PROBLEMAS RESUELTOS

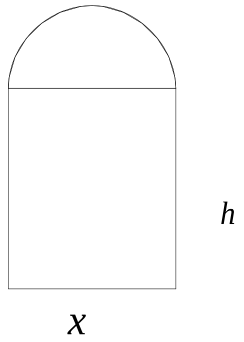
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2017

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

Se quiere hacer una puerta rectangular coronada por un semicírculo como el de la figura. El hueco de la puerta tiene que tener 16 metros cuadrados. Si es posible, determina la base *x* para que el perímetro sea mínimo.



MATEMÁTICAS II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Función que queremos que sea mínimo: $P_{\min} = x + 2h + \pi \dfrac{x}{2} = 2h + \left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)x$

b) Relación entre las variables: $16 = x \cdot h + \dfrac{\pi\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{2} \Rightarrow 16 = x \cdot h + \dfrac{\pi x^2}{8} \Rightarrow h = \dfrac{128 - \pi x^2}{8x}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$P_{\min} = 2h + \left(1+\frac{\pi}{2}\right)\cdot x = 2\cdot\frac{128-\pi x^2}{8x} + \left(1+\frac{\pi}{2}\right)\cdot x = \frac{128-\pi x^2}{4x} + \left(1+\frac{\pi}{2}\right)\cdot x = \frac{128+\left(\pi+4\right)x^2}{4x}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$P'_{\min} = \frac{2\cdot(\pi+4)x\cdot 4x - 4\cdot\left(128+\left(\pi+4\right)x^2\right)}{16x^2} = \frac{4\cdot(\pi+4)x^2-512}{16x^2} = \frac{(\pi+4)x^2-128}{4x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{128}{(\pi+4)}}$$

e) Calculamos la segunda derivada:

$$P'' = \frac{2\cdot(\pi+4)x\cdot 4x^2 - 8x\cdot\left(\left(\pi+4\right)x^2-128\right)}{16x^4} = \frac{128}{2x^3} = \frac{64}{x^3}$$

$$P''\left(x=\sqrt{\frac{128}{(\pi+4)}}\right) > 0 \Rightarrow \text{ Mínimo}$$

Luego, el valor de la base es: $x = \sqrt{\dfrac{128}{(\pi+4)}} = 4'23\ m$

Considera la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ para $x\neq 1$

a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*.

b) Estudia y determina los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de *f*. Calcula los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan)

MATEMÁTICAS II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Asíntotas Verticales: La recta $x=1$ es una asíntota vertical ya que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\pm\infty$

Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{1}=\infty\Rightarrow$ No tiene.

Asíntota oblicua: $y=x+1$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x-1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x-1}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-x^2+x}{x-1}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x}{x-1}\right]=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{1}\right]=1$$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y'=\frac{2x\cdot(x-1)-1\cdot x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=2$$

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
Signo y'	+	—	+
Función	C	D	C

$\downarrow$ Máximo $(0,0)$ $\downarrow$ mínimo $(2,4)$

Creciente: $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

Decreciente: $(0,2)$

Máximo $(0,0)$

mínimo $(2,4)$

Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases} 3x+2 & si \quad x<0 \\ x^2+2a\cos(x) & si \quad 0\le x<\pi \\ ax^2+b & si \quad x\ge\pi \end{cases}$$

es continua.
a) Determina *a* y *b*.
b) Estudia la derivabilidad de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La función $3x+2$, es continua y derivable en $\mathbb{R}$. La función $x^2+2a\cos x$, es continua y derivable en $\mathbb{R}$. La función ax^2+b es continua y derivable en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, sólo estudiamos la continuidad y derivabilidad en $x=0$ y $x=\pi$.

Estudiamos la continuidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} 3x+2=2 \\ \lim_{x\to 0^+} x^2+2a\cos x=2a \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Rightarrow 2a=2\Rightarrow a=1$$

Estudiamos la continuidad en $x=\pi$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to \pi^-} x^2+2a\cos x=\pi^2-2 \\ \lim_{x\to \pi^+} ax^2+b=\pi^2+b \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to \pi^-} f(x)=\lim_{x\to \pi^+} f(x)=f(\pi)\Rightarrow \pi^2-2=\pi^2+b\Rightarrow b=-2$$

b)

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 3 & si \quad x<0 \\ 2x-2\,sen\,x & si \quad 0<x<\pi \\ 2x & si \quad x>\pi \end{cases}$

Estudiamos la derivabilidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=3 \\ f'(0^+)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-)\ne f'(0^+)\Rightarrow No\ derivable$$

Estudiamos la derivabilidad en $x=\pi$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(\pi^-)=2\pi \\ f'(\pi^+)=2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-)=f'(0^+)=2\pi\Rightarrow derivable$$

Luego, la función es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$

Calcula $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{sen\, x} \right)$

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{sen\, x} \right) = \infty - \infty = \lim_{x \to 0} \left(\frac{sen\, x - x \cos x}{x\, sen\, x} \right) = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos x + x\, sen\, x}{sen\, x + x \cos x} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-sen\, x + sen\, x + sen\, x + x \cos x}{\cos x + \cos x - x\, sen\, x} = \frac{0}{2} = 0$$

Se considera la función *f* dada por $f(x)=\dfrac{-3x^2+2}{x-1}$ para $x\neq 1$.
a) Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Asíntotas Verticales: La recta $x=1$ es una asíntota vertical ya que $\lim_{x\to 1} f(x)=\pm\infty$

Asíntota horizontal: $\lim_{x\to\infty}\dfrac{-3x^2+2}{x-1}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{-6x}{1}=-\infty\Rightarrow$ No tiene.

Asíntota oblicua: $y=-3x-3$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-3x^2+2}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2+2}{x^2-x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-6x}{2x-1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-6}{2}=-3$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-3x^2+2}{x-1}+3x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-3x^2+2+3x^2-3x}{x-1}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-3x+2}{x-1}\right]=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-3}{1}\right]=-3$$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y'=\frac{-6x\cdot(x-1)-1\cdot(-3x^2+2)}{(x-1)^2}=\frac{-3x^2+6x-2}{(x-1)^2}=0\Rightarrow x=1+\frac{\sqrt{3}}{3}\ ;\ x=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

	$\left(-\infty,1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$	$\left(1,1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$
Signo y'	$-$	$+$	$+$	$-$
Función	D	C	C	D

Creciente: $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)\cup\left(1,1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

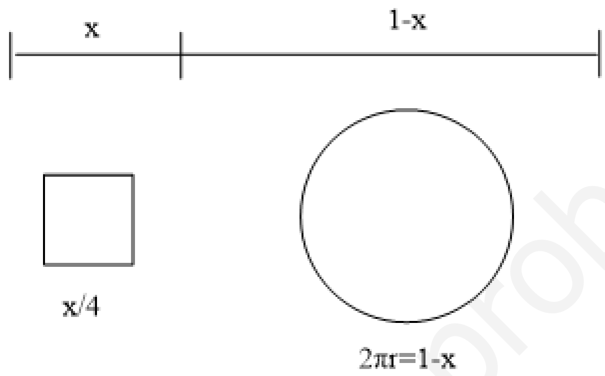
Decreciente: $\left(-\infty,1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$

Máximo: $(1'57,-9'46)$

Mínimo: $(0'42,-2'53)$

Una cuerda de un metro de longitud se divide en dos trozos con los que se construyen un cuadrado y una circunferencia respectivamente.
Determina, si es posible, las longitudes de los trozos para que la suma de las áreas sea mínima.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea mínimo: $S_{\min} = \frac{x^2}{16} + \pi \frac{(1-x)^2}{4\pi^2} = \frac{\pi x^2 + 4 + 4x^2 - 8x}{16\pi}$

b) Derivamos e igualamos a cero

$$S'_{\min} = \frac{2\pi x + 8x - 8}{16\pi} = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{4+\pi}$$

Lado del cuadrado $\frac{x}{4} = \frac{1}{4+\pi}$

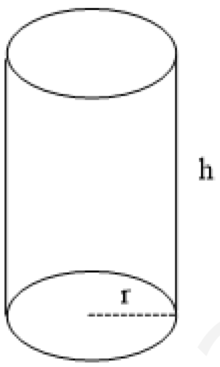
Radio de la circunferencia $\frac{1-x}{2\pi} = \frac{1 - \frac{4}{4+\pi}}{2\pi} = \frac{1}{8+2\pi}$

Luego, el lado del cuadrado es el doble del radio de la circunferencia.

Las longitudes de los trozos son: $x = \frac{4}{4+\pi}$; $1 - x = \frac{\pi}{4+\pi}$

Se necesita construir un depósito cilíndrico, con tapas inferior y superior, con capacidad de $20\pi\ m^3$. El material para las tapas cuesta 10 euros cada m^2 y el material para el resto del cilindro 8 euros cada m^2. Calcula, si existe, el radio de las tapas y la altura del cilindro que hace que el coste total sea mínimo.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea mínimo es: $C_{\min} = 2\pi r^2 \cdot 10 + 2\pi r h \cdot 8 = 20\pi r^2 + 16\pi r h$

b) Relación entre las variables: $V = \pi r^2 h = 20\pi \Rightarrow h = \dfrac{20\pi}{\pi r^2} = \dfrac{20}{r^2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$C_{\min} = 20\pi r^2 + 16\pi r \cdot \frac{20}{r^2} = 20\pi r^2 + \frac{320\pi}{r}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$C'_{\min} = 40\pi r - \frac{320\pi}{r^2} = \frac{40\pi r^3 - 320\pi}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{8} = 2\ m$$

e) Comprobamos que corresponde a un mínimo:

$$C''_{\min} = \frac{120\pi r^4 - 2r(40\pi r^3 - 320\pi)}{r^4} = \frac{40\pi r^3 + 640\pi}{r^3}$$

$$C''_{\min}(r=2) = \frac{40\pi (2)^3 + 640\pi}{(2)^3} > 0 \text{ Mínimo}$$

Luego, las dimensiones del depósito son: $r = 2\ m$ y $h = 5\ m$

Considera la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Calcula a; b; c y d sabiendo que f tiene un extremo relativo en $(0,1)$ y su gráfica un punto de inflexión en $(1,-1)$.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos su derivada primera y segunda:

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c\ ;\ f''(x)=6ax+2b$$

- Extremo relativo en $(0,1)$ $\Rightarrow\begin{cases} Pasa\ por\ (0,1)\Rightarrow a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d=1\Rightarrow d=1 \\ f'(0)=0\Rightarrow 3a\cdot 0+2b\cdot 0+c=0\Rightarrow c=0\end{cases}$

- Punto de inflexión en $(1,-1)\Rightarrow\begin{cases} Pasa\ por\ (1,-1)\Rightarrow a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot+d=-1\Rightarrow a+b=-2 \\ f''(1)=0\Rightarrow 6a\cdot 1+2b=0\Rightarrow 6a+2b=0\end{cases}$

Resolviendo el sistema resulta: $a=1$; $b=-3$

Luego: $a=1$; $b=-3$; $c=0$; $d=1\Rightarrow f(x)=x^3-3x^2+1$

Calcula la función polinómica, de grado 3, de la que se sabe que tiene un extremo relativo en el punto $(0,2)$ y que la tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x=1$ es la recta $x+y=3$.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

La función será: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Calculamos su derivada primera y segunda:

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \; ; \; f''(x)=6ax+2b$$

- Extremo relativo en $(0,2)$ $\Rightarrow \begin{cases} Pasa\ por\ (0,2) \Rightarrow a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d=2 \Rightarrow d=2 \\ f'(0)=0 \Rightarrow 3a\cdot 0+2b\cdot 0+c=0 \Rightarrow c=0 \end{cases}$

- Pasa por $(1,2) \Rightarrow f(1)=2 \Rightarrow a+b+c+d=2 \Rightarrow a+b+0+2=2 \Rightarrow a+b=0$

- La tangente en $x=1$ tiene de pendiente -1

$$\Rightarrow f'(1)=-1 \Rightarrow 3a\cdot 1^2+2b\cdot 1+c=-1 \Rightarrow 3a+2b+0=-1 \Rightarrow 3a+2b=-1$$

Resolviendo el sistema resulta: $a=-1$; $b=1$

Luego: $a=-1$; $b=1$; $c=0$; $d=2 \Rightarrow f(x)=-x^3+x^2+2$

Considera la función definida por $f(x)=-x+\frac{4}{x^2}$ para $x\neq 0$.
a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f* y calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
c) Esboza la gráfica de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Asíntotas Verticales: La recta $x=0$ es una asíntota vertical ya que $\lim_{x\to 0} f(x)=\pm\infty$

Asíntota horizontal: $\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3+4}{x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2}{2x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-6x}{2}=-\infty\Rightarrow$ No tiene.

Asíntota oblicua: $y=-x$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-x^3+4}{x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3+4}{x^3}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2}{3x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-6x}{6x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-6}{6}=-1$$

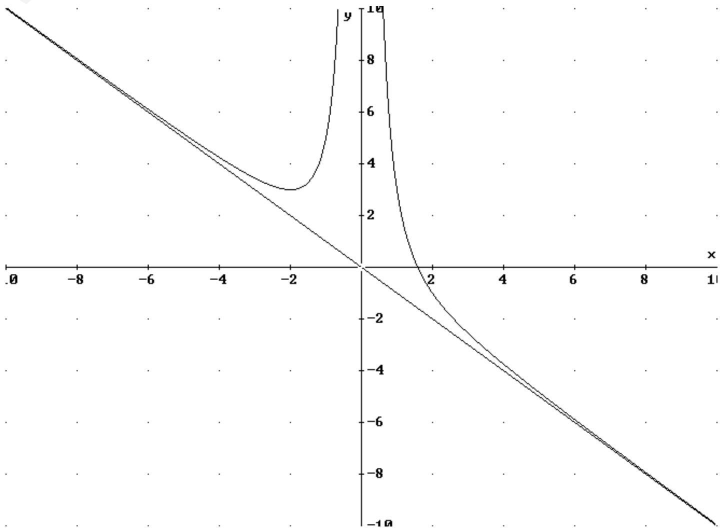
$$n=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-x^3+4}{x^2}+x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-x^3+4+x^3}{x^2}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{4}{x^2}\right]=0$$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y'=\frac{-3x^2\cdot x^2-2x(-x^3+4)}{x^4}=\frac{-x^3-8}{x^3}=0\Rightarrow x=-2$$

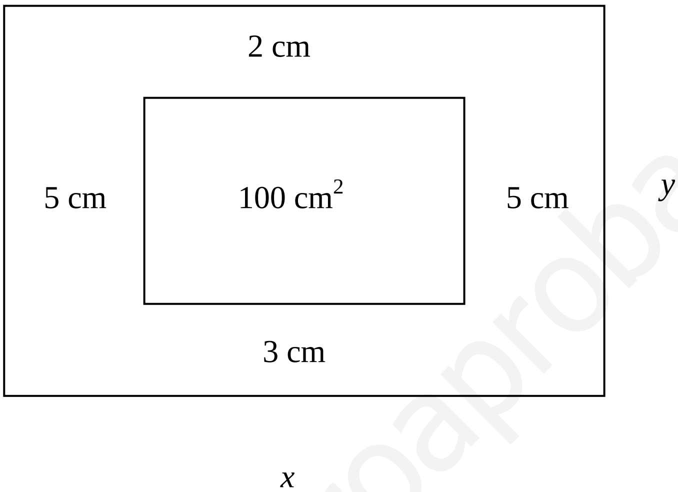
	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,\infty)$
Signo y'	$-$	$+$	$-$
Función	D	C	D

Creciente: $(-2,0)$
Decreciente: $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$
Mínimo: $(-2,3)$
c)



Una imprenta recibe un encargo para realizar una tarjeta rectangular con las siguientes características: la superficie rectangular que debe ocupar la zona impresa debe ser de 100 cm^2, el margen superior tiene que ser de 2 cm, el inferior de 3 cm y los laterales de 5 cm cada uno. Calcula, si es posible, las dimensiones que debe tener la tarjeta de forma que se utilice la menor cantidad de papel posible.
MATEMÁTICAS II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



Paso 1: Escribimos la función que queremos que sea mínima: $S_{\min} = x \cdot y$

Paso 2: Escribimos la relación entre las variables: $100 = (x-10)\cdot(y-5) \Rightarrow y = \dfrac{50+5x}{x-10}$

Paso 3: Sustituimos: $S_{\min} = x \cdot y = x \cdot \dfrac{50+5x}{x-10} = \dfrac{50x+5x^2}{x-10}$

Paso 4: Derivamos e igualamos a cero:

$$S' = \frac{5x^2-100x-500}{(x-10)^2} = 0 \Rightarrow 5x^2-100x-500 = 0 \Rightarrow x = 24'14 \ ; \ x = -4'14$$

Como es una longitud, el valor es: $x = 24'14$

Paso 5: Calculamos la 2ª derivada y comprobamos que corresponde a un mínimo.

$$S'' = \frac{2000}{(x-10)^3} \ \Rightarrow S''(x = 24'14) = 0'70 \Rightarrow mínimo$$

Luego las dimensiones de la tarjeta son: $x = 24'14 \ cm \ ; \ y = 12'07 \ cm$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$
a) Estudia y determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*. Calcula los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
b) Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$.
MATEMÁTICAS II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y'=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=0\Rightarrow e^{x}-e^{-x}=0\Rightarrow x=0$$

	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
Signo y'	—	+
Función	D	C

$\downarrow$
mínimo $(0,1)$

La función es decreciente en $(-\infty,0)$ y creciente en $(0,\infty)$. Tiene un mínimo relativo en $(0,1)$

b) Calculamos $f(0)=1$ y $f'(0)=0$

La recta normal en $x=0$ es: $y-f(0)=-\dfrac{1}{f'(0)}\cdot(x-0)\Rightarrow y-1=-\dfrac{1}{0}(x-0)\Rightarrow x=0$