

JUN05, P1A Calcular los valores $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$ que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} 2AX - 3AY = B \\ AX - AY = C \end{cases}, \text{ donde}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN:

Reduciendo el sistema por reducción se obtiene:

$$\begin{array}{l} 2AX - 3AY = B \\ AX - AY = C \end{array} \rightarrow \cdot(-2) \rightarrow \begin{array}{l} 2AX - 3AY = B \\ -2AX + 2AY = -2C \end{array} \Rightarrow AY = 2C - B \Rightarrow Y = A^{-1}(2C - B)$$

$$\frac{-AY = B - 2C}{-AY = B - 2C}$$

$$\begin{array}{l} 2AX - 3AY = B \\ AX - AY = C \end{array} \rightarrow \cdot(-3) \rightarrow \begin{array}{l} 2AX - 3AY = B \\ -3AX + 3AY = -3C \end{array} \Rightarrow AX = 3C - B \Rightarrow X = A^{-1}(3C - B)$$

$$\frac{-AX = B - 3C}{-AX = B - 3C}$$

Por lo que necesitamos calcular A^{-1} :

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{l} 2 \cdot F2 + F1 \\ F2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{l} 5 \cdot F2 + F1 \\ F1 \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{l} \frac{1}{2}F1 \\ F1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Así:

$$X = A^{-1}(3C - B) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left[3 \begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -33 & -90 \\ 19 & 53 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}.$$

$$Y = A^{-1}(2C - B) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left[2 \begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -16 & -60 \\ 9 & 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

JUN05, P1B: El sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + \alpha y + \alpha^2 z = 1 \\ x + \alpha y + \alpha z = \alpha \\ x + \alpha^2 y + \alpha^2 z = \alpha^2 \end{cases}$$

depende del parámetro α . Discutir para qué valores de α es incompatible, compatible determinado y

compatible indeterminado, y resolverlo en los casos compatibles.

RESOLUCIÓN:

Vamos a aplicar el teorema de Rouché-Frobenius:

Calculamos $\text{rg}(A)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{vmatrix} = \alpha^4 - 2\alpha^3 + \alpha^2 = \alpha^2(\alpha^2 - 2\alpha + 1).$$

$$\text{Resolvemos } |A| = 0 \rightarrow \alpha^2(\alpha^2 - 2\alpha + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha^2 = 0 \rightarrow \alpha = 0 \text{ (doble)} \\ \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \rightarrow \alpha = 1 \text{ (doble)} \end{cases}$$

Por tanto, cuando $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$, $\rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(A^*) = n^\circ \text{ incóg.} \rightarrow \text{SCD}$.

$$\text{Si } \alpha = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rg}(A) = 1 \neq \text{rg}(A^*) = 2 \rightarrow \text{SI}$$

$$\text{Si } \alpha = 1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rg}(A) = 1 = \text{rg}(A^*) = 1 \rightarrow \text{SCI, con 2}$$

grados de libertad ya que $n^\circ \text{ incógnitas} = 3$ ($n^\circ \text{ incóg} - \text{rg}(A) = 2$)

Ahora vamos a resolver el sistema en los casos compatibles.

Caso SCD ($\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$). Por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & \alpha^2 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & \alpha^2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha - \alpha^2 & \alpha - 1 \\ 0 & \alpha^2 - \alpha & 0 & \alpha^2 - 1 \end{array} \right)$$

$$\text{Así, de las dos últimas ecuaciones obtenemos } z = \frac{\alpha - 1}{\alpha - \alpha^2} = \frac{1}{\alpha}, y = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 - \alpha} = \frac{\alpha + 1}{\alpha}.$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$x + \alpha \frac{\alpha + 1}{\alpha} + \alpha^2 \frac{1}{\alpha} = 1 \rightarrow x + \alpha + 1 + \alpha = 1 \rightarrow x = -2\alpha.$$

$$\text{Solución: } \left(-2\alpha, \frac{\alpha + 1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$$

Caso SCI ($\alpha = 1$). Las dos últimas ecuaciones quedan todo ceros. ($y = t, z = u$)

$$x + y + z = 1 \rightarrow x + t + u = 1 \rightarrow x = 1 - t - u$$

$$\text{Solución: } \{(1 - t - u, t, u) : t, u \in \mathbb{R}\}$$

SEP05, P1A: Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

calcular razonadamente la matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que verifica la ecuación $(AB' + C)X = (A'D)E$, donde M' significa la matriz transpuesta de la matriz M .

RESOLUCIÓN:

Calculemos $(AB' + C) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 4 & -4 \\ 21 & 6 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Y ahora calculemos $(A'D)E = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}.$

Tenemos que resolver $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}$. Así

$$X = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Calculamos $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{pmatrix}^{-1}$ por la regla de los determinantes $\left(M^{-1} = \frac{1}{|M|} [Adj(M)]^t \right)$:

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{60}{7} \\ 10 \\ -30 \end{pmatrix}$$

SEP05, P1B: En el mercado podemos encontrar tres alimentos preparados para gatos que se fabrican

poniendo, por kilo, las siguientes cantidades de carne, pescado y verdura:

- Alimento Migado: 600 g de carne, 300 de pescado y 100 g de verdura.
- Alimento Catomeal: 300 g de carne, 400 g de pescado y 300 g de verdura.
- Alimento Comecat; 200 g de carne, 600 g de pescado y 200 g de verdura.

Si queremos ofrecer a nuestro gato 470 g de carne, 370 g de pescado y 160 g de verdura por kilo de alimento, ¿qué porcentaje de cada uno de los compuestos anteriores hemos de mezclar para obtener la

proporción deseada?

RESOLUCIÓN:

Sean x, y, z , los porcentajes (en tanto por uno) de cada uno de los compuestos alimenticios (Migado, Catomeal y Comecat respectivamente) que utilizaremos en la mezcla.

La cantidad de carne obtenida será:

(Porcentaje de Migado) \cdot 600 g + (Porcentaje de Catomeal) \cdot 300 g + (Porcentaje de Comecat) \cdot 200 g.

Dicha cantidad de carne habrá de ser igual a 470 g.

Es decir: $600x + 300y + 200z = 470$.

De forma análoga obtenemos las otras 2 ecuaciones, y el sistema queda:

$$\begin{cases} 600x + 300y + 200z = 470 \\ 300x + 400y + 600z = 370 \\ 100x + 300y + 200z = 160 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x + 3y + 2z = 4.7 \\ 3x + 4y + 6z = 3.7 \\ 1x + 3y + 2z = 1.6 \end{cases}$$

Este sistema, resuelto por Gauss o por Cramer, tiene por solución $x = 0,62$, $y = 0,22$, $z = 0,16$.

Por lo que los porcentajes que se deben utilizar son: 62 % del alimento Migado, 22% del alimento Catomeal y 16% del alimento Comecat.

JUN06, P1A: Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y - 3z = \alpha \\ 2x + 6y - 11z = 2 \\ x - 2y + 7z = 1 \end{cases}$ se pide:

- Determinar el valor de α para que el sistema sea compatible.
- Para este valor α , calcular el conjunto de soluciones del sistema.
- Explicar la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las tres ecuaciones del sistema, en función de los valores de α .

RESOLUCIÓN:

Vamos a aplicar el teorema de Rouché-Frobenius.

$$\text{rg}(A): |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0. \quad \alpha_{3,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \rightarrow \text{rg}(A) = 2$$

$$\text{rg}(A^*) \text{ (Por Gauss): } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 2 & 6 & -11 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 0 & 2 & -5 & 2-2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 5-5\alpha \end{pmatrix}.$$

Así, si $5 - 5\alpha = 0$ ($\alpha = 1$) $\rightarrow \text{rg}(A^*) = 2$

Y por tanto, si $\alpha = 1$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3 = n^\circ$ incóg. \rightarrow *SCI*.

Si $\alpha \neq 1$, $\text{rg}(A^*) = 3 \neq \text{rg}(A) = 2 \rightarrow$ *SI*.

b) Tomando $\alpha = 1$, el sistema queda así: $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + 6y - 11z = 2 \\ x - 2y + 7z = 1 \end{cases}$

Lo resolvemos por Gauss (las transformaciones de Gauss ya están hechas en **a**):

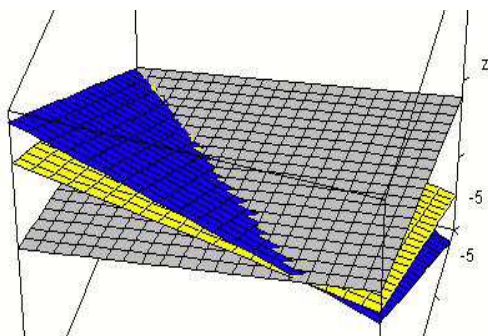
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 6 & -11 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \text{Tomando } z = t \rightarrow (2^{\text{a}} \text{ ec}) \quad 2y - 5t = 0 \quad \rightarrow \quad y = \frac{5t}{2}$$

$$(3^{\text{a}} \text{ ec}) \quad x + 2 \cdot \frac{5t}{2} - 3t = 1 \quad \rightarrow \quad x = 1 - 2t$$

$$\text{Solución: } \left\{ \left(1 - 2t, \frac{5t}{2}, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

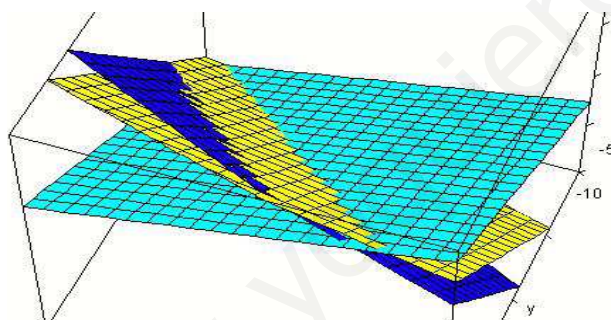
e) Cuando $\alpha = 1$, tenemos SCI, y la solución depende de un parámetro (1 grado de libertad) por lo que los tres planos se cortan en una recta.



Cuando $\alpha \neq 1$ tenemos SI, por lo que no existe ningún punto en común de los tres planos.

Además, no hay 2 filas de la matriz de coeficientes proporcionales, por lo que no hay 2 planos paralelos.

Entonces los planos se cortan 2 a 2 en sendas rectas que luego no tienen ningún punto en común.



JUN06, P1B: Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, y $T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

- Probar que la matriz T , tiene inversa T^{-1} , y calcular dicha matriz inversa.
- Dada la ecuación con matriz incógnita B , $A = T^{-1}BT$, calcular el determinante de B .
- Obtener los elementos de la matriz B .

RESOLUCIÓN:

- Una matriz tiene inversa si y sólo si su determinante es distinto de 0.

$$|T| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1. \rightarrow \exists T^{-1}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{|T|} [\text{Adj}(T)]^t = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^t = -1 \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Despejando B: $TAT^{-1} = B$,

Utilizaremos que el determinante del producto coincide con el producto de los determinantes

($|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$) y que $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$:

$$|B| = |TAT^{-1}| = |T| \cdot |A| \cdot |T^{-1}| = -1 \cdot |A| \cdot \frac{1}{-1} = |A|$$

$$\text{Calculemos pues el determinante de A: } |A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

Entonces $|B| = 2$.

$$\begin{aligned} \text{c) } B = TAT^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =: \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

SEP06, P1A: Dado el sistema de ecuaciones con un parámetro real λ e incógnitas x, y, z :

$$\begin{cases} (\lambda + 2)x - y + z = 0 \\ 3x + (\lambda + 6)y - 3z = 0 \\ 5x + 5y + (\lambda - 2)z = 0 \end{cases}, \text{ se pide:}$$

- Calcular para qué valores de λ el sistema sólo admite la solución $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.
- Para cada valor de λ que hace indeterminado el sistema, obtener todas sus soluciones.
- Explicar la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema cuando $\lambda = -3$.

RESOLUCIÓN:

a) El sistema es homogéneo, luego siempre es compatible (siempre tendrá por solución $(0, 0, 0)$)

Hemos de averiguar cuándo será SCD, y por lo tanto no tendrá más soluciones.

Aplicamos el teorema de Rouché-Frobenius:

$$\text{rg}(A): \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 & 1 \\ 3 & \lambda + 6 & -3 \\ 5 & 5 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda = \lambda(\lambda^2 + 6\lambda + 9)$$

$$\text{Lo igualamos a 0} \rightarrow \lambda(\lambda^2 + 6\lambda + 9) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -3 \text{ (doble)} \end{cases}$$

(Notar que $\text{rg}(A)$ siempre es igual a $\text{rg}(A^*)$ ya que la matriz A se amplía con una columna de ceros.)

Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -3$, $\text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(A^*) = n^\circ$ incógn. \rightarrow SCD : $(0, 0, 0)$ es la única solución.

Si $\lambda = 0$ o $\lambda = -3$, entonces $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) < 3 = n^\circ$ incóg \rightarrow SCI, infinitas soluciones.

b) Resolvemos el sistema para $\lambda = 0$:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3x + 6y - 3z = 0 \\ 5x + 5y - 2z = 0 \end{cases}$$

Tenemos que resolverlo por Gauss ya que como $|A| = 0$, no es un sistema de Cramer.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -3 & 0 \\ 5 & 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -9 & 0 \\ 0 & 15 & -9 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tomando } z = t \rightarrow (\text{ec2}) 15y - 9z = 0 \rightarrow y = \frac{9t}{15} = \frac{3t}{5} \rightarrow (\text{ec1}) 2x - y + z = 0$$

$$2x - \frac{3t}{5} + t = 0 \rightarrow 10x - 3t + 5t = 0 \rightarrow 5x + t = 0 \rightarrow x = \frac{-t}{5}$$

$$\rightarrow \text{Solución: } \left\{ \left(\frac{-t}{5}, \frac{3t}{5}, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Resolvemos ahora el sistema para $\lambda = -3$:

$$\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 3x + 3y - 3z = 0 \\ 5x + 5y - 5z = 0 \end{cases}, \text{ Por Gauss, se eliminan directamente (ec2) y (ec3)}$$

$-x - y + z = 0$, el sistema tiene 2 grados de libertad. Tomamos $z = t$, $y = v$:

$$-x - v + t = 0 \rightarrow x = t - v \rightarrow \text{Solución: } \{(t - v, v, t) : v, t \in \mathbb{R}\}$$

c) Cuando $\lambda = -3$, $rg(A) = rg(A^*) = 1$, luego los tres planos son coincidentes.

SEP06, P1B: A es una matriz 3×3 tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Se pide

- Calcular el determinante de la matriz A^3 y la matriz inversa de A^3 .
- Calcular la matriz fila $X = (x, y, z)$ que es solución de la ecuación matricial $XA^3 = BA^2$, donde B es la matriz fila $B = (1, 2, 3)$.
- Calcular la matriz inversa de A.

RESOLUCIÓN:

$$\mathbf{a)} |A^3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -1. \quad (A^3)^{-1} = \frac{1}{|A^3|} [Adj(A^3)]^t :$$

$$(A^3)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b)} XA^3 = BA^2 \rightarrow X = BA^2(A^3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = :$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A^{-1} = A^2(A^3)^{-1} = (AAA^{-1}A^{-1}A^{-1}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

JUN07, P1.1: Dadas las matrices $B(x) = \begin{pmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ 2x+3 & 3 & 6 \\ 4x+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ y $C(y) = \begin{pmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$:

a) Calcular el determinante de la matriz $3B(x)$ y obtener el valor de x para que dicho determinante valga 162.

b) Demostrar que la matriz $C(y)$ no tiene inversa para ningún valor real de y .

RESOLUCIÓN:

$$\text{a) } |3B(x)| = \begin{vmatrix} 3x+6 & 12 & 18 \\ 6x+9 & 9 & 18 \\ 12x+12 & 6 & 18 \end{vmatrix} = 162x, \text{ por lo que } 162x = 162 \text{ cuando } x = 1$$

b) La matriz $C(y)$ tiene inversa si y sólo si $|C(y)| \neq 0$. Calculemos el determinante de $C(y)$:

$$|C(y)| = \begin{vmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0. \text{ Valga lo que valga "y" el determinante da 0. Por lo tanto, no}$$

existe la inversa de $C(y)$ para ningún valor de y .

JUN07, P1.2: Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + \alpha y + z = 9 \\ 3x + 5y + z = 9 \\ \alpha x + y + z = 9 \end{cases}$. Se pide:

a) Probar que es siempre compatible, obteniendo los valores de α para los que es indeterminado.

b) Resolver el sistema anterior para $\alpha = 7$

RESOLUCIÓN:

a) Si observamos la matriz ampliada, la columna de términos independientes es igual a la tercera columna por 9 ($C_4 = 9 \cdot C_3$), por lo que

$$\rightarrow \text{rg}(A^*) = \text{rg}(A) \quad \text{Por el teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es compatible.}$$

Vamos a estudiar el rango de A según los valores de α :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha^2 - 8\alpha + 7. \text{ Veamos cuándo se anula:}$$

$$\alpha^2 - 8\alpha + 7 = 0 \quad \rightarrow \begin{cases} \alpha = 7 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Entonces si $\alpha \neq 7$ y $\alpha \neq 1 \rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 = n^\circ$ de incógn. \rightarrow SCD

Si $\alpha = 7$, o $\alpha = 1$ entonces $rg(A) = rg(A^*) = 2$ (ya que el menor $\alpha_{11} = 4 \neq 0$) $< n^\circ$ incóg.
 \rightarrow SCI.

b) Como sabemos que es SCI, hemos de resolverlo por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \\ 7 & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 9 \\ 0 & -16 & -2 & -18 \\ 0 & -48 & -6 & -54 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 9 \\ 0 & 8 & 1 & 9 \\ 0 & 8 & 1 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 9 \\ 0 & 8 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2^\circ \text{ec}) \text{ Tomamos } z = t \quad \rightarrow 8y + t = 9 \quad \rightarrow y = \frac{9-t}{8}$$

$$(1^\circ \text{ec}) x + 7 \cdot \frac{9-t}{8} + t = 9 \quad \rightarrow 8x + 63 - 7t + 8t = 72 \quad \rightarrow x = \frac{9-t}{8}$$

$$\text{Solución: } \left\{ \left(\frac{9-t}{8}, \frac{9-t}{8}, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

SEP07, P1.1: Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 6x + 3y + 2z = 5 \\ 3x + 4y + 6z = 3 \\ x + 3y + 2z = \alpha \end{cases}$ se pide:

- Justificar que para cualquier valor del parámetro real α , el sistema tiene solución única.
- Hallar la solución del sistema en función del parámetro α .
- Determinar el valor de α para que la solución (x, y, z) del sistema satisface $x + y + z = 1$.

RESOLUCIÓN:

$$\text{a) } |A| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -50. \text{ Entonces } rg(A) = rg(A^*) = n^\circ \text{ incóg} = 3.$$

\rightarrow Por el teorema de Rouché-Frobeniüs, es un sistema compatible determinado, es decir, tiene una única solución.

b) Podemos resolver el sistema por Cramer, ya que $|A| \neq 0$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ \alpha & 3 & 2 \end{vmatrix}}{-50} =: \frac{10\alpha - 50}{-50} = \frac{5 - \alpha}{5}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & \alpha & 2 \end{vmatrix}}{-50} = \frac{30 - 30\alpha}{-50} = \frac{3\alpha - 3}{5}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & \alpha \end{vmatrix}}{-50} =: \frac{15\alpha - 20}{-50} = \frac{4 - 3\alpha}{10}; \text{ Así la solución es } \left(\frac{5 - \alpha}{5}, \frac{3\alpha - 3}{5}, \frac{4 - 3\alpha}{10} \right) : \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\text{c) } x + y + z = 1 \quad \rightarrow \frac{5 - \alpha}{5} + \frac{3\alpha - 3}{5} + \frac{4 - 3\alpha}{10} = 1 \quad \rightarrow 10 - 2\alpha + 6\alpha - 6 + 4 - 3\alpha = 10$$

$$\rightarrow \alpha = 2.$$

SEP07, P1.2: Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ se pide:

a) Obtener razonadamente todos los valores de α para los que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es la única solución de la ecuación matricial $AX = \alpha X$

b) Resolver la ecuación matricial $AX = 2X$

RESOLUCIÓN:

a) $AX = \alpha X \rightarrow (A - \alpha I)X = 0. \rightarrow X = 0$ es solución de la ecuación dada. Para que sea la única habrá de cumplirse que el sistema sea compatible determinado.

Por el teorema de Rouché-Frobénius, esto se cumple cuando $rg(A - \alpha I) = 2$.

$$|A - \alpha I| = \begin{vmatrix} 6 - \alpha & 4 \\ -1 & 1 - \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 7\alpha + 10 = 0, \rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha = 5 \end{cases}$$

Entonces, cuando $\alpha \neq 2$ y $\alpha \neq 5$, $rg(A - \alpha I) = 2$ y el sistema tiene a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ como solución única.

b) $AX = 2X \rightarrow (A - 2I)X = 0$. Como el determinante de la matriz de coeficientes vale 0 (por el apartado (a)), no es un sistema de Cramer y por tanto lo resolveremos por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \rightarrow x + y = 0. \text{ Tomando } y = \lambda$$

Solución $\{(-\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$

JUN08, P1.1: Dado el sistema dependiente del parámetro α : $\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ x + y + \alpha z = 1 \end{cases}$, se pide:

- Determinar, razonadamente, los valores de α para los que el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.
- Resolver el sistema cuando es compatible determinado.
- Obtener, razonadamente, la solución del sistema cuando $\alpha = 0$.

RESOLUCIÓN:

a) Realizamos la discusión del sistema aplicando el teorema de Rouché-Frobenius.

Calculemos el rango de A , matriz de coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 + 2 - \alpha - \alpha - \alpha = \alpha^3 - 3\alpha + 2.$$

$$\alpha^3 - 3\alpha + 2 = 0. \text{ Por Ruffini, } \begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & 1 & & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \\ & 1 & & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & & 0 \end{array} \rightarrow \alpha^3 - 3\alpha + 2 = (\alpha - 1)^2(\alpha + 2) = 0$$

Soluciones $\alpha = 1$ (doble); $\alpha = -2$. Entonces cuando $\alpha = 1$ o $\alpha = -2$, $rg(A) < 3$.

Si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -2 \rightarrow rg(A) = 3 = rg(A^*) = 3 = n^\circ$ incóg. $\Rightarrow S.C.D.$

Si $\alpha = 1 \rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, por lo que el rango de A y A^* es 1, ya que las tres filas son

iguales.

$rg(A^*) = rg(A) = 1 < 3 = n^\circ$ incóg \Rightarrow *SCI* (con 2 grados de libertad, la intersección es un plano)

$$\text{Si } \alpha = -2 \rightarrow a_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2.$$

$$\text{Calculemos el rango de } A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

Entonces, si $\alpha = -2 \Rightarrow rg(A) = 2 \neq rg(A^*) = 3. \Rightarrow S.I.$

b) Vamos a resolver el sistema para $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -2$. Como en estos casos $|A| \neq 0$, es un sistema de Cramer y le podemos aplicar la regla correspondiente:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{(\alpha - 1)^2(\alpha + 2)} = \frac{(\alpha - 1)^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha + 2)} = \frac{1}{(\alpha + 2)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{(\alpha - 1)^2(\alpha + 2)} = \frac{(\alpha - 1)^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha + 2)} = \frac{1}{(\alpha + 2)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{(\alpha - 1)^2(\alpha + 2)} = \frac{(\alpha - 1)^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha + 2)} = \frac{1}{(\alpha + 2)}$$

Así pues la solución única del sistema es $\left(\frac{1}{\alpha + 2}, \frac{1}{\alpha + 2}, \frac{1}{\alpha + 2}\right)$, siendo $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -2$.

Nota: Aunque en la solución aparezca el parámetro α , no se trata de infinitas soluciones, sino que cada valor de α produce un sistema de ecuaciones distinto, que tendrá una única solución.

c) Cuando $\alpha = 0$, se trata de un sistema compatible determinado, ya que $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -2$. La solución de este sistema está calculada en el apartado b) y resulta ser $\left(\frac{1}{\alpha + 2}, \frac{1}{\alpha + 2}, \frac{1}{\alpha + 2}\right)$, que siendo $\alpha = 0$ nos determina la solución $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

JUN08, P1.2: Sean I y A las matrices cuadradas siguientes: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$. Se

pide calcular, escribiendo explícitamente las operaciones necesarias:

a) Las matrices A^2 y A^3 .

b) Los números reales α y β para los que se verifica $(I + A)^3 = \alpha I + \beta A$.

RESOLUCIÓN:

$$\text{a) } A^2 = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -29 \\ 10 & 17 \end{pmatrix}.$$

b) Calculemos $(I + A)^3$:

$$I + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 29 \\ -10 & -16 \end{pmatrix}$$

$$(I + A)^3 = \begin{pmatrix} 18 & 29 \\ -10 & -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 & 29 \\ -10 & -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 & 29 \\ -10 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 58 \\ -20 & -34 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 & 29 \\ -10 & -16 \end{pmatrix}$$

La ecuación queda $\begin{pmatrix} 32 & 58 \\ -20 & -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 17\beta & 29\beta \\ -10\beta & -17\beta \end{pmatrix}$. Igualando los elementos de la

misma posición:

$$\begin{cases} 32 = \alpha + 17\beta \\ 58 = 29\beta \\ -20 = -10\beta \\ -36 = \alpha - 17\beta \end{cases}$$

De la 2ª y 3ª ec: $\beta = 2 \rightarrow$ (ec1) $32 = \alpha + 17 \cdot 2 \rightarrow \alpha = -2$
(ec4) $-36 = \alpha - 17 \cdot 2 \rightarrow \alpha = -2$

Así pues $\alpha = -2$; $\beta = 2$

SEP08, P1.1: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y el vector $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, se pide obtener razonadamente:

a) El vector X tal que $AX = 0X$. (1,1 puntos).

b) Todos los vectores X tales que $AX = 3X$. (1,1 puntos).

c) Todos los vectores X tales que $AX = 2X$. (1,1 puntos).

RESOLUCIÓN:

a) Se pide resolver $AX = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$,

$\rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \rightarrow$ Solución: $x = 0, y = 0$. Por tanto $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Se pide resolver $AX = 3X \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - y = 3x \\ 2x + 4y = 3y \end{cases}$

$$\rightarrow \begin{cases} -2x - y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \rightarrow 2x + y = 0 \text{ (SCI)} \rightarrow \text{Solución: } y = \lambda, x = \frac{-\lambda}{2}. \text{ Por tanto } X = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{2} \\ \lambda \end{pmatrix}$$

c) Se pide resolver $AX = 2X \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - y = 2x \\ 2x + 4y = 2y \end{cases}$

$$\rightarrow \begin{cases} -x - y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \rightarrow x + y = 0 \text{ (SCI)} \rightarrow \text{Solución: } y = \lambda, x = -\lambda. \text{ Por tanto } X = \begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

SEP08, P1.2: Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + y + z = \alpha + 3 \\ 2x - y + z = \alpha + 1 \\ 3x + \alpha y + 2z = 4 \end{cases}$, se pide:

- Probar que es compatible para todo valor de α . (1,3 puntos).
- Obtener razonadamente el valor α para el que el sistema es indeterminado. (1 punto).
- Resolver el sistema cuando $\alpha = 0$, escribiendo los cálculos necesarios para ello. (1 punto).

RESOLUCIÓN:

a) Vamos a calcular $rg(A)$ y $rg(A^*)$. Primero, $rg(A)$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & \alpha & 2 \end{vmatrix} = \alpha.$$

Por tanto, por el teorema de Rouché-Frobenius, si $\alpha \neq 0$, $rg(A) = 3 = rg(A^*) = n^\circ$ incóg. $\rightarrow S.C.D.$

Si $\alpha = 0$, $|A| = 0$, pero $\alpha_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2.$

Estudiamos en este caso ($\alpha = 0$) el $rg(A^*)$: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

($F_3 \rightarrow F_3 + (-1)F_2 + (-1)F_1$), Nota que si sumas las filas 1 y 2, obtienes la fila 3.

Entonces, por el teorema de Rouché-Frobenius, $rg(A^*) = 2 = rg(A) < 3 = n^\circ$ incóg. $\rightarrow S.C.I.$

Resumiendo, si $\alpha \neq 0$, existe una única solución y si $\alpha = 0$, existen infinitas.

b) En el apartado a) hemos obtenido razonadamente que si $\alpha = 0$, por el teorema de Rouché-Frobenius, se trata de un Sistema Compatible Indeterminado.

c) Cuando $\alpha = 0$, resolveremos por el método de Gauss:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} :$$

(ec3): $z = \lambda$, (ec2) $3x + 2\lambda = 4 \rightarrow x = \frac{4 - 2\lambda}{3}$

(ec1) $\frac{4 - 2\lambda}{3} + y + \lambda = 3 \rightarrow 4 - 2\lambda + 3y + 3\lambda = 9 \rightarrow y = \frac{5 - \lambda}{3}.$

Solución: $\left\{ \left(\frac{4 - 2\lambda}{3}, \frac{5 - \lambda}{3}, \lambda \right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

JUN09, P1.1: Dadas las matrices cuadradas

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 18 & 48 & 12 \\ 0 & 18 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ se pide:}$$

- a) Justificar que la matriz A tiene inversa y obtener razonadamente la matriz inversa A^{-1} , incluyendo en la respuesta todos los pasos que llevan a la obtención de A^{-1} . (1,1 puntos).
- b) Calcular, razonadamente, el determinante de la matriz $3A^{-1}$, incluyendo en la respuesta todos los pasos realizados. (1,1 puntos).
- c) Obtener razonadamente los valores reales x, y, z que verifican la ecuación $xI + yA + zA^2 = B$. (1,1 puntos).

Resolución:

a) La matriz A tiene inversa si y sólo si $|A| \neq 0$. Calculamos $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$.

Vamos a obtener A^{-1} por la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{|A|} [\text{Adj}(A)]^t$. Calculamos primero $\text{Adj}(A)$:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 12 & -6 & 9 \end{pmatrix}. \quad \text{Entonces } [\text{Adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 12 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 12 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

b) Utilizando las propiedades de los determinantes $|3A^{-1}| = 3^3|A^{-1}|$, ya que sacamos factor común en cada una de las tres filas (o columnas) de A^{-1} . Y como

$$|AB| = |A| \cdot |B| \quad \Rightarrow \quad 1 = |I| = |A| \cdot |A^{-1}| \quad \Rightarrow \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{9}.$$

$$\Rightarrow |3A^{-1}| = 3^3|A^{-1}| = 27 \cdot 1/9 = 3.$$

c) $xI + yA + zA^2 = B$. Calculemos A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 36 & 12 \\ 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Entonces:}$$

$$xI + yA + zA^2 = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3y & 6y & 0 \\ 0 & 3y & 2y \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9z & 36z & 12z \\ 0 & 9z & 8z \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x + 3y + 9z & 6y + 36z & 12z \\ 0 & x + 3y + 9z & 2y + 8z \\ 0 & 0 & x + y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 48 & 12 \\ 0 & 18 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Con lo que nos han quedado 6 ecuaciones que hemos de resolver:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 3y + 9z = 18 \\ 6y + 36z = 48 \\ 12z = 12 \\ x + 3y + 9z = 18 \\ 2y + 8z = 12 \\ x + y + z = 6 \end{array} \right. \rightarrow \begin{array}{l} \text{Por la (ec3)} \rightarrow z = 1. \text{ Sustituimos en la (ec2)} \rightarrow y = 2 \\ \text{Y sustituyendo en la (ec1)} \rightarrow x = 3. \\ \text{Dado que estos valores de } x, y, z \text{ cumplen el resto de} \\ \text{ecuaciones, son solución de la ecuación matricial.} \\ x = 3; y = 2; z = 1 \end{array}$$

JUN09, P1.2: Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha + 3)x - 4y - 2z = 4 \\ x - 2y - (\alpha + 2)z = 2 \\ 2x + (\alpha - 3)y - 2z = 4 \end{array} \right. , \text{ se pide, razonando las respuestas:}$$

- a) Justificar que para el valor $\alpha = 0$ el sistema es incompatible. (1,1 puntos).
 b) Determinar los valores del parámetro α para los que el sistema es compatible y determinado. (1,1 puntos).
 c) Resolver el sistema para el valor del parámetro para el cual es compatible indeterminado. (1,1 puntos).

Resolución:

a) Para $\alpha = 0$ el sistema queda $\left\{ \begin{array}{l} 3x - 4y - 2z = 4 \\ x - 2y - 2z = 2 \\ 2x - 3y - 2z = 4 \end{array} \right. .$ Calculemos $rg(A)$ y $rg(A^*)$:

$rg(A)$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0. \text{ Como } \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2, \rightarrow rg(A) = 2.$$

$rg(A^*)$:

Tomando las columnas 1,2 y 4: $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \rightarrow rg(A^*) = 3.$

Entonces, por el teorema de Rouché-Frobenius, como $rg(A) \neq rg(A^*)$, el sistema es incompatible.

b) Para estudiar $rg(A)$, obtenemos $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha + 3 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -(\alpha + 2) \\ 2 & \alpha - 3 & -2 \end{vmatrix} = \alpha^3 + 2\alpha^2 + \alpha = \alpha(\alpha^2 + 2\alpha + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = -1 \text{ (doble)} \end{cases}$$

Aplicamos ahora el teorema de Rouché-Frobenius: Cuando α toma estos valores, $rg(A)$ es menor que $3 = n^\circ$ de incógnitas, por lo que el sistema ya no puede ser compatible determinado.

Cuando $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq -1$, $rg(A) = 3 \rightarrow rg(A^*) = 3$, ya que es su rango máximo y tenemos:

$$rg(A) = rg(A^*) = n^\circ \text{ de incóg} = 3, \rightarrow \text{el sistema es compatible determinado.}$$

c) El único caso que queda estudiar es $\alpha = -1$. Veamos si efectivamente es SCI:

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Podemos observar que } F_3 = F_1 = 2F_2, \text{ por lo que el sistema es}$$

equivalente a la ecuación $x - 2y - z = 2$

La resolvemos. Como tengo tres incógnitas, 2 de ellas podrán tomar un valor cualquiera libremente.

Sea $z = \lambda$ y sea $y = \beta$, donde λ y β representan números cualesquiera.

$$x - 2y - z = 2 \quad \rightarrow \quad x - 2\beta - \lambda = 2 \quad \rightarrow \quad x = 2 + 2\beta + \lambda :$$

Solución $\{(2 + 2\beta + \lambda, \beta, \lambda) : \lambda, \beta \in \mathbb{R}\}$

SEP09, P1.1: Dada la matriz $A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha - 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ \alpha & \alpha & -6 \end{pmatrix}$

a) Calcular, en función de α , el determinante de la matriz $A(\alpha)$, escribiendo los cálculos necesarios. (1,3 puntos).

b) Determinar, razonadamente, los números reales α para los que el determinante de la matriz inversa de $A(\alpha)$ es igual a $1/66$. (2 puntos).

Resolución:

$$\text{a) } A(\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha - 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ \alpha & \alpha & -6 \end{vmatrix} = \alpha^2 + 30 \text{ (Falta escribir el desarrollo del determinante)}$$

$$\text{b) Como } |A \cdot B| = |A| \cdot |B| \rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1 \quad \rightarrow \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$\text{Así } |A(\alpha)^{-1}| = \frac{1}{|A(\alpha)|} = \frac{1}{\alpha^2 + 30} = \frac{1}{66}. \text{ Resolvamos esta ecuación con } \alpha :$$

$$\frac{1}{\alpha^2 + 30} = \frac{1}{66} \quad \rightarrow \quad 66 = \alpha^2 + 30 \quad \rightarrow \quad \alpha^2 = 36 \quad \rightarrow \quad \alpha = \pm 6.$$

SEP09, P1.2: Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ 5x + 7y + \alpha z = 0 \end{cases}$, se pide:

a) Deducir, razonadamente, para qué valores de α el sistema sólo admite la solución $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. (1,5 puntos).

b) Resolver, razonadamente, el sistema para el valor de α que lo hace indeterminado. (1,8 puntos).

Resolución:

a) Dado que se trata de un sistema homogéneo, esto sucederá cuando sea Compatible Determinado.

Calculemos $rg(A)$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha - 9. \quad \text{Entonces } |A| = 0 \text{ si y sólo si } \alpha = 9.$$

Si $\alpha \neq 9 \rightarrow rg(A) = rg(A^*) = 3 = n^\circ$ incógnitas. (Al tratarse de un sistema homogéneo $rg(A^*)$ siempre coincide con $rg(A)$).

Por el teorema de Rouché-Frobenius, en el caso $\alpha \neq 9$, es un sistema Compatible Determinado. Como $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, siempre es solución de un sistema homogéneo, ha de ser la única.

b) Queda por estudiar el caso $\alpha = 9$.

Por el apartado anterior, si $\alpha = 9 \rightarrow |A| = 0$.

$$\text{Probando con un menor de orden 2: } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \quad \rightarrow \quad rg(A) = rg(A^*) = 2.$$

Por el teorema de Rouché-Frobenius, es un Sistema Compatible Indeterminado. Lo resolveremos por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 7 & 9 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{l} \text{Eliminamos la fila 3 porque } F_3 = 2F_2 + F_1 \\ \text{Después } F_2 \rightarrow (-2) \cdot F_1 + F_2 \end{array} \right)$$

Dado que nos quedan 2 ecuaciones con 3 incógnitas, tomamos $z = \lambda$, donde λ representa un número real cualquiera.

$$(ec2) \rightarrow y + 2z = 0 \quad \rightarrow y = -2\lambda$$

$$(ec1) \rightarrow x + y + z = 0 \quad \rightarrow x - 2\lambda - \lambda = 0 \quad \rightarrow x = 3\lambda.$$

$$\text{Solución: } \{(3\lambda, -2\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

JUN10, PA1: Dadas las matrices cuadradas $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

se pide:

a) Calcular las matrices $(A - I)^2$ y $A(A - 2I)$. (4 puntos).

b) Justificar razonadamente que:

b.1) Existen las matrices inversas de las matrices A y $A - 2I$. (2 puntos).

b.2) No existe matriz inversa de la matriz $A - I$. (2 puntos).

c) Determinar el valor del parámetro real λ para el que se verifica $A^{-1} = \lambda(A - 2I)$. (2 puntos).

Resolución:

a) Calculemos primero $(A - I)^2$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y ahora calculemos $A(A - 2I)$:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (A - 2I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

b) Existe la inversa de una matriz si y sólo si su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow A \text{ es inversible.}$$

$$|A - 2I| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow A - 2I \text{ es inversible.}$$

$$|A - I| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow A - I \text{ no es inversible.}$$

c) Hemos de resolver el valor de λ en la ecuación $A^{-1} = \lambda(A - 2I)$:

Camino corto: Premultiplicamos por $A \rightarrow AA^{-1} = A\lambda(A - 2I) \Rightarrow I = \lambda A(A - 2I) \Rightarrow$

(A y λ sí que conmutan porque λ es un escalar, no una matriz), $(A(A - 2I) = -I)$

$$I = \lambda(-I) \Rightarrow \lambda = -1$$

Camino largo: Vamos realizando los cálculos que aparecen en la ecuación:

Calcula $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Despejamos λ así:

$$A^{-1}(A - 2I)^{-1} = \lambda(A - 2I)(A - 2I)^{-1} \Rightarrow A^{-1}(A - 2I)^{-1} = \lambda I$$

Ahora habría que calcular $(A - 2I)^{-1}$:

$$(A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot (A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

La ecuación ha quedado así: $-I = \lambda I \Rightarrow \lambda = -1$.

JUN10, PB1: Dado el sistema de ecuaciones lineales que depende de los parámetros a , b y c

$$\begin{cases} 2ax + by + z = 3c \\ 3x - 2by - 2cz = a \\ 5ax - 2y + cz = -4b \end{cases}$$

se pide:

a) Justificar razonadamente que para los valores de los parámetros $a = 0$, $b = -1$ y $c = 2$ el sistema es incompatible. (3 puntos).

b) Determinar razonadamente los valores de los parámetros a , b y c , para los que se verifica que $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ es solución del sistema. (4 puntos).

c) Justificar si la solución $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ del sistema del apartado b) es, o no, única. (3 puntos).

Resolución:

a) Con $a = 0$, $b = -1$ y $c = 2$, el sistema queda así:

$$\begin{cases} -y + z = 6 \\ 3x + 2y - 4z = 0 \\ -2y + 2z = 4 \end{cases} \sim \begin{cases} -y + z = 6 \\ 3x + 2y - 4z = 0 \\ -y + z = 2 \end{cases}$$

Al simplificar la 3ª ecuación, se observa que la 1ª y la 3ª son incompatibles (serían planos paralelos sin ningún punto en común).

b) Sustituimos en el sistema inicial $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ y ahora hemos de obtener los valores de a, b y c :

$$\begin{cases} 2a + 2b + 3 = 3c \\ 3 - 4b - 6c = a \\ 5a - 4 + 3c = -4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 2b - 3c = -3 \\ -a - 4b - 6c = -3 \\ 5a + 4b + 3c = 4 \end{cases}$$

Resolvemos por Cramer: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & -4 & -6 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -78$

$$a = \frac{|A_a|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & -6 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{-78} = \frac{-78}{-78} = 1$$

$$b = \frac{|A_b|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -1 & -3 & -6 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{-78} = \frac{78}{-78} = -1$$

$$c = \frac{|A_c|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & -4 & -3 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}}{-78} = \frac{-78}{-78} = 1$$

Sólo cuando $a = 1$, $b = -1$ y $c = 1$ se cumple que $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ es solución del sistema.

c) En el caso del apartado b) el sistema con incógnitas (x, y, z) es (tomamos $a = 1, b = -1$ y $c = 1$) :

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \\ 5x - 2y + z = 4 \end{cases}$$

Veamos si es o no un sistema de Cramer:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \Rightarrow \text{Entonces el sistema tiene solución única, por el Teorema de}$$

Rouché-Frobenius.

(Ya que $rg(A) = 3 \Rightarrow rg(A^*) = 3 \Rightarrow rg(A) = rg(A^*) = 3 = n^\circ$ incógnitas, siendo A^* la matriz ampliada)

SEP10, PA1: Dado el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} \alpha x + \alpha^3 y + z = 1 \\ \alpha x + \alpha y + z = 1 \\ \alpha^3 x + \alpha y + z = 1 \end{cases} \quad \text{donde } \alpha \text{ es un parámetro real,}$$

se pide:

- Deducir, razonadamente, para qué valores de α es compatible determinado. (4 puntos).
- Deducir, razonadamente, para qué valores de α es compatible indeterminado. (3 puntos).
- Resolver el sistema en todos los casos en que es compatible indeterminado. (3 puntos).

Resolución:

a) Por tratarse de un sistema cuadrado, es compatible determinado si sólo si es un sistema de Cramer, es decir, tiene determinante no nulo.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^3 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ \alpha^3 & \alpha & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1 - F_2} \begin{vmatrix} 0 & \alpha^3 - \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ \alpha^3 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = -\alpha(\alpha^2 - 1)(\alpha - \alpha^3) = \\ &= -\alpha^2(\alpha^2 - 1)(1 - \alpha^2) = -\alpha^2(\alpha + 1)(\alpha - 1)(1 + \alpha)(1 - \alpha) \\ |A| = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \text{ (sol. doble)} \\ \alpha = 1 \text{ (sol. doble)} \\ \alpha = -1 \text{ (sol. doble)} \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo que los valores pedidos de α , son precisamente todos los demás, es decir, el sistema es compatible determinado cuando $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -1$.

b) Es sistema es compatible cuando $rg(A) = rg(A^*)$, siendo A^* la matriz ampliada. Como la 3ª columna de A coincide con la de términos independientes (todo unos), se cumple que el sistema es siempre compatible (una solución válida siempre sería $(0, 0, 1)$). Así pues como en el apartado a) se han dado los valores que corresponden a sistema compatible determinado, los demás -corresponden a sistema compatible indeterminado, que son $\alpha = 0, \alpha = 1$ y $\alpha = -1$

c) Caso $\alpha = 0$. El sistema queda muy simple:

$$\begin{cases} z = 1 \\ z = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{Entonces la solución tiene 2 grados de libertad:}$$

$$\{ (x, y, z) = (\lambda, \beta, 1) : \lambda, \beta \text{ son números reales cualesquiera} \}$$

Caso $\alpha = 1$. El sistema también queda muy simple:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow x + y + z = 1. \text{ La solución también tiene 2 grados de libertad.}$$

$$\{ (x, y, z) = (\lambda, \beta, 1 - \lambda - \beta) : \lambda, \beta \text{ son números reales cualesquiera} \}$$

Caso $\alpha = -1$. Como el anterior:

$$\begin{cases} -x - y + z = 1 \\ -x - y + z = 1 \\ -x - y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow -x - y + z = 1.$$

$$\{ (x, y, z) = (\lambda, \beta, 1 + \lambda + \beta) : \lambda, \beta \text{ son números reales cualesquiera} \}$$

SEP10, PB1: Dadas las matrices $A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ x+2 & 6 & 2 \\ x+3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$, y $B(y) = \begin{pmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ y+2 & 6 & 2 \\ y+3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- Obtener razonadamente el valor de x para que el determinante de la matriz $A(x)$ sea 6. (4 puntos).
- Calcular razonadamente el determinante de la matriz $2A(x)$. (2 puntos).
- Demostrar que la matriz $B(y)$ no tiene matriz inversa para ningún valor real de y . (4 puntos).

Resolución:

$$\text{a) } |A(x)| = \begin{vmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ x+2 & 6 & 2 \\ x+3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x+2 & 2 & 3 \\ x+2 & 3 & 2 \\ x+3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1}}{=} 2 \begin{vmatrix} x+2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2x - 6$$

Este determinante vale 6 cuando $2x - 6 = 6 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6$.

b) Como $|A(x)| = 2x - 6$, entonces $|2A(x)| = 2^3|A(x)| = 8 \cdot (2x - 6) = 16x - 48$

$|2A(x)| = 2^3|A(x)|$ porque por las propiedades de determinantes podemos sacar factor común de los elementos de una línea (fila o columna), así que como tiene dimensión 3, sacamos factor común de 2 tres veces.

c) Una matriz tiene inversa si y sólo si su determinante es distinto de cero. Calculemos el valor $|B(y)|$:

$$|B(y)| = \begin{vmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ y+2 & 6 & 2 \\ y+3 & 8 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1}}{=} \begin{vmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Ya que la 3ª fila es el doble de la segunda (son proporcionales)

JUN11, PA1: Sea el sistema de ecuaciones S :
$$\begin{cases} x + y + z = m \\ 2x + 3z = 2m + 1 \\ x + 3y + (m - 2)z = m - 1 \end{cases}$$

donde m es un parámetro real. Obtener razonadamente:

- Todas las soluciones del sistema S cuando $m = 2$. (4 puntos).
- Todos los valores de m para los que el sistema S tiene una solución única. (2 puntos).

c) El valor de m para el que el sistema S admite la solución $(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ (4 puntos)

Resolución:

a) Si $m = 2$, el sistema queda $S : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3z = 5 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$. Resolvemos por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 \rightarrow (-2)F_1 + F_2 \\ F_3 \rightarrow (-1)F_1 + F_3}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_2 + F_3} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por la 3ª ecuación $0z = 0$, z puede tomar cualquier valor. Tomamos $z = \lambda$. Entonces

$$\text{Ec2: } -2y + \lambda = 1 \rightarrow y = \frac{\lambda - 1}{2}.$$

$$\text{Ec1: } x + \frac{\lambda - 1}{2} + \lambda = 2 \rightarrow x = \frac{5 - 3\lambda}{2}$$

Solución del sistema: $\left\{ \left(\frac{5 - 3\lambda}{2}, \frac{\lambda - 1}{2}, \lambda \right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

b) El sistema tiene solución única cuando (si y sólo si) $|A| \neq 0$, siendo A la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m - 2 \end{vmatrix} = 4 - 2m = 0 \rightarrow m = 2.$$

Entonces el sistema tiene solución única siempre y cuando $m \neq 2$.

c) Buscamos que los valores de las incógnitas $(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ cumplan las tres ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = m \\ 2 \cdot \frac{3}{2} = 2m + 1 \\ \frac{3}{2} - 3 \cdot \frac{1}{2} = m - 1 \end{cases} \text{ . Por la Ec1, } m = 1. \text{ Veamos si cumple la Ec2 y la Ec3:}$$

$$\text{Ec2: } 3 = 2m + 1 \rightarrow m = 1. \quad \text{Ec3: } 0 = m - 1 \rightarrow m = 1.$$

Por lo que cuando $m = 1$, los valores $(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ cumplen las tres ecuaciones.

JUN11, PB1: Se da la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2 - 1 \end{pmatrix}$, donde m es un parámetro real.

a) Obtener razonadamente el rango o característica de la matriz A en función de los valores de m . (5 puntos).

b) Explicar por qué es invertible la matriz A cuando $m = 1$. (2 puntos).

c) Obtener razonadamente la matriz inversa A^{-1} de A cuando $m = 1$, indicando los distintos pasos para la obtención de A^{-1} . Comprobar que los productos $A^{-1}A$ y AA^{-1} dan la matriz unidad. (3 puntos).

Resolución:

a) Para estudiar el rango, comenzamos por el determinante de orden 3:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2 - 1 \end{vmatrix} = -m^3 - m = 0 \rightarrow m(m^2 + 1) = 0 \rightarrow m = 0$$

Así, cuando $m \neq 0$, $rg(A) = 3$

Si $m = 0$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, escogemos el menor $\alpha_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$,

$$\text{con } |\alpha_{22}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2.$$

b) Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de 0. Para cualquier valor $m \neq 0$, tenemos que $|A| \neq 0$, por lo que es invertible en todos esos casos, incluido cuando $m = 1$.

c) Cuando $m = 1$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La matriz inversa de A viene dada por la siguiente fórmula: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)^T$

$$\text{Calculamos } |A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2. \text{ Ahora la matriz adjunta:}$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Su traspuesta: } Adj(A)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Entonces } A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)^T = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos los productos pedidos, AA^{-1} y $A^{-1}A$:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$