PROBLEMAS CAMPO GRAVITATORIO

1. a) Desde la superficie de la Tierra se lanza verticalmente hacia arriba un objeto con una velocidad v. Si se desprecia el rozamiento, calcule el valor de v necesario para que el objeto alcance una altura igual al radio de la Tierra.
b) Si se lanza el objeto desde la superficie de la Tierra con una velocidad doble a la calculada en el apartado anterior, ¿escapará o no del campo gravitatorio terrestre?
Datos: Masa de la Tierra: M_T = 5,98.10^{24} kg. Radio de la Tierra: R_T = 6370 km. Constante de Gravitación: G = 6,67.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}.

2. Llamando g_0 y V_0 a la intensidad de campo gravitatorio y al potencial gravitatorio en la superficie terrestre respectivamente, determine en función del radio de la Tierra:

a) La altura sobre la superficie terrestre a la cual la intensidad de campo gravitatorio es $g_0/2$.
b) La altura sobre la superficie terrestre a la cual el potencial gravitatorio es $V_0/2$.

3. Un satélite artificial describe una órbita circular alrededor de la Tierra. En esta órbita la energía mecánica del satélite es $-4{,}5\cdot10^9$ J y su velocidad es 7610 m s^{-1}. Calcule:
a) El módulo del momento lineal del satélite y el módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra.

b) El periodo de la órbita y la altura a la que se encuentra el satélite.

Datos: Constante de Gravitación Universal G = 6,67.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}
Masa de la Tierra M_T = 5,98.10^{24} kg
Radio de la Tierra R_T = 6370 km

4. Un objeto de 5 kg de masa posee una energía potencial gravitatoria Ep = – 2x10^8 J cuando se encuentra a cierta distancia de la Tierra.

a) Si el objeto a esa distancia estuviera describiendo una órbita circular, ¿cuál sería su velocidad?
b) Si la velocidad del objeto a esa distancia fuese de 9 km/s, ¿cuál sería su energía mecánica? ¿Podría el objeto estar describiendo una órbita elíptica en este caso?

5. Sabiendo que la aceleración de la gravedad en un movimiento de caída libre en la superficie de la Luna es un sexto de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra y que el radio de la Luna es aproximadamente 0,27 R_T (siendo R_T el radio terrestre), calcule:

a) la relación entre las densidades medias $\rho_{Luna}/\rho_{Tierra}$;
b) la relación entre las velocidades de escape de un objeto desde sus respectivas superficies $(Ve)_{Luna} / (Ve)_{Tierra}$.

6. Fobos es un satélite de Marte que gira en una órbita circular de 9380 km de radio, respecto al centro del planeta, con un periodo de revolución de 7,65 horas. Otro satélite de Marte, Deimos, gira en una órbita de 23460 km de radio. Determine:

a) La masa de Marte.
b) El período de revolución del satélite Deimos.
c) La energía mecánica del satélite Deimos.
d) El módulo del momento angular de Deimos respecto al centro de Marte.

Datos: Constante de Gravitación: $G = 6,67\cdot10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}
Masa de Fobos = $1,1\cdot10^{16}$ kg; Masa de Deimos = $2,4\cdot10^{15}$ kg

7. a) ¿Cuál es la aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta esférico cuyo radio es la mitad del de la Tierra y posee la misma densidad media? b) ¿Cuál sería el período de la órbita circular de un satélite situado a una altura de 400 km respecto a la superficie del planeta?
Datos: Radio de la Tierra R_T = 6371 km
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra g = 9,8 m s^{-2}

8. Un satélite de masa 20 kg se coloca en órbita circular sobre el ecuador terrestre de modo que su radio se ajusta para que dé una vuelta a la Tierra cada 24 horas. Así se consigue que siempre se encuentre sobre el mismo punto respecto a la Tierra (satélite geoestacionario).

a) ¿Cuál debe ser el radio de su órbita?
b) ¿Cuánta energía es necesaria para situarlo en dicha órbita?

Datos: Constante de Gravitación: $G = 6,67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}
Masa de la Tierra: $M_T = 5,98.10^{24}$ kg
Radio de la Tierra: R_T = 6370 km

9. Cuatro masas puntuales idénticas de 6 kg cada una están situadas en los vértices de un cuadrado de lado igual a 2 m. Calcule:

a) El campo gravitatorio que crean las cuatro masas en el centro de cada lado del cuadrado.
b) El potencial gravitatorio creado por las cuatro masas en el centro del cuadrado, tomando el infinito como origen de potenciales.

Dato: Constante de Gravitación: $G = 6,67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}

10. Un satélite artificial de 200 kg describe una órbita circular alrededor de la Tierra. La velocidad de escape a la atracción terrestre desde esa órbita es la mitad que la velocidad de escape desde la superficie terrestre.

a) Calcule la fuerza de atracción entre la Tierra y el satélite.
b) Calcule el potencial gravitatorio en la órbita del satélite.
c) Calcule la energía mecánica del satélite en la órbita.
d) ¿Se trata de un satélite geoestacionario? Justifique la respuesta.

Datos: Constante de Gravitación: $G = 6{,}67.10^{-11}$ $N.m^2.kg^{-2}$; Masa de la Tierra: $M_T = 5{,}98.10^{24}$ kg; Radio medio terrestre: $R_T = 6370$ km

11. Una masa de $2\cdot10^{11}$ kg se encuentra situada en el punto A (–1,0) y otra masa de $6\cdot10^{11}$ kg en el punto B (1,0), las coordenadas están en metros. Calcule:

a) El campo gravitatorio en el punto C (0,1)
b) El campo gravitatorio en el punto medio del segmento AC
c) El punto donde se anula el campo gravitatorio

Datos: Constante de Gravitación: $G = 6{,}67.10^{-11}$ $N.m^2.kg^{-2}$

12. a) Enuncie la tercera ley de Kepler y demuéstrela para el caso de órbitas circulares.
b) Aplique dicha ley para calcular la masa del Sol suponiendo que la órbita de la Tierra alrededor del Sol es circular con un radio medio de $1{,}49\cdot10^8$ km.
Dato: Constante de Gravitación: $G = 6{,}67.10^{-11}$ $N.m^2.kg^{-2}$

13. Calcule el módulo del momento angular de un objeto de 1000 kg respecto al centro de la Tierra en los siguientes casos:

a) Se lanza desde el polo norte perpendicularmente a la superficie de la Tierra con una velocidad de 10 km/s.
b) Realiza una órbita circular alrededor de la Tierra en el plano ecuatorial a una distancia de 600 km de su superficie.

Datos: Constante de Gravitación: $G = 6{,}67.10^{-11}$ $N.m^2.kg^{-2}$.
Masa de la Tierra: $M_T = 5{,}98.10^{24}$ kg. Radio medio terrestre: $R_T = 6{,}37\cdot10^6$ m

14. Un satélite artificial de 100 kg se mueve en una órbita circular alrededor de la Tierra con una velocidad de 7,5 km/s. Calcule:

a) El radio de la órbita.
b) La energía potencial del satélite.
c) La energía mecánica del satélite.
d) La energía que habría que suministrar al satélite para que describa una órbita circular con radio doble que el de la órbita anterior.

Datos: Constante de Gravitación: $G = 6{,}67.10^{-11}$ $N.m^2.kg^{-2}$.
Masa de la Tierra: $M_T = 5{,}98.10^{24}$ kg. Radio medio terrestre: $R_T = 6{,}37\cdot10^6$ m

15. Una sonda de masa 5000 kg se encuentra en una órbita circular a una altura sobre la superficie terrestre de 1,5 R_T. Determine:

a) el momento angular de la sonda en esa órbita respecto al centro de la Tierra;
b) la energía que hay que comunicar a la sonda para que escape del campo gravitatorio terrestre desde esa órbita.

Datos: Constante de Gravitación: $G = 6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}.
Masa de la Tierra: $M_T = 5{,}98.10^{24}$ kg. Radio medio terrestre: $R_T = 6370$ km

16. a) ¿Cuál es el periodo de un satélite artificial que gira alrededor de la Tierra en una órbita circular cuyo radio es un cuarto del radio de la órbita lunar?

b) ¿Cuál es la relación entre la velocidad del satélite y la velocidad de Luna en sus respectivas órbitas?

Dato: Periodo de la órbita lunar $T_L = 27{,}32$ *días*

17. Un satélite artificial de 500 kg que describe una órbita circular alrededor de la Tierra se mueve con una velocidad de 6,5 km/s. Calcule:

a) La energía mecánica del satélite.
b) La altura sobre la superficie de la Tierra a la que se encuentra.

Datos: Constante de Gravitación Universal $G = 6{,}67.10^{-11}$ *N.m*^{2}*.kg*$^{-2}$
Masa de la Tierra $M_T = 5{,}98.10^{24}$ *kg*
Radio de la Tierra $R_T = 6370$ *km*

18. Desde un punto de la superficie terrestre se lanza verticalmente hacia arriba un objeto de 100 kg que llega hasta una altura de 300 km. Determine:

a) La velocidad de lanzamiento.
b) La energía potencial del objeto a esa altura.

Si estando situado a la altura de 300 km, queremos convertir el objeto en satélite de forma que se ponga en órbita circular alrededor de la Tierra,

c) ¿Qué energía adicional habrá que comunicarle?
d) ¿Cuál será la velocidad y el periodo del satélite en esa órbita?

Datos: Constante de Gravitación $G = 6{,}67.10^{-11}$ *N.m*^{2}*.kg*$^{-2}$
Masa de la Tierra $M_T = 5{,}98.10^{24}$ *kg; Radio de la Tierra* $R_T = 6370$ *km*

19. Suponiendo que los planetas Venus y la Tierra describen órbitas circulares alrededor del Sol, calcule:

a) El periodo de revolución de Venus.
b) Las velocidades orbitales de Venus y de la Tierra.

Datos: Distancia de la Tierra al Sol: $1{,}49 \times 10^{11}$ *m*
Distancia de Venus al Sol: $1{,}08 \times 10^{11}$ *m*
Periodo de revolución de la Tierra: 365 días

20. Razone si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) El valor de la velocidad de escape de un objeto lanzado desde la superficie de la Tierra depende del valor de la masa del objeto.
b) En el movimiento elíptico de un planeta en torno al Sol la velocidad del planeta en el perihelio (posición más próxima al Sol) es mayor que la velocidad en el afelio (posición más alejada del Sol).

21. Un satélite de 1000 kg de masa describe una órbita circular de $12 \cdot 10^3$ km de radio alrededor de la Tierra. Calcule:

a) El módulo del momento lineal y el módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra. ¿Cambian las direcciones de estos vectores al cambiar la posición del satélite en su órbita?
b) El periodo y la energía mecánica del satélite en la órbita.

Datos: Masa de la Tierra: $M_T = 5{,}98.10^{24}$ kg.
Constante de Gravitación: $G = 6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}

22. a) Deduzca la expresión de la energía cinética de un satélite en órbita circular alrededor de un planeta en función del radio de la órbita y de las masas del satélite y del planeta, b) De-muestre que la energía mecánica del satélite es la mitad de su energía potencial.

23. Io, un satélite de Júpiter, tiene una masa de $8{,}9 \cdot 10^{22}$ kg, un periodo orbital de 1,77 días, y un radio medio orbital de $4{,}22 \cdot 10^8$ m. Considerando que la órbita es circular con este radio, determine:

a) La masa de Júpiter.
b) La intensidad de campo gravitatorio, debida a Júpiter, en los puntos de la órbita de Io.
c) La energía cinética de Io en su órbita.
d) El módulo del momento angular de Io respecto al centro de su órbita.

Dato: Constante de Gravitación: $G = 6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}

24. a) Enuncie la 2ª ley de Kepler. Explique en qué posiciones de la órbita elíptica la velocidad del planeta es máxima y dónde es mínima.
b) Enuncie la 3ª ley de Kepler. Deduzca la expresión de la constante de esta ley en el caso de órbitas circulares.

25. Considerando que la órbita de la Luna alrededor de la Tierra es una órbita circular, deduzca:

a) La relación entre la energía potencial gravitatoria y la energía cinética de la Luna en su órbita.
b) La relación entre el periodo orbital y el radio de la órbita descrita por la Luna.

26. Un satélite artificial de 100 kg se mueve en una órbita circular alrededor de la Tierra con una velocidad de 7,5 km/s. Calcule:

a) El radio de la órbita.
b) La energía potencial del satélite.
c) La energía mecánica del satélite.
d) La energía que habría que suministrar a este satélite para que cambiara su órbita a otra con el doble de radio.

Datos: Constante de Gravitación: $G = 6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}. Masa de la Tierra: $M_T = 5{,}98.10^{24}$ kg. Radio de la Tierra: $R_T = 6370$ km.

27. Un asteroide está situado en una órbita circular alrededor de una estrella y tiene una energía total de -10^{10} J. Determine:

a) La relación que existe entre las energías potencial y cinética del asteroide.
b) Los valores de ambas energías potencial y cinética.

28. Un cometa se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. Explique en qué punto de su órbita, afelio (punto más alejado del Sol) o perihelio (punto más cercano al Sol) tiene mayor valor:

a) La velocidad.
b) La energía mecánica.

29. Un planeta orbita alrededor de una estrella de masa M. La masa del planeta es $m = 10^{24}$ kg y su órbita es circular de radio $r = 10^8$ km y periodo $T = 3$ años terrestres. Determine:

a) La masa M de la estrella.
b) La energía mecánica del planeta.
c) El módulo del momento angular del planeta respecto al centro de la estrella.
d) La velocidad angular de un segundo planeta que describiese una órbita circular de radio igual a 2 r alrededor de la estrella.

Datos: Constante de Gravitación Universal $G = 6{,}67.10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$
Considere 1 año terrestre = 365 días

30. Una sonda espacial de masa m = 1000 kg se encuentra situada en una órbita circular alrededor de la Tierra de radio $r = 2{,}26 \cdot R_T$, siendo R_T el radio de la Tierra.

a) Calcule la velocidad de la sonda en esa órbita.
b) ¿Cuánto vale su energía potencial?
c) ¿Cuánto vale su energía mecánica?
d) ¿Qué energía hay que comunicar a la sonda para alejarla desde dicha órbita hasta el infinito?

Datos: *Masa de la Tierra* $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg. *Radio de la Tierra* $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m.
Constante de Gravitación Universal $G = 6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}.

31. Un satélite artificial de masa 200 kg se mueve alrededor de la Tierra en una órbita elíptica definida por una distancia al perigeo (posición más próxima al centro de la Tierra) de $7{,}02 \cdot 10^6$ m y una distancia al apogeo (posición más alejada al centro de la Tierra) de $10{,}30 \cdot 10^6$ m. Si en el perigeo el módulo de la velocidad es $8{,}22 \cdot 10^3$ m/s

a) ¿Cuál es el módulo de la velocidad en el apogeo?
b) Determine el módulo y dirección del momento angular del satélite.
c) Determine la velocidad areolar del satélite.
d) Determine la energía mecánica del satélite.

Datos: *Constante de Gravitación Universal* $G = 6{,}67.10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$*; masa de la Tierra =* $5{,}98.10^{24}$ *kg.*

Soluciones

1. a) Aplicamos el teorema de conservación de la energía mecánica. $Ec_i + Ep_i = Ep_f$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_Tm}{R_T} = -\frac{GM_Tm}{R_T+h}\ ; \qquad \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM_T}{R_T} = -\frac{GM_T}{R_T+h}$$

$$v = \sqrt{2\left(\frac{GM_T}{R_T} - \frac{GM_T}{2R_T}\right)} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{6{,}37\cdot10^{6}}} = 7.913\, m/s$$

b) Calculamos la velocidad mínima necesaria para que un objeto escape a la atracción gravitatoria:

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{2\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{6{,}37\cdot10^{6}}} = 11.190\, m/s$$

Como la velocidad de lanzamiento v= 2·7.913= 15.826 m/s, comprobamos que es mayor que la velocidad mínima de escape y por tanto el objeto sí que escapará del campo gravitatorio terrestre.

2.

a) $$g_0 = \frac{GM}{R^2}\ ; \qquad \frac{g_0}{2} = \frac{GM}{(R+h)^2}\ ; \text{ dividimos una por otra:}$$

$$2 = \frac{(R+h)^2}{R^2}\ ; \qquad \sqrt{2} = \frac{R+h}{R}\ ; \qquad h = R(\sqrt{2}-1)$$

b) $$V_0 = -\frac{GM}{\mathrm{R}}\ ; \qquad \frac{V_0}{2} = -\frac{GM}{R+h}\ ; \text{ dividimos una por otra:}$$

$$2 = \frac{R+h}{R}\ ; \qquad h = R$$

---

3. a)

$$F_{gravitatoria} \equiv F_{centrípeta}\ ; \qquad \frac{GMm}{r^2} = \frac{\mathrm{mv^2}}{\mathrm{r}}\ ; \qquad \mathrm{r} = \frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{v^2}}$$

$$r = \frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{7610^2} = 6{,}887\cdot10^{6}\, m$$

$$E = -\frac{GMm}{2r}\ ; \qquad m = \frac{-E\cdot2\cdot r}{GM} = \frac{4{,}5\cdot10^{9}\cdot2\cdot6{,}887\cdot10^{6}}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}} = 155{,}4\, kg$$

$$\mathrm{p = m\cdot v = 155{,}4\cdot7610 = 1.182.000\ kg\cdot m/s}$$

$$\mathrm{L = r\cdot m\cdot v\cdot sen\,90 = r\cdot p = 6{,}887\cdot10^{6}\cdot1182000 = 8{,}14\cdot10^{12}\ kg\cdot m^2/s}$$

b) $$v = \frac{2\pi r}{T}\ ; \qquad T = \frac{2\pi\cdot6{,}887\cdot10^{6}}{7610} = 5687\, s = 1{,}58\, horas$$

$$h = r - R_T = 6{,}887\cdot10^{6} - 6{,}37\cdot10^{6} = 517000\, m = 517\, km$$

4.

a) $$Ep = -\frac{GM_Tm}{r} = -2\cdot10^{8}$$

$$Ec + Ep = E$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_Tm}{r} = -\frac{GM_Tm}{2r}\ ; \qquad \frac{1}{2}5v^2 - 2\cdot10^{8} = -\frac{2\cdot10^{8}}{2}$$

$$v = 6.325\, m/s$$

b) $$E = Ec + Ep$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_Tm}{r} = \frac{1}{2}5\cdot9000^2 - 2\cdot10^{8} = 2{,}5\cdot10^{6}\, J$$

Como E>0, el objeto estará describiendo una hipérbola.

5.

$$g^L = \frac{GM_L}{R_L^2}\ ;\quad g_T = \frac{GM_T}{R_T^2}\ ;\quad dividimos\ una\ por\ otra:$$

$$\frac{g_L}{g_T} = \frac{1}{6} = \frac{\frac{GM_L}{R_L^2}}{\frac{GM_T}{R_T^2}} = \frac{M_L}{M_T}\cdot\frac{R_T^2}{R_L^2} = \frac{M_L}{M_T}\cdot\frac{1}{0{,}27^2};\qquad \frac{M_L}{M_T} = \frac{0{,}27^2}{6}$$

a)

$$\frac{\rho_L}{\rho_T} = \frac{\frac{M_L}{\frac{4}{3}\pi R_L^3}}{\frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3}} = \frac{M_L}{M_T}\cdot\frac{R_T^3}{R_L^3} = \frac{0{,}27^2}{6}\cdot\frac{1}{0{,}27^3} = 0{,}617$$

b)

$$\frac{v_{escape\ Luna}}{v_{escape\ Tierra}} = \frac{\sqrt{\frac{2GM_L}{R_L}}}{\sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}} = \sqrt{\frac{M_L}{M_T}\cdot\frac{R_T}{R_L}} = \sqrt{\frac{0{,}27^2}{6}\cdot\frac{1}{0{,}27}} = 0{,}212$$

6. a)

$$A\ partir\ de\ F_{gravitatoria} \equiv F_{centrípeta}\ ,\qquad deducir\ T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3$$

$$(7{,}65\cdot 3600)^2 = \frac{4\pi^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}M}(9{,}38\cdot 10^6)^3\ ;\qquad M = 6{,}44\cdot 10^{23}\ kg$$

b)

$$\frac{T_F^2}{T_D^2} = \frac{r_F^3}{r_D^3};\qquad \frac{7{,}65^2}{T_D^2} = \frac{9380^3}{23460^3};\qquad T_D = 30{,}2\ horas$$

c)

$$E = -\frac{GMm}{2r} = -\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6{,}44\cdot 10^{-23}\cdot 2{,}4\cdot 10^{15}}{2\cdot 23460\cdot 10^3} = -2{,}19\cdot 10^{21}\ J$$

d)

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi\cdot 23460\cdot 10^3}{30{,}2\cdot 3600} = 1356\ m/s$$

$$L = rmv = 23460\cdot 10^3\cdot 2{,}4\cdot 10^{15}\cdot 1356 = 7{,}63\cdot 10^{25}\ kg\cdot m^2/s$$

7. a)

$$\frac{\rho_P}{\rho_T} = \frac{\frac{M_P}{\frac{4}{3}\pi R_P^3}}{\frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3}} = \frac{M_P}{M_T}\cdot\frac{R_T^3}{R_P^3}\ ;\qquad 1 = \frac{M_P}{M_T}\cdot 2^3\ ;\qquad \frac{M_P}{M_T} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{g_P}{g_T} = \frac{\frac{GM_P}{R_P^2}}{\frac{GM_T}{R_T^2}} = \frac{M_P}{M_T}\cdot\frac{R_T^2}{R_P^2} = \frac{1}{8}\cdot 2^2 = \frac{1}{2}\ ;\qquad g_P = \frac{9{,}8}{2} = 4{,}9\ m/s^2$$

b)

$$r = R_P + 400 = \frac{6371}{2} + 400 = 3585{,}5\ km$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3\ ;\qquad como\ g_P = \frac{GM_P}{R_P^2}:$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{g_P R_P^2}r^3} = \sqrt{\frac{4\pi^2\cdot 3.585.500^3}{4{,}9\cdot 3.185.500^2}} = 6049\ s = 1{,}68\ horas$$

8. a)

$$A\ partir\ de\ F_{gravitatoria} \equiv F_{centrípeta}\ , \qquad deducir\ T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

$$(24 \cdot 3600)^2 = \frac{4\pi^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}9810^{24}} r^3\ ; \qquad r = 4{,}23 \cdot 10^7\ m$$

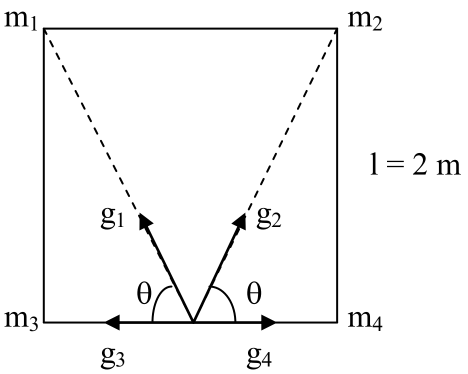
b)

$$\Delta E = -\frac{GMm}{2r} + \frac{GMm}{R_T}$$

$$= 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}9810^{24} \cdot 20 \cdot \left(\frac{1}{6{,}37 \cdot 10^6} - \frac{1}{2 \cdot 4{,}23 \cdot 10^7}\right) =$$

$$= 1{,}16 \cdot 10^9$$

9. a)



$\overrightarrow{g_3}\ y\ \overrightarrow{g_4}\ se\ anulan$

$\overrightarrow{g_{1x}}\ y\ \overrightarrow{g_{2x}}\ también\ se\ anulan$

$$g_1 = \frac{Gm_1}{r^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6}{2^2 + 1^2}$$

$$= 8{,}004 \cdot 10^{-11}$$

$$sen\ \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\overrightarrow{g_T} = \overrightarrow{g_{1y}} + \overrightarrow{g_{2y}} = 2g_1 sen\ \theta \cdot \vec{\jmath}$$

$$= 2 \cdot 8{,}004 \cdot 10^{-11} \vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{g_T} = 1{,}43 \cdot 10^{-10} \vec{\jmath}\ N/kg$$

b)

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = -4\frac{Gm}{r}\ ; \qquad r = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2}$$

$$V = \frac{-4 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6}{\sqrt{2}} = -1{,}13 \cdot 10^{-9}\ J/kg$$

10.

$$\frac{v_{esc\ órbita}}{v_{esc\ Tierra}} = \frac{\sqrt{\frac{2GM}{r}}}{\sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}} = \sqrt{\frac{R_T}{r}} = \frac{1}{2}\ ;\ r = 4 \cdot R_T = 4 \cdot 6370 = 25.480\ km$$

a)

$$F = \frac{GMm}{r^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}9810^{24} \cdot 200}{25.480.000^2} = 123\ N$$

b)

$$V_g = -\frac{GM}{r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}9810^{24}}{25.480.000} = -1{,}57 \cdot 10^7\ J/kg$$

c)

$$E = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}9810^{24} \cdot 200}{2 \cdot 25.480.000} = -1{,}57 \cdot 10^9\ J$$

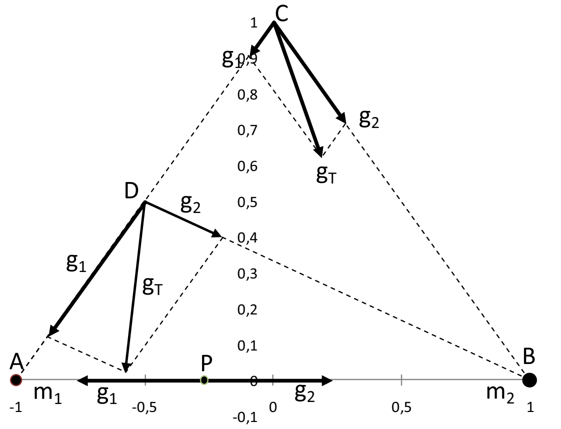
d)

$$A\ partir\ de\ F_{gravitatoria} \equiv F_{centrípeta}\ , \qquad deducir\ T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM} r^3} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}9810^{24}} 25.480.000^3} = 40463\ s = 11{,}3\ h$$

No es geoestacionario T≠24 h.

11. a)



En el punto C (0,1):

$$\overrightarrow{r_{AC}} = (0+1)\vec{\imath} + (1-0)\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{r_{AC}} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}; \quad r_{AC} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{g_1} = -G\frac{m_1}{{r_{AC}}^2}\frac{\overrightarrow{r_{AC}}}{r_{AC}} = = -6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{2\cdot 10^{11}}{2}\cdot\frac{\vec{\imath}+\vec{\jmath}}{\sqrt{2}}$$

$$\overrightarrow{g_1} = -4{,}716\,\vec{\imath} - 4{,}716\,\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{r_{BC}} = (0-1)\vec{\imath} + (1-0)\vec{\jmath} \qquad \overrightarrow{r_{BC}} = -\vec{\imath}+\vec{\jmath}; \quad r_{BC} = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{g_2} = -G\frac{m_2}{{r_{BC}}^2}\frac{\overrightarrow{r_{BC}}}{r_{BC}} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{6\cdot 10^{11}}{2}\cdot\frac{-\vec{\imath}+\vec{\jmath}}{\sqrt{2}} = 14{,}149\,\vec{\imath} - 14{,}149\,\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{g_T} = \overrightarrow{g_1} + \overrightarrow{g_2} = 9{,}43\vec{\imath} - 18{,}9\vec{\jmath}\ N/kg$$

b) En el punto D (–0,5;0,5):

$$\overrightarrow{r_{AD}} = (-0{,}5+1)\vec{\imath} + (0{,}5-0)\vec{\jmath} = 0{,}5\vec{\imath}+0{,}5\vec{\jmath}; \quad r_{AD} = \sqrt{0{,}5^2+0{,}5^2} = 0{,}7071$$

$$\overrightarrow{g_1} = -G\frac{m_1}{{r_{AD}}^2}\frac{\overrightarrow{r_{AD}}}{r_{AD}} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{2\cdot 10^{11}}{0{,}5}\cdot\frac{0{,}5\vec{\imath}+0{,}5\vec{\jmath}}{0{,}7071} = -18{,}87\,\vec{\imath} - 18{,}87\,\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{r_{BD}} = (-0{,}5-1)\vec{\imath} + (0{,}5-0)\vec{\jmath} \quad \overrightarrow{r_{BD}} = -1{,}5\vec{\imath}+0{,}5\vec{\jmath}; \quad r_{BD} = \sqrt{(-1{,}5)^2+0{,}5^2} = 1{,}581$$

$$\overrightarrow{g_2} = -G\frac{m_2}{{r_{BD}}^2}\frac{\overrightarrow{r_{BD}}}{r_{BD}} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{6\cdot 10^{11}}{2{,}5}\cdot\frac{-1{,}5\vec{\imath}+0{,}5\vec{\jmath}}{1{,}581} = 15{,}19\,\vec{\imath} - 5{,}06\,\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{g_T} = \overrightarrow{g_1} + \overrightarrow{g_2} = -3{,}68\vec{\imath} - 23{,}9\vec{\jmath}\ N/kg$$

c) El campo se anulará en un punto P (x,0) entre A y B, donde los módulos de los dos campos sean iguales. Hallamos la coordenada x de dicho punto:

$$G\frac{m_1}{{r_{AP}}^2} = G\frac{m_2}{{r_{BP}}^2}; \quad \frac{{r_{BP}}^2}{{r_{AP}}^2} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{6\cdot 10^{11}}{2\cdot 10^{11}} = 3; \ \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} = 3$$

$$x^2 - 2x + 1 = 3x^2 + 6x + 3; \ 2x^2 + 8x + 2 = 0; \ x = -0{,}268\,m$$

De las dos soluciones escogemos la que corresponde al punto que está entre A y B.

12. a) La tercera ley de Kepler dice: "El cuadrado del periodo de cualquier planeta es proporcional al cubo de la distancia media al Sol ($T^2 \propto r^3$)".

En una órbita circular:

$$F_{gravitatoria} \equiv F_{centrípeta}; \quad \frac{GMm}{r^2} = \frac{\mathrm{mv}^2}{\mathrm{r}}; \quad \frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{r}} = \mathrm{v}^2 = \frac{4\pi^2\mathrm{r}^2}{\mathrm{T}^2}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mathrm{GM}}\mathrm{r}^3$$

b)

$$M = \frac{4\pi^2}{GT^2}r^3 = \frac{4\pi^2(1{,}49\cdot 10^{11})^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}(365{,}25\cdot 24\cdot 3600)^2} = 1{,}97\cdot 10^{30}kg$$

13. $L = \vec{r} \wedge m\vec{v}$, el módulo valdrá: L = rmv sen θ

a) Como θ vale cero el momento angular valdrá cero.
b) Ahora θ vale 90°, por lo que el módulo valdrá: L=mrv, (r es el radio de la órbita). La relación entre el radio de una órbita circular y su velocidad se obtiene, por ejemplo de:

$$F_{gravitatoria} \equiv F_{centrípeta}\,; \quad \frac{GMm}{r^2} = \frac{\mathrm{mv}^2}{\mathrm{r}}\,; \quad \mathrm{v} = \sqrt{\frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{r}}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{6{,}97\cdot 10^{6}}}$$

$$= 7.565\ \mathrm{m/s}$$

$L=10^3 \cdot 6.97\cdot 10^6 \cdot 7565 = 5{,}27\cdot 10^{13}$ Kg m^2 s^{-1}.

---

14. a) La relación entre velocidad y radio de una órbita circular se puede obtener de:

$$F_{gravitatoria} \equiv F_{centrípeta}\,; \quad \frac{GMm}{r^2} = \frac{\mathrm{mv}^2}{\mathrm{r}}\,;$$

$$\mathrm{r} = \frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{v}^2} = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{7500^2} = 7{,}091\cdot 10^6\ \mathrm{m}$$

b)

$$E_p = -\frac{GMm}{r} = -\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 100}{7{,}091\cdot 10^6} = -5{,}6\cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

c)

$$E = -\frac{GMm}{2r} = -\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 100}{2\cdot 7{,}091\cdot 10^6} = -2{,}8\cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

d) La energía mecánica en la órbita de radio doble será:

$$E' = -\frac{GMm}{2(2r)} = -\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 100}{4\cdot 7{,}091\cdot 10^6} = -1{,}4\cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

$\Delta E = E' - E = -1{,}4\cdot 10^9 - (-2{,}8\cdot 10^9) = 1{,}4\cdot 10^9$ J hay que suministrar

---

15. a)

$$L = rmv = rm\sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$

$$L = 2{,}5\cdot 6{,}37\cdot 10^6\cdot 5000\cdot\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{2{,}5\cdot 6{,}37\cdot 10^6}}$$

$$L = 3{,}98\cdot 10^{14}\ kg\cdot m^2/s$$

b) Para que escape su energía total ha de valer cero:

$$W + E = 0\,; \quad W - \frac{GM_Tm}{2r} = 0$$

$$W = \frac{GM_Tm}{2r} = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 5000}{2\cdot 2{,}5\cdot 6{,}37\cdot 10^6}$$

$$W = 6{,}26\cdot 10^{10}\ J$$

---

16. a) Aplicamos la tercera ley de Kepler, $T^2 = C\cdot r^3$.

$$\frac{{T_{satélite}}^2}{{T_{Luna}}^2} = \frac{{r_{satélite}}^3}{{r_{Luna}}^3} = \frac{(r_{Luna}/4)^3}{{r_{Luna}}^3} = \frac{1}{4^3}; \quad \frac{T_{satélite}}{T_{Luna}} = \sqrt{\frac{1}{4^3}} = \frac{1}{8}; \quad T_{satélite} = \frac{27{,}32}{8}$$

$$= 3{,}415\ días$$

b)

$$v = \frac{2\pi r}{T}; \quad \frac{v_{satélite}}{v_{Luna}} = \frac{\dfrac{2\pi r_{satélite}}{T_{satélite}}}{\dfrac{2\pi r_{Luna}}{T_{Luna}}} = \frac{r_{satélite}}{r_{Luna}}\cdot\frac{T_{Luna}}{T_{satélite}} = \frac{1}{4}\cdot 8 = 2$$

---

17. a)

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}; \qquad r = \frac{GM_T}{v^2} = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{6500^2} = 9{,}44\cdot 10^6\ m$$

$$E = -\frac{GM_T m}{2r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 500}{2 \cdot 9{,}44 \cdot 10^6} = -1{,}06 \cdot 10^{10}\ J$$

b) $r = R_T + h$; $h = 9{,}44 \cdot 10^6 - 6{,}37 \cdot 10^6 = 3{,}07 \cdot 10^6$ m = 3070 km

---

18. a) Aplicamos el teorema de conservación de la energía mecánica.

$$Ec_i + Ep_i = Ep_f$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{R_T} = -\frac{GM_T m}{R_T + h}; \qquad \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM_T}{R_T} = -\frac{GM_T}{R_T + h}$$

$$v = \sqrt{2GM_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right)}$$

$$= \sqrt{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\left(\frac{1}{6{,}37 \cdot 10^6} - \frac{1}{6{,}67 \cdot 10^6}\right)}$$

$$= 2370\ m/s$$

b)

$$E_p = -\frac{GM_T m}{r} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 100}{6{,}67 \cdot 10^6} = -5{,}98 \cdot 10^9\ J$$

c)

$$E_{órbita} = -\frac{GM_T m}{2r}$$

$$\Delta E = E_{órbita} - E_p = -\frac{GM_T m}{2r} - \left(-\frac{GM_T m}{r}\right) = \frac{GM_T m}{2r} = \frac{5{,}98 \cdot 10^9}{2} = 2{,}99 \cdot 10^9\ J$$

d)

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6{,}67 \cdot 10^6}} = 7730\ m/s$$

$$v = \frac{2\pi r}{T}; \quad T = \frac{2\pi \cdot 6{,}67 \cdot 10^6}{7730} = 5420\ s = 1{,}5\ horas$$

---

19. a) Aplicamos la tercera ley de Kepler:

$$\frac{T_V^2}{T_T^2} = \frac{r_V^3}{r_T^3}; \quad \frac{T_V^2}{365^2} = \left(\frac{1{,}08 \cdot 10^{11}}{1{,}49 \cdot 10^{11}}\right)^3; \qquad T_V = 225\ días$$

b)

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$v_{Venus} = \frac{2\pi \cdot 1{,}08 \cdot 10^{11}}{225 \cdot 24 \cdot 3600} = 3{,}49 \cdot 10^4\ m/s$$

$$v_{Tierra} = \frac{2\pi \cdot 1{,}49 \cdot 10^{11}}{365 \cdot 24 \cdot 3600} = 2{,}97 \cdot 10^4\ m/s$$

---

20. a) Falso. Un objeto escapa del campo gravitatorio cuando su energía mecánica es mayor o igual que cero:

$$E = \frac{1}{2}m{v_{esc}}^2 - \frac{GM_T m}{R_T} = 0; \quad v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

Por lo tanto la velocidad de escape depende de la masa de la Tierra pero no de la del objeto.

---

b) Verdadero: En un campo de fuerzas centrales el momento angular se conserva.

$$L = r_p \cdot m \cdot v_p \cdot sen(90) = r_a \cdot m \cdot v_a \cdot sen(90)$$

Como $r_a > r_p$, entonces $v_a < v_p$

21. a)

$$F_{gravitatoria} \equiv F_{centrípeta}\ ; \quad \frac{GMm}{r^2} = \frac{\mathrm{mv}^2}{\mathrm{r}}\ ;$$

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{r}}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{12 \cdot 10^6}} = 5765\ \mathrm{m/s}$$

$$p = m \cdot v = 1000 \cdot 5765 = 5{,}765 \cdot 10^6\ kg \cdot m/s$$

$$L = r \cdot p \cdot sen(90) = 12 \cdot 10^6 \cdot 5{,}765 \cdot 10^6 = 6{,}918 \cdot 10^{13}\ kg \cdot m^2/s$$

La dirección de $\vec{p}$ es tangente a la trayectoria circular por lo tanto cambiará con la posición.

La dirección de $\vec{L}$ es perpendicular al plano de la órbita del satélite y no cambiará con la posición, $\vec{L}$ se conserva porque la fuerza gravitatoria es central.

b)

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 12 \cdot 10^6}{5765} = 13078\ s = 3{,}63\ h$$

$$E = -\frac{GMm}{2r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 1000}{2 \cdot 12 \cdot 10^6} = -1{,}66 \cdot 10^{10}\ J$$

22. a) M = masa del planeta, m = masa del satélite, r = radio de la órbita.

$$F_{gravitatoria} \equiv F_{centrípeta}\ ; \quad \frac{GMm}{r^2} = \frac{\mathrm{mv}^2}{\mathrm{r}}\ ;\ \mathrm{v} = \sqrt{\frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{r}}}$$

$$Ec = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{GM}{r} = \frac{GMm}{2r}$$

b)

$$E = Ec + Ep = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r} = \frac{1}{2}\left(-\frac{GMm}{r}\right) = \frac{1}{2}Ep$$

23. a)

$$F_{gravitatoria} \equiv F_{centrípeta}\ ; \quad \frac{GMm}{r^2} = \frac{\mathrm{mv}^2}{\mathrm{r}}\ ; \quad \mathrm{v} = \frac{2\pi\mathrm{r}}{\mathrm{T}};$$

$$M = \frac{r}{G}\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot T^2} = \frac{4\pi^2(4{,}22 \cdot 10^8)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (1{,}77 \cdot 24 \cdot 3600)^2} = 1{,}9 \cdot 10^{27}\ kg$$

b)

$$\mathrm{g} = \frac{GM}{r^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}9 \cdot 10^{27}}{(4{,}22 \cdot 10^8)^2} = 0{,}712\ \mathrm{N/kg}$$

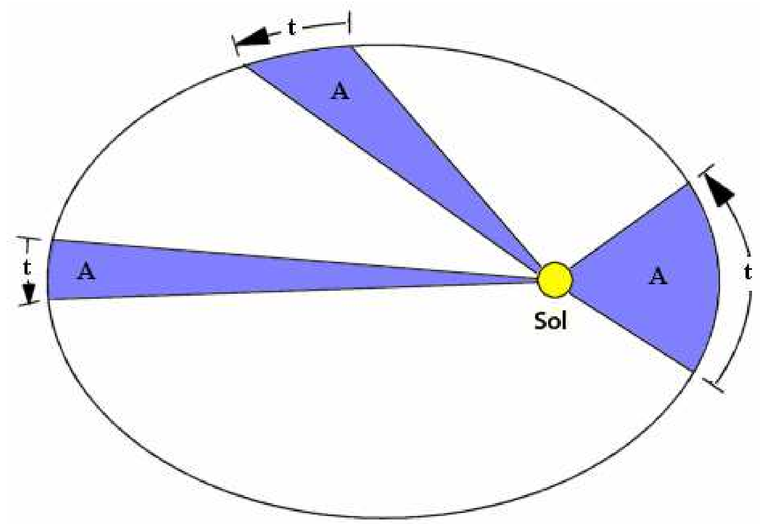
c)

$$\mathrm{v} = \frac{2\pi\mathrm{r}}{\mathrm{T}} = \frac{2\pi \cdot 4{,}22 \cdot 10^8}{1{,}77 \cdot 24 \cdot 3600} = 17338\ \mathrm{m/s}$$

$$Ec = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 8{,}9 \cdot 10^{22} \cdot 17338^2 = 1{,}34 \cdot 10^{31} J$$

d) $L = rmv \cdot sen\ 90 = 4{,}22 \cdot 10^{8} \cdot 8{,}9 \cdot 10^{22} \cdot 17338 = 6{,}51 \cdot 10^{35}\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$

24. a) **2ª ley de Kepler:** El radio vector que une el planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.



La velocidad es máxima en el perihelio (punto más próximo al Sol) porque el radio vector es más corto y ha de moverse más deprisa para barrer la misma área en el mismo tiempo. Por la misma razón la velocidad mínima se da en el afelio (punto más lejano del Sol) donde el radio vector es más largo.

b) **3ª ley de Kepler**: Para cualquier planeta, el cuadrado de su periodo orbital (tiempo que tarda en dar una vuelta alrededor del Sol) es directamente proporcional al cubo de la distancia media al Sol: $T^2 = C \cdot r^3$.

Supongamos un planeta de masa m en órbita circular de radio r, alrededor del Sol (masa = M):

$$F_{gravitatoria} \equiv F_{centrípeta}\ ; \quad \frac{GMm}{r^2} = \frac{\mathrm{mv}^2}{\mathrm{r}}\ ; \quad \frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{r}} = \mathrm{v}^2$$

$$Como\ v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow \frac{GM}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{\mathrm{GM}}\mathrm{r}^3$$

---

25. a) M = masa de la Tierra, m = masa de la Luna, r = radio de la órbita.

$$F_{gravitatoria} \equiv F_{centrípeta}\ ; \quad \frac{GMm}{r^2} = \frac{\mathrm{mv}^2}{\mathrm{r}}\ ; \ \mathrm{v} = \sqrt{\frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{r}}}$$

$$Ec = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{GM}{r} = \frac{GMm}{2r} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{GMm}{r}\right) = -\frac{1}{2}Ep$$

b)

$$v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow \frac{GM}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3$$

---

26. a) M = masa de la Tierra, m = masa del satélite, r = radio de la órbita.

$$F_{gravitatoria} \equiv F_{centrípeta}\ ; \quad \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$r = \frac{GM}{v^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{7500^2} = 7{,}09 \cdot 10^6\ m$$

b)

$$Ep = -\frac{GMm}{r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 100}{7{,}09 \cdot 10^6} = -5{,}63 \cdot 10^9\ J$$

c) $$E = -\frac{GMm}{2r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 100}{2 \cdot 7{,}09 \cdot 10^{6}} = -2{,}81 \cdot 10^{9}\ J$$

d) $$\Delta E = E_{2r} - E_r = -\frac{GMm}{2r} - \left(-\frac{GMm}{r}\right) = \frac{GMm}{r}\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \frac{GMm}{2r}$$
$$= 2{,}81 \cdot 10^{9}\ J$$

27. a) M = masa de la estrella, m = masa del asteroide, r = radio de la órbita.

$$F_{gravitatoria} \equiv F_{centrípeta}\ ; \quad \frac{GMm}{r^2} = \frac{\mathrm{mv}^2}{\mathrm{r}}\ ;\ \mathrm{v} = \sqrt{\frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{r}}}$$
$$Ec = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{GM}{r} = \frac{GMm}{2r} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{GMm}{r}\right) = -\frac{1}{2}Ep$$

b) $$E = Ec + Ep = -\frac{1}{2}Ep + Ep = \frac{1}{2}Ep; \quad -10^{10} = \frac{1}{2}Ep; \quad Ep = -2 \cdot 10^{10}\ J$$
$$Ec = -\frac{1}{2}Ep = 10^{10}\ J$$

28. a) La fuerza gravitatoria es central y por tanto su momento con respecto al Sol es nulo y el momento angular se conserva:

$$L_{perihelio} = L_{afelio} \Rightarrow r_p \cdot m \cdot v_p \cdot sen(90) = r_a \cdot m \cdot v_a \cdot sen(90)$$
$$r_p \cdot v_p = r_a \cdot v_a;\ \ como\ r_p < r_a \Rightarrow v_p > v_a$$

La velocidad en el perihelio es mayor.

b) $\Delta E = W_{no\ conservativo}$; como el trabajo no conservativo es nulo, la energía mecánica se conserva, es igual en el perihelio y en el afelio.

29. a) T=3·365·24·3600=9,46·10^7 s

$$F_{gravitatoria} \equiv F_{centrípeta}\ ; \quad \frac{GMm}{r^2} = \frac{\mathrm{mv}^2}{\mathrm{r}}\ ; \quad \frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{r}} = \mathrm{v}^2$$
$$Como\ v = \frac{2\pi r}{T} \Longrightarrow \frac{GM}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$
$$M = \frac{4\pi^2 \mathrm{r}^3}{\mathrm{GT}^2} = \frac{4\pi^2(10^{11})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (9{,}46 \cdot 10^{7})^2} = 6{,}61 \cdot 10^{28}\ kg$$

b) $$E = -\frac{GMm}{2r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}61 \cdot 10^{28} \cdot 10^{24}}{2 \cdot 10^{11}} = -2{,}21 \cdot 10^{31}\ J$$

c) $$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}61 \cdot 10^{28}}{10^{11}}} = 6641\ m/s$$
$$L = rmv \cdot sen\ 90 = 10^{11} \cdot 10^{24} \cdot 6641 = 6{,}64 \cdot 10^{38}\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$$

d) $$v_2 = \sqrt{\frac{GM}{2r}};\ \ \omega_2 = \frac{v_2}{2r} = \frac{1}{2 \cdot 10^{11}}\sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}61 \cdot 10^{28}}{2 \cdot 10^{11}}}$$
$$= 2{,}35 \cdot 10^{-8}\ \ rad/s$$

30. a)

$$F_{gravitatoria} \equiv F_{centrípeta}\ ; \quad \frac{GMm}{r^2} = \frac{\mathrm{mv}^2}{\mathrm{r}}\ ;\ \ \mathrm{v} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{6{,}71 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{2{,}26 \cdot 6{,}37 \cdot 10^{6}}} = 5264\ m/s$$

b)

$$E_p = -\frac{GM_T m}{r} = -\frac{6{,}71 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 1000}{2{,}26 \cdot 6{,}37 \cdot 10^{6}} = -2{,}77 \cdot 10^{10}\ J$$

c)

$$E = -\frac{GM_T m}{2r} = \frac{E_p}{2} = \frac{-2{,}77 \cdot 10^{10}}{2} = -1{,}39 \cdot 10^{10}\ J$$

d) En el infinito la energía es cero:

$$\Delta E = 0 - (-1{,}39 \cdot 10^{10}) = 1{,}39 \cdot 10^{10}\ J$$

---

31. a) El momento angular se conserva:

$$r_{perigeo} \cdot m_{satélite} \cdot v_{perigeo} \cdot sen(90) = r_{apogeo} \cdot m_{satélite} \cdot v_{apogeo} \cdot sen(90)$$

$$7{,}02 \cdot 10^{6} \cdot 8{,}22 \cdot 10^{3} = 10{,}3 \cdot 10^{6} \cdot v_{apogeo};\ \ v_{apogeo} = 5{,}60 \cdot 10^{3}\ m/s$$

b)

$$L = r_{perigeo} \cdot m_{satélite} \cdot v_{perigeo} \cdot sen(90) = 7{,}02 \cdot 10^{6} \cdot 200 \cdot 8{,}22 \cdot 10^{3} = 1{,}15 \cdot 10^{13}\ kg \cdot m^2/s$$

c)

$$v_{areolar} = \frac{L}{2m} = \frac{1{,}15 \cdot 10^{13}}{2 \cdot 200} = 2{,}875 \cdot 10^{10}\ m^2/s$$

d)

$$a = \frac{r_{perigeo} + r_{apogeo}}{2} = \frac{7{,}02 \cdot 10^{6} + 10{,}3 \cdot 10^{6}}{2} = 8{,}66 \cdot 10^{6}\ m$$

$$E = -\frac{GMm}{2a} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 200}{2 \cdot 8{,}66 \cdot 10^{6}} = -4{,}6 \cdot 10^{9}\ J$$

También se puede calcular sumando la energía cinética y potencial en el perigeo (o en el apogeo):

$$E = \frac{1}{2} m v_{perigeo}^2 - \frac{GMm}{r_{perigeo}} = \frac{1}{2} 200 \cdot (8{,}22 \cdot 10^{3})^2 - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 200}{7{,}02 \cdot 10^{6}} = -4{,}61 \cdot 10^{9}\ \ J$$