BLOQUE 3: ANÁLISIS

JUN05, P3A: Dadas las curvas $y = (x-1)^3$, $y = 5 - x^2$ calcular razonadamente:

a) Su punto de corte.
b) El área encerrada por ellas y el eje OY.

RESOLUCIÓN:

a) Para averiguar el punto de corte igualamos las 2 fórmulas: $(x-1)^3 = 5 - x^2$
$\to x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 5 - x^2 \quad \to \quad x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = 0.$
Intentamos resolver la ecuación factorizando utilizando Ruffini:

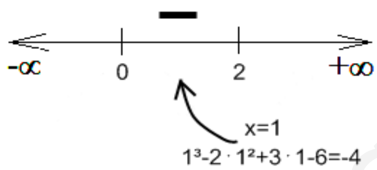
	1	−2	3	−6
2		2	0	6
	1	0	3	0

$\Rightarrow (x-2)(x^2+3) = 0 \Rightarrow x = 2.$

Las coordenada y del punto: $y = 5 - 2^2 = 1$ →Punto $(2,1)$

b) Para calcular el área pedida tenemos que resolver la integral $\int_0^2 |f(x) - g(x)|dx.$, siendo $f(x) = (x-1)^3$ y $g(x) = 5 - x^2$

Para obtener $|f(x) - g(x)|$ tenemos que estudiar el signo de $f(x) - g(x)$ entre los valores de $x \in]0,2[$
$f(x) - g(x) = (x-1)^3 - (5 - x^2) = x^3 - 2x^2 + 3x - 6.$
Podemos estudiar el signo de esta expresión en el intervalo $]0,2[$ sustituyendo $x = 1$, y comprobamos que da negativo.



Entonces $|f(x) - g(x)| = g(x) - f(x) = 5 - x^2 - (x-1)^3 = -x^3 + 2x^2 - 3x + 6.$

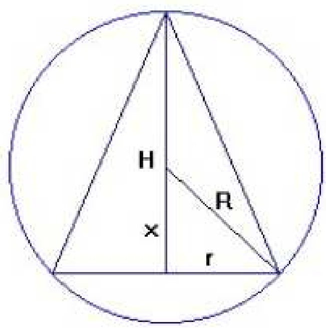
Así, sólo queda calcular $\int_0^2 (-x^3 + 2x^2 - 3x + 6)dx = \left[-\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 6x\right]_0^2 = \frac{22}{3}$

El área pedida es de 22/3 u^2.

JUN05, P4A: Probar que el volumen de cualquier cono recto inscrito en una esfera es menor que el 30% del volumen de la misma.

RESOLUCIÓN:

Sea H la altura del cono,
R el radio de la esfera,
r el radio de la base del cono.
Llamamos x a la distancia desde la base del cono hasta el centro de la esfera. Así "x" completa un triángulo rectángulo con R y r.



Así descrito, los valores de x comprendidos entre $]0,R[$ son todos los valores posibles de conos inscritos en la esfera.

En la figura, que es una sección del cono inscrito en la esfera, se observa que:

$H = x + R$ y $R^2 = x^2 + r^2$

Por tanto, el volumen del cono (un tercio del área de la base por la altura) será:

$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 H.$ Y el volumen de la esfera es $V_2 = \frac{4\pi}{3}R^3$

Lo que hemos de probar es que $V_1 < 0,3 \cdot V_2 \iff \frac{V_1}{V_2} < 0,3.$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 H}{\frac{4\pi}{3}R^3} = \frac{r^2 H}{4R^3}.$$

Nos interesa expresar $\frac{V_1}{V_2}$ en función de x, por lo que utilizaremos $\begin{cases} r^2 = R^2 - x^2 \\ H = x + r \end{cases}$

Llamaremos $f(x) = \frac{V_1}{V_2} = \frac{r^2 H}{4R^3} = \frac{(R^2 - x^2)(x+R)}{4R^3} = \frac{1}{4R^3}[-x^3 - Rx^2 + R^2x + R^3].$

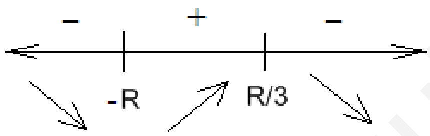
Ahora el ejercicio consiste en probar que $f(x) < 0´3$ para $x \in]0, R[$.

Para ello analizaremos la monotonía y buscaremos un máximo.

$f'(x) = \frac{1}{4R^3}[-3x^2 - 2Rx + R^2].$ buscamos puntos críticos:

$$-3x^2 - 2Rx + R^2 = 0 \to 3x^2 + 2Rx - R^2 = 0 \to x = \frac{-2R \pm \sqrt{4R^2 + 12R^2}}{6} =$$

$$= \frac{-2R \pm 4R}{6} = \begin{cases} \to R/3 \\ \to -R \end{cases}$$. Si estudiamos el signo de $f'(x)$:



Así, observamos que en $x = R/3$ encontramos el máximo de la función para $x \in]0, R[$.

$$f(R/3) = \frac{1}{4R^3}\left[-\frac{R^3}{27} - \frac{R^3}{9} + \frac{R^3}{3} + R^3\right] = \frac{1}{4R^3}\left[\frac{-R^3 - 3R^3 + 9R^3 + 27R^3}{27}\right] = \frac{1}{4R^3}\frac{32R^3}{27} = \frac{8}{27} < 0´3$$

Como $f(x) \leq f(R/3) < 0´3,$ queda probado que el volumen de cualquier cono inscrito en la esfera es inferior al 30% del volumen de la esfera.

$\boxed{\text{JUN05, P3B}}$: Hallar las constantes reales a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x\ln x + a & \text{si } x > 0 \\ b & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin \pi x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$ sea una función continua para todo valor real x.

RESOLUCIÓN:

La función es continua en todo $x \neq 0,$ analicemos la continuidad en $x = 0$:

(C1) $\exists f(0) = b$

(C2) $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x).$ Para ello calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin \pi x}{x} = \left(\frac{0}{0}, \text{L´H}\widehat{\text{o}}\text{pital}\right) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\pi \cdot \cos \pi x}{1} = \pi$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x\ln x + a) = (0\cdot(-\infty)) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{1/x} + a \underset{L'Hôpital}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1/x}{-1/x^2} + a = \lim\limits_{x\to 0^+} -x + a = a.$

Por tanto, si $a = \pi \to \exists \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \pi$.

(C3) $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$, se cumple cuando $b = \pi$.

Por eso, la función es continua en $x = 0$ y consecuentemente, para todo $x \in \mathbb{R}$, cuando $a = b = \pi$.

$\boxed{\text{JUN05, P4B1}}$: La concentración en sangre de un fármaco después de su toma es $C(t) = 0,29483t + 0,04253t^2 - 0,00035t^3$ mg/ml, donde t es el tiempo transcurrido en minutos. Se pide:

a) Calcular el período de tiempo durante el cual el fármaco actúa.

b) Determinar en qué instante la concentración del fármaco es máxima.

RESOLUCIÓN:

a) Realicemos un estudio de la función para $t \geq 0$. (No tiene sentido en el contexto que $t < 0$)

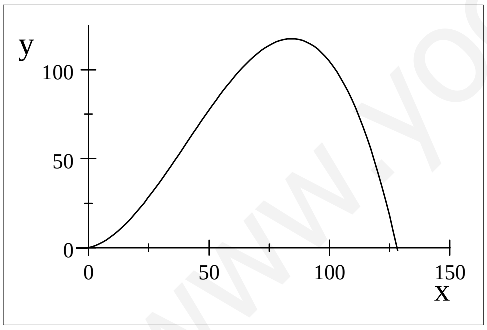
Puntos de corte con eje OX: $C(t) = 0 \to 0,29483t + 0,04253t^2 - 0,00035t^3 = 0$

$$t(0,29483 + 0,04253t - 0,00035t^2) = 0 \to$$
$$\to \begin{cases} t = 0 \\ 0.29483 + 0.04253t - 0.00035t^2 = 0 \to, t = 128.09,\ t = -6.58 \text{ (no sirve)} \end{cases}$$

Como la función es continua con $f(0) = 0$ y $f(128.09) = 0$ podemos decir que durante 128 min = 2 h y 8 minutos, el medicamento está actuando.

b) Estudiemos la derivada: $C'(t) = -0.00105t^2 + 0.08506t + 0.29483$. Estudio del signo:
$C'(t) = -0.00105t^2 + 0.08506t + 0.29483 = 0, \Rightarrow$ Soluciones: $t = 84.339, t = -3.3293$ (no sirve).
Para saber si $t = 84.339$ es un máximo, sustituimos en la segunda derivada:

$C''(t) = -0.00210t + 0.08506 \to C''(84.339) = -0.00210\cdot 84.339 + 0.08506 < 0$
$\to t = 84.339$.



Luego la concentración del fármaco es 0 inicialmente ($C(0) = 0$), crece hasta alcanzar un máximo al cabo de 1 h, 24 min y 20 s ($t = 84.339$) y luego decrece hasta que a las 2 h y 8 min ($t = 128.09$) la concentración en sangre vuelve a ser 0.

$\boxed{\text{SEP05, P3A}}$ a) El perímetro de un sector circular de radio R es 4 m. ¿Cuántos radianes α debe medir su ángulo central para que su área sea máxima? (Nota: Perímetro = $2R + R\alpha$; Área = $\frac{1}{2}\alpha R^2$)

b) El área de otro sector circular es 1 m^2. ¿Para qué radio es mínimo su perímetro?

RESOLUCIÓN:

a) Se trata de obtener el valor de α que maximiza el valor de $A = \frac{1}{2}\alpha R^2$

Para ello necesitamos que la fórmula del área dependa sólo de una variable.
Parece más fácil despejar y sustituir α :

Utilizamos que Perímetro = 4 $= 2R + R\alpha \to \alpha = \dfrac{4-2R}{R} \to A = \dfrac{1}{2}\dfrac{4-2R}{R}R^2$
$\to A(R) = 2R - R^2$. Buscamos un máximo para esta función.

Como se trata de una parábola de puntas hacia abajo, el máximo se alcanza en el vértice.
$R_V = \frac{-b}{2a} = 1$. Como se nos pide el valor de $\alpha = \frac{4-2R}{R} = \frac{2}{1} = 2$.
Solución: $\alpha = 2$ radianes

b) Se trata de obtener el valor de R que minimiza $P = 2R + R\alpha$.
Ahora el dato es Área=1. Entonces $\frac{1}{2}\alpha R^2 = 1 \to \alpha R^2 = 2. \to \alpha = \frac{2}{R^2}$.
Sustituimos en la fórmula del perímetro $\to P = 2R + R\frac{2}{R^2} = 2R + \frac{2}{R}$.
Y ahora buscamos el mínimo: $P' = 2 - \frac{2}{R^2} = 0 \to 2 = \frac{2}{R^2} \to R^2 = 1 \to R = 1$
(ya que no tiene sentido que R sea negativo). Para comprobar que es un mínimo, calculamos la segunda derivada:
$P'' = \frac{4}{R^3} \to P''(1) = 4 > 0 \to R = 1$ es un mínimo.
Solución: El perímetro es mínimo cuando el radio es 1.m.

SEP05, P4A: El caudal de agua (es decir, el volumen por unidad de tiempo) que circula por una tubería cilíndrica es proporcional a la cuarta potencia de su radio. Para abastecer a una población, se han previsto tubería de cierto radio, pero el fabricante las suministra de un radio que es un 0,5% menor. Estimar en qué porcentaje se reducirá el caudal real respecto del previsto.

RESOLUCIÓN:

Según el enunciado $C = k \cdot r^4$.

Sea r el radio de la tubería prevista inicialmente, entonces el fabricante suministra una de radio 99.5% de $r = 0.995r$, con lo que el caudal quedaría $C_2 = k \cdot (0.995r)^4$.
Ahora calculamos la proporción del caudal suministrado frente el inicial:

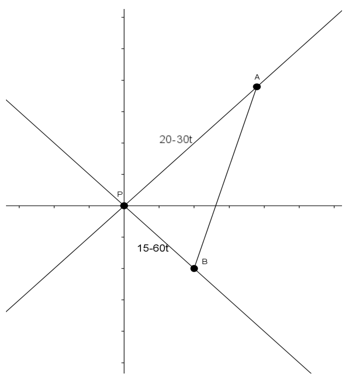
$$\frac{C_2}{C} = \frac{k \cdot (0.995r)^4}{k \cdot r^4} = \frac{0.98015r^4}{r^4} = 0.98015 \text{ (tanto por uno)}$$

Tenemos que el nuevo caudal es el 98.015% del inicial, lo que supone una reducción del 1.985%.

SEP05, P4B: El trazado de dos canales navegables en un mapa discurre según las rectas $y = x$ e $y = -x$.
Dos lanchas motoras, A y B, salen al mismo tiempo de puntos situados sobre cada uno de los canales a distancias de 20 y 15 km, respectivamente, del punto P de confluencia de ambos. La lancha A se dirige a P con velocidad de 30 km/h y la lancha B se dirige a ese mismo punto P con velocidad de 60 km/h. Se considera despreciable la anchura de los canales y la longitud de las lanchas y se pide calcular:
a) La distancia entre las lanchas en función del tiempo desde que inician su recorrido.
b) La distancia mínima a la que pueden estar las lanchas.

RESOLUCIÓN:

Ayuda realizar un dibujo aproximado.
Sea t el tiempo transcurrido, en horas.
La distancia que separa a la lancha A del punto P es $20 - 30t$ y $d(B,P) = 15 - 60t$.
Para calcular $d = d(A,B)$ basta con aplicar el teorema de Pitágoras:



$d^2 = (20-30t)^2 + (15-60t)^2 = \;\rightarrow d(t) = 5\sqrt{180t^2 - 120t + 25}$

b) Se trata de buscar un mínimo de la función distancia obtenida en el apartado **a**).

Derivamos: $d' = \dfrac{5 \cdot (360t - 120)}{2\sqrt{180t^2 - 120t + 25}} = \dfrac{600(3t-1)}{2\sqrt{180t^2 - 120t + 25}} = 300\dfrac{3t-1}{\sqrt{180t^2 - 120t + 25}}$.

Igualando la derivada a 0 se obtiene el punto crítico $t = \dfrac{1}{3}$.

Si estudiamos el signo de la derivada, toma valores negativos para $t < \dfrac{1}{3}$ y valores positivos para $t > \dfrac{1}{3}$, por lo que $t = \dfrac{1}{3}$ es un mínimo.

La distancia para ese valor de t es: $d\left(\dfrac{1}{3}\right) = 5\sqrt{180 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 - 120 \cdot \dfrac{1}{3} + 25} = 5\sqrt{5}$ km.

$\boxed{\text{JUN06, P3A}}$: a) Dibuja razonadamente la gráfica de la función $g(x) = x^2 - 4$, cuando $-1 \le x \le 4$.

b) Obtener razonadamente los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x) = |x^2 - 4|$ en el intervalo $[-1, 4]$.

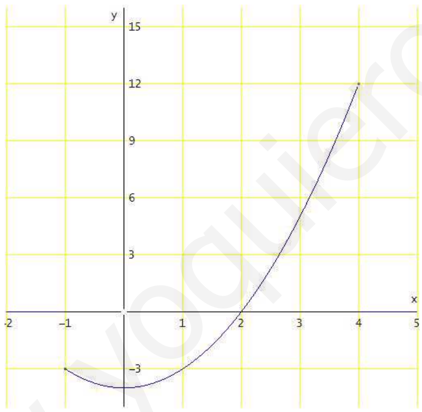
c) Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = f(x)$ y las rectas $x = -1$, $x = 4$ y $y = 0$.

RESOLUCIÓN:

a) Como es una función cuadrática, calculamos primero el vértice: $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{0}{2} = 0$.

Es una parábola de puntas hacia arriba por ser $a > 0$. Completando la tabla de valores:

x	y
-1	-3
0	-4
1	-3
2	0
3	5
4	12



b) Por tratarse de la función valor absoluto de la anterior, tenemos que para los valores de $x \in [-1, 2[$ la función $f(x)$ toma los valores de $g(x)$ pero cambiados de signo y para los valores de $x \in [2, 4]$ toma los mismos valores.

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } \; -1 \le x < 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } \; 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

$f(x)$ es creciente en $]-1, 0[$, decreciente en $]0, 2[$, creciente en]2,4[.

(Misma monotonía que g(x) en]2,4[y monotonía contraria que g(x) en]-1,2[)

Entonces los candidatos a mínimos (por la monotonía) son $x = -1, x = 2$.

Calculando sus imágenes concluimos que el mínimo es $(2, 0)$.

Y los candidatos a máximos $x = 0, x = 4$.

Calculando sus imágenes concluimos que el máximo es $(4, 12)$

c) Nos están pidiendo la integral definida $\int_{-1}^{4} |f(x)|dx$.

Para calcularla obervamos que el punto de corte con el eje OY se encuentra en $x = 2$. Por lo que el área pedida se puede calcular en dos trozos:

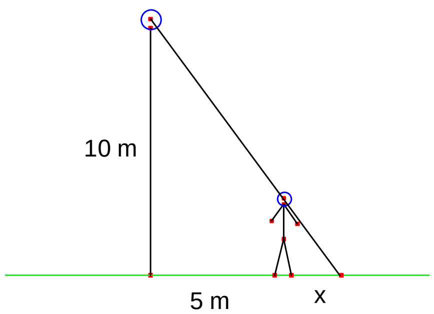
$$A_1 = \int_{-1}^{2}(4-x^2)dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \left(8-\frac{8}{3}\right) - \left(-4+\frac{1}{3}\right) = 9\ u^2$$
$$A_2 = \int_{2}^{4}(x^2-4)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{2}^{4} = \frac{64}{3} - 16 - \left(\frac{8}{3}-8\right) = \frac{56}{3} - 8 = \frac{32}{3}\ u^2$$

Entonces $A = 9 + \frac{32}{3} = \frac{27+32}{3} = \frac{59}{3}\ u^2$

JUN06, P4A: Una persona camina a velocidad constante de 3 m/s y se aleja horizontalmente en línea recta de la base de una farola cuyo foco luminoso se encuentra a 10 m de altura. Sabiendo que la persona mide 1,70 m, calcular:
a) La longitud de la sombra cuando la persona se encuentra a 5 m de la base de la farola.
b) La velocidad de crecimiento de la sombra a los t segundos de comenzar a caminar.

RESOLUCIÓN:

a)



Tal y como muestra el dibujo, tenemos 2 triángulos rectángulos semejantes, por lo que sus lados correspondientes son proporcionales:

$$\frac{10}{5+x} = \frac{1.7}{x} \to 10x = 8.5 + 1.7x$$
$$\to 8.3x = 8.5 \to x = \frac{8.5}{8.3} = 1.0241\ m$$

b) Tenemos que obtener la fórmula que da la longitud de la sombra a partir de la variable independiente t.

Repitiendo el proceso del apartado **a**) pero sustituyendo la distancia 5 m por $3t$ (3 m por cada seg):

$$\frac{10}{3t+x} = \frac{1.7}{x} \to 5.1t + 1.7x = 10x \to 5.1t = 8.3x \to x = \frac{5.1t}{8.3}.$$

Llamando a la función $f(t) = \frac{5.1t}{8.3} = 0.61446t$ su derivada es $f'(t) = 0.61446$, por lo que la velocidad de crecimiento es 0.61446 m/s^2 (constante)

JUN06, P3B: Dada la función $f(x) = ln\,x$ en el intervalo cerrado $[1,e]$, siendo $e = 2,718281\ldots$:
a) Razonar que hay un punto P de la gráfica $y = ln\,x$ en que la recta tangente es paralela a la recta que pasa por los puntos $A = (1,0)$ y $B = (e,1)$.
b) Obtener el punto P considerado en a).
c) Calcular la pendiente de la recta tangente a $y = ln\,x$ en ese punto P.

RESOLUCIÓN:

a) Se nos pide razonar que existe, no calcularlo. Para ello aplicaremos el teorema del valor medio de Lagrange:

En los extremos del intervalo $[1,e]$,
los valores que toma la función son $f(1) = 0$, $f(e) = 1$. (puntos $A = (1,0), B = (e,1)$)
La función es continua en $[1,e]$ y derivable en $]1,e[$, por el TVM de Lagrange:

$$\exists c \in]1,e[\text{ tal que } f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(e)-f(1)}{e-1} = \frac{1}{e-1}.$$

Ahora bien, $f'(c)$ indica la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = c$, mientras que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ indica la pendiente de la recta que pasa por $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$

Por lo tanto hay un punto P $(x = c)$ de la gráfica $y = ln\,x$ en que la recta tangente es paralela a la recta que pasa por los puntos $A = (1,0)$ y $B = (e,1)$

b) La pendiente de la recta que pasa por $A = (1,0)$ y $B = (e,1)$ es $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{1}{e-1}$

(También podríamos haber calculado la pendiente calculando la pendiente del vector $\overrightarrow{AB} = (e-1,1)$; $m = \dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{1}{e-1}$)

Ahora buscamos un punto en el cual la derivada (que coincide con la pendiente de la recta tangente a la gráfica) valga $\dfrac{1}{e-1}$:

$f'(x) = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{e-1} \quad \to x = e-1 \to$ (este valor de x es el $c \in]1,e[$ buscado)

$\to P = (c,f(c)) = (e-1, \ln(e-1))$

c) La pendiente de la recta tangente es $f'(c) = \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{e-1}$

JUN06, P4B: El coste del marco de una ventana rectangular es 12,5 € por metro lineal de los lados verticales y de 8 € por metro lineal de los lados horizontales.

a) Calcular razonadamente las dimensiones que ha de tener el marco de una ventana de 1 m^2 de superficie para que resulte lo más económico posible.

b) Calcular además el coste de este marco.

RESOLUCIÓN:

a) Llamemos x, y a las dimensiones de la ventana.

Dato: Como ha de tener 1 m^2, $x \cdot y = 1$, de donde $y = \dfrac{1}{x}$

Como hay que minimizar coste, hemos de obner la función coste: $C = 12.5 \cdot 2y + 8 \cdot 2x$.

Y ahora para que la función dependa de una única variable, sustituimos $y = \dfrac{1}{x}$ en la función:

$C(x) = 25\dfrac{1}{x} + 16x = \dfrac{25}{x} + 16x$, donde $x > 0$ (ya que x es la medida horizontal de la ventana)

Buscamos los puntos críticos: $C'(x) = -\dfrac{25}{x^2} + 16 = 0 \quad \to 16 = \dfrac{25}{x^2} \quad \to x = \dfrac{5}{4} = 1.25\ m$

(despreciamos la solución negativa)

Veamos si $x = 1.25$ es un mínimo o un máximo con el criterio de la 2ª derivada:

$C''(x) = \dfrac{50}{x^3} \quad \to C''(1.25) > 0 \quad \to x = 1.25$ es un mínimo.

Entonces $y = \dfrac{1}{1.25} = 0.8$, y la solución es 1.25 m de largo por 80 cm de alto.

b) Basta con sustituir el valor obtenido de $x = 1.25$ en la función coste:

$C(1.25) = \dfrac{25}{1.25} + 16 \cdot 1.25 = 40$ €.

SEP06, P3A: Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 3x + 8$ y $g(x) = -3x$, se pide:

a) Calcular el máximo absoluto de la función $f(x)$ en el intervalo $[-3,0]$.

b) Calcular el área encerrada bajo la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = g(x)$, $x = -3$ y, $x = 0$

RESOLUCIÓN:

a) Buscaremos puntos críticos: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \quad \to x = -1$

(Despreciamos la solución $x = 1$ por que se nos pide el maximo en $[-3,0]$)

Aplicamos el criterio de la segunda derivada, $f''(x) = 6x \quad \to f''(-1) = -6 < 0$

Entonces $x = -1$ es un máximo.

Para encontrar el máximo absoluto en $[-3,0]$ comparamos el valor de la función en $x = -1$ con los extremos del intervalo:

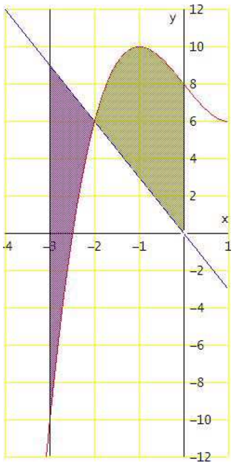
$f(-3) = -27 + 9 + 8 = -10; \quad f(-1) = -1 + 3 + 8 = 10 \quad f(0) = 8,$

Así, el máximo absoluto se alcanza en el punto $(-1,10)$.

b) Corte de $y = f(x)$ con $y = g(x)$

$x^3 - 3x + 8 = -3x \quad \rightarrow x^3 = -8 \quad \rightarrow x = \sqrt[3]{-8} = -2 \quad \rightarrow$ Punto $(-2, -6)$

Podemos comprobar que para $x < -2$, $\quad g(x) > f(x)$ y para $x > -2$, $\quad f(x) > g(x)$



El área pedida será $\int_{-3}^{-2}[g(x) - f(x)]dx + \int_{-2}^{0}[f(x) - g(x)]dx =$

$\int_{-3}^{-2}[g(x) - f(x)]dx = \int_{-3}^{-2}(-x^3 - 8)dx = \left[-\frac{x^4}{4} - 8x\right]_{-3}^{-2} =$

$= -4 + 16 - \left(-\frac{81}{4} + 24\right) = \frac{33}{4}$

$\int_{-2}^{0}[f(x) - g(x)]dx = \int_{-2}^{0}(x^3 + 8)dx = \left[\frac{x^4}{4} + 8x\right]_{-2}^{0} =$

$= 0 - (4 - 16) = 12$

Así, el área pedida es $\frac{33}{4} + 12 = \frac{81}{4}$.

SEP06, P4A: Un incendio se extiende en forma circular uniformemente. El radio del círculo quemado crece a velocidad constante de 1,8 m/min.

a) Obtener el área quemada en función del tiempo t transcurrido desde el comienzo del incendio.

b) Calcular la velocidad de crecimiento del área del círculo quemado en el instante en que el radio alcanza 45 m.

RESOLUCIÓN:

a) Sea t el tiempo medido en minutos, entonces el radio es $r = 1.8t$

El área quemada será $A = \pi r^2 = \pi(1.8t)^2 = 3.24\pi t^2$

b) La velocidad de crecimiento se mide con la derivada:

$A'(t) = 6.48\pi t$

El instante en que el radio es 45 m es $r = 1.8t = 45 \quad \rightarrow t = \frac{45}{1.8} = 25$ min.

Entonces $A'(25) = 6.48\pi \cdot 25 = 162\pi = 508.94\ m^2/min$

SEP06, P3B: a) Obtener la derivada de la función $f(x) = ax + b + \sin x$. Calcular a y b si $O = (0,0)$ es un punto de la curva $y = ax + b + \sin x$, cuya recta tangente en $O = (0,0)$ es el eje OX.

b) Justificar que la función $g(x) = -\frac{2}{\pi}x + \sin x$ se anula en dos puntos del intervalo $[0,\pi]$ y calcular esos dos puntos.

RESOLUCIÓN:

a) $f'(x) = a + \cos\ x$.

Como $(0,0)$ es un punto de la gráfica $\rightarrow 0 = f(0) = a \cdot 0 + b + \sin\ 0 = b \quad \rightarrow b = 0$

Como la recta tangente en $x = 0$ es horizontal, $f'(0) = 0 \quad \rightarrow f'(0) = a + \cos\ 0 = a + 1$

$\rightarrow a + 1 = 0 \quad \rightarrow a = -1$. La función queda $f(x) = -x + \sin\ x$

b) Estudiaremos el signo de $g(x)$ y de su derivada en $[0,\pi]$.

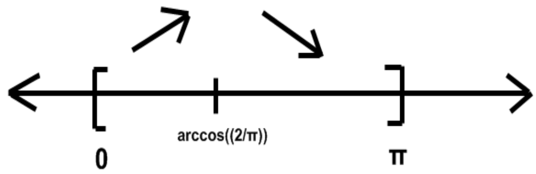
$g(0) = 0;\ g(\pi) = -2 \quad \rightarrow$ Ya tenemos que se anula en $x = 0$.

Estudio de la monotonía: $g'(x) = -\frac{2}{\pi} + \cos x$.

$g'(0) = \frac{-2}{\pi} + 1 = 0.36338\ldots > 0 \quad \rightarrow g$ creciente en $x = 0$.

Puntos críticos: $g'(x) = -\frac{2}{\pi} + \cos x = 0 \quad \rightarrow \cos x = \frac{2}{\pi} \quad \rightarrow x = \arccos\left(\frac{2}{\pi}\right) \approx 0.8807$

(única solución en $[0,\pi]$). Estudiando el signo:



La función es creciente en $\left]0, \arccos\left(\frac{2}{\pi}\right)\right[$ y decreciente en $\left]\arccos\left(\frac{2}{\pi}\right), \pi\right[$.

Como $g(0) = 0$, $\quad \to g\left(\arccos\left(\frac{2}{\pi}\right)\right) > 0$, y como $g(\pi) = -2 < 0$, por el Teorema de los Valores Intermedios, ya que $g(x)$ es continua $\exists c \in \left]\arccos\left(\frac{2}{\pi}\right), \pi\right[$ tal que $g(c) = 0$. Además este c es único, por la monotonía estudiada.

Asi pues queda demostrado que la función tiene exactamente 2 valores en $[0,\pi]$ donde se anula.

El valor de c ha de ser tal que $g(c) = -\frac{2}{\pi}c + \sin c = 0 \quad \to \sin c = \frac{2}{\pi}c$

Ecuación que resolvemos por tanteo (hay que probar valores en $\left]\arccos\left(\frac{2}{\pi}\right), \pi\right[$)

Probando $\frac{\pi}{2}$, $\left\{\begin{array}{l} \sin\frac{\pi}{2} = 1 \\ \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 1 \end{array}\right. \quad \to g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} = 0 \quad \to c = \frac{\pi}{2}$

Soluciones: $x = 0; x = \frac{\pi}{2}$

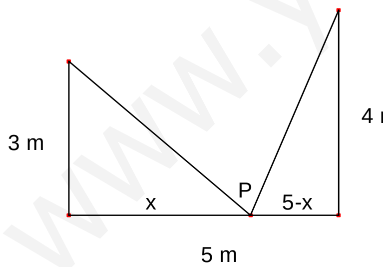
$\boxed{\text{SEP06, P4B}}$: Dos postes de 3 m y 4 m se hallan clavados verticalmente en el suelo. Sus base distan 5 m y, en el segmento que los une, hay un punto P que dista x metros de la base del poste más bajo. El extremo superior de cada poste se une con P mediante un segmento rectilíneo de cable. Se pide:

a) Obtener la expresión $f(x)$ de la longitud total del cable utilizado en ambos segmentos.

b) Demostrar que esa longitud total del cable es mínima cuando son iguales los valores absolutos de las pendientes de los dos segmentos considerados.

RESOLUCIÓN:

a) Representamos la situación:



Los dos tramos de cable son hipotenusas de sendos triángulos rectángulos:

$f(x) = \sqrt{9+x^2} + \sqrt{16+(5-x)^2} = \sqrt{x^2+9} + \sqrt{x^2-10x+41}$., donde $x \in [0,5]$

b) Si igualamos los valores absolutos de las pendientes $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$:

$\left|\frac{-3}{x}\right| = \left|\frac{4}{5-x}\right| \quad \to \frac{3}{x} = \frac{4}{5-x} \quad \to 15-3x = 4x \quad \to x = \frac{15}{7}$

Vamos a buscar un mínimo de la función $f(x)$ (para $x \in [0,5]$)

Derivamos: $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} + \frac{2x-10}{2\sqrt{x^2-10x+41}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} + \frac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+41}}$

Buscamos puntos críticos: $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} + \dfrac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+41}} = 0 \quad \rightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} = -\dfrac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+41}}$

$x\sqrt{x^2-10x+41} = (5-x)\sqrt{x^2+9}$ (Elevamos al cuadrado)

$x^2(x^2-10x+41) = (x^2-10x+25)(x^2+9) \quad \rightarrow x^4-10x^3+41x^2 = x^4-10x^3+34x^2-90x+225$

$\rightarrow 7x^2+90x-225 = 0,$ cuyas soluciones son $\begin{cases} x = \dfrac{15}{7} \\ x = -15, \text{ no válida} \end{cases}$

Queda demostrado que para $x = \dfrac{15}{7}$, se cumplen ambas condiciones.

$\boxed{\text{JUN07, P3.1}}$: Se consideran las funciones reales $f(x) = 12x^3-8x^2+9x-5$ y $g(x) = 6x^2-7x+2$. Se pide:

a) Determinar las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

b) Calcular la función $H(x) = \displaystyle\int \dfrac{f(x)}{g(x)}dx$ que cumple $H(1) = 1$.

RESOLUCIÓN:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}.$$

Como el grado del numerador supera en uno al grado del denominador, sabemos que tiene asíntota oblicua. Además tendrá asíntota vertical en los puntos que anulan el denominador.

Busquemos asíntotas verticales: $6x^2-7x+2 = 0 \quad \rightarrow$, Soluciones $x = \dfrac{2}{3}; x = \dfrac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to 2/3} \frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2} = \left(\frac{12\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 8\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 9\left(\frac{2}{3}\right) - 5}{0} = \frac{1}{0} \right) = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 1/2} \frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2} = \left(\frac{12\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 9\left(\frac{1}{2}\right) - 5}{0} = \frac{-1}{0} \right) = \pm\infty$$

Por lo que encontramos asíntotas verticales en $x = \dfrac{2}{3}$ y en $x = \dfrac{1}{2}$.

Busquemos la asíntota oblicua:

Dividimos numerador entre denominador:

$$\begin{array}{rrrr|l} 12x^3 & -8x^2 & +9x & -5 & 6x^2-7x+2 \\ \hline -12x^3 & +14x^2 & -4x & & 2x \quad +1 \\ \hline / & +6x^2 & +5x & -5 & \\ & -6x^2 & +7x & -2 & \\ \hline & / & +12x & -7 & \end{array}$$

Aplicamos la prueba de la división: $D = d \cdot c + r$,

$$\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2} = \frac{(6x^2-7x+2)\cdot(2x+1)+12x-7}{6x^2-7x+2} = 2x+1+\frac{12x-7}{6x^2-7x+2}.$$

Por lo que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \underbrace{2x+1} + \underbrace{\frac{12x-7}{6x^2-7x+2}}$.

Como esta última fracción tiende a 0, entonces $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ se acerca indefinidamente a la recta $y = 2x+1$, que es la asíntota oblicua.

b) Calculemos la primitiva de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$:

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \int \frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}dx = \int\left[2x+1+\frac{12x-7}{6x^2-7x+2}\right]dx = x^2+x+\int \frac{12x-7}{6(x-2/3)(x-1/2)}dx$$

$$= x^2+x+\frac{1}{6}\int \frac{12x-7}{(x-2/3)(x-1/2)}dx =$$

Descomponemos la fracción $\dfrac{12x-7}{(x-2/3)(x-1/2)} = \dfrac{A}{x-2/3}+\dfrac{B}{x-1/2}$

$$\to 12x-7 = A(x-\tfrac{1}{2})+B(x-\tfrac{2}{3}) = (A+B)x+\left(\frac{-A}{2}+\frac{-2B}{3}\right)$$

$$\to \begin{cases} A+B = 12 \\ \dfrac{-A}{2}+\dfrac{-2B}{3} = -7 \end{cases} \quad \to \begin{cases} A+B = 12 \\ 3A+4B = 42 \end{cases} \quad \to A = 6;\ B = 6$$

$$= x^2+x+\frac{1}{6}\int\frac{6}{x-2/3}dx+\frac{1}{6}\int\frac{6}{x-1/2}dx = x^2+x+\frac{6}{6}\int\frac{1}{x-2/3}dx+\frac{6}{6}\int\frac{1}{x-1/2}dx =$$

$$= x^2+x+\ln|x-2/3|+\ln|x-1/2|+C = H(x).$$

Como se nos pide que $H(1) = 1$, averiguaremos el valor de C :

$$H(1) = 1+1+\ln\frac{1}{3}+\ln\frac{1}{2}+C = 1 \qquad \to C = -1-\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{3}$$

Nota: $\left[\begin{array}{l} \ln\frac{1}{2} = \ln 1-\ln 2 = -\ln 2 \\ \ln\frac{1}{3} = \ln 1-\ln 3 = -\ln 3 \end{array}\right]$ $\qquad \to C = \ln 2+\ln 3-1 = \ln(2\cdot 3)-1 = \ln 6-1$

Así, la función $H(x)$ queda así: $\qquad H(x) = x^2+x+\ln|x-2/3|+\ln|x-1/2|+\ln 6-1$

JUN07, P3.2: Se considera la función real $f(x) = x^3+ax^2+bx+c$, donde a, b y c son parámetros reales.

a) Averiguar los valores de a y b para los que las rectas tangentes a la gráfica de $f(x)$ en los puntos de abscisas $x = 2$ y $x = 4$ son paralelas al eje OX.

b) Con los valores de a y b hallados anteriormente, obtener el valor de c para el que se cumple que el punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ está en el eje OX.

RESOLUCIÓN:

a) Las rectas tangentes a la gráfica son paralelas al eje OX cuando son horizontales, es decir tienen pendiente 0 y por lo tanto $f'(2) = 0$ y $f'(4) = 0$.

Calculemos la derivada: $f'(x) = 3x^2+2ax+b$.

$$\begin{cases} f'(2) = 12+4a+b = 0 \\ f'(4) = 48+8a+b = 0 \end{cases} \quad \to \begin{cases} 4a+b = -12 \\ 8a+b = -48 \end{cases} \quad \to \begin{cases} a = -9 \\ b = 24 \end{cases}$$

b) $f(x) = x^3-9x^2+24x+c$.

El punto de inflexión se encuentra donde hay un cambio de curvatura, es decir donde la 2ª derivada cambia de signo.

$f''(x) = 6x-18 = 0 \qquad \to x = 3$ es el punto de inflexión (como la segunda derivada es de grado 1, necesariamente presenta un cambio de signo en $x = 3$).

Para que el punto correspondiente a $x = 3$ esté sobre el eje OX, ha de cumplirse que $f(3) = 0$.

$$f(3) = 27-81+72+c = 18+c = 0 \qquad \to c = -18$$

$\boxed{\text{JUN07, P4.1}}$: Unos altos hornos producen al día x toneladas de acero de baja calidad y $\dfrac{40-5x}{10-x}$ toneladas de acero de alta calidad, siendo 8 toneladas la producción máxima diaria de baja calidad. Si el precio de una tonelada de acero de baja calidad es 100 euros y el precio de una tonelada de acero de alta calidad es 250 euros, demostrar que se deben producir 5 toneladas por día de acero baja calidad para que el valor de venta de la producción diaria sea máxima.

RESOLUCIÓN:

Se desea maximizar el valor de la venta de la producción diaria, por lo que necesitamos la función de este valor (Ingresos).

$$f(x) = 100x + 250 \cdot \frac{40-5x}{10-x} = 100x + \frac{10000-1250x}{10-x}.$$

Vamos a buscar un máximo.

Puntos críticos: $f'(x) = 100 + \dfrac{-2500}{(10-x)^2} = 0 \quad \to (10-x)^2 = 25 \quad \to \begin{cases} x = 15 \\ x = 5 \end{cases}$

Por el significado de x no puede tomar valores mayores que 8, por lo que nos quedamos con $x = 5$.

Para comprobar si es un máximo, lo sustituimos en la segunda derivada:

$f''(x) = \dfrac{-5000(10-x)}{(10-x)^4} = \dfrac{-5000}{(10-x)^3} \quad \to f''(5) < 0 \quad \to x = 5$ es un máximo de la función.

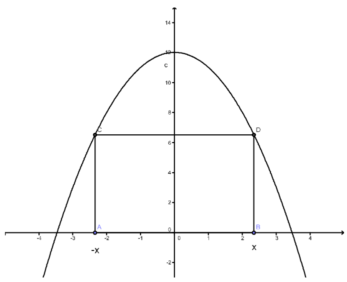
Se deben producir 5 toneladas de acero de baja calidad para maximizar los ingresos.

$\boxed{\text{JUN07, P4.2}}$: Hallar las dimensiones del cartel de área máxima con forma de rectángulo que tiene dos vértices sujetos a una estructura rígida parabólica de ecuación $y = 12 - x^2$ y los otros dos vértices están situados sobre el eje OX.

RESOLUCIÓN:

La parábola $y = 12 - x^2$, tiene el vértice en $x_v = \dfrac{-b}{2a} = 0 \to (0,12)$, y es de puntas hacia abajo.

Como la parábola es simétrica respecto del eje OY, también lo será el rectángulo que se apoya en ella.



Entonces, tomando x como la coordenada horizontal del vértice inferior derecho, las dimensiones del rectángulo son $2x$ de base y $12 - x^2$ de altura. Así, el área del rectángulo queda:

$A(x) = 2x(12 - x^2) = 24x - 2x^3$. Busquemos un máximo para esta función:

Puntos críticos $\quad \to A'(x) = 24 - 6x^2 = 0 \quad \to x = \pm 2$. (Solo nos vale $x = 2$)

Veamos si $x = 2$ es un máximo: $\to A''(x) = -12x \to A''(2) = -24 < 0 \quad \to x = 2$ es un máximo.

Entonces las dimensiones del cartel son $2x = 4$ cm de largo, por $12 - x^2 = 8$ cm de alto.

$\boxed{\text{SEP07, P3.1}}$: Dadas las funciones reales $f(x) = 4x^2 + 2x + 10$ y $g(x) = x^3 + x^2 + 5x + 5$. Se pide:

a) Determinar las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\frac{f(x)}{g(x)}$.

b) Calcular la función $H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ que cumple $H(0) = 0$.

RESOLUCIÓN:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4x^2 + 2x + 10}{x^3 + x^2 + 5x + 5}.$$

a) Busquemos asíntotas verticales en los puntos que anulan el denominador:

$x^3 + x^2 + 5x + 5 = 0 \quad \rightarrow$

	1	1	5	5
−1		−1	0	−5
	1	0	5	0

$\rightarrow (x+1)(x^2+5) = 0 \rightarrow x = -1$

$$\lim_{x \to -1} \frac{4x^2 + 2x + 10}{x^3 + x^2 + 5x + 5} = \left\{\frac{12}{0}\right\} = \pm\infty \qquad \rightarrow x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

Ahora busquemos la asíntota horizontal: $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x^2 + 2x + 10}{x^3 + x^2 + 5x + 5} = 0$ (porque el grado del denominador es mayor)

$\rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal (y por tanto no hay asíntota oblicua).

b) Calculemos la primitiva de $\frac{f(x)}{g(x)}$:

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int \frac{4x^2 + 2x + 10}{x^3 + x^2 + 5x + 5} dx = \int \frac{4x^2 + 2x + 10}{(x+1)(x^2+5)} dx =$$

Descomponemos la fracción $\frac{4x^2 + 2x + 10}{(x+1)(x^2+5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 5}$

$$\rightarrow 4x^2 + 2x + 10 = A(x^2+5) + (Bx+C)(x+1) = Ax^2 + 5A + Bx^2 + Bx + Cx + C =$$

$$= (A+B)x^2 + (B+C)x + (5A+C) \qquad \rightarrow \begin{cases} A + B = 4 \\ B + C = 2 \\ 5A + C = 10 \end{cases} \quad \text{(Por sustitución, } B = 4 - A\text{)}$$

$$\rightarrow (ec2)\ 4 - A + C = 2 \qquad \rightarrow \begin{cases} A - C = 2 \\ 5A + C = 10 \end{cases} \qquad \rightarrow A = 2; C = 0; B = 2$$

Entonces $\frac{4x^2 + 2x + 10}{(x+1)(x^2+5)} = \frac{2}{x+1} + \frac{2x}{x^2+5}$

$$\int \frac{4x^2 + 2x + 10}{(x+1)(x^2+5)} dx = \int \frac{2}{x+1} dx + \int \frac{2x}{x^2+5} dx = 2\ln(x+1) + \ln(x^2+5) + D = H(x)$$

Como se nos pide que $H(0) = 0$, averiguaremos el valor de D :

$H(0) = 2\ln 1 + \ln 5 + D = 0 \qquad \rightarrow D = -\ln 5.$ Entonces $H(x) = 2\ln(x+1) + \ln(x^2+5) - \ln 5.$

SEP07, P3.2: Sea la función con dominio los números reales no nulos $f(x) = \frac{4}{x}$.

a) Calcular la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$

b) Determinar los puntos M y N de la gráfica de $f(x)$ para los que las rectas tangentes a la gráfica en M y N se cortan en el punto $(4, -8)$.

RESOLUCIÓN:

a) La ecuación de la recta tangente (punto-pendiente) es $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$,

por lo que en $x = 2$ es : $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \rightarrow y - f(2) = f'(2)(x - 2)$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{l} f(2) = \frac{4}{2} = 2 \\ f'(x) = -\frac{4}{x^2} \rightarrow f'(2) = -1 \end{array} \right) \quad y - 2 = -1(x - 2) \quad \rightarrow \text{Recta tangente } y = -x + 4$$

La recta normal pasa por el mismo punto pero es perpendicular a la recta tangente, por lo que su pendiente es $-\frac{1}{m} = -\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{-1} = 1$:

Recta normal $y - 2 = 1(x - 2) \quad \rightarrow y = x$

b) Un punto cualquiera de la gráfica es $(a, f(a)) = (a, \frac{4}{a})$.

La recta tangente en $x = a$ es (ec. punto-pendiente) $y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$.

La ecuación queda $y - \frac{4}{a} = -\frac{4}{a^2}(x - a) \qquad y = -\frac{4}{a^2}x + \frac{8}{a}$

Para que la recta pase por el punto $(4, -8)$: $\quad -8 = -\frac{4}{a^2} \cdot 4 + \frac{8}{a} \quad \rightarrow -8a^2 = -16 + 8a$

$\rightarrow 8a^2 + 8a - 16 = 0 \qquad a^2 + a - 2 = 0 \qquad$ Soluciones: $a = 1; a = -2$.

Entonces los puntos $M = (1, \frac{4}{1}) = (1, 4)$ y $N = (-2, \frac{4}{-2}) = (-2, -2)$ son los puntos pedidos.

SEP07, P4.1: Se tienen dos programas informáticos A y B. Para procesar n datos, el programa A realiza un número de operaciones elementales no superior a $12 + n\sqrt[4]{n^3}$,mientras el programa B ejecuta $n^2 - 2n + 10$ operaciones elementales. Comprobar que cuando el número n de datos es grande, el programa A procesa los n datos con menos operaciones elementales que el programa B.

RESOLUCIÓN:

Sea $A(n) = 12 + n\sqrt[4]{n^3} = 12 + n \cdot n^{3/4} = 12 + n^{7/4}$ y $B(n) = n^2 - 2n + 10$.

Para comparar ambas expresiones cuando n crece indefinidamente ($n \rightarrow \infty$), calcularemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{B(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{12 + n^{7/4}}{n^2 - 2n + 10} = 0,$$ porque el grado del denominador es mayor.

Así, para valores de n suficientemente grandes, $B(n) > A(n)$, por lo que el programa A realiza menos operaciones.

SEP07, P4.2: El borde de un estanque está formado por el arco de curva $y = 4 - x^2$ de extremos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$ y el segmento rectilíneo que une estos dos puntos. Un surtidor está situado en el punto de coordenadas $(0, 2)$. Se pide:

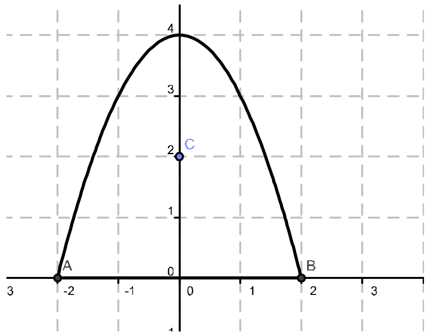
a) Determinar, razonadamente, el punto del segmento rectilíneo del borde del estanque que está más próximo al surtidor.

b) Determinar, razonadamente, los puntos del arco de curva del borde del estanque que están más próximos al surtidor.

c) ¿Cuáles son los puntos del borde del estanque más próximos al surtidor?

RESOLUCIÓN:

Representemos la situación:



a) Si trazamos una perpendicular al segmento AB desde el punto $C = (0,2)$, obtenemos el punto del segmento AB más próximo a C : el $(0,0)$.

b) Un punto cualquiera del arco de curva es $P = (x, 4-x^2)$, por lo que $d(P,C) = \left|\overrightarrow{CP}\right| = \sqrt{x^2+(2-x^2)^2}$.

Ahora tenemos que minimizar $d(x) = \sqrt{x^2+(2-x^2)^2} = \sqrt{x^4-3x^2+4}$.

Derivamos: $d'(x) = \dfrac{4x^3-6x}{2\sqrt{x^4-3x^2+4}} = \dfrac{2x^3-3x}{\sqrt{x^4-3x^2+4}}$. Puntos críticos:

$$\frac{2x^3-3x}{\sqrt{x^4-3x^2+4}} = 0 \quad \to$$

$$\to 2x^3-3x = 0 \quad \to x(2x^2-3) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{3}{2} = 1.5 \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{1.5} \\ x = \sqrt{1.5} \end{cases}.$$

Sustituyendo los valores de x en $d(x)$ encontramos el mínimo en $x = -\sqrt{1.5}$ y en $x = \sqrt{1.5}$.

$$d(-\sqrt{1.5}) = d(\sqrt{1.5}) = \sqrt{(\sqrt{1.5})^4 - 3(\sqrt{1.5})^2 + 4} = \sqrt{2.25-4.5+4} = \sqrt{1.75}$$

Así los puntos más cercanos son $P_1 = (-\sqrt{1.5}, 4-1.5) = (-\sqrt{1.5}, 2.5)$ y $P_2 = (\sqrt{1.5}, 2.5)$

c) Como $d((0,0),C) = 2$ y $d(P_1,C) = d(P_2,C) = \sqrt{1.75}$, los puntos más cercanos al surtidor $C = (0,2)$ son los dados en el apartado b): $P_1 = (-\sqrt{1.5}, 2.5)$ y $P_2 = (\sqrt{1.5}, 2.5)$

JUN08, P3.1: Se considera, en el primer cuadrante, la región R del plano limitada por el eje X, el eje Y, la recta $x = 2$ y la curva $y = \dfrac{1}{4+x^2}$

a) Calcular razonadamente el área de la región R.

b) Encontrar el valor de α para que la recta $x = \alpha$ divida la región R en dos partes A (izquierda) y B (derecha) tales que el área de A sea el doble que la de B.

Resolución:

a) El eje OY se corresponde con $x = 0$. El área entre la función y el eje OX viene dado por su integral. Pero antes de plantear la integral, hemos de buscar posibles puntos de corte con el eje OX de la función $y = \dfrac{1}{4+x^2}$ entre los valores $x = 0$ y $x = 2$:

$\dfrac{1}{4+x^2} = 0 \quad \to$ No existen puntos de corte con OX. Entonces el área pedida es:

$$\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}dx = \int_0^2 \frac{\frac{1}{4}}{\frac{4}{4}+\frac{x^2}{4}}dx = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{4}\cdot 2\int_0^2 \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2}{2}\right) - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{0}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{8}.$$

b) El área de A viene dado por $\int_0^{\alpha} \frac{1}{4+x^2}dx$ y el área de B es $\int_{\alpha}^{2} \frac{1}{4+x^2}dx$.

Denotemos A al valor del área de A y lo mismo con B. Entonces $\begin{cases} A = 2B \\ A+B = \frac{\pi}{8} \end{cases}$

$\rightarrow 3B = \frac{\pi}{8} \quad \rightarrow B = \frac{\pi}{24}$. .Calculemos B :

$$\int_{\alpha}^{2} \frac{1}{4+x^2}dx = \left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{x=\alpha}^{x=2} = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2}{2}\right) - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{24}$$

$$\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{12} \quad \rightarrow \arctan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \quad \rightarrow \frac{\alpha}{2} = \tan\frac{\pi}{6} \quad \rightarrow \alpha = 2\tan\frac{\pi}{6} = 2\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

JUN08, P3.2: Se considera la función real $f(x) = x^2 - 4$. Obtener, explicando el proceso de cálculo:

a) La gráfica de la curva $y = f(x)$.

b) Los valores de x para los que está definida la función real $g(x) = \ln f(x)$.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función g(x) , razonando si tiene, o no, máximo absoluto.

Resolución:

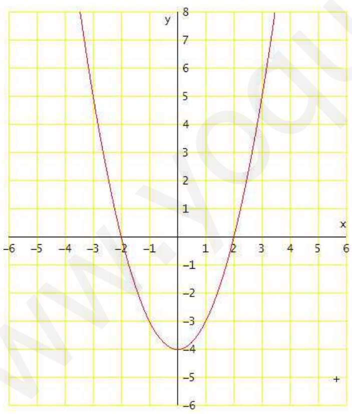
a) Dado que se trata de una parábola, debemos comenzar calculando su vértice:

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2} = 0. \quad \rightarrow y_v = 0^2 - 4 = -4. \quad \rightarrow$ Vértice $= (0,-4)$

Corte con eje OX: $x^2 - 4 = 0 \quad \rightarrow x = \pm 2. \quad \rightarrow (-2,0)$ y $(2,0)$.

Completando una tabla de valores:

x	y
-3	5
-2	0
-1	-3
0	-4
1	-3
2	0
3	5

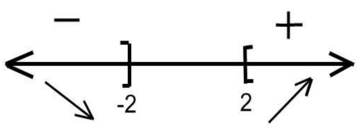


b) $g(x) = \ln(x^2 - 4)$ sólo está definida cuando $x^2 - 4 > 0$.

Y por lo calculado en el apartado a) esta inecuación tiene por solución $]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$.

c) Para estudiar la monotonía de $g(x)$ haremos un estudio del signo de $g'(x)$:

$g'(x) = \frac{2x}{x^2-4}$. El estudio del signo se realiza sólo sobre $]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$, que es el dominio de la función.



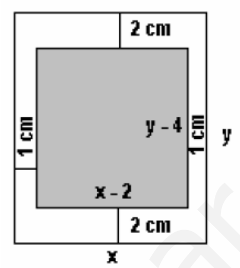
. Así, $g(x)$ es decreciente en $]-\infty,-2[$ y creciente en $]2,+\infty[$.

Dado que el dominio de definición es un conjunto abierto, si existe un máximo ha de ser un punto en el cual la función es monótona creciente a su izquierda y decreciente a su derecha. Por el estudio de la monotonía observamos que no existe ningún punto con esas características. Así pues, la función carece de máximo absoluto.

$\boxed{\text{JUN08, P4.1}}$: Una empresa decide lanzar una campaña de propaganda de uno de sus productos editando un texto que ocupa 18 cm^2 en hojas rectangulares impresas a una cara, con márgenes superior e inferior de 2 cm y laterales de 1 cm. Se pide calcular, razonadamente, las dimensiones de la hoja para que el consumo de papel sea mínimo.

Resolución:

Si llamamos x e y a las dimensiones del cartel, la situación es la que se indica en la figura adjunta, donde la parte impresa es la sombreada.
Debe cumplirse que: $(x-2)\cdot(y-4) = 18$.
Se desea que la superficie del cartel, $S = x\cdot y$, sea mínima.



$$\left(\begin{array}{l} \text{NOTA: Si hubiésemos llamado } x, y \text{ a las dimensiones del rectángulo} \\ \text{interior de texto, entonces } \begin{cases} x \cdot y = 18 \\ S = (x+2)\cdot(y+4) \end{cases} \end{array} \right)$$

Para conseguir que la superficie dependa de una única incógnita, utilizaremos la ecuación $(x-2)\cdot(y-4) = 18$ para despejar y, y después sustituirla en la fórmula de la superficie.

$$y - 4 = \frac{18}{x-2} \Rightarrow y = \frac{18}{x-2} + 4 = \frac{4x+10}{x-2}$$

Así, la función a minimizar es $S(x) = x \cdot \dfrac{4x+10}{x-2} = \dfrac{4x^2+10x}{x-2}$. Donde $x \in \,]2,+\infty[$. Busquemos los puntos críticos:

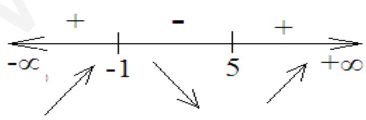
$$S'(x) = \frac{4x^2-16x-20}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow 4x^2-16x-20 = 0 \Rightarrow x = 5 \;;\; x = -1 \text{ (no válida)}$$

Veamos si $x = 5$ es un mínimo:

$$S''(x) = \frac{72}{(x-2)^3} \Rightarrow S''(5) = \frac{72}{27} > 0 \Rightarrow x = 5 \text{ es un mínimo.}$$

Para garantizar que se trata del mínimo absoluto cuando $x \in \,]2,+\infty[$, podemos estudiar la monotonía:

Signo de $S'(x)$:



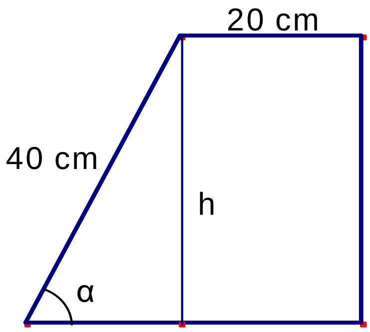
. Así, $S(x)$ es decreciente en]2,5[y creciente en]5,+∞[, por lo que $x = 5$ ha de ser el mínimo absoluto.

$$x = 5 \Rightarrow y = \frac{4\cdot 5+10}{5-2} = 10 \Rightarrow \text{Las dimensiones buscadas son 5 cm de largo por 10 cm de alto.}$$

$\boxed{\text{JUN08, P4.2}}$: Una ventana tiene forma de trapecio rectangular. La base menor mide 20 cm y el lado oblicuo mide 40 cm. Hallar, razonadamente, el ángulo α que debe formar el lado oblicuo con la base mayor para que el área de la ventana sea máxima. Calcular esta área máxima.
Nota: Un trapecio rectangular es un cuadrilátero con dos lados paralelos y en el que uno de los otros lados es perpendicular a estos dos lados paralelos.

Resolución:

La ventana:



Hemos de expresar el área de la ventana en función del valor de α. Se puede hacer de 2 formas: con el área del trapecio o dividiendo la ventana en 2 partes: un triángulo rectángulo y un rectángulo.

$A = \frac{B+b}{2} \cdot h$ (donde B y b son las bases mayor y menor, y h es la altura).

Utilizando trigonometría elemental, $h = 40\sin\alpha$, $B = 20 + 40\cos\alpha$.

Por lo que la función a maximizar es

$$A(\alpha) = \frac{20 + 40\cos\alpha + 20}{2} \cdot 40\sin\alpha = (20 + 20\cos\alpha) \cdot 40\sin\alpha = 800\sin\alpha(1+\cos\alpha).$$

Derivamos: $A'(x) = 800[\cos\alpha(1+\cos\alpha) + \sin\alpha \cdot (-\sin\alpha)] = 800[\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha]$.

Puntos críticos: $\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0 \quad \rightarrow$ (Pasamos a cosenos) $\rightarrow$

$$\cos\alpha + \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad 2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0 \quad \text{Tomando } t = \cos\alpha :$$

$$2t^2 + t - 1 = 0 \quad \rightarrow \begin{cases} t = 1/2 & \rightarrow \cos\alpha = 1/2 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \ (60^\circ) \\ t = -1 & \rightarrow \cos\alpha = -1 \rightarrow \alpha = \pi \ (180^\circ) \text{ (No válida)} \end{cases}$$

Comprobemos que $\alpha = \pi/3$ es un máximo:

$$A''(x) = 800[-\sin\alpha + 2\cos\alpha \cdot (-\sin\alpha) - 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha] = -800[\sin\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha]$$

$$A''(\tfrac{\pi}{3}) = -800\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}\right] = -800 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} < 0 \quad \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ es un máximo.}$$

El área será máxima cuando el ángulo α sea de 60º ($\pi/3$) y el valor del área en este caso es:

$$A(\pi/3) = 800\sin\frac{\pi}{3}(1+\cos\frac{\pi}{3}) = 800\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\frac{1}{2}) = 600\sqrt{3}\ cm^2$$

$\boxed{\text{SEP08, P3.1}}$: Dada la función $f(t) = at + b$ (con a y b constantes reales), se define $F(x) = x\int_1^{x+1} f(t)dt$. Se pide obtener razonadamente:

a) La integral $\int_1^{x+1} f(t)dt$ (1,5 puntos).

b) La expresión de la derivada $F'(x)$ de la función $F(x)$. (0,5 puntos).

c) La relación entre los valores a y b para la que se verifica: $F''(0) = 0$. (1,3 puntos).

Resolución:

a) $\int_1^{x+1} f(t)dt = \int_1^{x+1}(at+b)dt = \left[a\frac{t^2}{2} + bt\right]_1^{x+1} = \frac{a}{2}(x^2+2x+1) + bx + b - (\frac{a}{2}+b) =$

$= \frac{a}{2}x^2 + (a+b)x.$

b) $F(x) = x(\frac{a}{2}x^2 + (a+b)x) = \frac{a}{2}x^3 + (a+b)x^2$. Entonces $F'(x) = \frac{3a}{2}x^2 + 2(a+b)x$

c) $F''(x) = 3ax + 2(a+b)$. $\rightarrow F''(0) = 2a + 2b = 0 \Leftrightarrow a = -b$

SEP08, P3.2 : Para cada número real positivo α , se considera la función $g(x) = x^2 + \alpha$. Se pide calcular razonadamente:

a) El área de la región del plano limitada por el eje X , el eje Y, la recta $x = \sqrt{6}$ y la curva $y = g(x)$.(2 puntos).

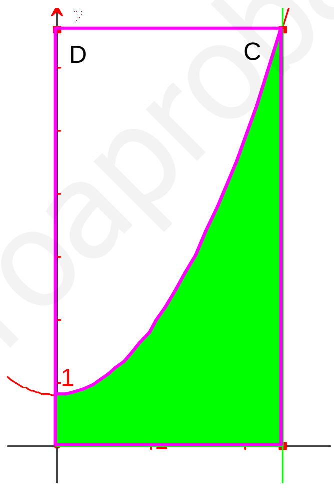
b) El valor α para el que la curva $y = x^2 + \alpha$ divide al rectángulo de vértices $(0,0)$, $(\sqrt{6},0)$, $(\sqrt{6}, 6+\alpha)$, $(0, 6+\alpha)$ en dos regiones de igual área. (1,3 puntos).

Resolución:

a) El eje OY es la recta $x = 0$. Para calcular el área pedida necesitamos primero calcular si existen puntos de corte de la función con el eje OX entre los valores $x = 0$ y $x = \sqrt{6}$. Pero $x^2 + \alpha = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\alpha$, que no tiene solución porque α es positivo. Así pues no existen puntos de corte con el eje OX y el área pedida coincide con el valor de la integral:

$$\int_0^{\sqrt{6}} (x^2 + \alpha)dx = \left[\frac{x^3}{3} + \alpha x \right]_0^{\sqrt{6}} = \frac{6\sqrt{6}}{3} + \alpha\sqrt{6} = (2+\alpha)\sqrt{6}$$

b) Si llamamos A,B,C,D a los vértices $(0,0)$, $(\sqrt{6},0)$, $(\sqrt{6}, 6+\alpha)$, $(0, 6+\alpha)$ respectivamente, podríamos representar la situación como se muestra en la figura:



Notar que el punto $C = (\sqrt{6}, 6+\alpha)$ es un punto de la gráfica. El área calculada en el apartado a) (región coloreada) es una de las regiones en que la curva $y = x^2 + \alpha$, divide al rectángulo.

Así pues el área calculada en a) ha de ser la mitad del área del rectángulo.

$(2+\alpha)\sqrt{6} = \frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot (6+\alpha)$ $\rightarrow 4\sqrt{6} + 2\alpha\sqrt{6} = 6\sqrt{6} + \alpha\sqrt{6}$ $\rightarrow \alpha\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

$\rightarrow \alpha = 2$.

SEP08, P4.1 : Un móvil se mueve con velocidad constante de 2 m/s, en el primer cuadrante, sobre la recta $x = 1$, partiendo del punto $M = (1,0)$ situado a 1 m del origen. Se pide obtener razonadamente:

a) Las coordenadas del punto $M(t)$ donde está situado el móvil después de t segundos. (1 punto).

b) La función $m(t)$ igual a la pendiente de la recta que pasa por el punto $O = (0,0)$ y por el punto $M(t)$. (1,3 puntos).

c) La derivada de la función $m(t)$. (1 punto).

Resolución:

a) La coordenada x siempre vale 1 y la coordenada y vale 0 inicialmente y aumenta 2 unidades por segundo. Entonces: $M(t) = (1, 2t)$.

b) $m(t) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2t}{1} = 2t$

c) $m'(t) = 2$

SEP08, P4.2 :En un terreno con forma de semicírculo de radio $\sqrt{50}$ metros, se dibuja un rectángulo que tiene dos vértices sobre la semicircunferencia del perímetro del terreno. Los otros dos vértices del rectángulo están sobre el segmento rectilíneo de dicho perímetro y distan x metros. Obtener razonadamente:

a) El área del rectángulo en función de x. (1,3 puntos).

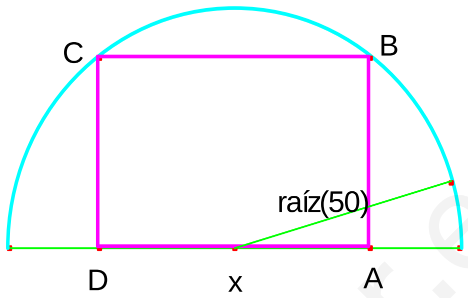
b) El valor de x para el que es máxima el área del rectángulo. (2 puntos).

Resolución:

a) Si situamos el origen de coordenadas en el centro de la circunferencia, la ecuación de la misma es $x^2 + y^2 = \left(\sqrt{50}\right)^2$

Despejando $y = \pm\sqrt{50 - x^2}$

Pero como llamamos x a la distancia entre D y A, entonces $A = (x/2, 0)$.



Así, $D = (-x/2, 0)$. En el punto B, la coordenada "y" vale $y = +\sqrt{50 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = +\sqrt{\frac{200 - x^2}{4}}$

(la solución negativa no vale porque en B y en C $y > 0$).

Por lo tanto, $B = \left(\frac{x}{2}, \sqrt{\frac{200 - x^2}{4}}\right)$ y $C = \left(-\frac{x}{2}, \sqrt{\frac{200 - x^2}{4}}\right)$

El área del rectángulo será $A = x \cdot \sqrt{\frac{200 - x^2}{4}}$

b) Tenemos que maximizar $A(x) = x \cdot \sqrt{\frac{200 - x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{200x^2 - x^4}$

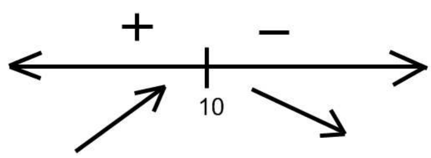
Derivamos: $A'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{400x - 4x^3}{2\sqrt{200x^2 - x^4}} = \frac{100x - x^3}{\sqrt{200x^2 - x^4}}$.

Puntos críticos: $\frac{100x - x^3}{\sqrt{200x^2 - x^4}} = 0 \quad \to 100x - x^3 = 0 \qquad \to x(x^2 - 100) = 0$

$\to \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 10 \end{cases}$. Por el contexto del problema y el significado de x sólo tiene sentido el valor de $x = 10$.

Veamos si es un máximo: Si estudiamos el signo de la derivada a la izquierda y derecha

de $x = 10$, obtenemos



. Con lo que $x = 10$ es un máximo,

es decir los puntos D y A deben estar separados 10 cm para que el área del rectángulo sea máxima.

$\boxed{\text{JUN09, P3.1}}$: **a**) Determinar, razonadamente, el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \frac{1}{(3-x)(3+x)}$. (1 punto).

b) Obtener razonadamente los valores A y B tales que $\frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{A}{3-x} + \frac{B}{3+x}$ (1 punto)

c) Calcular razonadamente el área de la superficie S limitada por la curva $y = \frac{1}{(3-x)(3+x)}$, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = -2$ y $x = 2$. (1,3 puntos)

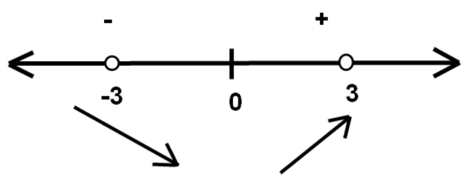
Resolución:

a) El dominio está formado por todos los números reales excepto aquellos que anulan el denominador:

$$(3-x)(3+x) = 0 \quad \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases} \quad \rightarrow \text{Dom} = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$$

Para estudiar la monotonía, calculamos la derivada y estudiamos su signo.

$$f(x) = \frac{1}{9-x^2} \quad \rightarrow f'(x) = \frac{2x}{(9-x^2)^2}. \qquad \text{Puntos críticos: } 2x = 0 \rightarrow x = 0.$$



Por el estudio del signo, f es decreciente en $]-\infty, 0[-\{-3\}$ y creciente en $]0, +\infty[-\{3\}$.

b) $$\frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{A}{3-x} + \frac{B}{3+x} = \frac{A(3+x)+B(3-x)}{(3-x)(3+x)}$$

$$\Rightarrow A(3+x)+B(3-x) = 1 \qquad \Rightarrow 3A + Ax + 3B - Bx = 1 \qquad \Rightarrow (A-B)x + 3A + 3B = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A - B = 0 \\ 3A + 3B = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} A = B \\ 3A + 3A = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow A = B = \frac{1}{6}.$$ Por lo que:

$$\frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{1/6}{3-x} + \frac{1/6}{3+x}$$

c) La función $y = \dfrac{1}{(3-x)(3+x)}$ no tiene puntos de corte con los ejes, ya que $y = 0$ no tiene solución.

Entonces el área pedida es

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{(3-x)(3+x)}dx = \int_{-2}^{2}\left(\frac{1/6}{3-x} + \frac{1/6}{3+x}\right)dx = \left[-\frac{1}{6}\ln(3-x) + \frac{1}{6}\ln(3+x)\right]_{-2}^{2} =$$

$$\left[\frac{1}{6}\ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right)\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{6}\ln(5) - \frac{1}{6}\ln\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{5}{1/5}\right) = \frac{1}{6}\ln 5^2 = \frac{2}{6}\ln 5 = \frac{1}{3}\ln 5$$

JUN09, P3.2 : Dada la función real $f(x) = e^x - e^{-x}$, se pide calcular razonadamente:

a) La función $f(x) + f(-x)$. (1,1 puntos).

b) La integral $\int_{-a}^{a} f(x)dx$, donde a es un número real positivo. (1,1 puntos).

c) El punto de inflexión de $f(x)$. (1,1 puntos).

Resolución:

a) $f(x) + f(-x) = e^x - e^{-x} + e^{-x} - e^x = 0.$ Se trata, por tanto, de la función nula.

NOTA: Como $f(x) + f(-x) = 0 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$. Es decir, $f(x)$ es una función IMPAR.

b) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{a}(e^x - e^{-x})dx = [e^x + e^{-x}]_{-a}^{a} = e^a + e^{-a} - (e^{-a} + e^a) = 0.$

NOTA: Como $f(x)$ es una función IMPAR, $\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx.$

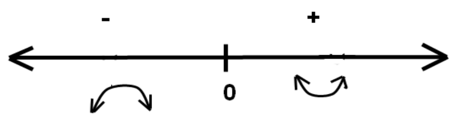
Por eso $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$

c) El punto de inflexión es un punto donde cambia la curvatura. Calculamos la segunda derivada y estudiamos su signo:

$f'(x) = e^x + e^{-x} \quad \Rightarrow f''(x) = e^x - e^{-x}$ (la segunda derivada coincide con la función original)

$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow e^x - e^{-x} = 0 \quad \Rightarrow e^x = e^{-x} \quad \Rightarrow \frac{e^x}{e^{-x}} = 1 \quad \Rightarrow e^{2x} = 1. \quad \Rightarrow 2x = 0 \quad \Rightarrow$

Estudio del signo de $f''(x)$:



Luego $x = 0$ es un punto de inflexión, por que en él hay un cambio de curvatura.($f(x)$ es convexa en $]-\infty, 0[$ y cóncava en $]0, +\infty[$).

$\boxed{\text{JUN09, P4.1}}$: Se desea construir una bodega con forma de paralelepípedo rectangular de 100 m^3 de volumen de manera que el largo de su base sea 4/3 de la anchura x de su base. Se sabe que los precios de un metro cuadrado de suelo, de techo y de pared lateral son, respectivamente, 225 €/m^2, 300 €/m^2 y 256 €/m^2. Determinar razonadamente:

a) El valor x de la anchura de la base que minimiza el coste. (2,3 puntos).

b) Dicho coste mínimo. (1 punto).

Resolución:

a) Llamando x a la anchura de la base, $\frac{4x}{3}$ es el largo de la base y h será la altura.

Dato: Volumen = $100m^3 \quad \Rightarrow x \cdot \frac{4x}{3} \cdot h = 100 \quad \Rightarrow \frac{4x^2h}{3} = 100$

Área del Suelo: $x \cdot \frac{4x}{3} = \frac{4x^2}{3}$. Área de techo: $\frac{4x^2}{3}$. Área lateral: $2 \cdot xh + 2 \cdot \frac{4x}{3}h$.

(Notar que hay 2 paredes de dimensiones x, h y dos paredes de dimensiones $\frac{4x}{3}, h$.)

Función coste: $C(x) = 225 \cdot \frac{4x^2}{3} + 300 \cdot \frac{4x^2}{3} + 256 \cdot (2 \cdot xh + 2 \cdot \frac{4x}{3}h) = 700x^2 + \frac{3584}{3}hx$.

Utilizamos el dato: $h = \frac{75}{x^2} \quad \rightarrow C(x) = 700x^2 + \frac{3584}{3} \cdot \frac{75}{x} = 700x^2 + \frac{89\,600}{x}$.

Buscamos un mínimo de $C(x)$, para ello derivamos y hallamos los puntos críticos:

$C'(x) = 1400x - \frac{89600}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow 1400x = \frac{89600}{x^2} \quad \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{89600}{1400}} = 4.$

Comprobamos que es un mínimo: $C''(x) = 1400 + \frac{179200}{x^3} \quad \Rightarrow C''(4) > 0 \quad \Rightarrow x = 4$ es un mínimo.

Así pues, cuando la anchura de la base sea de 4 m, el coste de construcción de la bodega será mínimo.

b) $C(4) = 700 \cdot 4^2 + \frac{89\,600}{4} = 33\,600$ €, es el coste de construcción mínimo.

$\boxed{\text{JUN09, P4.2}}$: Un proveedor vende un producto a un comerciante al precio de 300 euros la unidad. El comerciante incrementa la cantidad de 300 euros en un 40% para obtener el precio de venta al público. El comerciante sabe que a ese precio venderá 50 unidades cada mes y que durante el mes de rebajas por cada

3 euros de reducción en el precio de venta de la unidad conseguirá un incremento de ventas de 5 unidades. Se pide determinar, razonadamente, el número de unidades que debe pedir al proveedor para venderlas en el mes de rebajas y el precio de venta de cada unidad, para maximizar sus beneficios durante ese periodo. (2 puntos por obtener el número de unidades y 1,3 puntos por el precio de venta).

Resolución:

El precio de venta al público es $1'40 \cdot 300 = 420$ €. A ese precio venderá 50 unidades.

Si llamamos x al nº de rebajas en el precio,

Por cada 3 € de rebaja, el precio queda: $420 - 3x$,

El número de ventas aumenta en 5 unidades (por cada reducción de precio) : $50 + 5x$

Como hay que maximizar beneficios, la función será Beneficios = (precio) • (número de ventas)

$$B(x) = (420 - 3x) \cdot (50 + 5x) = -15x^2 + 1950x + 21\,000$$

Es una función cuadrática, parábola de puntas hacia abajo. Por lo que en su vértice se encuentra el máximo:

Máximo: $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-1950}{-30} = 65$.

Entonces el precio de cada unidad es: $420 - 3x = 420 - 3 \cdot 65 = 225$ €.

Y el número de unidades que debe pedir (nº de ventas) es: $50 + 5x = 50 + 5 \cdot 65 = 375$.

$\boxed{\text{SEP09, P3.1}}$: Se consideran las funciones reales $f(x) = 2x^2 + 12x - 6$ y $g(x) = (x-2)(x^2+9)$. Se pide obtener razonadamente:

1. **a**. Las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (1,6 puntos).

b. La función $H(x) = \displaystyle\int \frac{f(x)}{g(x)}dx$ que cumple $H(3) = \dfrac{\pi}{3}$ (1,7 puntos).

Resolución:

a) Llamemos $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)}$. Asíntotas verticales:

Las asíntotas verticales las buscamos en los puntos que anulan el denominador. Para comprobarlo tenemos que calcular los límites en esos puntos:

$$(x-2)(x^2+9) = 0 \quad \to \begin{cases} x - 2 = 0 & \to x = 2 \\ x^2 + 9 = 0 & \to \text{No tiene solución.} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)} = \left(\frac{26}{0}\right) = \pm\infty \qquad \Rightarrow x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)} = \left(\frac{10}{0}\right) = \pm\infty \qquad \Rightarrow x = -2 \text{ es asíntota vertical.}$$

Para las asíntotas horizontales, calculamos los límites cuando $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)} = 0^+, \text{ porque el grado del denominador es mayor.}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)} = 0^-, \text{ porque el grado del denominador es mayor.}$$

Así $y = 0$, es asíntota horizontal. No existe asíntota oblicua porque para ello el grado del numerador debería ser una unidad más que el grado del denominador.

b) $H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \int \frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)}dx.$ Necesitamos descomponer $\frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)}$:

$$\frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x^2+9} \Rightarrow 2x^2+12x-6 = A(x^2+9)+B(x-2)$$

$$Ax^2+Bx+9A-2B = 2x^2+12x-6 \qquad \Rightarrow A=2,\ B=12,\ 9A-2B=-6,$$

Se cumplen las tres igualdades con $A=2, B=12$

$$\int \frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)}dx = \int \frac{2}{x-2}dx + \int \frac{12}{x^2+9}dx = 2\ln(x-2)+\ldots$$

Calculemos $\int \frac{12}{x^2+9}dx = \int \frac{\frac{12}{9}}{\frac{x^2+9}{9}}dx = \frac{12}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}dx = \frac{12}{9}\cdot 3\int \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}dx =$

$= 4\arctan\left(\frac{x}{3}\right)+C.$ Entonces $H(x) = 2\ln(x-2)+4\arctan\left(\frac{x}{3}\right)+C.$

Calculemos C para que $H(3) = \frac{\pi}{3}$:

$H(3) = 2\ln(3-2)+4\arctan\left(\frac{3}{3}\right)+C = 0+4\frac{\pi}{4}+C = \pi+C = \frac{\pi}{3} \rightarrow C = \frac{\pi}{3}-\pi = \frac{-2\pi}{3}$

Por lo que $H(x) = 4\arctan\left(\frac{x}{3}\right)-\frac{2\pi}{3}$

$\boxed{\text{SEP09, P3.2}}$: Dada la función real $f(x) = \frac{8}{1+x^2}$, se pide calcular razonadamente:

1. **a**. Las derivadas primera y segunda de la función $f(x)$. (0,8 puntos).

b. Los puntos de inflexión de la curva $y = f(x)$. (1 punto).

c. La pendiente máxima de las rectas tangentes a la curva $y = f(x)$ (1,5 puntos).

Resolución

a) Para derivar *f* utilizamos la fórmula de la derivada del cociente:

$$f'(x) = \frac{-8\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-16x}{(1+x^2)^2}.$$

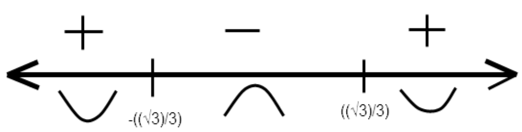
Para calcular $f''(x)$ derivamos f' como derivada del cociente:

$$f''(x) = \frac{-16(1+x^2)^2+16x\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{16(1+x^2)[-(1+x^2)+4x^2]}{(1+x^2)^2} = \frac{16[3x^2-1]}{1+x^2}.$$

b) Para obtener los puntos de inflexión, haremos un estudio de la curvatura. Los puntos donde hay un cambio de curvatura son los puntos de Inflexión. Vamos a estudiar el signo de $f''(x)$:

$$\frac{16[3x^2-1]}{1+x^2} = 0 \qquad \Rightarrow 16[3x^2-1] = 0 \qquad \Rightarrow 3x^2-1 = 0 \qquad \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Estos son posibles puntos de Inflexión. Para comprobarlo, estudiamos la curvatura:



.

Así pues,$x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ y $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ son puntos de inflexión porque presentan cambios de curvatura.

c) La pendiente de la recta tangente a la gráfica en un punto viene determinado por el valor de de la derivada en ese punto. Entonces debemos obtener el valor máximo o resultado máximo de $f'(x)$:

$f'(x) = \frac{-16x}{(1+x^2)^2}$. Para buscar un maximo de esta función debemos derivarla, obtener sus puntos críticos y comprobar que uno de ellos es un máximo por el estudio de la monotonía. Pero la derivada de

$f'(x)$ es $f''(x)$.

$f''(x) = 0 \qquad \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. (Por el apartado b)). Y el estudio del signo del apartado b) implica que $f'(x)$ es creciente en $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$ y decreciente en $\left]-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right[$.

Entonces, necesariamente $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ es un máximo relativo de $f'(x)$. Veamos cuánto vale la pendiente en ese punto:

$$f'\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{-16 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{\left(1 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right)^2} = \frac{\frac{16\sqrt{3}}{3}}{\frac{16}{9}} = 3\sqrt{3}.$$

Sin embargo, dado que $f'(x)$ es creciente, cuando $x \to +\infty$, debemos estudiar su límite.

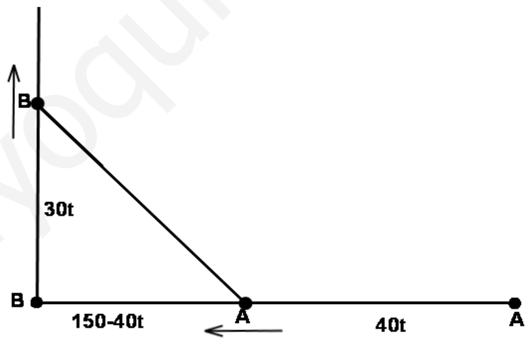
$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-16x}{(1+x^2)^2} = 0$$,porque el grado del denominador es mayor.

Así pues, el valor máximo de $f'(x)$ se alcanza en $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, y la pendiente máxima es de $3\sqrt{3}$.

SEP09, P4.1: A las 7 de la mañana, una lancha A está situada a 150 km al este de otra lancha B. La lancha A navega hacia el oeste a una velocidad constante de 40 km/h y la lancha B se dirige hacia el norte a 30 km/h. Si se mantienen estos rumbos, averiguar razonadamente a qué hora estarán ambas lanchas a distancia mínima. (3,3 puntos).

Resolución:

Si llamamos t al tiempo transcurrido, en horas, desde las 7 de la mañana. Entonces A lleva recorrido $40t$ km y B lleva recorrido $30t$ km.



Según el esquema realizado, la distancia entre A y B es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos $150 - 40t$ y $30t$:

$$d(A,B) = \sqrt{(150-40t)^2 + (30t)^2} = \sqrt{2500t^2 - 12\,000t + 22\,500} = \sqrt{100(25t^2 - 120t + 225)} = 10\sqrt{25t^2 - 120t + 22$$

Busquemos un mínimo de la función $f(t) = 10\sqrt{25t^2 - 120t + 225}$. Derivamos y buscamos los puntos críticos:

$$f'(x) = \frac{10 \cdot (50t - 120)}{2\sqrt{25t^2 - 120t + 225}} = \frac{50 \cdot (5t - 12)}{\sqrt{25t^2 - 120t + 225}} = 0 \qquad \Rightarrow 5t - 12 = 0 \Rightarrow t = \frac{12}{5}.$$

Estudiemos la monotonía para comprobar si $t = \frac{12}{5}$ es un mínimo: Estudio del signo de $f'(x)$:

Entonces $t = \frac{12}{5} = 2{\acute{}}4$ es un mínimo por ser la función decreciente a su izquierda y creciente a su derecha.

Como t está en horas transcurridas desde las 7 de la mañana, $t = 2´4$ significa las 9 horas y 24 minutos.

SEP09, P4.2: Una lámina metálica rectangular se dilata uniformemente por calentamiento, aumentando su base y su altura 0,2 mm por minuto. Averiguar la velocidad de crecimiento de la diagonal de dicha lámina cuando la base y la altura de la lámina miden, respectivamente, 8 y 6 cm. (3,3 puntos).

Resolución:

El valor de la base y la altura de la lámina dependen del tiempo. Asi que llamaremos t al tiempo medido en minutos.

La base será $80 + 0´2t$ mm y la altura será $60 + 0´2t$ mm.

La diagonal de la lámina es, por el teorema de Pitágoras,

$$d(t) = \sqrt{(80+0.2t)^2 + (60+0.2t)^2} = \sqrt{0.08t^2 + 56t + 10000}.$$

La velocidad de crecimiento viene determinada por la derivada:

$$d'(t) = \frac{0.16t + 56}{2\sqrt{0.08t^2 + 56t + 10000}} = \frac{0.08t + 28}{\sqrt{0.08t^2 + 56t + 10000}}$$

Se nos pide la velocidad cuando la base mide 8 cm y la altura 6 cm, que se corresponde con $t = 0$

$$d'(0) = \frac{28}{\sqrt{10000}} = 0.28 \text{ mm/min}$$

JUN10, PA3: Se quiere construir un estadio vallado de 10000 metros cuadrados de superficie. El estadio está formado por un rectángulo de base x y dos semicírculos exteriores de diámetro x, de manera que cada lado horizontal del rectángulo es diámetro de uno de los semicírculos. El precio de un metro de valla para los lados verticales del rectángulo es de 1 euro y el precio de un metro de valla para las semicircunferencias es de 2 euros. Se pide obtener razonadamente:

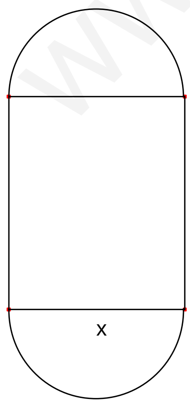
a) La longitud del perímetro del campo en función de x. (3 puntos).

b) El coste $f(x)$ de la valla en función de x. (3 puntos).

c) El valor de x para el que el coste de la valla es mínimo. (4 puntos).

Resolución:

a) El estadio descrito es



Llamando "y" a la altura del rectángulo, el perímetro será 2 veces la altura más 2 veces el perímetro de media circunferencia (que es el perímetro de una circunferencia completa, radio = x/2). Así, $P = 2y + 2\pi \cdot \frac{x}{2}$.

Esta expresión depende de x pero también de y.

Para poder expresar el perímetro con una sóla incógnita, debemos utilizar el dato de la superficie del estadio.

Sabemos que la superficie del estadio es de 10 000 m. Esta superficie del estadio es la del rectángulo más las 2 semicircunferencias (que suman una circunferencia). Así:

$$S_{Total} = S_{REC} + S_{CIR} = xy + \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 10000 \Rightarrow y = \frac{10000 - \pi \cdot \frac{x^2}{4}}{x} = \frac{40\,000 - \pi x^2}{4x}.$$

Sustituimos en la expresión del perímetro:

$$P = 2 \cdot \frac{40\,000 - \pi x^2}{4x} + 2\pi \cdot \frac{x}{2} = \frac{40\,000 - \pi x^2}{2x} + \pi x = \frac{20000}{x} - \frac{\pi x}{2} + \pi x = \frac{20000}{x} + \frac{\pi x}{2}$$

b) Precio de la valla = 1• tramos verticales + 2 • tramos circulares. $P = 1 \cdot 2y + 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{x}{2}$

$$f(x) = 2 \cdot \frac{40\,000 - \pi x^2}{4x} + 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{x}{2} = \frac{20000}{x} - \frac{\pi x}{2} + 2\pi x = \frac{20000}{x} + \frac{3\pi x}{2}$$

c) Hay que buscar un mínimo para la función $f(x)$ anterior. Derivamos e igualamos a 0 la derivada para buscar puntos singulares o críticos:

$$f'(x) = -\frac{20000}{x^2} + \frac{3\pi}{2} = 0 \Rightarrow \frac{20000}{x^2} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 40000 = 3\pi x^2$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{40000}{3\pi}}. \Rightarrow x = \frac{200}{\sqrt{3\pi}} \quad (\approx 65.147)$$

Para comprobar que es un mínimo, calculamos la segunda derivada y sustituimos el punto crítico en él.

$f''(x) = \dfrac{40\,000}{x^3} \Rightarrow f''\left(\dfrac{200}{\sqrt{3\pi}}\right) > 0 \Rightarrow x = \dfrac{200}{\sqrt{3\pi}}$ es un mínimo de la función.

Por lo que es el valor de x que minimiza el coste de la valla.

JUN10, PB3: Dada la función polinómica $f(x) = 4 - x^2$, se pide obtener razonadamente:

a) La gráfica de la curva $y = 4 - x^2$. (2 puntos).
b) El punto P de esa curva cuya tangente es perpendicular a la recta de ecuación $x + y = 0$. (3 puntos).
c) Las rectas que pasan por el punto $(-2, 1)$ y son tangentes a la curva $y = 4 - x^2$, obteniendo los puntos de tangencia. (5 puntos).

Resolución:

a) Se trata de una parábola de puntas hacia abajo, porque su coeficiente principal $a = -1 < 0$.

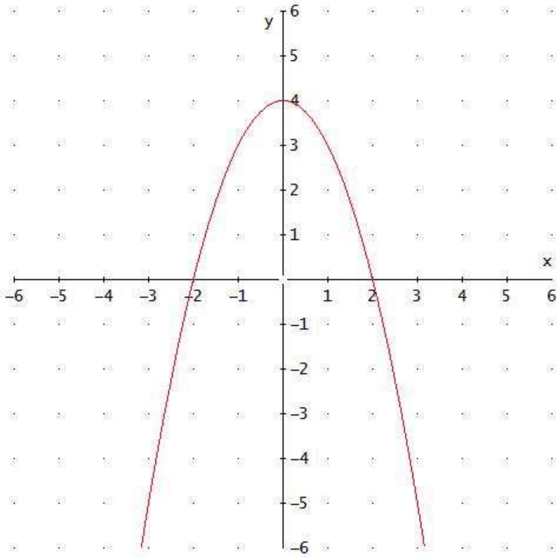
El vértice $\left(x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{-2} = 0\right)$ será el máximo porque es parábola de puntas hacia abajo.

Podemos comprobarlo estudiando puntos críticos:

$f'(x) = -2x = 0 \Rightarrow x = 0.$ Este punto crítico ha de ser un máximo porque $f''(x) = -2 < 0.$

Ahora completamos una tabla de valores y dibujamos la gráfica.

x	y
–3	–5
–2	0
–1	3
0	4
1	3
2	0
3	–5



b) Buscamos una perpendicular a la recta $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$ (pendiente -1)

La recta que buscamos tendrá pendiente $m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-1} = 1$

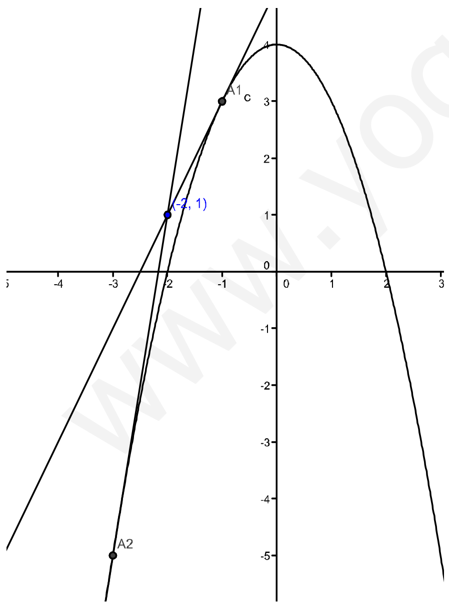
Así, buscamos un punto de la gráfica de $y = 4 - x^2$ cuya pendiente valga 1.

Recordemos que la derivada en un punto indica la pendiente de la recta tangente a la gráfica en ese punto.

$$y' = -2x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

El punto de la gráfica será $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = 4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{4} \Rightarrow$ Punto $P = \left(-\frac{1}{2}, \frac{15}{4}\right)$

c) Buscamos rectas que pasan por $(-2, 1)$ y son tangentes a $y = 4 - x^2$.



Esto quiere decir (ver dibujo), que cortan a la parábola $y = 4 - x^2$ en un único punto, y su pendiente ha de coincidir con la derivada de la función en ese punto.

Sea $A = (a, 4 - a^2)$ un punto cualquiera de la gráfica. La pendiente de la recta tangente es $f'(a) = -2a$.

Por otro lado, como la recta pasa por los puntos $(-2, 1)$ y $(a, 4 - a^2)$, la pendiente de la recta es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - a^2 - 1}{a + 2} = \frac{3 - a^2}{a + 2}$$

Así, igualamos los dos valores de la tangente y obtenemos el valor de "a":

$$\frac{3-a^2}{a+2} = -2a \Rightarrow -2a^2 - 4a = 3 - a^2 \Rightarrow a^2 + 4a + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = -3 \end{cases}$$

Por lo tanto, los puntos de tangencia son $A_1 = (-1,3)$ y $A_2 = (-3,-5)$ y las rectas tangentes respectivas:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow \begin{cases} y - 3 = 2(x+1) \Rightarrow y = 2x + 5 \\ y + 5 = 6(x+3) \Rightarrow y = 6x + 13 \end{cases}$$

$\boxed{\text{SEP10, PA3}}$: Dadas las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 2x^2 - x$, se pide:

a) Obtener razonadamente los puntos de intersección A y B de las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$. (3 puntos).
b) Demostrar que $f(x) \geq g(x)$ cuando $x \geq 0$. (3 puntos).
c) Calcular razonadamente el área de la superficie limitada por las dos curvas entre los puntos A y B . (4 puntos).

Resolución:

a) Tenemos que igualar sus expresiones y resolver la ecuación:

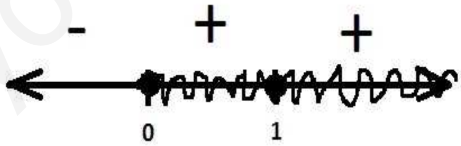
$$x^3 = 2x^2 - x \Rightarrow x^3 - 2x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \text{ (doble)} \end{cases}$$

Para obtener la coordenada "y", basta con sustituir en cualquiera de las dos fórmulas (daría lo mismo)

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0^3 = 0 \rightarrow A = (0,0) \\ x = 1 \rightarrow y = 1^3 = 1 \rightarrow B = (1,1) \end{cases}$$

b) Demostraremos que $f(x) - g(x) \geq 0$, para $x \geq 0$, haciendo un estudio del signo:

$$f(x) - g(x) = x^3 - 2x^2 + x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \text{ (doble)} \end{cases}$$



Por lo que la solución de la inecuación $f(x) - g(x) \geq 0$ es $[0, +\infty[$ y queda demostrado.

c) Sabemos por el apartado anterior que $f(x) - g(x) \geq 0$ entre los puntos A y B, que es el intervalo $[0,1]$. Entonces el área pedida es:

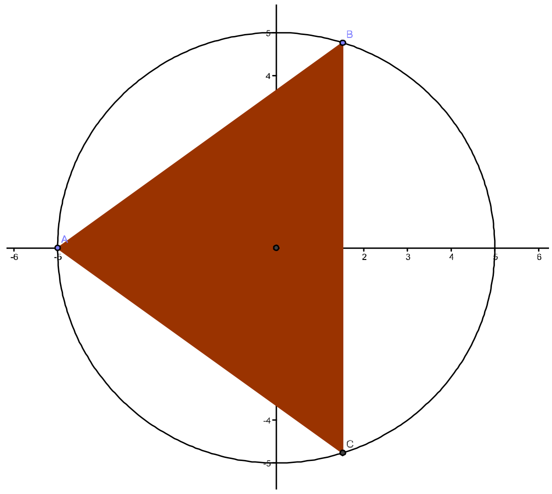
$$\int_0^1 (f(x) - g(x))dx = \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{12}\ u^2$$

$\boxed{\text{SEP10, PB3}}$: Dos elementos de un escudo son una circunferencia y un triángulo. La circunferencia tiene centro $(0,0)$ y radio 5. Uno de los vértices del triángulo es el punto $A = (-5,0)$. Los otros dos vértices del triángulo son los puntos de la circunferencia $B = (x,y)$ y $C = (x,-y)$. Se pide obtener razonadamente:

a) El área del triángulo en función de x. (3 puntos).
b) Los vértices B y C para los que es máxima el área del triángulo. (5 puntos).
c) El valor máximo del área del triángulo. (2 puntos).

Resolución:

a) Representamos los datos:



El área del triángulo es $\frac{base \cdot altura}{2}$. Lo más sencillo es tomar el lado $\overline{BC}$ como base (longitud $2y$).

La altura es la longitud del segmento que va desde el punto A hasta el punto $(x, 0)$, que valdrá $x + 5$.

Así, $A = \frac{2y \cdot (x+5)}{2}$. Falta sustituir la incógnita "y" para que la expresión sólo dependa de "x".

Utilizaremos que (x, y) cumple la ecuación de la circunferencia, que es:

$x^2 + y^2 = 5^2 \Rightarrow y = \sqrt{25 - x^2}$. Entonces la expresión del área queda:

$$A(x) = \sqrt{25 - x^2} \cdot (x+5)$$

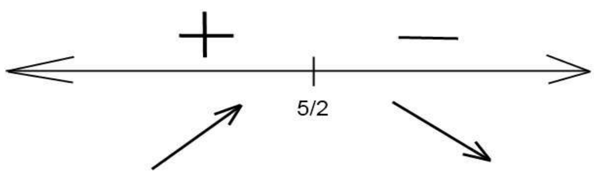
b) Busquemos el valor de "x" que maximiza el área. Para ello derivamos $A(x)$ y buscamos lo puntos críticos.

$$A'(x) = \frac{-2x(x+5)}{2\sqrt{25-x^2}} + \sqrt{25-x^2} \cdot 1 = \sqrt{25-x^2} - \frac{x(x+5)}{\sqrt{25-x^2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{25-x^2} = \frac{x(x+5)}{\sqrt{25-x^2}} \Rightarrow 25 - x^2 = x^2 + 5x \Rightarrow 2x^2 + 5x - 25 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = -5 \end{cases}$$

Para saber si los puntos críticos son máximos, mínimos o puntos de inflexión, podemos realizar un estudio del signo de la primera derivada (estudio de las monotonía) o aplicar el criterio de la segunda derivada. Es más fácil en este caso analizar el signo de la primera derivada.

Basta con estudiar el signo a la izquierda y derecha del valor $x = \frac{5}{2}$, ya que el valor $x = -5$ no daría lugar a un triángulo en el planteamiento inicial.



Por lo que la función es creciente a la izquierda de $x = \frac{5}{2}$, y decreciente a su derecha, así que $x = \frac{5}{2}$ es un máximo.

El valor de "y" será:

$$x = \frac{5}{2} \Rightarrow y = \sqrt{25 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

Así, los puntos $B = \left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$ y $C = \left(\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$ son los puntos buscados.

c) El valor del área del triángulo para este caso se calcula sustituyendo $x = \frac{5}{2}$ en la fórmula del área $A(x)$:

$$A\left(\frac{5}{2}\right) = \sqrt{25 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} \cdot \left(\frac{5}{2} + 5\right) = \frac{75}{4}\sqrt{3}.$$

$\boxed{\text{JUN11, PA3}}$: Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$. Obtener razonadamente:

a) El dominio y las asíntotas de la función $f(x)$. (3 puntos).

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$. (4 puntos).

c) La integral $\int f(x)dx = \int \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}dx$ (3 puntos).

Resolución:

a) Para calcular el dominio, obtendremos los valores que anulan el denominador para quitarlos del dominio:

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$. Luego el dominio es $\mathbb{R} - \{1, 2\}$.

Asíntotas verticales: Se buscan en los puntos que anulan el denominador: $x = 1, x = 2$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \left(\frac{1}{0}\right) = \pm\infty. \qquad \lim_{x \to 2} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \left(\frac{2}{0}\right) = \pm\infty.$$

Como los resultados de los límites son infinitos (para ser más precisos habría que calcular los límites laterales pero no es necesario aquí) entonces podemos concluir que hay **asíntota vertical** en $\boxed{x = 1}$ y en $\boxed{x = 2}$.

Asíntotas horizontales: Hay que resolver $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = 0^- \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = 0^+.$$

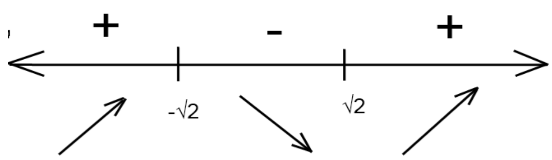
Por lo que existe **asíntota horizontal** en $\boxed{y = 0}$. Como hay asíntota horizontal, no hay asíntota oblicua.

b) Para estudiar la monotonía estudiamos el signo de la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 3x + 2 - x(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 2)^2} = \frac{-x^2 + 2}{(x^2 - 3x + 2)^2}.$$

Estudiamos el signo del numerador (el denominador es siempre positivo)

$-x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow$



Por lo que $f(x)$ es creciente en $]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$, $f(x)$ es decreciente en $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$

c) $\int f(x)dx = \int \frac{x}{x^2-3x+2}dx.$

Para resolver esta integral tenemos que descomponer en fracciones simples:

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \Rightarrow x = A(x-2)+B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ -2A-B=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \end{cases}. \text{ Luego } \frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2}$$

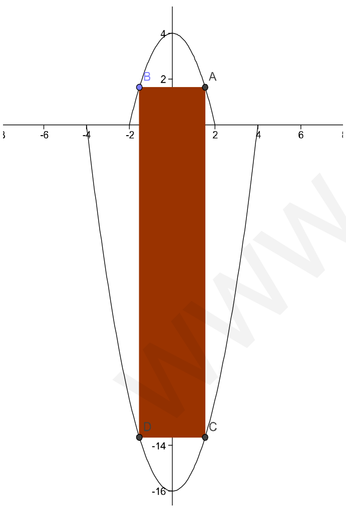
$$\int \frac{x}{x^2-3x+2}dx = \int \frac{-1}{x-1}dx + \int \frac{2}{x-2}dx = -\ln(x-1) + 2\ln(x-2) + C$$

siendo C la constante de integración.

$\boxed{\text{JUN11, PB3}}$: Se desea construir un campo rectangular con vértices A, B, C y D de manera que:
Los vértices A y B sean puntos del arco de la parábola $y = 4 - x^2$, $-2 \le x \le 2$, y el segmento de extremos A y B es horizontal.
Los vértices C y D sean puntos del arco de la parábola $y = x^2 - 16$, $-4 \le x \le 4$, y el segmento de extremos C y D es también horizontal.
Los puntos A y C deben tener la misma abscisa, cuyo valor es el número real positivo x.
Los puntos B y D deben tener la misma abscisa, cuyo valor es el número real negativo $-x$.
Se pide obtener razonadamente:
a) La expresión $S(x)$ del área del campo rectangular en función del número real positivo x . (4 puntos).
b) El número real positivo x para el que el área $S(x)$ es máxima. (4 puntos).
c) El valor del área máxima. (2 puntos).

Resolución:

a) Construimos un dibujo representativo:



$A(x, 4-x^2); C = (x, x^2-16)$
Entonces la base del rectángulo mide $2x$
y la altura
$4 - x^2 + (-1)\cdot(x^2-16) = 20 - 2x^2$
ya que la 2ª coordenada de C es negativa.
Así,
$S(x) = 2x\cdot(20-2x^2) = -4x^3 + 40x$
definida para $x \in [0,2]$.

b) Hay que maximizar $S(x)$. Derivamos y buscamos los puntos críticos:

$S'(x) = -12x^2 + 40 = 0 \Rightarrow x = +\sqrt{\frac{10}{3}}$ (despreciamos la solución negativa).

$S''(x) = -24x \rightarrow S''\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right) < 0 \Rightarrow x = +\sqrt{\frac{10}{3}}$ es un máximo relativo.

Como es el único extremo relativo en [0,2], entonces $x = +\sqrt{\frac{10}{3}}$ es el máximo buscado.

c) El valor del área máxima es $S\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right) = -4\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right)^3 + 40\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right) \approx 48.686$