Problemas de Gravitación

1.- Europa es un satélite de Júpiter que tarda 3'55 días en recorrer su órbita, de 6'71·10^8 m de radio medio, en torno a dicho planeta. Otro satélite de Júpiter, Ganímedes tiene un periodo orbital de 7'15 días. Calcula el radio medio de la órbita.

Datos: T_E = 3'55 días, T_G = 7'15 días, r_E = 6'71·10^8 m

La tercera ley de Kepler o ley de los periodos dice: $\frac{T_E^2}{r_E^3} = \frac{T_G^2}{r_G^3}$

Despejando la incógnita: $r_G = \sqrt[3]{\frac{T_G^2 \cdot r_E^3}{T_E^2}} = \sqrt[3]{\frac{7'15^2 \cdot \left(6'71 \cdot 10^8\right)^3}{3'55^2}} = 1'07 \cdot 10^9$ m

El radio medio de la órbita de Ganímedes es mayor que el de Europa porque su periodo orbital es mayor.

2.- El radio medio de la órbita de Júpiter es 5'203 veces el terrestre. Calcula la duración del año en Júpiter.

Datos: r_J = 5'203 m, T_T = 1 año

Se resuelve con la tercera ley de Kepler: $\frac{T_J^2}{r_J^3} = \frac{T_T^2}{r_T^3}$

Despejando: $T_J = \sqrt{\frac{T_T^2 \cdot r_J^3}{r_T^3}} = \sqrt{\frac{1^2 \cdot (5'203 \cdot r_T)^3}{r_T^3}} = \sqrt{5'203^3} = \sqrt{140'9} = 11'87$ años

3.- Calcula el periodo de revolución de Marte sabiendo que la distancia media de Marte al Sol es de 228 millones de km, la distancia media de la Tierra al Sol de 149'6 millones de km y el periodo de revolución de la Tierra de 365'26 días.

$$\frac{T_M^2}{r_M^3} = \frac{T_T^2}{r_T^3};\rightarrow T_M = \sqrt{T_T^2 \frac{r_M^3}{r_T^3}};\rightarrow T_M = T_T\sqrt{\left(\frac{r_M}{r_T}\right)^3};\rightarrow T_M = 365'26\sqrt{\left(\frac{228}{149'6}\right)^3} = 687'23 \text{días}$$

4.- El periodo de traslación de un planeta es 12 veces mayor que el periodo de traslación de la Tierra alrededor del Sol. Halla la distancia del Sol a ese planeta si la distancia Tierra – Sol es de 149.500.000 km.

$$\frac{T_p^2}{r_p^3} = \frac{T_T^2}{r_T^3};\rightarrow \frac{\left(12T_T\right)^2}{r_p^3} = \frac{T_T^2}{149500000^3};\rightarrow \frac{144}{r_p^3} = \frac{1}{\left(1495 \cdot 10^5\right)^3}$$

$$r_p = \sqrt[3]{\left(1495 \cdot 10^5\right)^3 \cdot 144};\rightarrow r_p = 7'836 \cdot 10^8 \text{km}$$

5.- En el exterior del Sistema Solar se detecta un nuevo planeta enano cuya distancia al Sol es el doble del radio de la orbita de Neptuno. Suponiendo que recorre una órbita circular, ¿cuánto tiempo tardará en dar una vuelta al Sol? Dato: $T_{Neptuno}$ = 5'2·10^9 s.

$$\frac{T_{planeta}^2}{r_{planeta}^3} = \frac{T_{Neptuno}^2}{r_{Neptuno}^3} \Rightarrow \frac{T_{planeta}^2}{2^3 \cdot r_{Neptuno}^3} = \frac{T_{Neptuno}^2}{r_{Neptuno}^3} \Rightarrow T_{planeta}^2 = \frac{T_{Neptuno}^2 \cdot 2^3 \cdot r_{Neptuno}^3}{r_{Neptuno}^3} = T_{Neptuno}^2 \cdot 2^3$$

$$T_{planeta} = \sqrt{8 \cdot T_{neptuno}^2} = \sqrt{8 \cdot (5'2 \cdot 10^9)^2} = 1'5 \cdot 10^{10} \text{ s}$$

6.- Si el radio de la orbita circular de un planeta A es cuatro veces mayor que el de otro B ¿En qué relación están su periodos y sus velocidades medias?

Datos: $r_A = 4 \,.\, r_B$

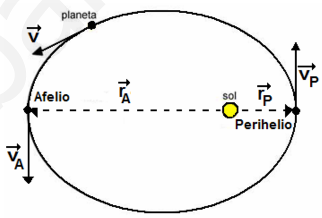
$$r_A = 4r_B\,; \quad \frac{T_A^2}{r_A^3} = \frac{T_B^2}{r_B^3} \to \frac{T_A^2}{64r_B^3} = \frac{T_B^2}{r_B^{\cdot}} \to T_A^2 = 64T_B^2 \to T_A = 8T_B$$

La velocidad $v = \dfrac{s}{t} = \dfrac{2\pi r}{T}$

$$\left.\begin{array}{l} v_A = \dfrac{2\pi \cdot r_A}{T_A} \to \dfrac{2\pi 4r_B}{8T_B} = \dfrac{8\pi r_B}{8T_B} = \pi\dfrac{r_B}{T_B} \\ v_B = \dfrac{2\pi \cdot r_B}{T_B} \end{array}\right\} \qquad \frac{v_A}{v_B} = \frac{\pi\dfrac{r_B}{T_B}}{2\pi\dfrac{r_B}{T_B}} = \frac{1}{2} \to v_B = 2v_A$$

7.- Si la distancia de Mercurio al Sol en el perihelio es de $46'0\cdot10^6$ km y en el afelio de $69'8\cdot10^6$ km: a) Determina la longitud del semieje mayor de la órbita de Mercurio.
b) Calcula la velocidad en el afelio si en el perihelio es de 59 km/s.

Datos: $r_P = 46\cdot10^6$ km, $r_A = 69'8\cdot10^6$, $v_P = 59$ km/s



a) La longitud del eje mayor: $r_P + r_A = 46\cdot10^6 + 69'8\cdot10^6 = 115'8$ km

La longitud del semieje mayor = $\dfrac{115'8}{2}$ = $57'9\cdot10^6$ km

b) Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, su momento $\vec{M} = 0$ y, por tanto, su momento angular $\vec{L}$ es constante: $\vec{L}_A = \vec{L}_P \Rightarrow m_A \cdot (\vec{r}_A \times \vec{v}_A) = m_P \cdot (\vec{r}_P \times \vec{v}_P)$

Como la masa de Mercurio, m es constante ($m_A = m_P$) $\Rightarrow (\vec{r}_A \times \vec{v}_A) = (\vec{r}_P \times \vec{v}_P)$

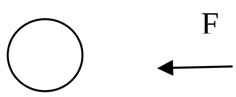
$|\vec{r}_A| \cdot |\vec{v}_A| \cdot \text{sen}\alpha_A = |\vec{r}_P| \cdot |\vec{v}_P| \cdot \text{sen}\alpha_P$

Tanto en el perihelio como en el afelio: α = 90º y sen 90º = 1

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{r}_A| \cdot |\vec{v}_A| = |\vec{r}_P| \cdot |\vec{v}_P| \\ 69'8\cdot10^6 \cdot |\vec{v}_A| = 46\cdot10^6 \cdot 59 \end{array}\right\} \quad |\vec{v}_A| = \frac{2'714\cdot10^9}{69'8\cdot10^6} = 38'9 \text{ km/s}$$

8. Si G = $6'67\cdot10^{-11}$ N m^2/kg^2, la $m_T = 6\cdot10^{24}$ kg y el r_T = 6370 km, determina: a) Magnitud con que la Tierra atrae a una piedra de 100 g. b) Magnitud con la que la piedra atrae a la Tierra. c) El valor de la aceleración que adquiere la piedra. d) Aceleración de la Tierra. e) Fuerza con la que la Tierra atraerá a otra piedra de m = 10 kg y aceleración que adquiere.

a) $F = -G\dfrac{m{\cdot}m_T}{r^2} = 6{,}67{\cdot}10^{-11}\cdot\dfrac{0'1\cdot6\cdot10^{24}}{(6370\cdot10^3)^2} = 0'98\text{N}$



b) Igual pero de sentido contrario

c) El valor de la aceleración que adquiere la piedra: $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{0'98}{0'1} = 9'8\text{m}/\text{s}^2 = g$

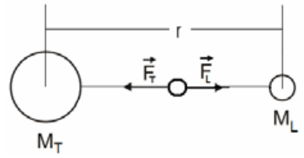
d) Aceleración de la Tierra: $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{0'98}{6\cdot10^{24}} = 1'63\cdot10^{-25}\,\text{m}/\text{s}^2$ Es imperceptible

e) $F = G\dfrac{m{\cdot}m_T}{r^2} = 6'67\cdot10^{-11}\cdot\dfrac{10\cdot6\cdot10^{24}}{(6370\cdot10^3)^2} = 98\text{N} \to a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{98}{10} = 9'8\text{m}/\text{s}^2$

La aceleración es independiente de la masa

9.- Dibuja un esquema de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo de 1000 kg, situado en el punto medio entre la Tierra y la Luna y calcula el valor de la fuerza resultante. La distancia desde el centro de la Tierra hasta el de la Luna es 3'84·10^{8} m, la masa de la Tierra es 5'98·10^{24} kg y la de la Luna es 7'35·10^{22} kg

Datos: m = 1000 kg, M_T = 5'98·10^{24}, M_L 7'35·10^{22} kg, r = 3'84·10^{8} m



Hay que aplicar el principio de superposición. Sobre el cuerpo actúan dos fuerzas: la que ejerce la Tierra sobre el cuerpo dirigida hacia la Tierra y la que ejerce la Luna sobre el cuerpo que está dirigida hacia la Luna.

$$F_T = \frac{6'67\cdot 10^{-11}\cdot 5'98\cdot 10^{24}\cdot 1000}{(1'92\cdot 10^{8})^2} = 10'82 \text{ N} \qquad F_L = \frac{6'67\cdot 10^{-11}\cdot 7'35\cdot 10^{22}\cdot 1000}{(1'92\cdot 10^{8})^2} = 0'13 \text{ N}$$

Las fuerzas tienen la misma dirección pero sentido contrario la resultante:

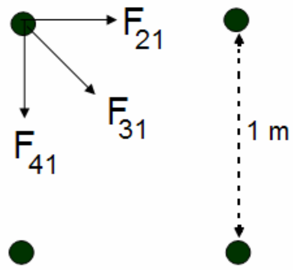
$\sum F = F_T - F_L$ = 10'82 - 0'13 = 10'69 N El sentido es hacia la Tierra ya que $F_T > F_L$

10.- Determina la masa de Marte sabiendo que uno de sus dos satélites, Fobos, describe una orbita circular de 9,27 · 10^{6} m de radio alrededor del planeta de 7,5 horas.

$$m_{Marte} = \frac{4\cdot\pi^2\cdot r^3}{G\cdot T^2} = \frac{4\pi^2\left(9'27\cdot 10^6\right)^3}{6'67\cdot 10^{-11}\cdot(2'7\cdot 10^4)^2} = 6'47\cdot 10^{23}\text{kg}$$

G representa la fuerza con la que se atraen dos masas de 1 kg al situarlas a una distancia de 1 m una de la otra. En este caso se atraen con 6'67 · 10^{-11} N.

11.- Tenemos cuatro partículas iguales de 2 kg de masa en los vértices de un cuadrado de 1 m de lado. Determina el módulo de la fuerza gravitatoria que experimenta debido a la presencia de las otras tres.



Módulos:

$$|\vec{F}_{21}| = G\frac{m_1 m_2}{r_1^2} = 6'67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{2\cdot 2}{1^2} = 2'67\cdot 10^{-10}\text{ N}$$

$$|\vec{F}_{41}| = G\frac{m_1 m_4}{r_3^2} = 6'67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{2\cdot 2}{1^2} = 2'67\cdot 10^{-10}\text{ N}$$

$$r_2 = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \qquad |\vec{F}_{31}| = G\frac{m_1 m_3}{r_2^2} = 6'67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{2\cdot 2}{\sqrt{2}^2} = 1'33\cdot 10^{-10}\text{ N}$$

$\vec{F}_{21}$ = 2'67 ·10^{-10} · cos 0º · $\vec{i}$ + 2'67 ·10^{-10} · sen 0º · $\vec{j}$ = 2'67 ·10^{-10} · $\vec{i}$

$\vec{F}_{41}$ = 2'67 ·10^{-10} · cos 270º · $\vec{i}$ + 2'67 ·10^{-10} · sen 270º · $\vec{j}$ = -2'67 ·10^{-10} · $\vec{j}$

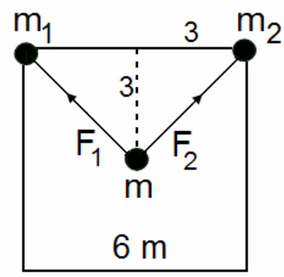
$$\vec{F}_{31} = \left|\vec{F}_{31}\right|\cdot\cos(-45)\,\vec{i} + \left|\vec{F}_{31}\right|\cdot\text{sen}(-45)\,\vec{j} = 1'33\cdot 10^{-10}\cdot 0'707\,\vec{i} + 1'33\cdot 10^{-10}\cdot(-0'707)\,\vec{j} =$$
$$9'4\cdot 10^{-11}\,\vec{i} - 9'4\cdot 10^{-11}\,\vec{j}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{41} = 2'67\cdot 10^{-10}\cdot\vec{i} - 2'67\cdot 10^{-10}\,\vec{j} + 9'4\cdot 10^{-11}\,\vec{i} - 9'4\cdot 10^{-11}\,\vec{j} = 3'61\cdot 10^{-10}\,\vec{i} - 3'61\cdot 10^{-10}\,\vec{j}$$

$$F = \sqrt{\left(3'61\cdot 10^{-10}\right)^2 + \left(3'61\cdot 10^{-10}\right)^2} = 5'1\cdot 10^{-10}\text{ N}$$

12.- Calcula la fuerza gravitatoria que las masas m_1 y m_2 ejercen sobre la masa m si están situadas en un cuadrado de 6 m de lado como el de la figura. Datos: m_1 = 5 kg, m_2 = 8 kg, m = 2 kg

Se sitúa el sistema de referencia en la posición de la masa m.



El valor de r_1 y $r_2 = \sqrt{3^2+3^2}$ = 4'24 m

$$|\vec{F}_1| = G\frac{m_1 m_m}{r_1^2} = 6'67{\cdot}10^{-11}\frac{5\cdot 2}{4'24^2} = 3'7.10^{-11}\ \text{N}$$

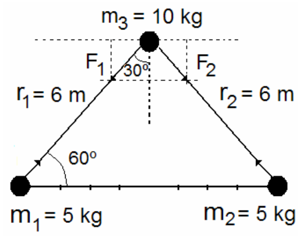
$$|\vec{F}_2| = G\frac{m_2 m_m}{r_2^2} = 6'67{\cdot}10^{-11}\frac{8\cdot 2}{4'24^2} = 5'9.10^{-11}\ \text{N}$$

$$\vec{F}_1 = \left|\vec{F}_1\right|\cdot\cos 135^o\ \vec{i} + \left|\vec{F}_1\right|\cdot\text{sen}\,135^o\ \vec{j} = -3'7\cdot 10^{-11}\cdot 0'707\vec{i} + 3'7\cdot 10^{-11}\cdot 0'707\vec{j} =$$
$$-2'62\cdot 10^{-11}\vec{i} + 2'62\cdot 10^{-11}\vec{j}\ \text{N}$$

$$\vec{F}_1 = \left|\vec{F}_1\right|\cdot\cos 45^o\ \vec{i} + \left|\vec{F}_1\right|\cdot\text{sen}\,45^o\ \vec{j} = 5'9\cdot 10^{-11}\cdot 0'707\vec{i} + 5'9\cdot 10^{-11}\cdot 0'707\vec{j} = 4'2\cdot 10^{-11}\vec{i} + 4'2\cdot 10^{-11}\vec{j}\ \text{N}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (-2'62\cdot 10^{-11}\vec{i} + 2'62\cdot 10^{-11}\vec{j}) + (4'2\cdot 10^{-11}\vec{i} + 4'2\cdot 10^{-11}\vec{j}) = 1'6\cdot 10^{-11}\vec{i} + 6'8\cdot 10^{-11}\vec{j}\ \text{N}$$

13.- En dos de los vértices de un triángulo equilátero de 6 m de lado existen cuerpos de 5 kg de masa. Calcula la fuerza que ambos cuerpos ejercen sobre otro cuerpo de 10 kg de masa que se encuentra en el tercer vértice?



$$|\vec{F}_1| = G\frac{m_1 m_3}{r_1^2} = 6'67{\cdot}10^{-11}\frac{5\cdot 10}{6^2} = 9'26{\cdot}10^{-11}\ \text{N}$$

$$|\vec{F}_2| = G\frac{m_2 m_3}{r_2^2} = 6'67{\cdot}10^{-11}\frac{5\cdot 10}{6^2} = 9'26{\cdot}10^{-11}\ \text{N}$$

$$\vec{F}_1 = \left|\vec{F}_1\right|\cdot\cos 240^o\ \vec{i} + \left|\vec{F}_1\right|\cdot\text{sen}\,240^o\ \vec{j} = 9'26{\cdot}10^{-11}\cdot(-0'5)\,\vec{i} + 9'26\cdot 10^{-11}\cdot(-0'866)\,\vec{j}$$

$$\vec{F}_1 = -4'63{\cdot}10^{-11}\,\vec{i} - 8'02{\cdot}10^{-11}\,\vec{j}\ \text{N}$$

$$\vec{F}_2 = \left|\vec{F}_2\right|\cdot\cos(-60^o)\,\vec{i} + \left|\vec{F}_2\right|\cdot\text{sen}\,(-60^o)\,\vec{j} = 9'26{\cdot}10^{-11}\cdot 0'5\,\vec{i} + 9'26\cdot 10^{-11}\cdot(-0'866)\,\vec{j}$$

$$\vec{F}_1 = 4'63{\cdot}10^{-11}\,\vec{i} - 8'02{\cdot}10^{-11}\,\vec{j}\ \text{N}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -4'63{\cdot}10^{-11}\,\vec{i} - 8'02{\cdot}10^{-11}\,\vec{j} + 4'63{\cdot}10^{-11}\,\vec{i} - 8'02{\cdot}10^{-11}\,\vec{j} = -\,1'604{\cdot}10^{-12}\,\vec{j}\ \text{N}$$

14.- Una persona pesa en la Tierra 500 N. ¿Cuál será su peso a una distancia de dos radios terrestres por encima de la superficie de la Tierra?

El peso del cuerpo es la fuerza gravitatoria con que la Tierra lo atrae.

$$P = F_G = G\frac{m{\cdot}m_T}{r^2}$$

En la superficie: $500 = G\dfrac{m{\cdot}m_T}{r_T^2}$

Dos radios terrestres por encima de la superficie: $P = G\dfrac{m{\cdot}m_T}{(3r_T)^2} = G\dfrac{m{\cdot}m_T}{9\cdot r_T^2}$

Comparando con la expresión anterior: $P = \dfrac{500}{9} = 55'6$ N

15.- El satélite Meteosat gira alrededor de la Tierra en una órbita circular a una altura de 800 km. Calcula la velocidad a la que orbita y el periodo. ¿Es un satélite geoestacionario? Datos: m_T = 5'98.10^{24} kg, r_T = 6400 km.

La distancia a la que se encuentra el satélite será: 6400 + 800 = 7200 km = 7.200.000 m
a)

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot m_T}{r}} = \sqrt{\frac{6'67 \cdot 10^{-11} \cdot 5'98 \cdot 10^{24}}{72000000}} = 7442'99 \text{ m/s}$$

b) El periodo, T, es el tiempo empleado por el satélite en describir una órbita completa. Como la órbita es una circunferencia, su longitud: 2 . π . r.

$$\left. v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \right\} T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 7200000}{7442'99} = 6078'06 \text{ s : } 3600 = 1'69 \text{ h}$$

c) No es geoestacionario porque el periodo no es de 24 h.

16.- Dos satélites de igual masa orbitan en torno a un planeta de masa mucho mayor siguiendo órbitas circulares coplanarias de radio R y 3 · R y recorriendo ambos las órbitas en sentido contrario. Deduce y calcula: a) La relación entre sus periodos. b) La relación entre sus momentos angulares (módulo dirección y sentido).

a) Se puede aplicar la tercera ley de Kepler: $\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3}$

$$\left. \left. \frac{T_1^2}{R^3} = \frac{T_2^2}{(3 \cdot R)^3} \right\} \frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{27 \cdot R^3}{R^3} = 27 \right\} T_2 = \sqrt{27} \cdot T_1$$

Conclusión: El satélite 2 tiene un periodo mayor que el del satélite 1.

b) El momento angular: $\left|\vec{L}\right| = m \cdot |\vec{r}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen}\,\alpha$

En una órbita circular el ángulo entre $\vec{r}$ y $\vec{v}$ es de 90º y el sen 90º = 1. Por lo que: $\left|\vec{L}\right| = m \cdot |\vec{r}| \cdot |\vec{v}|$

La velocidad orbital: $|\vec{v}| = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$ donde M es la masa del planeta. Sustituyendo:

$$\left|\vec{L}_1\right| = m \cdot R \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M}{R}} \qquad \text{y} \qquad \left|\vec{L}_2\right| = m \cdot 3 \cdot R \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M}{3 \cdot R}} = \frac{m \cdot 3 \cdot R}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M}{R}}$$

$$\left. \frac{\left|\vec{L}_2\right|}{\left|\vec{L}_1\right|} = \frac{3}{\sqrt{3}} \right\} \left|\vec{L}_2\right| = \sqrt{3}\,\left|\vec{L}_1\right|$$

Conclusión: el momento angular del satélite 2 es mayor que el del satélite 1, pero su punto de aplicación es el mismo (el planeta M), así como su dirección (perpendicular al plano de sus órbitas) pero sus sentidos son opuestos porque giran en sentido contrario.

17.- Calcula la aceleración de caída libre de un cuerpo en la superficie de la Tierra.
Datos: G = 6'67 · 10^{-11}N·m^2/kg^2; m_T = 6 · 10^{24} kg , r_T = 6370 km

$$a = \frac{G \cdot m_T}{(r_T + h)^2}$$ Para alturas pequeñas se puede despreciar h: $$a = \frac{G \cdot m_T}{(r_T)^2}$$

$$a = \frac{6'67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6370000^2} = 9'86 \text{ m/s}^2$$

18.- Calcula el valor de la constante que aparece en la tercera ley de Kepler para el sistema Solar y para el sistema Tierra-Luna.
Datos: G = 6'67 · 10^{-11}N·m^2/kg^2; m_T= 5'98 · 10^{24} kg, m_S= 1'99 · 10^{30} kg
La tercera ley de Kepler: $\mathbf{T^2 = k\, r^3}$

El valor de la constante, k, que aparece: $k = \dfrac{4\cdot\pi^2}{G\cdot m_2}$.

Para el Sistema Solar: k = $\dfrac{4\cdot\pi^2}{6'67\cdot10^{-11}\cdot1'99\cdot10^{30}}$ = 2'97·10^{-19} N^{-1}·m^{-2}·kg^2

Para el sistema Tierra -Luna: k = $\dfrac{4\cdot\pi^2}{6'67\cdot10^{-11}\cdot5'98\cdot10^{24}}$ = 9'9·10^{-14} N^{-1}·m^{-2}·kg^2

19.- a) ¿Cuál es la aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta esférico cuyo radio es la mitad del de la Tierra y posee la misma densidad media? b) ¿Cuál será el periodo de la órbita circular de un satélite situado a una altura de 400 km respecto a la superficie del planeta? r_T = 6370 km. g_T = 9'8 ms^{-2}

a) $d_T = \dfrac{m_T}{V_T} = \dfrac{m_T}{\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r_T^3}$ $\quad d_p = \dfrac{m_p}{\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r_p^3} = \dfrac{m_p}{\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{r_T}{2}\right)^3}$ $\Big\}$ Como $d_p = d_T$: $\dfrac{m_p}{\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{r_T}{2}\right)^3} = \dfrac{m_T}{\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r_T^3}$

Simplificando: $\dfrac{m_p}{\left(\frac{r_T}{2}\right)^3} = \dfrac{m_T}{r_T^3}$ $\Big\}$ $\dfrac{m_p}{\frac{r_T^3}{8}} = \dfrac{m_T}{r_T^3}$ $\Big\}$ $\dfrac{8\cdot m_p}{r_T^3} = \dfrac{m_T}{r_T^3}$ $\Big\}$ $m_p = \dfrac{m_T}{8}$

$g_p = G\cdot\dfrac{m_p}{r_p^2} = G\dfrac{\frac{m_T}{8}}{\left(\frac{r_T}{2}\right)^2} = G\dfrac{m_T}{2\cdot r_T^2}$ $\Big\}$ Como $g_T = G\cdot\dfrac{m}{r^2}$ $\Rightarrow$ $g_p = \dfrac{g_T}{2}$ = 4'9 m/s^2

b) Periodo, T = $\dfrac{2\cdot\pi\cdot r_{satélite}}{v_{orbital}} = 2\cdot\pi\sqrt{\dfrac{r_{satélite}^3}{G\cdot m_{planeta}}}$

$r_{planeta}$ = 0'5 · r_T = 0'5 · 6'37·10^6 = 3'185 ·10^6 m $\Big\}$ $r_{satélite}$ = 3'185 ·10^6 + 4 ·10^5 = 3'59 ·10^6 m

$g_T = G\cdot\dfrac{m_T}{r_T^2} \Rightarrow m_T = \dfrac{g_T\cdot r_T^2}{G} = \dfrac{9'8\cdot(6'37\cdot10^6)^2}{6'67\cdot10^{-11}}$ = 5'96 ·10^{24} kg $\Rightarrow$ $m_p = \dfrac{m_T}{8}$ = 7'45 ·10^{23} kg

Sustituyendo: T = $2\cdot\pi\sqrt{\dfrac{r_{satélite}^3}{G\cdot m_{planeta}}} = 2\cdot\pi\sqrt{\dfrac{(3'59\cdot10^6)^3}{6'67\cdot10^{-11}\cdot7'45\cdot10^{23}}}$ = 6060 s

Problemas de Selectividad

1.- (Junio 2005) a) Razone cuáles son la masa y el peso en la Luna de una persona de 70 kg. b) Calcule la altura que recorre en 3 s una partícula que se abandona, sin velocidad inicial, en un punto próximo a la superficie de la Luna y explique las variaciones de energía cinética, potencial y mecánica en ese desplazamiento.
Datos: $G = 6'67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$; $M_L = 7'2 \cdot 10^{22}$ kg; $R_L = 1'7 \cdot 10^6$ m

a) La masa es una magnitud característica del cuerpo y representa su inercia al movimiento. Vale 70 kg en la Tierra, en la Luna o flotando en el espacio sideral. Sin embargo, el peso si depende del lugar en que se localice el cuerpo ya que es una fuerza de atracción gravitatoria. Por tanto, en la Luna el peso será distinto al peso en la Tierra. Podemos obtenerlo, a partir de los datos, y empleando la ley de gravitación universal:

$$F_L = \frac{6'67 \cdot 10^{-11} \cdot 7'2 \cdot 10^{22} \cdot 70}{(1'7 \cdot 10^6)^2} = 116 \text{ N}$$

b) Si hablamos de un punto próximo a la superficie lunar, se puede considerar que, en todo el trayecto, la aceleración de la gravedad es constante:

$$g = G \cdot \frac{m_L}{{r_L}^2} = \frac{6'67 \cdot 10^{-11} \cdot 7'2 \cdot 10^{22}}{(1'7 \cdot 10^6)^2} = 1'7 \text{ N/m} = 1'7 \text{ m/s}^2$$

En la caída se da un MRUA, y se puede calcular el espacio recorrido con la expresión:

$$\Delta y = v_I \cdot \Delta t + ½\, g\, \Delta t^2 = 0'5 \cdot 1'7 \cdot 3^2 = 7'65 \text{ m}$$

Especialmente en la Luna, donde ni siquiera existe rozamiento con el aire, la única fuerza que actúa en la caída es la gravedad. Como se trata de una fuerza conservativa, eso supone que la energía mecánica total se conservará. Dicho de otro modo, en la caída el cuerpo gana energía cinética en la misma medida que pierde potencial.

Como: $\Delta Em = \Delta Ec + \Delta Ep = 0 \Rightarrow \Delta Ec = -\Delta Ep \Rightarrow m\, g\, \Delta y = -½\, m\, v^2$

2.- (Junio 2007) Suponga que la masa de la Tierra se duplicara.
a) Calcule razonadamente el nuevo periodo orbital de la Luna suponiendo que su radio orbital permanece constante.
b) Si, además de duplicarse la masa terrestre, se duplicara su radio, ¿cuál sería el valor de g en la superficie terrestre?
$G = 6'67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$; $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6370$ km, $R_L = 1'74 \cdot 10^6$ m

Dado que la masa de la Tierra se duplica la atracción gravitatoria aumentará por lo que la Luna deberá moverse con mayor velocidad para mantener el radio de giro.

La fuerza centrípeta que mantiene a la Luna en su órbita es la fuerza gravitatoria:

$$\frac{m_L \cdot v^2}{r} = \frac{G \cdot m_T \cdot m_L}{r^2},$$

despejando v: $v_1 = \sqrt{\frac{G \cdot m_T}{r}}$ (velocidad orbital de la Luna)

Si la masa se duplica: $v_2 = \sqrt{\frac{G \cdot 2 \cdot m_T}{r}} = \sqrt{2}\,.\, v_1$

El periodo es el tiempo que tarda la Luna en hacer un giro completo alrededor de la Tierra y se calcula:

$$T_1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v_1} \quad \text{y} \quad T_2 = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v_2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{\sqrt{2} \cdot v_1}$$

$$\left.\frac{T_1}{T_2} = \frac{\dfrac{2 \cdot \pi \cdot r}{v_1}}{\dfrac{2 \cdot \pi \cdot r}{\sqrt{2} \cdot v_1}} = \sqrt{2} \quad \right\} \quad T_2 = \frac{T_1}{\sqrt{2}}$$

El nuevo periodo lunar sería $\sqrt{2}$ veces más pequeño que el real. Como el periodo lunar es de unos 28 días, pasaría a ser de 19'8 días

b) La gravedad terrestre viene dada por: $g_1 = G \cdot \frac{m_T}{{r_T}^2}$

Si se duplican masa y radio simultáneamente:

$$g_2 = G \cdot \frac{2 \cdot m_T}{(2 \cdot r_T)^2} = G \cdot \frac{2 \cdot m_T}{4 \cdot {r_T}^2} = \frac{g_1}{2} = \frac{9'8}{2} = 4'9 \text{ m/s}^2$$

3.- (Junio 2008) Un satélite del sistema de posicionamiento GPS, de 1200 kg, se encuentra en una, órbita circular de radio 3R$_T$.
a) Calcule la variación que ha experimentado el peso del satélite respecto del que tenía en la superficie terrestre.
b) Determine la velocidad orbital del satélite y razone si la órbita descrita es geoestacionaria. G = 6'67 ·10^{-11} Nm^{2}kg^{-2}; M$_T$ = 6 ·10^{24} kg; R$_T$ = 6400 km

a) El peso es la fuerza con la Tierra atrae al satélite y depende según la ley de la gravitación universal, de la posición del mismo:

El peso en la superficie de la Tierra será: $F_1 = \frac{G \cdot m_T \cdot m_S}{{r_T}^2}$

El peso en una posición 3 . r$_T$ será: $F_2 = \frac{G \cdot m_T \cdot m_S}{(3 \cdot r_T)^2} = \frac{G \cdot m_T \cdot m_S}{9 \cdot {r_T}^2} = \frac{F_1}{9}$

El peso en la posición indicada será 9 veces más pequeño.

b) La fuerza centrípeta que mantiene al satélite en su órbita es la fuerza gravitatoria:

$$\frac{m_S \cdot v^2}{3 \cdot r_T} = \frac{G \cdot m_T \cdot m_S}{(3 \cdot r_T)^2}, \text{ despejando v: } v = \sqrt{\frac{G \cdot m_T}{3 \cdot r_T}} = \sqrt{\frac{6'67 \cdot 10^{-11} \cdot 6'0 \cdot 10^{25}}{3 \cdot 6'4 \cdot 10^6}} = 4600 \text{ m/s}$$

Partiendo de las expresiones de la velocidad angular: $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$ y $\omega = \frac{v}{r}$

$$\left.\frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{v}{r} \right\} \; T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v} \Rightarrow \text{ El periodo de revolución: } T = \frac{2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 6'4 \cdot 10^6}{4600} = 26212\text{'}2 \text{ s} = 7'3 \text{ h}$$

No se trata de un satélite geoestacionario ya que algo más de tres vueltas a la Tierra cada día.

4.- (Junio 2013) a) Explique qué es la velocidad orbital y deduzca su expresión para un satélite que describa una órbita circular alrededor de la Tierra.
b) Dos satélites A y B de distinta masa ($m_A > m_B$) describen órbitas circulares de idéntico radio alrededor de la Tierra. Razone la relación que guardan sus respectivas velocidades y sus energías potenciales.

Si un objeto, de masa m_1, describe una órbita circular alrededor de otro, de masa m_2, la velocidad orbital es la velocidad que debe llevar el objeto 1 para mantenerse en órbita alrededor del objeto 2. Para calcula esta velocidad:

La fuerza centrípeta es proporcionada por la fuerza de atracción entre los dos cuerpos: $F_c = F_g$

$$\frac{m_1 \cdot v^2}{r} = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2}, \text{ despejando v:} \qquad v = \sqrt{\frac{G \cdot m_2}{r}} \text{ (velocidad orbital del planeta)}$$

Esta expresión indica que la velocidad orbital del objeto no depende de su masa sino de la masa del objeto alrededor del cual orbita y del radio de la órbita.

b) Como se ve por la fórmula anterior, la velocidad no depende de la masa del satélite, por lo que, si describen órbitas del mismo radio deben llevar la misma velocidad.

En cuanto a la energía potencial se puede calcular con la expresión: $Ep = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_{Tierra}}{r}$

Como el radio de la órbita es el mismo, la energía potencial dependerá de la masa. El satélite A tiene mayor masa que el B, por lo que la energía potencial de B es mayor ya que el signo de la fórmula es negativo.