

EJERCICIOS: GEOMETRÍA AFÍN DEL ESPACIO. MATEMÁTICAS II.

1. Dados los vectores $\vec{u}=(2,0,-1)$, $\vec{v}=(1,3,-1)$ y $\vec{w}=(2,-2,1)$, halla:

a) $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$, $|\vec{w}|$.

b) $3\vec{u}+2\vec{v}-\vec{w}$

2. Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto A(1,0,0) y por el punto medio del segmento cuyos extremos son P(1,0,2) y Q(5,2,-4).

3. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A(0,-1,2) y es paralela a la recta

$$r: x = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3} .$$

4. Escribe la ecuación de un plano que pasa por el punto P(0,1,1) y contiene a la recta

$$r: \begin{cases} x=1 \\ y=1+t \\ z=1+2t \end{cases}$$

5. Comprueba si son coplanarios los puntos A(2,-2,3), B(0,0,2), C(-2,0,1) y D(-2,-5,1).

6. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto P(2,1,2) y es paralelo al plano $x+y-z=4$.

7. Dados el punto A(2,-1,0) y la recta $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$, calcula:

a) La ecuación de la recta s paralela a r que pasa por el punto A.

b) La ecuación del plano que contiene a las rectas r y s .

8. Estudia la posición relativa de los planos:

$$\pi: \begin{cases} x=2+2t+s \\ y=-1+2t-3s \\ z=1+5s \end{cases} \quad \pi': -5x+5y+4z=12 .$$

9. Estudia la posición relativa de este trío de planos:

$$\begin{aligned} \pi: 4x+y+3z+2 &= 0 \\ \pi': -3x+5y+4z-7 &= 0 \\ \pi'': y+3z-6 &= 0 \end{aligned}$$

10. Calcula el valor de m para que las siguientes rectas se corten en un punto:

$$r: \frac{x-m}{-1} = \frac{y+10}{4} = \frac{z+3}{1}$$

$$s: \begin{cases} x=1 \\ y=6+4t \\ z=-1+2t \end{cases}$$

11. Determina la posición relativa entre la recta $r: \begin{cases} x+y-1=0 \\ x+z+1=0 \end{cases}$ y el plano $\pi: x+my-z-6=0$.

SOLUCIONES:

1. Dados los vectores $\vec{u}=(2,0,-1)$, $\vec{v}=(1,3,-1)$ y $\vec{w}=(2,-2,1)$, halla:

a) $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$, $|\vec{w}|$.

$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}u$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}u$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3u$$

b) $3\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w} = 3 \cdot (2,0,-1) + 2 \cdot (1,3,-1) - (2,-2,1) = (6,8,-6)$

2. Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $A(1,0,0)$ y por el punto medio del segmento cuyos extremos son $P(1,0,2)$ y $Q(5,2,-4)$.

Punto medio del segmento \overline{PQ} : $M \left(\frac{1+5}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{-2-4}{2} \right) = (3,1,-3)$

Recta que pasa por los puntos A y M : Tomamos como punto de la recta $A(1,0,0)$ y como vector de dirección: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (2,1,-3)$.

Ec. Vectorial: $(x, y, z) = (1,0,0) + t \cdot (2,1,-3)$

Ec. Paramétricas:
$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=t \\ z=-3t \end{cases}$$

Ec. Continua: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-3}$

Ec. Implícitas:
$$\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+2z=3 \end{cases}$$

3. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(0,-1,2)$ y es paralela a la recta

$$r: x = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3} .$$

Sea s la recta paralela a r que pasa por el punto A : Como punto de la recta s tomamos el punto $A(0,-1,2)$ y como vector de dirección tomaremos el vector de dirección de la recta r por ser paralelas: $\vec{v}_s = \vec{v}_r = (1,2,3)$. Por tanto la ecuación continua de la recta s es:

$$s: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}$$

4. Escribe la ecuación de un plano que pasa por el punto $P(0,1,1)$ y contiene a la recta

$$r: \begin{cases} x=1 \\ y=1+t \\ z=1+2t \end{cases}$$

Sea π el plano que contiene a r y pasa por el punto P :

Tomamos un punto Q de la recta r , por ejemplo: $Q(1,1,1)$. Para dar la ecuación del plano necesitamos un punto, podemos tomar $P(0,1,1)$ y dos vectores de dirección: $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (1,0,0)$ y $\vec{v} = \vec{v}_r = (1,2,2)$. La ecuación general del plano queda:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ y-1 & 0 & 1 \\ z-1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 ; \pi: x=0$$

5. Comprueba si son coplanarios los puntos $A(2,-2,3)$, $B(0,0,2)$, $C(-2,0,1)$ y $D(-2,-5,1)$.

Hallamos el plano π que pasa por los puntos A , B y C :

Tomamos como punto del plano a $A(2,-2,3)$ y como vectores de dirección a $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-2,2,-1)$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-4,2,-2)$. La ecuación general del plano π queda:

$$\begin{vmatrix} x-2 & -2 & -4 \\ y+2 & 2 & 2 \\ z-3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 ; \pi: -x+2z-4=0$$

D es coplanario con A , B y C si pertenece al plano π , es decir, si verifica la ecuación del plano. Como D no verifica la ecuación del plano, los puntos no están alineados.

6. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P(2,1,2)$ y es paralelo al plano $x+y-z=4$.

Sea π' el plano paralelo a $\pi: x+y-z=4$ que pasa por P . La ecuación del plano π' tendrá la forma:

$$x+y-z=D . \text{ Como } P \in \pi' , \text{ entonces verifica su ecuación y por tanto } D=1.$$

La ecuación del plano π' queda entonces: $x+y-z=1$.

7. Dados el punto $A(2,-1,0)$ y la recta $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$, calcula:

a) La ecuación de la recta s paralela a r que pasa por el punto A .

Tenemos un punto de la recta s que es $A(2,-1,0)$ y su vector de dirección será el mismo que el de la recta r : $\vec{v}_s = \vec{v}_r = (3,1,2)$. Por tanto la ecuación de la recta s queda:

$$s: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$$

b) La ecuación del plano que contiene a las rectas r y s .

Sea π el plano que contiene a ambas rectas. Un punto de la recta r y por tanto del plano sería $B(1,-2,0)$. Tomamos como punto del plano al punto $A(2,-1,0)$ y como vectores de dirección:

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,2,2)$ y $\vec{v} = \vec{v}_r = (3,1,2)$. La ecuación del plano queda:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 3 \\ y+1 & 2 & 1 \\ z & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \pi: 2x + 4y - 5z = 0$$

8. Estudia la posición relativa de los planos:

$$\pi: \begin{cases} x = 2 + 2t + s \\ y = -1 + 2t - 3s \\ z = 1 + 5s \end{cases} \quad \pi': -5x + 5y + 4z = 12$$

Escribimos el plano π en forma general: $\pi: 5x - 5y - 4z = 11$, y estudiamos el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 5x - 5y - 4z = 11 \\ \pi': -5x + 5y + 4z = 12 \end{array} \right\} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -4 \\ -5 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad A^i = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -4 & 11 \\ -5 & 5 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 1 \neq r(A^i) = 2$. Los planos son Paralelos.

9. Estudia la posición relativa de este trío de planos:

$$\begin{array}{l} \pi: 4x + y + 3z + 2 = 0 \\ \pi': -3x + 5y + 4z - 7 = 0 \\ \pi'': y + 3z - 6 = 0 \end{array}$$

Estudiamos el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 4x + y + 3z = -2 \\ \pi': -3x + 5y + 4z = 7 \\ \pi'': y + 3z = 6 \end{array} \right\} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A^i = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & 5 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$r(A) = r(A^i) = 3$. Los planos se cortan en un punto.

10. Calcula el valor de m para que las siguientes rectas se corten en un punto:

$$r: \frac{x-m}{-1} = \frac{y+10}{4} = \frac{z+3}{1}$$

$$s: \begin{cases} x=1 \\ y=6+4t \\ z=-1+2t \end{cases}$$

Escribimos primero las ecuaciones implícitas de las rectas, y formamos el sistema:

$$r: \begin{cases} 4x+y=4m-10 \\ x+z=m-3 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A^{\hat{c}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 4m-10 \\ 1 & 0 & 1 & m-3 \\ 4 & -1 & 0 & 4m-16 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudiamos los rangos de las matrices y tenemos:

- Si $m \neq 8$: $r(A)=3 \neq r(A^{\hat{c}})=4$: Las rectas se cruzan
- Si $m=8$: $r(A)=r(A^{\hat{c}})=3$: Las rectas se cortan en un punto.

11. Determina la posición relativa entre la recta $r: \begin{cases} x+y-1=0 \\ x+z+1=0 \end{cases}$ y el plano $\pi: x+my-z-6=0$.

Estudiamos el sistema:

$$r: \begin{cases} x+y=1 \\ x+z=-1 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix} \quad A^{\hat{c}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Si $m \neq 2$: $r(A)=r(A^{\hat{c}})=3$: La recta y el plano se cortan en un punto.

Si $m=2$: $r(A)=2 \neq r(A^{\hat{c}})=3$: La recta y el plano son paralelos.