UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CURSO 2014-2015

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
b) Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima que le corresponde.
d) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos.
e) Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin su ayuda. Justifique las respuestas.

OPCIÓN A (Septiembre 2015)

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 12 & 8 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$.

a) **(0.5 puntos)** Calcule A^2.
b) **(2 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + 4B = C^t$.

EJERCICIO 2

a) **(1 punto)** Determine el valor de a para que sea continua en $x = -1$ la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax}{x-1} & si \quad x \le -1 \\ x^3 - 3x^2 + 6x - 2 & si \quad x > -1 \end{cases}$$

b) **(1.5 puntos)** Calcule los coeficientes b y c de la función $g(x) = x^3 + bx^2 + cx - 2$ para que $(1, 2)$ sea un punto de inflexión de g.

EJERCICIO 3

Lucía quiere ir de vacaciones a la costa. En su guía de viajes lee que en esa época del año llueve dos días a la semana y que hace viento el 25% de los días que llueve y el 40% de los días que no llueve. Elegido un día de esa época,
a) **(1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que haga viento?
b) **(0.75 puntos)** Si hace viento, ¿cuál es la probabilidad de que esté lloviendo?
c) **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que no llueva y no haga viento?

EJERCICIO 4

a) **(1.5 puntos)** En una muestra aleatoria de 100 botellas de agua mineral se encontró un contenido medio de 48 cl. Sabiendo que la variable "contenido de agua en una botella" sigue una ley Normal con desviación típica 5 cl, determine un intervalo de confianza para la media poblacional, con un nivel de confianza del 95%.
b) **(1 punto)** ¿Qué tamaño muestral mínimo debería considerarse para estimar esta media con el mismo nivel de confianza y un error inferior a 0.5 cl?

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
b) Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima que le corresponde.
d) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos.
e) Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin su ayuda. Justifique las respuestas.

OPCIÓN B (Septiembre 2015)

EJERCICIO 1

Se dispone de 160 m de tejido de pana y 240 m de tejido de lana para hacer trajes y abrigos. Se usa 1 m de pana y 2 m de lana para cada traje, y 2 m de pana y 2 m de lana para cada abrigo. Cada traje se vende a 250€ y cada abrigo a 350€.

a) **(2 puntos)** ¿Cuántos trajes y abrigos se deben confeccionar para obtener el máximo beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

b) **(0.5 puntos)** ¿Pueden hacerse 60 trajes y 50 abrigos con esas cantidades de tejido? En caso afirmativo, ¿obtendría el máximo beneficio al venderlo todo?

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 8$.

a) **(1.7 puntos)** Halle las coordenadas de sus extremos relativos y de su punto de inflexión, si existen.

b) **(0.8 puntos)** Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

EJERCICIO 3

En una urna A hay 8 bolas verdes y 6 rojas. En otra urna B hay 4 bolas verdes, 5 rojas y 1 negra. Se lanza un dado, si sale un número menor que 3 se saca una bola de la urna A, y si sale mayor o igual que 3 se saca una bola de la urna B.

a) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que la bola sea verde si ha salido un 4.

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que la bola elegida sea roja.

c) **(1 punto)** Sabiendo que ha salido una bola verde, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la urna A?

EJERCICIO 4

La concentración de arsénico en los moluscos de una zona costera sigue una ley Normal con desviación típica 6 mg/kg. Para verificar la calidad de estos moluscos se toma una muestra aleatoria de tamaño 36 para contrastar si la media poblacional no supera el límite máximo de 80 mg/kg permitido por la normativa sanitaria ($H_0 : \mu \leq 80$).

a) **(1.5 puntos)** Determine la región crítica de este contraste a un nivel de significación del 5%.

b) **(1 punto)** ¿Debe rechazarse esta hipótesis nula, al nivel del 5%, si en esa muestra de 36 moluscos se encuentra una concentración media de arsénico de 82 mg/kg?

OPCIÓN A
SOLUCIONES

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 12 & 8 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$.

a) **(0.5 puntos)** Calcule A^2.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}$$

b) **(2 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $A{\cdot}X + 4B = C^t$.

$$A{\cdot}X + 4B = C^t \Rightarrow A{\cdot}X + 4B - 4B = C^t - 4B \Rightarrow A{\cdot}X + O = C^t - 4B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A{\cdot}X = C^t - 4B \Rightarrow A^{-1}{\cdot}A{\cdot}X = A^{-1}(C^t - 4B) \Rightarrow X = A^{-1}(C^t - 4B)$$

Como $|A| = 2 + 2 = 4 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$. La calculamos:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A^t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 8 & 12 & -8 \\ -4 & 8 & 4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 4 & -16 \\ 0 & 12 & -4 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -16 & -24 \\ 4 & 16 & -20 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -4 & -6 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 2

a) **(1 punto)** Determine el valor de a para que sea continua en $x = -1$ la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax}{x-1} & si \quad x \le -1 \\ x^3 - 3x^2 + 6x - 2 & si \quad x > -1 \end{cases}$$

Como las funciones elementales son continuas en su dominio, tenemos que:

- $(-\infty, -1)$: La única discontinuidad de la función que coincide con f en este intervalo, $y = \dfrac{ax}{x-1}$, está en $x = 1$ (único punto que no pertenece a su dominio). Pero este punto no está en el intervalo, así que f es continua en todo $(-\infty, -1)$.
- $(-1, +\infty)$: f es continua, por estar definida por una expresión polinómica.

En realidad, lo anterior no se pide en el problema.

- $x = -1$: Vemos las tres condiciones de continuidad.

$$1)\ \exists f(-1) = \frac{-a}{-2} = \frac{a}{2};\quad 2)\ \lim_{x\to -1^-}\frac{ax}{x-1} = \frac{a}{2};\quad \lim_{x\to -1^+}(x^3 - 3x^2 + 6x - 2) = -12$$

Para que sea continua, deben coincidir estos resultados: $\dfrac{a}{2} = -12 \Rightarrow \boxed{a = -24}$.

b) **(1.5 puntos)** Calcule los coeficientes b y c de la función $g(x) = x^3 + bx^2 + cx - 2$ para que $(1, 2)$ sea un punto de inflexión de g.

Como g es polinómica, es ilimitadamente derivable. Por tanto, si exigimos que $g''(1) = 0$ y $g'''(1) \neq 0$, estará garantizado que sea un punto de inflexión:

$$g'(x) = 3x^2 + 2bx + c \Rightarrow g''(x) = 6x + 2b \Rightarrow g'''(x) = 6$$

Ya sabemos que $g'''(1) = 6 \neq 0$. Además:

$$g''(1) = 6 + 2b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -3}$$

Pero el punto es $(1, 2)$, lo que significa que $g(1) = 2$:

$$1 - 3 + c - 2 = 2 \Rightarrow \boxed{c = 6}$$

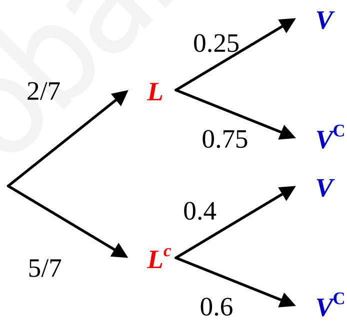
Es decir: $\boxed{b = -3 \text{ y } c = 6}$.

EJERCICIO 3

Lucía quiere ir de vacaciones a la costa. En su guía de viajes lee que en esa época del año llueve dos días a la semana y que hace viento el 25% de los días que llueve y el 40% de los días que no llueve. Elegido un día de esa época,

a) **(1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que haga viento?

Siendo, referidos a un día elegido al azar, los sucesos L = "llueve", V = "hace viento", podemos organizar los datos en un diagrama de árbol.



Por el *Teorema de la Probabilidad Total*:

$$P(V) = \frac{2}{7}0.25 + \frac{5}{7}0.4 = \boxed{\frac{5}{14} \approx 0.3571}$$

b) **(0.75 puntos)** Si hace viento, ¿cuál es la probabilidad de que esté lloviendo?

$$P(L/V) = \frac{P(L \cap V)}{P(V)} = \frac{\frac{2}{7}0.25}{\frac{5}{14}} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

c) **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que no llueva y no haga viento?

$$P(L^c \cap V^c) = \frac{5}{7}0.6 = \boxed{\frac{3}{7} \approx 0.4286}$$

EJERCICIO 4

a) **(1.5 puntos)** En una muestra aleatoria de 100 botellas de agua mineral se encontró un contenido medio de 48 cl. Sabiendo que la variable "contenido de agua en una botella" sigue una ley Normal con desviación típica 5 cl, determine un intervalo de confianza para la media poblacional, con un nivel de confianza del 95%.

Siendo X = "contenido de agua en una botella (al azar)", sabemos que $X \in N(\mu;5)$. Por ser Normal, se puede construir el intervalo de confianza.

También tenemos que $n = 100$ y que $\bar{x} = 48$. Además:

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

Por tanto:

$$\mu \in \left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(48 - 1.96\frac{5}{\sqrt{48}},\ 48 + 1.96\frac{5}{\sqrt{48}}\right) = \boxed{(46.59,\ 49.41)}$$

con una probabilidad del 95%. Las unidades son *cl*.

b) **(1 punto)** ¿Qué tamaño muestral mínimo debería considerarse para estimar esta media con el mismo nivel de confianza y un error inferior a 0.5 cl?

$$E < 0.5 \Rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0.5 \Rightarrow \frac{\sigma}{0.5} < \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} > \frac{\sigma}{0.5} \Rightarrow n > \left(\frac{5}{0.5}\right)^2 = 100$$

Por tanto, el mínimo valor posible es $\boxed{n = 101}$.

OPCIÓN B
SOLUCIONES

EJERCICIO 1

Se dispone de 160 m de tejido de pana y 240 m de tejido de lana para hacer trajes y abrigos. Se usa 1 m de pana y 2 m de lana para cada traje, y 2 m de pana y 2 m de lana para cada abrigo. Cada traje se vende a 250€ y cada abrigo a 350€.

a) **(2 puntos)** ¿Cuántos trajes y abrigos se deben confeccionar para obtener el máximo beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Llevamos a una tabla los datos del problema:

Prendas	Nº a confeccionar	Pana (m)	Lana (m)
Trajes	x	x	$2x$
Abrigos	y	$2y$	$2y$
Restricciones:	$x \geq 0;\ y \geq 0$	$x + 2y \leq 160$	$2x + 2y \leq 240$

Hay que maximizar el beneficio (se supone que hablan del precio de venta, que no suele coincidir con el beneficio). Por tanto, la *función objetivo* es $F(x, y) = 250x + 350y$.

En definitiva, el ejercicio consiste en:

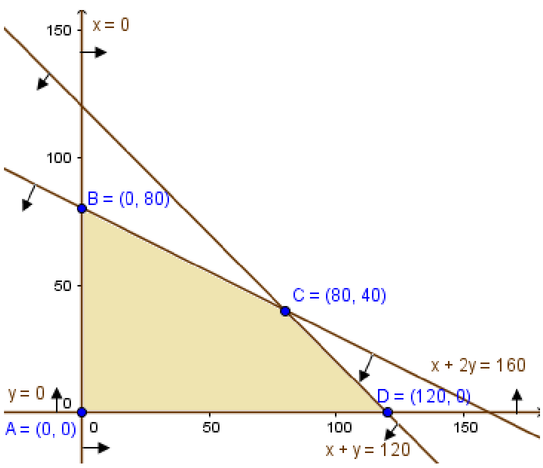
Función objetivo: $F(x, y) = 250x + 350y$ (MAXIMIZAR)
Restricciones: $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x + 2y \leq 160$; $x + y \leq 120$.

Dibujamos la región factible. Trazamos las recta asociadas a cada inecuación y señalamos con flechitas el semiplano solución.

- $x \geq 0$: Semiplano a la derecha del eje OY.
- $y \geq 0$: Semiplano encima del eje OX.
- $x + 2y = 160$ $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 160 \\ \hline y & 80 & 0 \end{array}$ $\Rightarrow$ Como la inecuación es: $x + 2y \leq 160$ $\Leftrightarrow$

  $y \leq \dfrac{-x+160}{2}$, la región que designa es el semiplano que está por debajo de la recta (son los puntos para los que y es menor o igual al valor que, para el mismo x, toma la recta).
- $x + y = 120$ $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 120 \\ \hline y & 120 & 0 \end{array}$ Como la inecuación es: $x + y \leq 120$ $\Leftrightarrow$

  $y \leq -x + 120$, la región que designa es el semiplano que está por debajo de la recta.



Resulta así el recinto del gráfico. Hemos de calcular los vértices del mismo (ya figuran sus coordenadas en el gráfico, pero han sido calculadas antes de llevarlas al mismo).

Los vértices $A(0, 0)$, $B(0, 80)$ y $D(120, 0)$ los tenemos de las tablas usadas para dibujar las rectas. Calculamos el punto restante:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=160 \\ \underline{x+y=120} \\ y=40 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Sustituyendo en la 2ª: } x+40=120 \Rightarrow x=80$$

Por tanto, $C(80, 40)$.

Para calcular el óptimo de la función objetivo en el recinto, hallamos el valor de ésta en cada vértice:

$F(A) = F(0, 0) = 0 + 0 = 0$
$F(B) = F(0, 80) = 0 + 350·80 = 28000$
$F(C) = F(80, 40) = 250·80 + 350·40 = 34000$
$F(D) = F(120, 0) = 250·120 + 0 = 30000$

En definitiva, se deben confeccionar 80 trajes y 40 abrigos, siendo el beneficio (aquí, precio de venta) obtenido de 34000.

b) **(0.5 puntos)** ¿Pueden hacerse 60 trajes y 50 abrigos con esas cantidades de tejido? En caso afirmativo, ¿obtendría el máximo beneficio al venderlo todo?

Comprobamos si $x = 60$ con $y = 50$ verifican las restricciones:

$$60 \geq 0; \quad 50 \geq 0; \quad 60 + 2·40 = 140 \leq 160; \quad 60 + 40 = 100 \leq 120$$

En efecto, las verifican, por lo que sí pueden hacerse. El problema tiene solución única y no es ésta, por lo que no se obtiene, con estos valores, el beneficio máximo. Y, en efecto, sustituyendo en la función objetivo:

$$F(60, 50) = 250·60 + 350·50 = 32500 < 34000$$

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 8$.

a) **(1.7 puntos)** Halle las coordenadas de sus extremos relativos y de su punto de inflexión, si existen.

No vamos a estudiar monotonía y curvatura pues, al tratarse de una función ilimitadamente derivable, los extremos relativos estarán donde $f'(x) = 0$ con $f''(x) \neq 0$, y los puntos de inflexión donde se verifique $f''(x) = 0$ con $f'''(x) \neq 0$. Las coordenadas completas de los puntos que obtengamos nos saldrán de sustituirlos en la ecuación de f:

$f'(x) = 3x^2 - 18x = 0 \Leftrightarrow x(x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ó $x = 6$

$f''(x) = 6x - 18 \Rightarrow$ $f''(0) = -18 < 0$, por lo que $\boxed{\text{en } (0, 8) \text{ hay un máx relativo}}$

$f''(6) = 18 > 0$ por lo que $\boxed{\text{en } (6, -100) \text{ hay un mín relativo}}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow x = 3$

$f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(3) \neq 0$, por lo que $\boxed{\text{en } (3, -46) \text{ hay un punto de inflexión}}$.

b) **(0.8 puntos)** Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

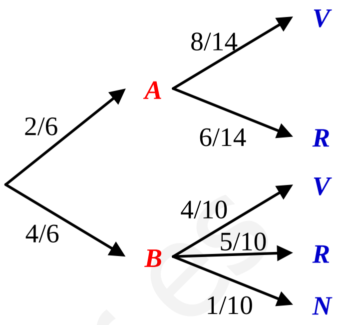
- Punto de tangencia: $f(1) = 0$: $(1, 0)$.
- Pendiente de la tangente: $m = f'(1) = 6 - 18 = -12$
- Recta tangente: $y - 0 = -12(x-1) \Leftrightarrow \boxed{y = -12x + 12}$.

EJERCICIO 3

En una urna A hay 8 bolas verdes y 6 rojas. En otra urna B hay 4 bolas verdes, 5 rojas y 1 negra. Se lanza un dado, si sale un número menor que 3 se saca una bola de la urna A, y si sale mayor o igual que 3 se saca una bola de la urna B.

a) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que la bola sea verde si ha salido un 4.

Organizamos los datos en un diagrama de árbol, que adjuntamos.. Si ha salido un 4, la bola se extrae de la urna *B*, y la probabilidad de *verde*, por *Laplace*, es:



$$P(V/4) = \frac{4}{10} = \boxed{\frac{2}{5} = 0.4}$$

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que la bola elegida sea roja.

Por el *Teorema de la Probabilidad Total*:

$$P(R) = \frac{2}{6}\frac{6}{14} + \frac{4}{6}\frac{5}{10} = \boxed{\frac{10}{21} \approx 0.4762}$$

c) **(1 punto)** Sabiendo que ha salido una bola verde, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la urna A?

$$P(A/V) = \frac{P(A\cap V)}{P(V)} = \frac{\frac{2}{6}\frac{8}{14}}{\frac{2}{6}\frac{8}{14} + \frac{4}{6}\frac{4}{10}} = \boxed{\frac{5}{12} \approx 0.4167}$$

EJERCICIO 4

La concentración de arsénico en los moluscos de una zona costera sigue una ley Normal con desviación típica 6 mg/kg. Para verificar la calidad de estos moluscos se toma una muestra aleatoria de tamaño 36 para contrastar si la media poblacional no supera el límite máximo de 80 mg/kg permitido por la normativa sanitaria $(H_0 : \mu \le 80)$.

a) **(1.5 puntos)** Determine la región crítica de este contraste a un nivel de significación del 5%.

Siendo $X \equiv$ "*concentración de arsénico en un molusco (al azar)*" $\in N(\mu;\ 6)$, podemos construir el contraste de hipótesis sobre la media poblacional, por proceder los datos de una población Normal:

$$\begin{cases} H_0 : \mu \le 80 \\ H_1 : \mu > 80 \end{cases}$$

Como el contraste es unilateral, y siendo H_0: $\mu \le 80$, la región de aceptación será: $RA_\alpha = (-\infty, z_\alpha)$. Ya que $\alpha = 0.05 \Rightarrow P(Z \le z_\alpha) = 1 - \alpha = 0.95$ nos lleva a que $z_\alpha = 1.645$. Por todo ello, la *región de aceptación* a este nivel de significación será: $RA_{0.05} = (-\infty, 1.645)$. Pero nos piden la *región crítica*, y ésta es, entonces:

$$\boxed{RC_{0.05} = (1.645, +\infty)}$$

b) **(1 punto)** ¿Debe rechazarse esta hipótesis nula, al nivel del 5%, si en esa muestra de 36 moluscos se encuentra una concentración media de arsénico de 82 mg/kg?

El estadístico del contraste es: $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{82-80}{6/\sqrt{36}} = 2 \in RC_{0.05}$. Por tanto, $\boxed{\text{rechazamos la hipótesis nula y concluimos que la media es mayor que 80 mg/kg}}$.