes, ya que $Nul(A) \subset Nul(A^2)$. Por otro lado,

$$A+I = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\text{Gauss}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\text{resolver}}{\longrightarrow} Nul(A+I) = lin \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Como $\lambda_2 = -1$ es doble y sólo posee un autovector (independiente) calculamos un autovector generalizado para $\lambda_2 = -1$.

$$(A+I)^2 = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\text{Gauss}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolviendo:

$$Nul((A+I)^2) = lin \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

De los tres vectores obtenidos, sólo dos de ellos son linealmente independientes, ya que $Nul(A+I) \subset Nul((A+I)^2)$.

A continuación, usamos el hecho de que al unir sistemas linealmente independientes de autovectores generalizados correspondientes a autovectores distintos, lo que se obtiene es un sistema linealmente independiente. Por lo tanto, podemos afirmar (sin tener que comprobarlo) que los vectores

$$\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

son una base de $\mathbb{R}^4$ formada por autovectores (v_3 es autovector de $\lambda_2 = -1$) y autovectores generalizados (v_1y v_2 son autovectores generalizados de $\lambda_1 = 0$ y v_4 es autovector generalizado de $\lambda_2 = -1$).

2.3. En primer lugar, descomponemos w como combinación lineal de la base obtenida en el apartado anterior (los coeficientes se obtienen resolviendo el correspondiente sistema):

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como,

$$A^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1)^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A^n \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1)^n \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + n\,(-1)^{n-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

se obtiene finalmente que,

$$A^n \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-1)^n \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ n \\ n+1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3

3.1 Consideremos la cónica $x^2 - 2xy + y^2 - 2y + 1 = 0$.

3.1.1 (3 PUNTOS) Hallar su ecuación canónica mediante los cambios de coordenadas adecuados y clasificarla.

3.1.2 (2 PUNTOS) Hacer un dibujo esquemático de dicha curva en las coordenadas originales.

3.2 (2 PUNTOS) Consideremos la forma cuadrática dada por

$$Q(x, y, z) = [x\ y\ z] \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Clasificarla mediante el cálculo de autovalores de la matriz simétrica asociada.

3.3 (3 PUNTOS) De un polinomio se sabe que tiene grado tres, que sus coeficientes son reales y que $z_1 = 3$ y $z_2 = 7 - 4i$ son dos de sus raíces. Siendo z_3 la otra raíz, expresar mediante operaciones con números complejos la simetría respecto de la recta que pasa por z_1 y z_3.

SOLUCIÓN:

3.1.1 Escribimos en forma matricial la ecuación de la cónica:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 1 = 0.$$

Con objeto de eliminar el término en xy, necesitamos hacer un giro que se determina mediante los autovectores de la matriz A de la parte cuadrática. En primer lugar, calcularemos los autovalores de dicha matriz:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = 0 \iff \lambda = 0, 2.$$

Podemos ahora calcular los autovectores:

$$\lambda = 0 \longrightarrow \text{Nul} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\lambda = 2 \longrightarrow \text{Nul} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \text{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Construimos la matriz:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

cuyas columnas forman una base ortonormal de autovectores de A. Por tanto, $P^{-1}AP = P^tAP$ es una matriz diagonal (geométricamente, la matriz P representa un giro de un ángulo de 45º). El cambio:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

conduce a

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} P^tAP \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 1 =$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 1 = 2y'^2 - \sqrt{2}x' - \sqrt{2}y' + 1 = 0.$$

Realizamos ahora una traslación, completando primero cuadrados en la variable y' y después incluyendo el término constante en la variable x':

$$2\left(y'^2-\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)-\sqrt{2}x'+1=2\left(y'-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2-\frac{1}{4}-\sqrt{2}x'+1=2\left(y'-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2-\sqrt{2}x'+\frac{3}{4}=$$
$$=2\left(y'-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2-\sqrt{2}\left(x'-\frac{3\sqrt{2}}{8}\right)=2y''^2-\sqrt{2}x''=0,$$

siendo

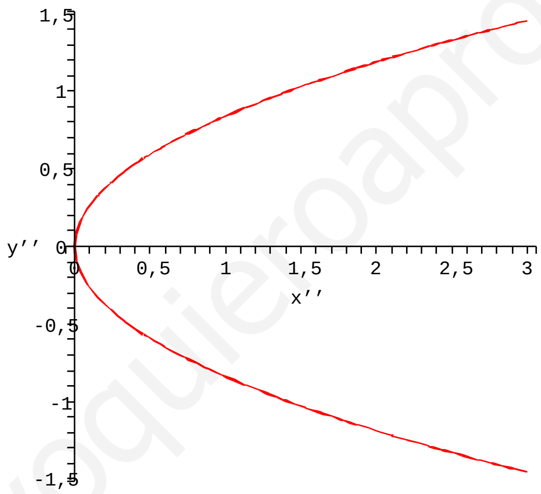
$$x''=x'-\frac{3\sqrt{2}}{8},\quad y''=y'-\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Por tanto, la ecuación canónica a la que hemos llegado es

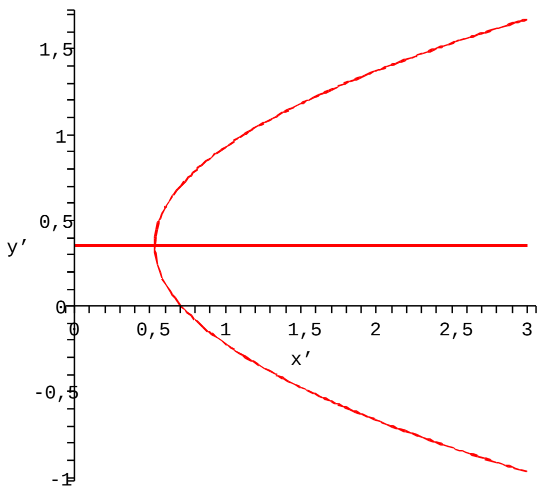
$$x''=\sqrt{2}y''^2,$$

que corresponde a una parábola.

3.1.2 Primero haremos el dibujo en el plano x''–y'':

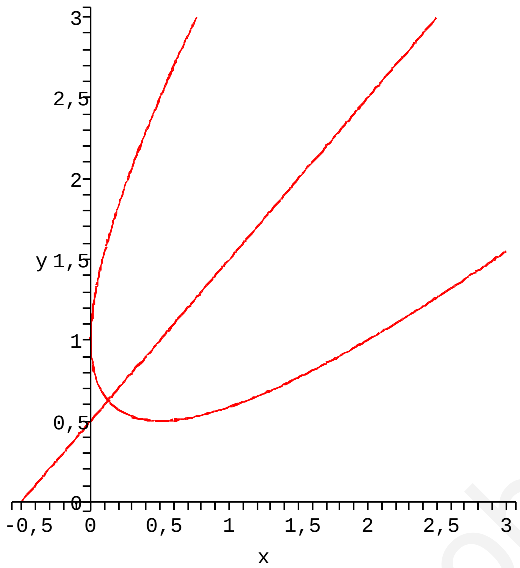


Si deshacemos la traslación, obtenemos la representación en el plano x'–y':



Observe que el vértice de la parábola es el punto $(x'' = 0, y'' = 0) \Leftrightarrow (x' = 3\sqrt{2}/8, y' = \sqrt{(2)}/4)$, mientras que el eje está situado ahora en la recta $y'' = 0 \Leftrightarrow y' = \sqrt{2}/4$.

Por último, la representación en el plano x–y se obtiene deshaciendo el giro:



Ahora, el vértice de la parábola es el punto $(x' = 3\sqrt{2}/8, y' = \sqrt{2}/4) \Leftrightarrow (x = 1/8, y = 5/8)$, y el eje está situado en la recta $y' = \sqrt{2}/4 \Leftrightarrow 2x - 2y + 1 = 0$.

3.2 Es inmediato comprobar que

$$\begin{aligned} Q(x,y,z) &= [x\ y\ z] \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2x^2 + 2y^2 + (5-3)xy + (-2+2)xz + (1-1)yz = \\ &= 2x^2 + 2y^2 + 2xy = [x\ y\ z] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Los autovalores de la matriz simétrica asociada se obtienen de:

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2 - 4\lambda + 3\right) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0, 1, 3.$$

Puesto que tenemos un autovalor nulo y los otros dos positivos, la forma cuadrática es semidefinida positiva.

3.3 Obviamente $z_3 = \overline{z_2} = 7 + 4i$, ya que el polinomio es real.

Para calcular el simétrico de un punto $z = x + iy$ respecto de la recta que pasa por 3 y $7 + 4i$, realizamos el siguiente proceso:

Primero, trasladamos el punto 3 al origen mediante la traslación $z \mapsto z - 3$, con la cual el punto $7 + 4i$ se transforma en $4 + 4i$.

A continuación, realizamos un giro $z \mapsto e^{i\theta} z$ con el que la recta que pasa por el origen y el punto $4 + 4i$ se transforme en el eje real. Obviamente, $e^{i\theta} = \frac{\overline{4+4i}}{||4+4i||} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$.

Una vez que realizamos estos dos movimientos, la simetría consiste en conjugar el transformado:

$$\overline{\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)(z-3)}.$$

Para finalizar, basta con deshacer los dos movimientos: primero deshacemos el giro (multiplicando por $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ y finalmente deshacemos la traslación (sumando 3 al resultado). En definitiva, el transformado de z resulta ser:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\overline{\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)(z-3)}+3=\frac{1}{2}(1+i)^2(\overline{z}-3)+3=i(\overline{z}-3)+3=i\overline{z}+3-3i.$$

Si usamos coordenadas cartesianas, el simétrico de $z=x+iy$ es

$$i(x-iy)+3-3i=(y+3)+i(x-3).$$