

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Considera el punto $P(1, -1, 0)$ y la recta r dada por
$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases} .$$

a) Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r .

b) Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r .

MATEMÁTICAS II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

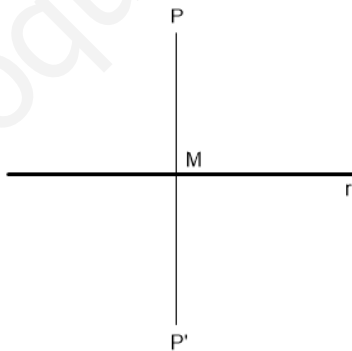
R E S O L U C I Ó N

a) De la recta: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}$ sabemos un punto $A = (1, -2, 0)$ y su vector director $\vec{u} = (3, 0, 1)$.

El plano que nos piden viene definido por el punto $P = (1, -1, 0)$ y los vectores directores $\vec{u} = (3, 0, 1)$ y $\vec{PA} = (0, -1, 0)$, luego, su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ y+1 & 0 & -1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x + 3z + 1 = 0$$

b)



Cualquier punto de la recta tiene de coordenadas $M = (1 + 3t, -2, t)$. Calculamos el vector $\vec{PM} = (1 + 3t - 1, -2 + 1, t - 0) = (3t, -1, t)$. Queremos que el vector \vec{PM} sea perpendicular al vector director de la recta $\vec{u} = (3, 0, 1)$, luego: $\vec{PM} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (3t, -1, t) \cdot (3, 0, 1) = 0 \Rightarrow 9t + t = 0 \Rightarrow t = 0$

Por lo tanto el punto M tiene de coordenadas: $M = (1, -2, 0)$.

Si llamamos al punto simétrico $P' = (a, b, c)$, se cumple que:

$$\frac{(1, -1, 0) + (a, b, c)}{2} = (1, -2, 0) \Rightarrow P' = (1, -3, 0)$$

Considera los vectores $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (0, 2, 1)$ y $\vec{w} = (m, 1, n)$. Halla los valores de α en cada uno de los siguientes casos:

a) Halla m y n sabiendo que \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} son linealmente dependientes y que \vec{w} es ortogonal a \vec{u} .

b) Para $n=1$, halla los valores de m para que el tetraedro determinado por \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} tenga volumen 10 unidades cúbicas

MATEMÁTICAS II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si los vectores son linealmente dependientes, su determinante vale 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & n \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2n - 2m - 1 = 0$$

Si \vec{w} es ortogonal a $\vec{u} \Rightarrow \vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow m + n = 0$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, obtenemos que: $m = \frac{1}{4}$; $n = -\frac{1}{4}$

b) El volumen del tetraedro es $\frac{1}{6}$ del volumen del paralelepípedo que determinan los tres vectores, es decir:

$$V = 10 = \frac{1}{6} \text{ Valor absoluto de } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |1 - 2m| \Rightarrow |1 - 2m| = 60 \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2m = 60 \Rightarrow m = -\frac{59}{2} \\ -1 + 2m = 60 \Rightarrow m = \frac{61}{2} \end{cases}$$

Considera los vectores $\vec{u} = (2, 3, 4)$, $\vec{v} = (-1, -1, -1)$ y $\vec{w} = (-1, \lambda, -5)$ siendo λ un número real.

a) Halla los valores de λ para los que el paralelepípedo determinado por \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} tiene volumen 6 unidades cúbicas.

b) Determina el valor de λ para el que \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} son linealmente dependientes.

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El volumen del paralelepípedo viene dado por el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -5 \end{vmatrix} = -2\lambda - 6 \Rightarrow |-2\lambda - 6| = 6 \Rightarrow \lambda = 0 ; \lambda = -6$$

b) Para que los vectores sean linealmente dependientes su determinante tiene que ser 0, es decir:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -5 \end{vmatrix} = -2\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -3$$

Sea r la recta que pasa por $A(4,3,6)$ y $B(-2,0,0)$ y sea s la recta dada por

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

a) Determina la posición relativa de r y s .

b) Calcula, si existen, los puntos C de s tales que los vectores \overrightarrow{CA} y \overrightarrow{CB} son ortogonales.

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La recta r viene definida por $A(4,3,6)$ y el vector $\overrightarrow{AB} = (-6, -3, -6)$. La recta s viene definida por el punto $D(2,0,1)$ y el vector $\vec{u} = (1,1,-2)$. Calculamos el vector $\overrightarrow{AD} = (-2, -3, -6)$.

Calculamos el rango de la matriz formada por los tres vectores:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -6 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2+6F_1 \\ F_3+2F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -14 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+3F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -44 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 3$$

Luego, las rectas se cruzan.

b) Cualquier punto C de la recta s , tiene de componentes: $C(2+t, t, 1-2t)$. Calculamos los vectores:

$\overrightarrow{CA} = (2-t, 3-t, 5+2t)$ y $\overrightarrow{CB} = (-4-t, -t, -1+2t)$. Si son ortogonales, su producto escalar vale cero:

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (2-t, 3-t, 5+2t) \cdot (-4-t, -t, -1+2t) = 6t^2 + 7t - 13 = 0 \Rightarrow t = 1 ; t = -\frac{13}{6}$$

Luego, los puntos C son: $C_1(3,1,-1)$ y $C_2\left(-\frac{1}{6}, -\frac{13}{6}, \frac{16}{3}\right)$

Considera las rectas dadas por $r \equiv \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$

- a) Determina la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s .
 b) Halla la distancia entre las rectas r y s .

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

- a) Calculamos un punto genérico de cada recta y su vector director.

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = 1 + s \\ z = 1 + s \end{cases} \Rightarrow A(s, 1 + s, 1 + s); \vec{u} = (1, 1, 1)$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow B(1 - t, t, 2); \vec{v} = (-1, 1, 0)$$

El vector \overrightarrow{AB} tiene de coordenadas: $\overrightarrow{AB} = (1 - t - s, t - 1 - s, 1 - s)$.

Como el vector \overrightarrow{AB} tiene que ser perpendicular a las rectas r y s , se debe cumplir:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (1 - t - s, t - 1 - s, 1 - s) \cdot (1, 1, 1) = 1 - t - s + t - 1 - s + 1 - s = 1 - 3s = 0 \Rightarrow s = \frac{1}{3}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (1 - t - s, t - 1 - s, 1 - s) \cdot (-1, 1, 0) = -1 + t + s + t - 1 - s = 2t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1$$

Con lo cual: $A(s, 1 + s, 1 + s) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$; $B(1 - t, t, 2) = (0, 1, 2)$;

$$\overrightarrow{AB} = (1 - t - s, t - 1 - s, 1 - s) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

La recta que nos piden es: $\frac{x - \frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}} = \frac{y - \frac{4}{3}}{-\frac{1}{3}} = \frac{z - \frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}$

b) La distancia es el módulo del vector $\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$$d = \left| \overrightarrow{AB} \right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{9}} = 0'816 \text{ u}$$

Considera los puntos $A(1,3,-1)$ y $B(3,-1,-1)$.

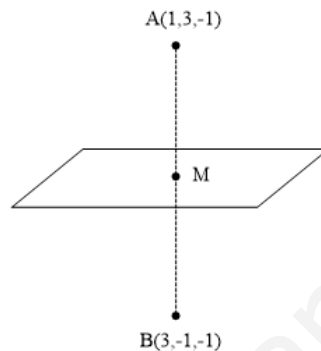
a) Determina la ecuación del plano respecto del cual B es el simétrico de A .

b) Siendo $C(5,1,5)$, calcula el área del triángulo de vértices $A;B$ y C .

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)



Calculamos el punto M

$$M = \frac{A+B}{2} = \frac{(1,3,-1) + (3,-1,-1)}{2} = (2,1,-1)$$

Calculamos el vector $\vec{AB} = (2,-4,0)$. Este vector es el normal del plano, luego su ecuación es:

$$2x - 4y + D = 0$$

Como queremos que pase por el punto M , entonces el plano tiene de ecuación:

$$2x - 4y + D = 0 \Rightarrow 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow 2x - 4y = 0$$

b) Calculamos el área del triángulo ABC .

$$\vec{AB} = (2,-4,0); \vec{AC} = (4,-2,6).$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \wedge \vec{AC} \right| = \frac{1}{2} \text{módulo} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{módulo} \left[-24 \vec{i} - 12 \vec{j} + 12 \vec{k} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(-24)^2 + (-12)^2 + (12)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{864} = \sqrt{216} = 14'69 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

Considera los puntos $A(-1, -2, -1)$ y $B(1, 0, 1)$.

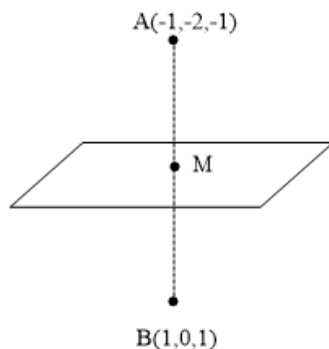
a) Determina la ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos.

b) Calcula la distancia de $P(-1, 0, 1)$ a la recta que pasa por los puntos A y B .

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)



Calculamos el punto M

$$M = \frac{A+B}{2} = \frac{(-1, -2, -1) + (1, 0, 1)}{2} = (0, -1, 0)$$

Calculamos el vector $\overrightarrow{AB} = (2, 2, 2)$. Este vector es el normal del plano, luego su ecuación es:

$$2x + 2y + 2z + D = 0$$

Como queremos que pase por el punto M , entonces el plano tiene de ecuación:

$$2x + 2y + 2z + D = 0 \Rightarrow 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = 2 \Rightarrow 2x + 2y + 2z + 2 = 0 \Rightarrow x + y + z + 1 = 0$$

b) La recta que pasa por A y B tiene de ecuación:
$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2 + 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$
 Cualquier punto de esta recta tiene

de coordenadas: $C(-1 + 2t, -2 + 2t, -1 + 2t)$. Calculamos el vector

$$\overrightarrow{PC}(-1 + 2t + 1, -2 + 2t - 0, -1 + 2t - 1) = (2t, -2 + 2t, -2 + 2t)$$

Este vector tiene que ser perpendicular al vector director de la recta, luego:

$$\overrightarrow{PC} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (2t, -2 + 2t, -2 + 2t) \cdot (2, 2, 2) = 0 \Rightarrow 4t - 4 + 4t - 4 + 4t = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{3}$$

La distancia del punto P a la recta es el módulo del vector $\overrightarrow{PC} = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, luego:

$$d = |\overrightarrow{PC}| = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = 1,63 \text{ u}$$

Considera los puntos $A(1,1,1)$, $B(0,-2,2)$, $C(-1,0,2)$ y $D(2,-1,-2)$.

a) Calcula el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D .

b) Determina la ecuación de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano determinado por los puntos A, B y C .

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores $\vec{AB} = (-1, -3, 1)$; $\vec{AC} = (-2, -1, 1)$ y $\vec{AD} = (1, -2, -3)$. El volumen del tetraedro será:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |15| = \frac{15}{6} u^3$$

b) El vector director de la recta es el vector normal del plano, luego:

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k} = (-2, -1, -5)$$

La recta que nos piden es: $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{-5}$

Sea π el plano determinado por los puntos $A(1,0,0)$; $B(0,1,0)$ y $C(0,0,\lambda)$, siendo λ un número real, y sea r la recta dada por $r \equiv \begin{cases} y - z = 3 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r .

b) Estudia la posición relativa de r y π según los valores de λ .

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas:
$$\left. \begin{cases} y - z = 3 \\ -x + 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = t \\ z = -3 + t \end{cases} \right\}$$

La recta pasa por el punto $P = (-3, 0, -3)$ y su vector director es $\vec{u} = (2, 1, 1)$. El plano que nos piden viene definido por el punto $A = (1, 0, 0)$, el vector $\vec{u} = (2, 1, 1)$ y el vector $\vec{AP} = (-4, 0, -3)$, luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & -4 \\ y & 1 & 0 \\ z & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - 2y - 4z - 3 = 0$$

b) Calculamos la ecuación del plano. El plano que nos piden viene definido por el punto $A = (1, 0, 0)$ y los vectores $\vec{AB} = (-1, 1, 0)$ y $\vec{AC} = (0, -1, \lambda)$. Por lo tanto su ecuación será:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ y & 1 & -1 \\ z & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda x + \lambda y + z - \lambda = 0$$

Estudiamos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano
$$\left. \begin{cases} y - z = 3 \\ -x + 2y = 3 \\ \lambda x + \lambda y + z = \lambda \end{cases} \right\}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ \lambda & \lambda & 1 \end{vmatrix} = 3\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$$

	R(A)	R(M)	
$\lambda = -\frac{1}{3}$	2	3	Recta paralela al plano.
$\lambda \neq -\frac{1}{3}$	3	3	Recta secante al plano.

Considera el punto $P(-1,0,1)$, el vector $\vec{u} = (1,2,1)$ y el plano π de ecuación $y = 0$.

a) Halla la ecuación de la recta que pasa por P , está contenida en π y cuyo vector director es perpendicular a \vec{u} .

b) Determina la ecuación del plano que pasa por P , es perpendicular a π y del que \vec{u} es un vector director.

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La recta pasa por el punto $P(-1,0,1)$ y su vector director es $\vec{v} = (a,b,c)$.

Como la recta es perpendicular a $\vec{u} = (1,2,1)$, el producto escalar de $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow a + 2b + c = 0$.

Además la recta está contenida en el plano $y = 0$, entonces el producto escalar del vector normal del plano $\vec{n} = (0,1,0)$ y el vector $\vec{v} = (a,b,c)$, también es cero, luego: $b = 0$.

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} a + 2b + c = 0 \\ b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v} = (-c, 0, c)$$

Vemos que hay infinitos vectores. Si por ejemplo, damos a c el valor 1, la recta será:

$$\frac{x+1}{-1} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{1}$$

b) El plano que nos piden viene definido por el punto $P(-1,0,1)$, el vector $\vec{u} = (1,2,1)$ y el vector normal del plano π , $\vec{n} = (0,1,0)$, luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x + z - 2 = 0$$

Los puntos $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$ y $C(1,3,3)$ son vértices consecutivos del paralelogramo $ABCD$.

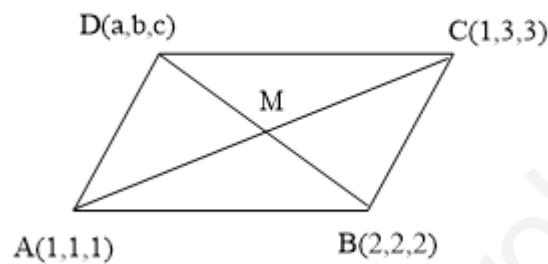
a) Calcula el área del paralelogramo.

b) Halla la ecuación general del plano que contiene a dicho paralelogramo.

c) Calcula las coordenadas del vértice D .

MATEMÁTICAS II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) Calculamos los vectores $\vec{AB} = (1,1,1)$ y $\vec{AC} = (0,2,2)$ y el área del paralelogramo es:

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (0, -2, 2)$$

$$\text{Área} = \text{módulo} |\vec{AB} \wedge \vec{AC}| = \sqrt{(0)^2 + (-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8} u^2$$

b) Calculamos los vectores $\vec{AB} = (1,1,1)$ y $\vec{AC} = (0,2,2)$ y la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y-1 & 1 & 2 \\ z-1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y - z = 0$$

c) Calculamos las coordenadas del punto medio M

$$M = \frac{A+C}{2} \Rightarrow M = \frac{(1,1,1) + (1,3,3)}{2} = (1,2,2)$$

Calculamos las coordenadas del vértice D

$$M = \frac{B+D}{2} \Rightarrow (1,2,2) = \frac{(2,2,2) + (a,b,c)}{2} \Rightarrow D = (0,2,2)$$

Considera el punto $P(0,1,1)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x-2y=-5 \\ z=2 \end{cases}$

a) Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r .

b) Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r .

MATEMÁTICAS II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

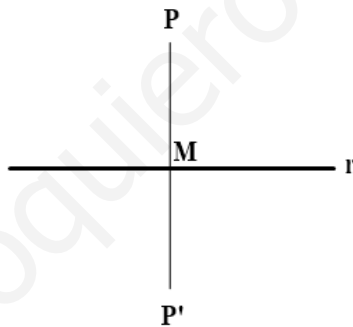
a) La ecuación del haz de planos es: $x-2y+5+k(z-2)=0$.

Como queremos el plano que pasa por $P(0,1,1)$, tenemos que:

$$0-2\cdot 1+5+k(1-2)=0 \Rightarrow k=3$$

luego, el plano es: $x-2y+5+3(z-2)=0 \Rightarrow x-2y+3z-1=0$

b)



Pasamos la recta r a paramétricas: $\begin{cases} x-2y=-5 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5+2t \\ y=t \\ z=2 \end{cases}$, con lo cual:

$$M = (-5+2t, t, 2); \vec{u} = (2, 1, 0)$$

Para calcular el simétrico del punto $P = (0, 1, 1)$ respecto de la recta, el vector $\vec{PM} = (-5+2t, t-1, 1)$

y el vector $\vec{u} = (2, 1, 0)$ tienen que ser perpendiculares, luego:

$$\vec{PM} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (-5+2t, t-1, 1) \cdot (2, 1, 0) = 0 \Rightarrow -10+4t+t-1=0 \Rightarrow t = \frac{11}{5} \Rightarrow M = \left(-\frac{3}{5}, \frac{11}{5}, 2\right)$$

El punto simétrico cumple que:

$$\frac{P+P'}{2} = M \Rightarrow \left(\frac{0+a}{2}, \frac{1+b}{2}, \frac{1+c}{2}\right) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{11}{5}, 2\right) \Rightarrow P' = \left(-\frac{6}{5}, \frac{17}{5}, 3\right)$$