Una partícula de 0,2 kg está sujeta al extremo de un muelle y oscila con una velocidad dada por $v(t) = 2\,\mathrm{sen}(2t) m/s$, donde el tiempo se mide en segundos y los ángulos en radianes. En el instante inicial, dicha partícula se encuentra en el origen. Calcule las siguientes magnitudes de la partícula:

a.- Posición en t = π /2 s.

b.- Energía total.

c.- Energía potencial en t = π /8 s.

origen de posiciones no coincide con el punto de equilibrio

a) $v(t) = 2\,\mathrm{sen}(2t)$ m/s

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = v(t)\,dt \rightarrow x = \int v(t)\,dt =$$

$$= \int 2\,\mathrm{sen}(2t)\,dt = 2\int \mathrm{sen}\,2t\,dt = -2\,\frac{\cos 2t}{2} + C_1 =$$

$$= -\cos 2t + C_1$$

Condiciones iniciales

$t = 0 \,;\; x = 0$

$$x = -\cos 2t + C_1$$

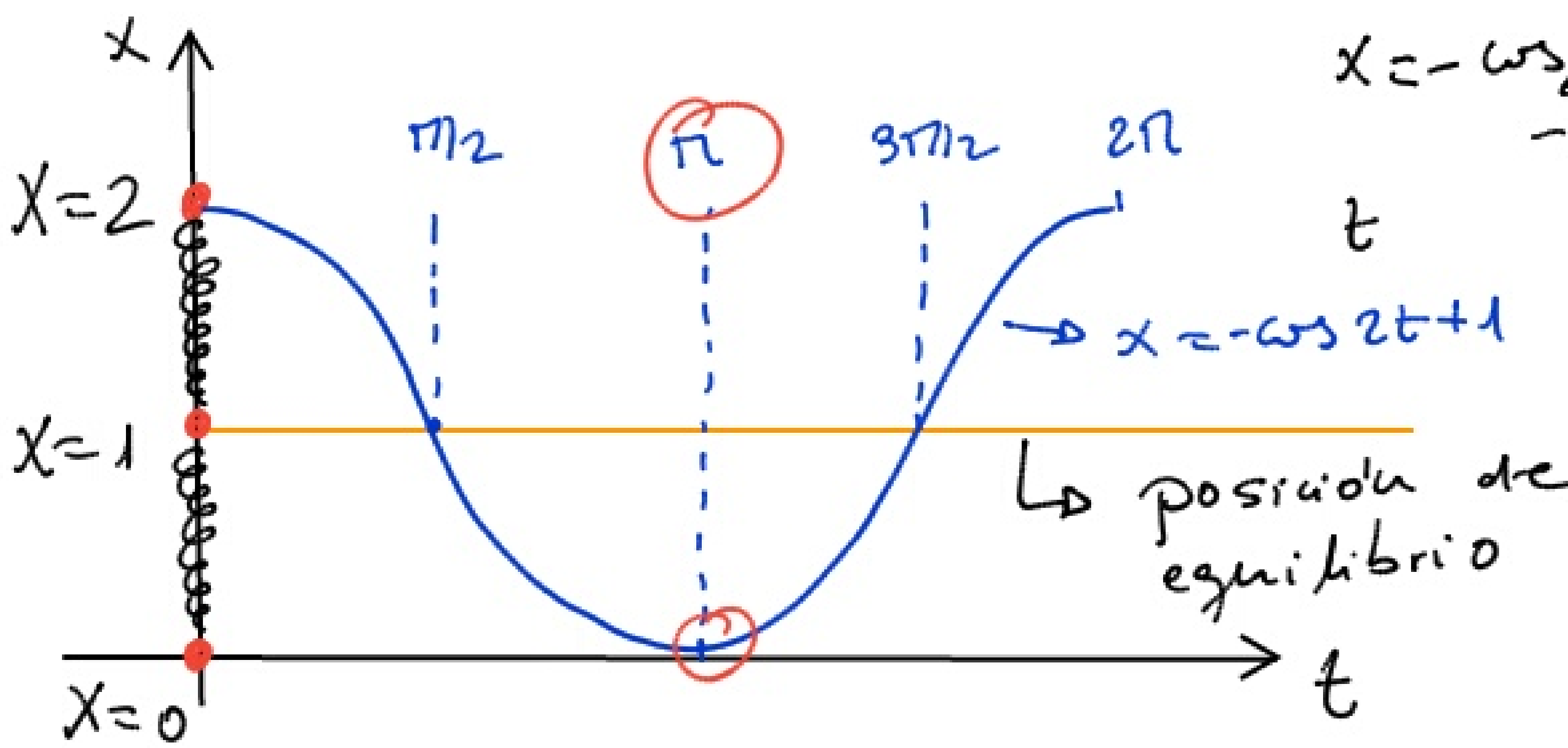
$$0 = -\underbrace{\cos 0}_{1} + C_1 \rightarrow C_1 = +1$$

$$\boxed{x = -\cos 2t + 1}$$

$t = \pi/2$

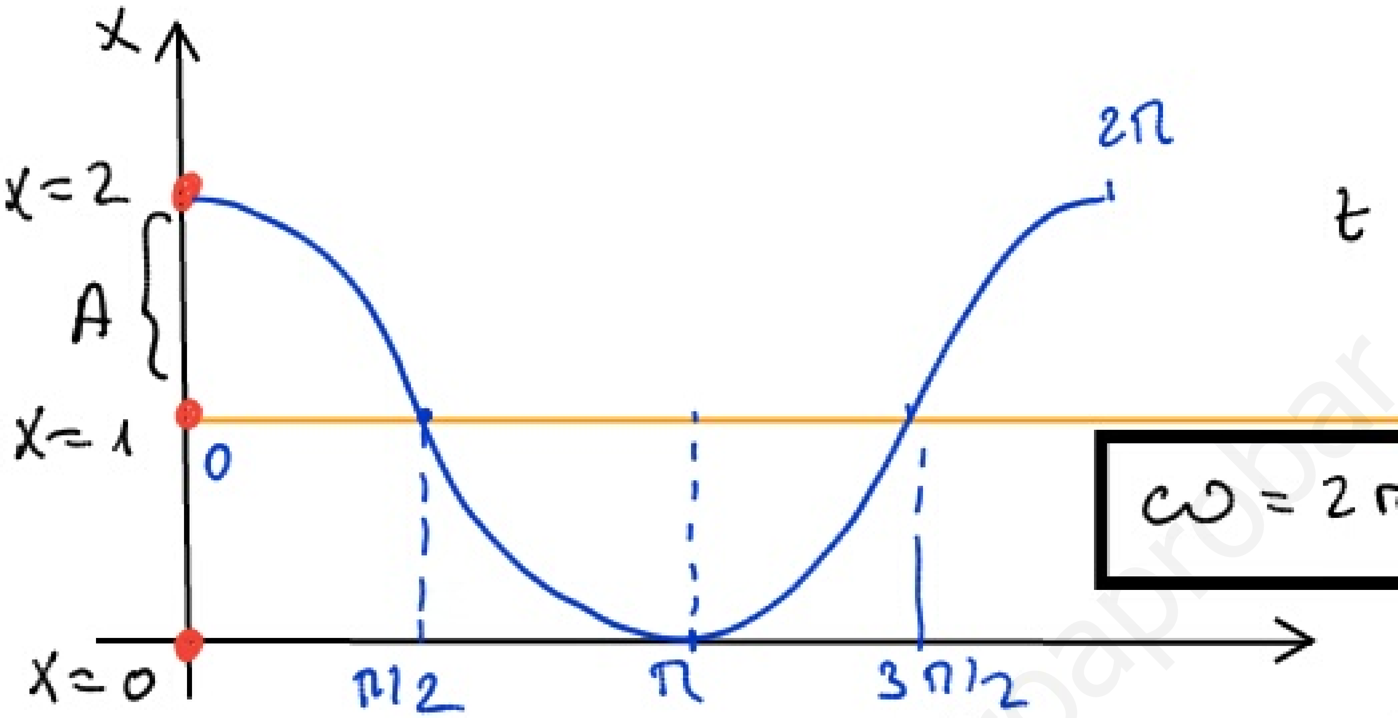
$x = -\cos\underbrace{\pi}_{-1} - 1 = +2$

$\boxed{x = +2\,m}$



b) $x = -\cos 2t + 1$ $\qquad -1 \leq \cos 2t \leq 1$

$\cos 2t = 1 \longrightarrow x = 0$; $\cos 2t = -1 \longrightarrow x = +2\,m$



$\boxed{A = 1\,m}$

$\boxed{\omega = 2\,rad/s}$

$$E_M = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\, 0'2 \cdot 2^2 \cdot 1^2 = 0'4\ J$$

$\boxed{E_M = 0'4\ J}$

b) $E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$

$x = -\cos 2t + 1$; $t = \pi/8\ s$

$x = -\cos \pi/4 + 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$

$$E_p = \frac{1}{2}\, 0'2 \cdot 2^2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)^2 = 0'0343\ J$$

$\boxed{E_p = 0'0343\ J}$

BLOQUE II-PROBLEMA

Una persona de masa 70 kg está de pie en una plataforma que oscila verticalmente alrededor de su posición de equilibrio, comportándose como un oscilador armónico simple. Su posición inicial es $y(0) = A\,sin(\pi/3)\ cm$ donde $A = 1{,}5\ cm$, y su velocidad inicial $v_y(0) = 0{,}6\,cos(\pi/3)\ m/s$. Calcula razonadamente:

a) La pulsación o frecuencia angular y la posición de la persona en función del tiempo, $y(t)$. (1 punto)

b) La energía mecánica de dicho oscilador en cualquier instante. (1 punto)

$m = 70\,kg$ $\quad y(0) = A\,\mathrm{sen}\,\pi/3\ cm \quad A = 1'5\ cm$

$v_y(0) = 0'6\cos\pi/3\ cm$

a) $y(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0)$

$y(0) = A\,\mathrm{sen}\,\varphi_0 \rightarrow \varphi_0 = \pi/3\ rad$

$v(t) = A\cdot\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$

$v(0) = A\cdot\omega\cos\varphi_0 \rightarrow A\cdot\omega = 0'6$

$\omega = \frac{0'6}{A} = \frac{0'6}{1'5\cdot 10^{-2}} = 40\ rad/s$

$\omega = 2\pi\nu \rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{40}{2\pi} = \frac{20}{\pi}\ Hz$

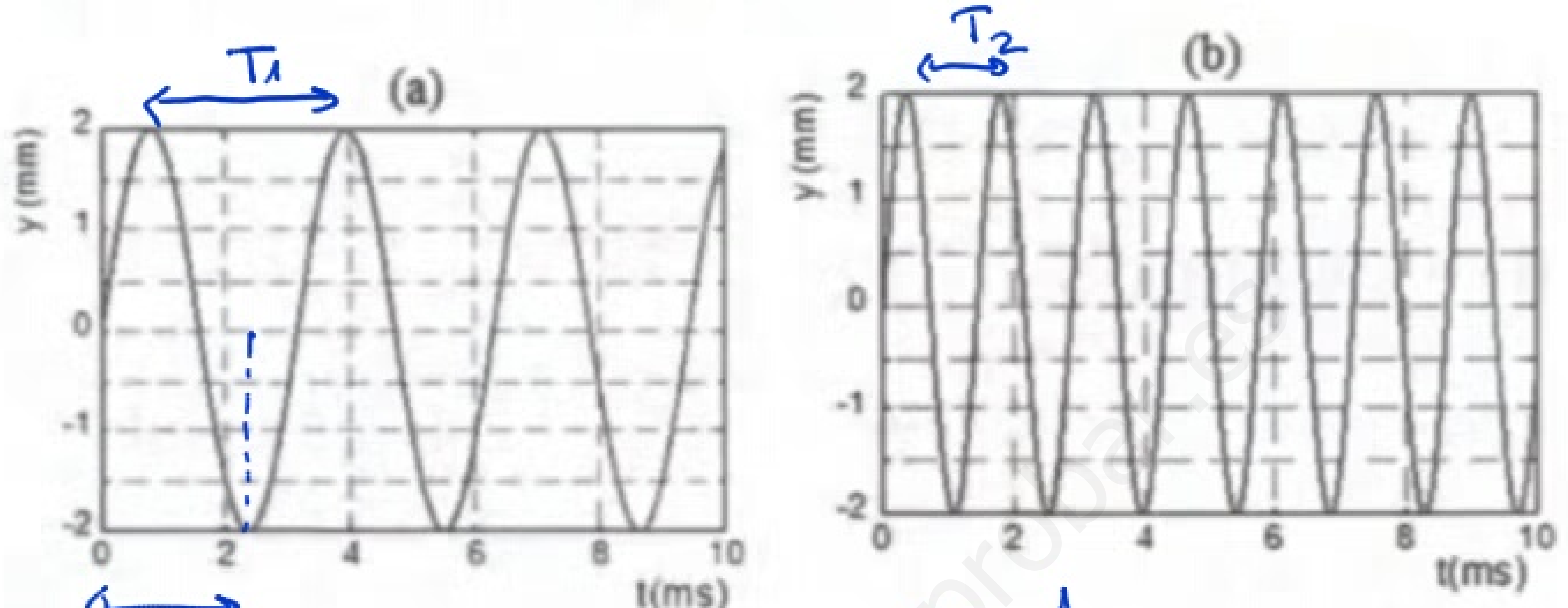
$$\boxed{y(t) = 1'5\cdot 10^{-2}\cdot\mathrm{sen}(40t + \pi/3)}$$

b) $E_M = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\cdot\omega^2A^2 =$

$= \frac{1}{2}\cdot 70\cdot(40)^2\cdot(1'5\cdot 10^{-2})^2 = \underline{12'6\ J}$

BLOQUE II-CUESTIÓN

Define periodo y amplitud de un oscilador armónico. En las gráficas (a) y (b) se representan las posiciones, $y(t)$, frente al tiempo de dos osciladores. ¿Cuál de ellos tiene mayor frecuencia? Justifica la respuesta.



T_1

$\nu = \frac{1}{T}$

$$T_1 > T_2$$

$$\frac{1}{T_1} < \frac{1}{T_2}$$

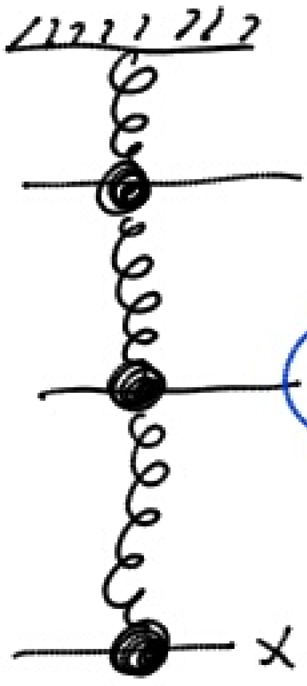
$$\boxed{\nu_1 < \nu_2}$$

T → tiempo empleado en realizar una oscilación completa

A → Máxima oscilación.

BLOQUE II-CUESTIÓN

Un cuerpo de masa $m = 4\ kg$ describe un movimiento armónico simple con un periodo $T = 2\ s$ y una amplitud $A = 2\ m$. Calcula la energía cinética máxima de dicho cuerpo y razona en qué posición se alcanza respecto al equilibrio. ¿Cuánto vale su energía potencial en dicho punto? Justifica la respuesta.



$x = 2m$ $\quad E_{p\,máx}\ ,\ E_c = 0$

$x = 0$ $\quad E_{c\,máx}\ ,\ E_p = 0$

$x = 2\ m$ $\quad E_{p\,máx}\ ;\ E_c = 0$

$$E_M = E_c + E_p = E_{c\,máx} = E_{p\,máx} = \frac{1}{2} K A^2$$

$$E_{c\,máx} = \frac{1}{2} m v_{máx}^2$$

$$E_{c\,máx} = \frac{1}{2} K \cdot A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} m \frac{4\pi^2}{T^2} A^2 =$$

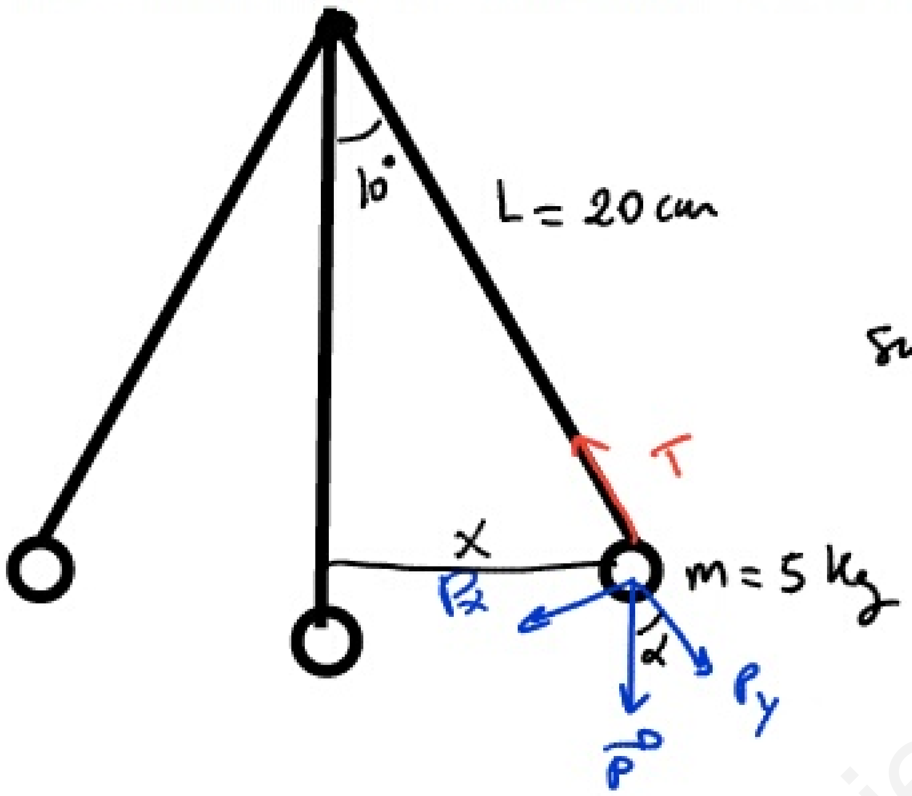
$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{4\pi^2}{2^2} \cdot 2^2 = 8\pi^2 \text{ Julios}$$

- Hacemos un péndulo con una masa de 0.5 kg suspendida de un hilo de 20 cm de longitud. Desplazamos la masa un ángulo de 10º respecto a su posición de equilibrio y la dejamos oscilar.

  a.- Calcule el período de oscilación.

  b.- Calcule la velocidad de la masa en el punto más bajo.

  c.- Halle la expresión de la energía cinética de la masa en función del tiempo.



$$\sin\alpha = \frac{x}{L} \rightarrow x = L\sin\alpha$$

$$x_{máx} = 20\cdot\sin 10° = 3'473\ cm$$

a)

$$\left.\begin{array}{l} P_x = mg\sin\alpha = mg\,\dfrac{x}{L} = \dfrac{mg}{L}\,x \\ F = P_x = Kx \end{array}\right\} K = \frac{mg}{L}$$

$$K = m\cdot\omega^2 \rightarrow \frac{\cancel{m}g}{L} = \cancel{m}\omega^2 \rightarrow \frac{g}{L} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 L}{g} \rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{L/g}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0'2}{9'8}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{2\pi}{7}\ s$$

b)

$$v_{máx} = \pm A\cdot\omega = \pm A\cdot\frac{2\pi}{T} = \pm A\cdot\frac{2\pi}{2\pi/7} = \pm 7A =$$

$$= \pm 7\cdot(3'473\cdot 10^{-2}) = \pm 0'243\ m/s$$

c) $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ $\qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi/7} = 7 \text{ rad/s}$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$x = A\cos(7t + \varphi_0)$$

$t = 0 \rightarrow x = +A \rightarrow \cos\varphi_0 = 1 \rightarrow \varphi_0 = 0^\circ$

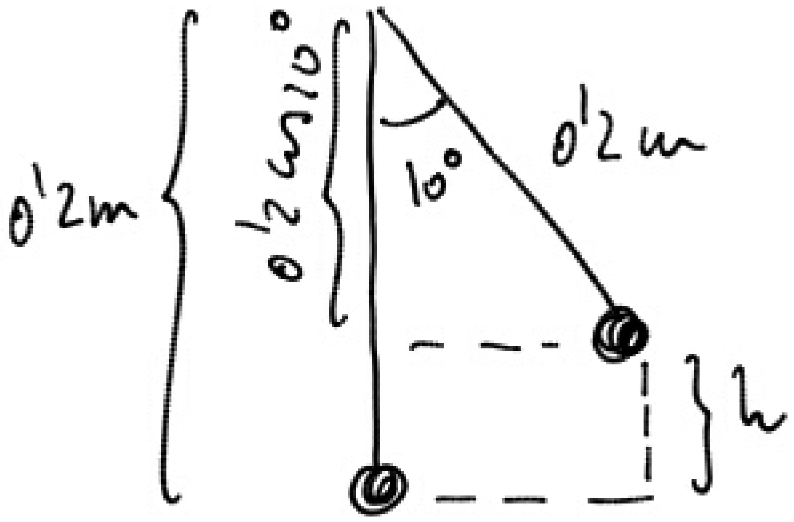
$$\boxed{x = 3'473 \cdot 10^{-2} \cos(7t)}$$

$v = -0'243 \operatorname{sen} 7t \rightarrow v^2 = 0'059 \operatorname{sen}^2 7t$

$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} 0'5 \cdot 0'059 \operatorname{sen}^2 7t = 0'01475 \operatorname{sen}^2 7t$

$$\boxed{E_c = 0'01475 \operatorname{sen}^2 7t}$$

Otra forma de calcular la velocidad



$$0'2 = 0'2\cos 10^\circ + h$$

$$h = 0'2\,(1-\cos 10^\circ)$$

$$E_p = E_c$$

$$\cancel{m} g h = \frac{1}{2}\cancel{m} v^2$$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 9'8\cdot 0'2\cdot(1-\cos 10^\circ)} = 0'244\ m/s$$

$$\boxed{v = 0'244\ m/s}$$