Campo Gravitatorio y Propiedades de las Ondas
2ª EVALUACIÓN - 20 de Febrero 2008

CUESTIONES (1 punto)

1.- *Explica qué es el efecto Doppler. ¿Qué diferencia física existe entre que sea el foco el que se desplace o que sea el observador?*

2.- *Deduce la expresión general de la interferencia de dos ondas coherentes en un punto cualquiera P, a partir de la relación trigonométrica:* $sen a + sen b = 2 sen\frac{a+b}{2} \cdot \cos\frac{a-b}{2}$

3.- *Un meteorito de 30 toneladas se dirige directamente hacia la Luna. Sabiendo que se mueve a 200 m/s cuando está a una distancia de 500 000 km, calcúlese la velocidad del impacto sobre la superficie.*
Datos: $M_L = 7{,}23 \cdot 10^{22}$ *kg ;* $R_L = 1750$ *km ; G=* $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ *N*

4.- *Dos satélites A y B, orbitan alrededor de un planeta. Sabiendo que el radio orbital de A es el óctuple que el de B, y que la masa de A es el triple que la de B. Calcula en qué relación están sus periodos.*

PROBLEMAS (3 puntos)

5.- *Un planeta esférico tiene un radio de 3000 km, y la aceleración de la gravedad en su superficie es 6* m/s^2.

a) ¿Cuál es su densidad media?
b) ¿Cuál es la velocidad de escape para un objeto situado en la superficie de este planeta?
Dato : G = $6{,}67 \cdot 10^{-11} N\, m^2 kg^{-2}$

5.- *Un satélite artificial de 150 kg está orbitando a 530 km de altitud sobre la superficie terrestre. Responde:*

a) Deduce la velocidad a la que se mueve y explica qué ocurriría con la velocidad si se cambiara a una órbita más alejada.
b) Calcula la energía que fue necesaria para ponerlo en órbita obviando la rotación terrestre.
Datos: $g_0 = 9{,}8\ m \cdot s^{-2}$, $R_T = 6370$ *km.*

6.- *La ecuación de una onda en una cuerda tensa es:* $y(x, t) = 10^{-2}\, sen\, 6\pi x\, \cos 30\pi t$ *(S.I.)*

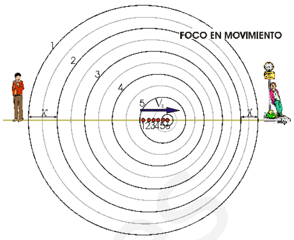
a) Explica las características de dicha onda, e indica su amplitud, frecuencia, longitud de onda y la velocidad con que se propaga.
b) Calcula la amplitud y velocidad de vibración máxima con que oscila el punto situado en x = 0,2 m. Razona si se trata de un nodo, un vientre u otro caso.
c) Realiza un dibujo de la onda.

NOTA: Elige sólo uno de los problemas marcados con el número 5. Recuerda que los problemas hay que explicarlos. Cuida el orden en la exposición, la limpieza y la ortografía.

1.- Explica qué es el efecto Doppler. ¿Qué diferencia física existe entre que sea el foco el que se desplace o que sea el observador?

El efecto Doppler es un fenómeno ondulatorio por el que la frecuencia que se percibe no coincide con la que emite el foco. Tiene lugar cuando foco y/u observador se desplazan.

Cuando es el observador el que se desplaza, la longitud de onda no cambia pero sí la velocidad con que se reciben, que será mayor en el caso de aproximarse al foco con el consiguiente aumento en la frecuencia. En el caso de alejarse, ocurriría al contrario, resulta una frecuencia menor.



Cuando es el foco el que se desplaza, se produce una perturbación en los frentes de onda, agolpándose en el sentido en que se desplaza el foco (disminuyendo la λ) con el consiguiente aumento de frecuencia. A la espalda del foco, por el contrario, se produce un aumento en la longitud de onda y una disminución de frecuencia.

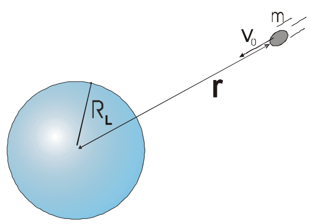
En definitiva, la diferencia estriba en que en el primer caso se conserva la simetría esférica de los frentes de onda respecto al foco, mientras que cuando el foco se mueve se produce una asimetría, como se observa en la ilustración.

2.- Deduce la expresión general de la interferencia de dos ondas coherentes en un punto cualquiera P, a partir de la relación trigonométrica: $sen a + sen b = 2 sen\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}$

Consulta tus apuntes

3.- Un meteorito de 30 toneladas se dirige directamente hacia la Luna. Sabiendo que se mueve a 200 m/s cuando está a una distancia de 500 000 km, calcúlese la velocidad del impacto sobre la superficie.

Datos: M_L= 7,23·10^{22} kg ; R_L=1750 km ; G= 6,67•10^{-11} N



La energía del impacto se puede obtener del balance energético, dado que la fuerza gravitatoria es conservativa. Se cumple que $E_0 = E_F$, es decir, a medida que el meteorito se aproxima la energía potencial va disminuyendo y la energía cinética aumenta en la misma medida:

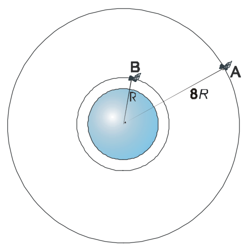
$$\Delta E_c = \Delta E_p \quad \Rightarrow \quad E_{c,F} = E_{c,o} - \Delta E_p$$

$$\tfrac{1}{2}\cancel{m}\cdot v_f^2 = \tfrac{1}{2}\cancel{m}\cdot v_0^2 + GM_L\,\cancel{m}\cdot\left(\frac{1}{R_L}-\frac{1}{r}\right)$$

$$v_f = \sqrt{v_0^2 + 2GM_L\cdot\left(\frac{1}{R_L}-\frac{1}{r}\right)} \xrightarrow[\text{conocidos}]{\text{Sustituyendo datos}} \boxed{v_f = 2350\ m/s}$$

Observa cómo la masa no influye en la velocidad del impacto, tal y como evidenció Galileo para la caída de todos los cuerpos sobre la superficie terrestre.

4.- Dos satélites A y B, orbitan alrededor de un planeta. Sabiendo que el radio orbital de A es el óctuple que el de B, y que la masa de A es el triple que la de B. Calcula la relación entre sus periodos.



La revolución de los satélites alrededor del planeta se rige por la tercera ley de Kepler:

$$\frac{R_A^3}{T_A^2}=\frac{R_B^3}{T_B^2} \Rightarrow \frac{R_A^3}{R_B^3}=\frac{T_A^2}{T_B^2} \Rightarrow \frac{(8R)^3}{R^3}=\frac{T_A^2}{T_B^2} \Rightarrow 512=\frac{T_A^2}{T_B^2}$$

$$y: \ \frac{T_A}{T_B}=\sqrt{512}\simeq 22{,}6 \Rightarrow \boxed{T_A \simeq 22{,}6T_B}$$

Por tanto, el período del satélite más alejado (A) será ocho veces mayor que el del más próximo (B). El dato de la relación de masas es irrelevante.

5.- Un planeta esférico tiene un radio de 3000 km, y la aceleración de la gravedad en su superficie es 6 m/s^2.

a) ¿Cuál es su densidad media?

b) ¿Cuál es la velocidad de escape para un objeto situado en la superficie de este planeta?

Dato : G = 6,67· 10^{-11}N m^{2}kg^{-2}

a) La densidad vendrá dada por: $d = \dfrac{m}{V} = \dfrac{M_p}{\frac{4}{3}\pi \cdot R_p^3}$ *(1)*

Por otro lado, de la expresión de la gravedad en su superficie, podemos deducir que:

$$\text{como}: \quad g_0 = \frac{GM_p}{R_p^2} \Rightarrow \quad M_p = \frac{g_0 \cdot R_p^2}{G} \; (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), tenemos:

$$d = \frac{\frac{g_0 \cdot \cancel{R_p^2}}{G}}{\frac{4}{3}\pi \cdot \cancel{R_p^3}} = \frac{g_0}{\frac{4}{3}\pi \cdot G \cdot R_p} = \frac{6\,\frac{m}{s^2}}{\frac{4}{3}\pi \cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{N\cdot m^2}{kg^2}\cdot 3\cdot 10^6\,m} = \underline{7200\,\tfrac{kg}{m^3}}|$$

b) La velocidad de escape se define como la velocidad necesaria para escapar desde la superficie de un planeta, esto es, aquella velocidad para la que se consigue una energía mecánica igual a cero (energía de un cuerpo situado en el infinito):

$$\frac{1}{2}mv_e^2 + (-G\frac{M\cdot m}{R_p}) = 0$$

Despejando v_e, tenemos:

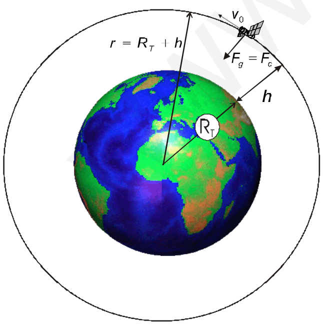
$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_p}{R_p}} = \sqrt{\frac{2\cancel{G}\,\frac{g_0 \cdot R_p^{\cancel{2}}}{\cancel{G}}}{\cancel{R_p}}} = \sqrt{2g_0R_p} = \sqrt{2\cdot 6\,\tfrac{m}{s^2}\cdot 3\cdot 10^6\,m} = \underline{6000\,\tfrac{m}{s}}|$$

5.- Un satélite artificial de 150 kg está orbitando a 530 km de altitud sobre la superficie terrestre. Responde:

a) Deduce la velocidad a la que se mueve y explica qué ocurriría con la velocidad si se cambiara a una órbita más alejada.

b) Calcula la energía que fue necesaria para ponerlo en órbita obviando la rotación terrestre.

Datos: g_0 = 9,8 m·s^{-2} , R_T= 6370 km.



La fuerza responsable del giro (centrípeta), como es evidente, es la fuerza gravitatoria. Por ello podemos decir que:

$$F_g = F_c \quad \Rightarrow \text{ Por tanto: } m\frac{v_o^2}{r} = G\frac{M_T m}{r^2}$$

de aquí, despejando la velocidad orbital (v_0), tenemos:

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}}$$

La expresión obtenida demuestra que la velocidad únicamente dependerá de la altura a la que queramos situar al satélite y de la masa del astro alrededor del cuál girará el satélite pero no de su masa, puesto que no aparece.

Puesto que en el problema no disponemos de los datos G y M, vamos a expresar la v_0 en función de g_0 y R_T.

$$como\ g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2} \Rightarrow GM_T = g_0 R_T^2$$

$$Sustituyendo\ en\ la\ ecuación\ anteiror: \quad v_0 = \sqrt{\frac{g_o R_T^2}{r}} \xrightarrow[valores]{sustituyendo} \boxed{v_0 = 7600\ ^m/_s}$$

Se observa que $v_0 \propto r^{1/2}$, con lo que a mayor distancia menor velocidad. Concretamente, si cuadruplicamos la distancia, por ejemplo, la velocidad orbital habría de ser la mitad.

b) La energía o trabajo necesario podemos calcularlo como diferencia de energías inicial y final.

$$W_{ext} = E_f - E_0 = \left|\frac{1}{2}m\cdot v_0^2 - \frac{\overbrace{GM_T}^{g_0R_T^2}m}{r}\right| + \frac{\overbrace{GM_T}^{g_0R_T^2}m}{R_T} = \frac{1}{2}m\cdot v_0^2 + g_o R_T^2 m\cdot\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 150kg\cdot\left(7600\tfrac{m}{s}\right)^2 + 9{,}8\tfrac{m}{s^2}\cdot\left(6{,}37\cdot 10^6 m\right)^2\cdot 150kg\cdot\left(\frac{1}{6{,}37\cdot 10^6 m} - \frac{1}{6{,}9\cdot 10^6 m}\right) =$$

$$= 4{,}33\cdot 10^9 J + 0{,}72\cdot 10^9 J \simeq \underline{5{,}05\cdot 10^9 J}$$

6.- La ecuación de una onda en una cuerda tensa es: y (x, t) = 10^{-2} sen 6πx cos 30 πt (S.I.)

a) Explica las características de dicha onda, e indica su amplitud, frecuencia, longitud de onda y la velocidad con que se propaga.

b) Calcula la amplitud y velocidad de vibración máxima con que oscila el punto situado en x = 0,2 m. Razona si se trata de un nodo, un vientre u otro caso.

c) Realiza un dibujo de la onda.

a) Por comparación con la ecuación general: y(x,t) = A ·sen kx · cos ωt , vemos que se trata de una onda estacionaria transversal al relacionar la elongación en y con la disposición de los puntos del medio en x.

Comparando la ecuación dada con la ecuación general, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} A = 10^{-2} m = 1cm \\ k = 6\pi\ m^{-1} \\ \omega = 30\pi\ \frac{rad}{s} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{como: } \omega = 2\pi\upsilon \Rightarrow \upsilon = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{30\cancel{\pi}\ ^{rad}/_s}{2\cancel{\pi}\ rad} = \underline{15Hz} \\ \text{como: } k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\cancel{\pi}}{6\cancel{\pi}\ \frac{1}{m}} = \underline{{}^1/_3 m} \end{array}$$

Hemos de advertir que una onda estacionaria no es una onda en el sentido estricto del término. Se trata del movimiento vibratorio de los puntos de un medio en el que la energía no fluye a lo largo de él, de modo que a cada punto le corresponde una amplitud (A_r = A·sen kx) y energía que depende de su posición. Por tanto la amplitud señalada es la máxima, que corresponde a los denominados vientres, mientras que <u>la velocidad de propagación es cero</u>.

b) La ecuación de movimiento para el punto solicitado se obtiene introduciendo el valor de su posición en la ecuación general:

y(x=0,2, t) = 10^{-2} sen 1,2π cos 30πx = 5,9·10^{-3} · cos 30πx (ecuación de un MVAS)

Según la expresión anterior, la amplitud con que oscila el punto considerado es 5,9 mm. Por lo que no se trata de un vientre (A_v= 1 cm) ni de un nodo (A_n=0)

La ecuación de velocidad de dicho punto se obtiene por derivación de la anterior:

v(x=0,2, t) = -30π · 5,9 · 10^{-3} · sen 30πx = -0,55 ·sen 30πx (m/s)

Resultando una velocidad máxima de ±0,55 m/s *c) Para realizar el dibujo hemos de considerar qué movimiento realiza el foco. Introduciendo el valor x=0 en la ecuación general, resulta y(x=0, t) = 0, ya que: sen6πx=0 para x=0. Por tanto, el foco es un nodo. Cada λ/2 se repetirá un nuevo nodo.*

Por tanto, el dibujo sería así: