FÍSICA - 2º BACHILLERATO
INTERACCIÓN GRAVITATORIA - HOJA 1

1. Describe el modelo planetario de Ptolomeo.
   a) Ptolomeo utiliza epiciclos y deferentes. ¿Qué son? ¿Por qué hace uso de este artificio?
   b) El modelo de Ptolomeo fue aceptado en Europa durante quince siglos. ¿Cuáles son las razones de que tuviera una validez tan larga?

2. En el siglo XVI, Copernico propone un nuevo modelo planetario. Describe sus ideas principales. ¿Qué tipo de objeciones se le hicieron al modelo de Copernico?

3. Aunque el modelo de Copernico es más sencillo que el de Ptolomeo, aún debe hacer uso de epiciclos y deferentes, ¿cuál es la razón?

4. De acuerdo con la primera Ley de Kepler, ¿cómo son las órbitas de los planetas? ¿Es acertado suponer que son circulares en algún caso? ¿Por qué?

5. Explica qué son el afelio y el perihelio. Según la Ley de las áreas, ¿cuándo es mayor la velocidad de un planeta, en el afelio o en el perihelio?

6. Si el semieje mayor de un planeta es el doble que el de otro planeta, ¿qué relación existe entre los periodos de revolución de ambos?

7. Escribe la fórmula que representa la Ley de la Gravitación Universal de Newton y explica el significado de cada uno de sus términos. ¿Por qué decimos que esta Ley es universal?

8. Dos bolas de acero de masas 8 y 6 kg respectivamente están colocadas a 2 m de distancia medida desde sus centros. ¿Cuánto vale su interacción gravitatoria?
   Sol. $8 \cdot 10^{-10}$ N

9. La masa de la Tierra es $6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg y la masa de la Luna $7{,}2 \cdot 10^{22}$ kg. Si la fuerza gravitatoria entre ellas es $1{,}9 \cdot 10^{20}$ N, ¿qué distancia hay entre el centro de la Tierra y el de la Luna?
   Sol. $3{,}9 \cdot 10^{8}$ m

10. Tres esferas uniformes de masas 2, 4 y 6 kg se encuentran situadas respectivamente en los puntos (0,3), (0,0) y (4,0), donde todas las distancias están medidas en metros. Calcula la fuerza gravitatoria resultante sobre la masa de 4 kg.
    Sol. $11{,}6 \cdot 10^{-11}$ N

11. Marte tiene dos satélites llamados Fobos y Deimos, cuyas órbitas tienen radios de 9400 y 23000 km respectivamente. Fobos tarda 7,7 h en dar una vuelta alrededor del planeta. Aplicando las leyes de Kepler, halla el periodo de Deimos.
    Sol. 29,4 h

12. El radio de la Tierra es aproximadamente de 6370 km. Si elevamos un objeto de 20 kg de masa a una altura de 160 km sobre la superficie de la Tierra, ¿cuánto pesa el objeto a esa altura? (Masa de la Tierra = $6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg)
    Sol. $1{,}9 \cdot 10^{2}$ N

13. Suponiendo que la Luna gira en torno a la Tierra en una órbita de radio $3{,}84 \cdot 10^{5}$ km con un periodo de 27,3 días, ¿cuál será el semieje mayor de la órbita de un satélite que gira en torno a la Tierra con un periodo de 3,0 h?
    Sol. $1{,}1 \cdot 10^{4}$ km

FÍSICA - 2º BACHILLERATO

INTERACCIÓN GRAVITATORIA - HOJA 1

SOLUCIONES

1. a) La Tierra está situada en el centro del universo. Cada planeta describe una trayectoria circular uniforme (epiciclo) centrada en un punto que a su vez describe una trayectoria circular uniforme en torno a la Tierra (deferente). Debe hacer uso de este artificio geométrico para adecuar su modelo teórico a la observación empírica, en especial, al movimiento retrógrado de los planetas.
   b) Por un lado, el geocentrismo estaba en plena consonancia con el paradigma cristiano, por otro, el modelo se ajustaba con gran precisión a las observaciones, permitiendo incluso predecir eclipses con gran exactitud.

2. El Sol está situado en el centro del universo y todos los planetas giran a su alrededor. La Luna gira alrededor de la Tierra. Todas las trayectorias de los astros son circulares, con movimiento uniforme.

   El modelo copernicano no explicaba satisfactoriamente la falta de observación de la paralaje estelar (cambio en la posición aparente de las estrellas debido al movimiento de la Tierra). Además se enfrentaba al paradigma cristiano: al desplazar a la Tierra del centro del universo, ponía en entredicho el papel preponderante que Dios ha concedido al ser humano.

3. Mantiene el movimiento circular uniforme, y esto le impide ajustarse con precisión a las observaciones empíricas, a no ser que se introduzcan epiciclos y deferentes.

4. Las órbitas son elípticas, con el Sol en uno de los focos de la elipse. En la mayor parte de los casos la excentricidad de las elipses planetarias es tan pequeña que, en primera aproximación, podemos suponer que son trayectorias circulares. Si los cálculos requieren una mayor precisión, hay que considerar las elipses.

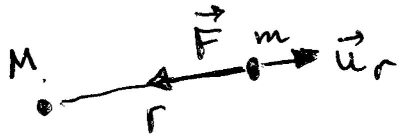
5. El afelio es el punto de la órbita de un planeta más lejano al Sol. El perihelio, el más cercano. La velocidad de los planetas es máxima en el perihelio y mínima en el afelio.

$\boxed{6.}$ $a_1 = 2a_2$

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} \Rightarrow \frac{T_1^2}{(2a_2)^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} \Rightarrow \frac{T_1^2}{8a_2^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}$$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{8a_2^3}{a_2^3} = 8 \Rightarrow T_1^2 = 8T_2^2 \Rightarrow \boxed{T_1 = \sqrt{8}\cdot T_2}$$

$\boxed{7.}$ $$\boxed{\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{u}_r}$$



G: cte. gravitatoria

$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ N\,m^2\,kg^{-2}$

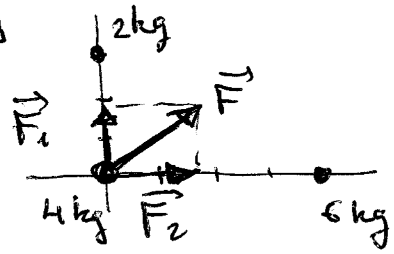
r: distancia entre M y m

$\vec{u}_r$: vector unitario. El signo "menos" indica que $\vec{F}$ tiene sentido opuesto a $\vec{u}_r$

La L.G.U. se aplica a cualquier par de cuerpos del Universo.

8. $F = \frac{GMm}{r^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 8 \cdot 6}{2^2} = \boxed{8 \cdot 10^{-10}\ N}$

10



$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$

$F_1 = \frac{GMm}{r^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 4}{3^2} = 5{,}93 \cdot 10^{-11}\ N$

$F_2 = \frac{GMm}{r^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 4}{4^2} = 1 \cdot 10^{-10}\ N$

$F = \sqrt{(5{,}93 \cdot 10^{-11})^2 + (1 \cdot 10^{-10})^2} = \boxed{1{,}16 \cdot 10^{-10}\ N = 11{,}6 \cdot 10^{-11}\ N}$

9 $F = \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{GMm}{F}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 7{,}2 \cdot 10^{22}}{1{,}9 \cdot 10^{20}}}$

$\boxed{r = 3{,}9 \cdot 10^{8}\ m}$

11 $\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} \Rightarrow T_2 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{3/2} \cdot T_1 = \left(\frac{23000}{9400}\right)^{3/2} \cdot 7{,}7 = \boxed{29{,}47\ h}$

12 $P = F_{GRAV} = \frac{GMm}{(R+h)^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 20}{(6370000 + 160000)^2} = \boxed{1{,}9 \cdot 10^{2}\ N}$

13 $\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} \Rightarrow a_2 = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{2/3} \cdot a_1 = \left(\frac{3}{27{,}3 \cdot 24}\right)^{2/3} \cdot 3{,}84 \cdot 10^{8}$

$\boxed{a_2 = 1{,}1 \cdot 10^{7}\ m = 1{,}1 \cdot 10^{4}\ km}$

FÍSICA - 2º BACHILLERATO
INTERACCIÓN GRAVITATORIA - HOJA 2

1. Dos partículas de masas M_1 y M_2 que se encuentran separadas por una distancia r se atraen mutuamente con una fuerza de módulo F debida a su interacción gravitatoria.
   a) Si la masa M_2 se triplica, ¿cómo cambia el módulo de la fuerza?
   b) En ese caso, ¿cuánto debería valer M_1 para que el módulo de la fuerza volviera a ser el del principio?

2. Dos partículas de masas M y m que se encuentran separadas por una distancia r se atraen mutuamente con una fuerza de módulo F debida a su interacción gravitatoria. ¿A qué distancia habrá que colocar ambas partículas para que el módulo de la fuerza disminuya hasta alcanzar las 4/9 partes de su valor inicial?

3. ¿En qué punto de la recta que une la Tierra con la Luna hay que colocar una partícula de masa m para que permanezca en reposo en dicho punto?

   Datos:

Masa de la Tierra:	$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg
Masa de la Luna:	$M_L = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg
Distancia Tierra-Luna:	$d = 3{,}84 \cdot 10^{8}$ m

4. Suponiendo que un planeta de masa m se mueve alrededor del Sol con movimiento circular uniforme,
   a) demuestra que la fuerza con la que el planeta es atraído por el Sol es inversamente proporcional al cuadrado del radio.
   b) Haciendo uso de la Ley de la Gravitación Universal, halla la expresión de la constante que aparece en la Tercera Ley de Kepler.

FÍSICA - INT. GRAVITATORIA - HOJA 2 - SOLUCIONES

1

a) $F = \dfrac{G M_1 M_2}{r^2}$ $\quad \boxed{M_2' = 3M_2} \Rightarrow F' = \dfrac{G M_1 3M_2}{r^2} = \dfrac{3 G M_1 M_2}{r^2}$

$$\boxed{F' = 3F}$$

b) $M_1' = ?$ $\quad F' = F \Rightarrow \dfrac{\cancel{G} M_1' 3\cancel{M_2}}{\cancel{r^2}} = \dfrac{\cancel{G} M_1 \cancel{M_2}}{\cancel{r^2}}$

$M_2' = 3M_2$

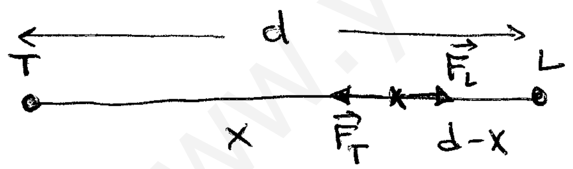
$$3M_1' = M_1 \Rightarrow \boxed{M_1' = \frac{M_1}{3}}$$

2 $\quad F = \dfrac{GMm}{r^2}$ $\quad F' = \dfrac{4F}{9}$ $\quad ¿r'?$

$$F' = \frac{4F}{9} \Rightarrow \frac{\cancel{GMm}}{r'^2} = \frac{4\,\cancel{GMm}}{9r^2} \Rightarrow 9r^2 = 4r'^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r' = \sqrt{\frac{9}{4}} \cdot r \Rightarrow \boxed{r' = \frac{3}{2} r}$$

3



$F_T = F_L$

$$\frac{\cancel{G} M_T \cancel{m}}{x^2} = \frac{\cancel{G} M_L \cancel{m}}{(d-x)^2} \Rightarrow (d-x)^2 M_T = x^2 M_L$$

$$(d-x)^2 \frac{M_T}{M_L} = x^2 \qquad \frac{M_T}{M_L} = 81,4 \equiv k$$

$$(d-x)^2 \cdot k = x^2 \Rightarrow kd^2 - 2dkx + kx^2 = x^2$$

$$\boxed{(k-1)x^2 - 2dkx + kd^2 = 0}$$

$$k-1 = 81{,}4-1 = 80{,}1$$

$$2dk = 2\cdot 3{,}84\cdot 10^{8}\cdot 81{,}4 = 6{,}25\cdot 10^{10}$$

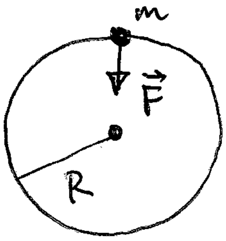
$$kd^2 = 81{,}4\cdot(3{,}84\cdot 10^{8})^2 = 1{,}2\cdot 10^{19}$$

$$80{,}1\,x^2 - 6{,}25\cdot 10^{10}\,x + 1{,}2\cdot 10^{19} = 0$$

$$x = \frac{6{,}25\cdot 10^{10} \pm \sqrt{(6{,}25\cdot 10^{10})^2 - 4\cdot 80{,}4\cdot 1{,}2\cdot 10^{19}}}{2\cdot 80{,}4}$$

$$x = \frac{6{,}25\cdot 10^{10} \pm \sqrt{3{,}90\cdot 10^{21} - 3{,}86\cdot 10^{21}}}{160{,}8} = \begin{cases} \cancel{4{,}28\cdot 10^{8}}\ m \\ \boxed{3{,}49\cdot 10^{8}\ m} \end{cases}$$

$\boxed{4}$ a)



$$F = m a_c \Rightarrow F = \frac{m v^2}{R} = \frac{m\, 4\pi^2 R^2}{R\, T^2} \Rightarrow$$

$$v = \frac{2\pi R}{T} \quad \boxed{MCU}$$

$$\Rightarrow F = \frac{4\pi^2 m R}{T^2} = \frac{4\pi^2 m R}{k R^3} \Rightarrow \boxed{F = \frac{4\pi^2 m}{k R^2}}$$

$$T^2 = k R^3 \quad \boxed{3^{a}\ \text{LEY KEPLER}}$$

b) $$F = \frac{4\pi^2 m}{k R^2} \Rightarrow \frac{G M \cancel{m}}{\cancel{R^2}} = \frac{4\pi^2 \cancel{m}}{k \cancel{R^2}}$$

M = masa del Sol

$$\Rightarrow \boxed{k = \frac{4\pi^2}{G M}}$$

FÍSICA - 2º BACHILLERATO
INTERACCIÓN GRAVITATORIA - HOJA 3

.

1. Una fuerza de 20 N actúa sobre una partícula que se desplaza 5 m a lo largo de una trayectoria rectilínea. Calcula el trabajo realizado por dicha fuerza en los casos siguientes:
   a) La fuerza tiene la misma dirección y sentido que el desplazamiento.
   b) La fuerza se opone al desplazamiento.
   c) La fuerza forma un ángulo de 30º con la trayectoria.
   d) La fuerza forma un ángulo de 90º con la trayectoria.

   Sol. a) 100 J b) -100 J c) 86,6 J d) 0 J

2. Indica en cuál de las situaciones anteriores la partícula recibe energía y en cuál la pierde como consecuencia del trabajo realizado por la fuerza que actúa sobre ella. ¿Qué sucede en el caso d)?

3. ¿Qué es una fuerza conservativa? Pon dos ejemplos.

4. Una fuerza conservativa actúa sobre una partícula a lo largo de una trayectoria que comienza y acaba en el mismo punto del espacio. ¿Qué trabajo realiza esta fuerza sobre la partícula?

5. Escribe el enunciado del Teorema de la Energía potencial y explica su significado físico.

6. Analiza si la fuerza de rozamiento puede ser conservativa en algún caso.

7. Dos masas de 4 y 5 kg respectivamente se encuentran situadas a una distancia de 10 m una de otra. Halla la energía potencial gravitatoria asociada a este sistema.
   Sol. $-1,3\cdot10^{-10}$ J

8. ¿A qué distancia deben estar situadas dos masas de 2 y 5 kg respectivamente para que la energía potencial gravitatoria del sistema sea igual a -10^{3} J?
   Sol. $6,67\cdot10^{-13}$ m

9. Una partícula de 3 kg de masa se halla situada a 12 m de otra con una masa de 2 kg. Si las separamos hasta que entre ambas exista una distancia de 60 m, ¿cuánto varía su energía potencial?
   Sol. $2,7\cdot10^{-11}$ J

10. Una partícula de 15 kg de masa se desplaza sobre una superficie esférica centrada en otra partícula de 20 kg de masa. ¿Experimenta alguna variación su energía potencial? Explica por qué. ¿Qué nombre recibe este tipo de superficies?

FÍSICA - INT. GRAVITATORIA - HOJA 3 - SOLUCIONES

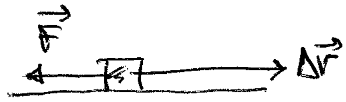
1

a)

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha$$

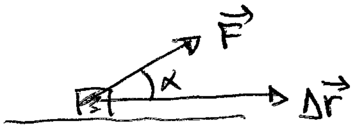
$$W = 20 \cdot 5 \cdot \cos 0^\circ = \boxed{100\ J}$$

b)



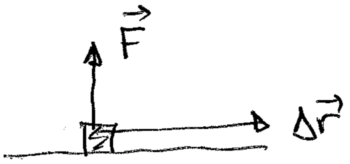
$$W = 20 \cdot 5 \cdot \cos 180^\circ = \boxed{-100\ J}$$

c)



$$W = 20 \cdot 5 \cdot \cos 30^\circ = \boxed{86{,}6\ J}$$

d)



$$W = 20 \cdot 5 \cdot \cos 90^\circ = \boxed{0\ J}$$

2 Recibe energía en a) y c) ya que $W>0$

Pierde energía en b), $W<0$

En d) la fuerza no realiza trabajo.

3 Una fuerza es conservativa cuando el trabajo que realiza entre dos puntos cualesquiera del espacio es independiente del camino seguido.

En particular, si la trayectoria es cerrada, $W=0$.

Son conservativas la fuerza gravitatoria y la electrostática.

4 Si la trayectoria es cerrada, una fuerza conservativa realiza trabajo nulo.

[5] $W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = E_{pA} - E_{pB}$

$\vec{F}_c \equiv$ CONSERVATIVA.

El trabajo realizado por las fuerzas conservativas se invierte en variar la energía potencial.

[6] Como la fuerza de rozamiento se opone siempre al movimiento, realiza siempre un $W < 0$. Aunque la trayectoria sea cerrada, W será siempre negativo.

[7] $E_p = -\frac{GMm}{r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 4 \cdot 5}{10} = \boxed{-1{,}3 \cdot 10^{-10}\ J}$

[8] $r = -\frac{GMm}{E_p} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 5}{(-10^3)} = \boxed{6{,}67 \cdot 10^{-13}\ m}$

[9] $E_{p_A} = -\frac{GMm}{r_A} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 3 \cdot 2}{12} = -3{,}34 \cdot 10^{-11}\ J$

$E_{p_B} = -\frac{GMm}{r_B} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 3 \cdot 2}{60} = -6{,}67 \cdot 10^{-12}\ J$

$\Delta E_p = E_{pB} - E_{pA} = -6{,}67 \cdot 10^{-12} - (-3{,}34 \cdot 10^{-11}) = \boxed{2{,}7 \cdot 10^{-11}\ J}$

[10] La E_p no varía, ya que r es constante. La esfera es una superficie equipotencial.

FÍSICA - 2º BACHILLERATO

INTERACCIÓN GRAVITATORIA - HOJA 4

1. Un cuerpo de masa m se eleva desde la superficie de la Tierra hasta una altura h.
   a) Escribe la expresión general que debemos utilizar para calcular la variación que experimenta su energía potencial gravitatoria.
   b) En ocasiones, la expresión anterior se puede sustituir por otra aproximada, ¿cuál es? ¿Qué condición debe cumplirse para que podamos utilizar esta aproximación?

2. Un cuerpo de 100 kg de masa se eleva desde el nivel del mar hasta una altura de 2000 km.
   a) Calcula cuánto varía su energía potencial gravitatoria.
   b) Repite el cálculo utilizando esta vez la expresión $\Delta E_p = mgh$. ¿Qué error se comete al usar esta expresión? Según este resultado, ¿es lícito utilizarla en este caso?

   Sol. a) $1{,}5 \cdot 10^9$ J b) $2 \cdot 10^9$ J

3. Una masa de 50 kg se eleva desde la superficie hasta una altura de 100 m. Halla la variación de su energía potencial.

   Sol. $4{,}9 \cdot 10^4$ J

4. Un objeto de 20 kg de masa se encuentra en reposo a una altura de 40 m sobre el nivel del mar. Si lo elevamos hasta una altura de 90 m respecto al nivel del mar, ¿cuánto varía su energía potencial?

   Sol. $9{,}8 \cdot 10^3$ J

5. Se lanza un satélite de $5 \cdot 10^3$ kg de masa desde la superficie de la Tierra para situarlo en una órbita a 1000 km de dicha superficie. ¿Cuánto varía la energía potencial gravitatoria del satélite?

   Sol. $4{,}3 \cdot 10^{10}$ J

6. Un satélite de 4000 kg describe una órbita circular de $5 \cdot 10^3$ km de radio alrededor de la Tierra, con una velocidad de $9 \cdot 10^3$ m/s. Calcula su energía mecánica.

   Sol. $-1{,}6 \cdot 10^{11}$ J

7. Un objeto de 4 kg de masa es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/s. Despreciando el rozamiento con el aire, calcula la altura máxima que alcanzará.

   Sol. 20,4 m

8. Si en el ejercicio anterior suponemos que el rozamiento consume el 10% de la energía cinética inicial, ¿qué altura máxima alcanzará el objeto lanzado?

   Sol. 18,4 m

9. Se lanza verticalmente hacia arriba un cuerpo de 225 g de masa con una velocidad de 100 m/s y vuelve al punto de partida con una velocidad de 95 m/s.
   a) ¿Qué trabajo ha realizado la fuerza de rozamiento?
   b) Si el cuerpo alcanzó una altura de 495 m, ¿Cuál es el valor medio de la fuerza de rozamiento?

   Sol. a) 109,7 J b) 0,11 N

10. Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad de 4000 m/s. Calcula la altura máxima que alcanzará.

    Sol. $9 \cdot 10^5$ m

FÍSICA - INT. GRAVITATORIA - HOJA 4 - SOLUCIONES

$\boxed{1}$ a) $\Delta E_p = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)$

b) $\Delta E_p = mgh$, Válida cuando $h << R$

$\boxed{2}$ a) h es comparable a R, por tanto:

$$\Delta E_p = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)$$

$$\Delta E_p = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 100 \left(\frac{1}{6{,}4 \cdot 10^6} - \frac{1}{6{,}4 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^6}\right)$$

$$\boxed{\Delta E_p = 1{,}5 \cdot 10^9 \ J}$$

b) $\Delta E_p = mgh = 100 \cdot 9{,}8 \cdot 2 \cdot 10^6 = 1{,}96 \cdot 10^9 \ J \simeq \boxed{2 \cdot 10^9 \ J}$

$$\text{Error} = \left|\frac{1{,}5 \cdot 10^9 - 2 \cdot 10^9}{1{,}5 \cdot 10^9}\right| \cdot 100 = \underline{\underline{33\ \%}}$$

MUY GRANDE

$\boxed{3}$ $\frac{h}{R} = \frac{100}{6{,}4 \cdot 10^6} \simeq 2 \cdot 10^{-5}$ → Podemos usar la aproximación.

$$\Delta E_p = mgh = 50 \cdot 9{,}8 \cdot 100 = \boxed{4{,}9 \cdot 10^4 \ J}$$

$\boxed{4}$ $h/R \simeq 6 \cdot 10^{-6}$ ⇒ $\Delta E_p = mgh$ $h = 90 - 40 = 50 \ m$

$$\Delta E_p = 20 \cdot 9{,}8 \cdot 50 = \boxed{9{,}8 \cdot 10^3 \ J}$$

5 h es comparable a R.

$$\Delta E_p = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)$$

$$\Delta E_p = 6{,}67\cdot10^{-11}\cdot 6\cdot10^{24}\cdot 5\cdot10^{3}\left(\frac{1}{6{,}4\cdot10^{6}} - \frac{1}{6{,}4\cdot10^{6}+1\cdot10^{6}}\right)$$

$$\boxed{\Delta E_p = 4{,}3\cdot10^{10}\ \text{J}}$$

6 $$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

$$E_m = \frac{1}{2}\cdot 4000\cdot(9\cdot10^{3})^2 - \frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot 6\cdot10^{24}\cdot 4000}{5\cdot10^{6}}$$

$$\boxed{E_m = -1{,}6\cdot10^{11}\ \text{J}}$$

7 Como 20 m/s es una velocidad pequeña, podemos suponer que $h \ll R$, entonces:

$$E_{m_B} = E_{m_A}$$

$$\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g} = \frac{20^2}{2\cdot 9{,}8} = \boxed{20{,}4\ \text{m}}$$

8 $$E_{m_B} = E_{m_A} - W_{roz.} = E_{m_A} - \frac{10}{100}E_{m_A} = \frac{90}{100}E_{m_A}$$

$$\cancel{m}gh = \frac{90}{100}\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 \Rightarrow h = \frac{90\cdot v^2}{2g\cdot 100} = \frac{90\cdot 20^2}{2\cdot 9{,}8\cdot 100}$$

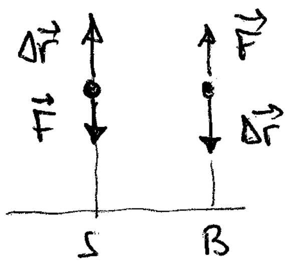
$$\boxed{h = 18{,}4\ \text{m}}$$

$\boxed{9}$ $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$

↳ Trayectoria recta
$\vec{F}$ constante

Como el sentido de $\vec{F}$ cambia al subir y bajar, descomponemos la trayectoria en dos tramos: subida y bajada.

$$W = W_S + W_B = F \cdot \Delta r \cdot \cos 180^\circ + F \cdot \Delta r \cdot \cos 180^\circ$$



$$W = 2F \cdot \Delta r \cdot \cos 180^\circ$$

Este trabajo provoca una variación de la E_m, que disminuye:

$$\Delta E_m = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$$

$$\Delta E_m = \frac{1}{2} \cdot 0{,}225 \cdot (95^2 - 100^2) = -109{,}69 \text{ J}$$

$$\Delta E_m = W = 2F \cdot \Delta r \cdot \cos 180^\circ$$

$$F = \frac{\Delta E_m}{2 \cdot \Delta r \cdot \cos 180^\circ} = \frac{(-109{,}69)}{2 \cdot 495 \cdot (-1)} = \boxed{0{,}11 \text{ N}}$$

10

Como $v = 4000\ m/s$ es muy grande, es de esperar que h sea del orden de R_T, por tanto, $E_p = -\dfrac{GMm}{R+h}$

$$E_{m_B} = E_{m_A}$$

$$\boxed{-\frac{GM\cancel{m}}{R+h} = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - \frac{GM\cancel{m}}{R}}$$

$$\frac{-GM}{\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{R}} = R+h$$

$$h = \frac{-GM}{\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R}} - R$$

$$h = \frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot 6\cdot10^{24}}{\frac{4000^2}{2} - \frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot 6\cdot10^{24}}{6{,}4\cdot10^6}} - 6{,}4\cdot10^6$$

$$\boxed{h = 9\cdot10^5\ m}$$

FÍSICA - 2º BACHILLERATO

INTERACCIÓN GRAVITATORIA - HOJA 5

1. La energía potencial de un cuerpo de masa m en presencia de otro de masa m’ depende de la distancia entre ambos. ¿Aumenta o disminuye dicha energía potencial al alejar los dos cuerpos? ¿Por qué?

2. Enuncia las leyes de Kepler y demuestra la tercera ley en el caso particular de órbitas circulares.

3. Neptuno y la Tierra describen órbitas en torno al Sol, siendo el radio medio de la órbita de Neptuno treinta veces mayor que el de la Tierra. ¿Cuántos años terrestres tarda Neptuno en recorrer su órbita?

   Sol. 164,32 años

4. Desde una altura de 10 m respecto al suelo se lanza una partícula con una velocidad inicial de 20 m/s que forma un ángulo de 30º con la horizontal. Suponiendo despreciable el rozamiento con el aire, indica el valor del módulo de la velocidad cuando la partícula choca contra el suelo.

   Sol. 24,4 m/s

5. Para observar la Tierra, un satélite de 1000 kg, que está inicialmente en una órbita circular a 630 km de la superficie, pasa a otra que está sólo a 130 km. Calcula:
   a) El cociente entre los periodos de revolución de cada órbita.
   b) El cambio en la energía potencial gravitatoria del satélite.

   Sol. a) 1,12 b) $-4{,}4\cdot10^{9}$ J

6. En torno al Sol giran dos planetas cuyos periodos de revolución son, respectivamente, $3{,}66\cdot10^{2}$ días y $4{,}32\cdot10^{3}$ días. Si el radio de la órbita del primero es $1{,}49\cdot10^{11}$ m, el radio de la órbita del segundo es: a) el mismo; b) menor; c) mayor. Justifica tu respuesta.

7. Desde una altura de 2 m se deja caer una pelota y después de rebotar en el suelo asciende hasta una altura de 1,9 m. ¿Qué tanto por ciento de su energía mecánica se ha perdido en el choque con el suelo?

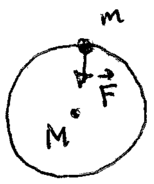
   Sol. 5 %

8. Si la distancia entre dos partículas de masas m y m’ se hace cuatro veces mayor, ¿de qué modo varía la fuerza de atracción gravitatoria entre ellas? Justifica tu respuesta.

FÍSICA - 2º BACHILLERATO
INTERACCIÓN GRAVITATORIA - HOJA 5

1. Al alejar un cuerpo de otro, aumenta el valor de **r** , con lo cual la energía potencial aumenta, ya que se hace "menos negativa". Hay que tener en cuenta que el valor máximo que puede alcanzar la energía potencial es cero, cuando la separación entre ambos cuerpos es infinita. Para cualquier otra distancia, la energía potencial es siempre negativa.

2. Primera Ley: los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en uno de los focos de la elipse.
Segunda Ley: el vector de posición del planeta con respecto al Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.
Tercera Ley: el cuadrado del periodo de revolución del planeta es directamente proporcional al cubo de su distancia media al Sol.



$$F = ma_c \Rightarrow \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow \frac{GM}{r} = v^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{GM}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 \Rightarrow \frac{GM}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

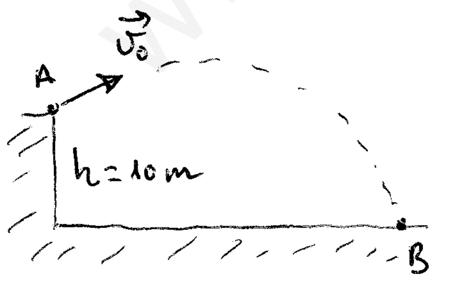
$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} T^2 = k r^3 \\ k = \dfrac{4\pi^2}{GM} \end{array}}$$

3. $r_N = 30 r_T$; $T_T = 1$ año

$$\frac{T_N^2}{r_N^3} = \frac{T_T^2}{r_T^3} \Rightarrow \frac{T_N^2}{(30 r_T)^3} = \frac{T_T^2}{r_T^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_N^2}{30^3} = T_T^2 \Rightarrow T_N = \sqrt{30^3} \cdot T_T = \boxed{164{,}32 \text{ años}}$$

4.



$$\boxed{E_{m_B} = E_{m_A}}$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} m v_A^2 + mgh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_B^2 = v_A^2 + 2gh \Rightarrow v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gh}$$

$$v_B = \sqrt{20^2 + 2 \cdot 9{,}8 \cdot 10} = \boxed{24{,}4 \text{ m/s}}$$

5 a) $\dfrac{T_1^2}{T_2^2} = \dfrac{r_1^3}{r_2^3} \Rightarrow \dfrac{T_1}{T_2} = \sqrt{\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^3} = \sqrt{\left(\dfrac{630+6400}{130+6400}\right)^3}$

$$\frac{T_1}{T_2} = \boxed{1{,}12}$$

b) $\Delta E_p = GMm\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right) =$

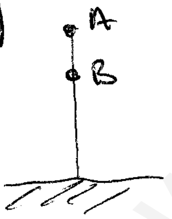
$$\Delta E_p = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 10^3 \left(\frac{1}{7{,}03 \cdot 10^6} - \frac{1}{6{,}53 \cdot 10^6}\right)$$

$$\Delta E_p = \boxed{-4{,}4 \cdot 10^9 \text{ J}}$$

6 $\dfrac{T_1^2}{r_1^3} = \dfrac{T_2^2}{r_2^3} \Rightarrow r_2 = \left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)^{2/3} \cdot r_1 = \left(\dfrac{4{,}32 \cdot 10^3}{3{,}66 \cdot 10^2}\right)^{2/3} \cdot 1{,}49 \cdot 10^{11}$

$\Rightarrow r_2 = 7{,}72 \cdot 10^{11}$ m $\Rightarrow \boxed{r_2 > r_1}$

7



$E_{m_B} = E_{m_A} + W \Rightarrow W = E_{m_B} - E_{m_A} \Rightarrow$

$W = mgh_B - mgh_A = mg(h_B - h_A)$

El porcentaje de pérdida es: $\left|\dfrac{W}{E_{m_A}}\right| \cdot 100 \Rightarrow$

$$\left|\frac{mg(h_B - h_A)}{mgh_A}\right| \cdot 100 = \left|\frac{h_B - h_A}{h_A}\right| \cdot 100$$

$$\text{Pérdida} = \left|\frac{1{,}9 - 2}{2}\right| \cdot 100 = \boxed{5\%}$$

8

$$F_1 = \frac{Gmm'}{r_1^2} \Rightarrow F_2 = \frac{Gmm'}{r_2^2} \quad ; r_2 = 4r_1$$

$$F_2 = \frac{Gmm'}{(4r_1)^2} = \frac{Gmm'}{16\, r_1^2} = \frac{1}{16} \cdot \frac{Gmm'}{r_1^2} = \frac{1}{16} \cdot F_1$$

$$\boxed{F_2 = \frac{1}{16} \cdot F_1}$$

FÍSICA - 2º BACHILLERATO
INTERACCIÓN GRAVITATORIA - HOJA 6

1. Calcula el campo gravitatorio creado por una esfera de 5 kg en un punto situado a 2 m de su centro.

   Sol. $8{,}3\cdot10^{-11}$ m/s^2

2. Halla el valor del campo gravitatorio de la Tierra en un punto situado:
   a) en la superficie
   b) a 100 km de altura,
   c) a 100 km de profundidad

   Sol. a) 9,8 m/s^2 b) 9,47 m/s^2 c) 9,65 m/s^2

3. Calcula el potencial gravitatorio creado por una esfera de 1000 kg de masa en un punto situado a 10 m de su centro.

   Sol. $-6{,}67\cdot10^{-9}$ J/kg

4. ¿A qué altura el valor de la gravedad se reduce a la mitad del valor que tiene en la superficie terrestre?

   Sol. 0,4 R_T

5. Si la densidad de la Tierra fuese tres veces mayor, ¿cuál debería ser el radio terrestre para que el valor de la gravedad no cambiara?

   Sol. 1/3 R_T

6. Una nave espacial sigue una órbita circular alrededor de la Tierra a 1000 km de altura. ¿Cuál es el peso de un astronauta a esa altura si en la superficie de la Tierra pesaba 735 N? (R_T = 6400 km)

   Sol. 550 N

7. Calcula la aceleración con que cae un cuerpo en las proximidades de la superficie de la Luna.

   Sol. 1,62 m/s^2

8. Teniendo en cuenta el resultado del ejercicio anterior, ¿cuánto pesa en la Luna una persona que en la Tierra pesa 689 N? (g_o = 9,80 m/s^2)

   Sol. 114 N

9. La intensidad del campo gravitatorio de Marte en su superficie es 3,7 m/s^2 y su radio $3{,}4\cdot10^6$ m. ¿Cuánto vale la masa de Marte?

   Sol. $6{,}4\cdot10^{23}$ kg

10. Un cuerpo tiene una masa de 10 kg. ¿Cuál será su peso en un planeta cuya masa es 10 veces menor que la masa de la Tierra, pero con el mismo tamaño que ésta?

    Sol. 9,8 N

FÍSICA - INT. GRAVITATORIA - HOJA 6 - SOLUCIONES

[1] $g = \frac{GM}{r^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5}{2^2} = \boxed{8{,}3 \cdot 10^{-11}\ m/s^2}$

[2] a) $g_0 = \frac{GM}{R^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{(6{,}4 \cdot 10^6)^2} = \boxed{9{,}8\ m/s^2}$

b) $g = \frac{GM}{(R+h)^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{(6{,}4 \cdot 10^6 + 10^5)^2} = \boxed{9{,}47\ m/s^2}$

c) $g = g_0 \frac{r}{R} = g_0 \left(\frac{R-h}{R}\right) = 9{,}8 \cdot \left(\frac{6{,}4 \cdot 10^6 - 10^5}{6{,}4 \cdot 10^6}\right) = \boxed{9{,}65\ m/s^2}$

[3] $V = -\frac{GM}{r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1000}{10} = \boxed{-6{,}67 \cdot 10^{-9}\ J/kg}$

[4] $g_h = \frac{GM}{(R+h)^2} = \frac{g_0}{2} \Rightarrow \frac{GM}{(R+h)^2} = \frac{GM}{2R^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2R^2 = (R+h)^2 \Rightarrow R+h = R\sqrt{2}$

$\Rightarrow h = R\sqrt{2} - R = R(\sqrt{2}-1) \Rightarrow \boxed{h = 0{,}4R}$

[5] $g_0 = \frac{GM}{R^2} = \frac{G d \cdot V}{R^2} = \frac{G d\, 4\pi R^3}{3R^2} = \frac{4\pi G d R}{3}$

$\frac{\cancel{4\pi G} dR}{\cancel{3}} = \frac{\cancel{4\pi G} d' R'}{\cancel{3}}$ $\quad d' = 3d$

$dR = 3dR' \Rightarrow \boxed{R' = \frac{R}{3}}$

[6]

$$P_h = \frac{GMm}{(R+h)^2} \rightarrow \text{Peso a una altura } h$$

$$P = mg_0 \rightarrow \text{Peso en la superficie}$$

$$m = \frac{P}{g_0} \Rightarrow P_h = \frac{GMP/g_0}{(R+h)^2} = \frac{GMP}{g_0(R+h)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_h = \frac{\cancel{GM}P R^2}{\cancel{GM}(R+h)^2} = \frac{PR^2}{(R+h)^2} = \frac{735 \cdot (6{,}4 \cdot 10^6)^2}{(6{,}4 \cdot 10^6 + 10^6)^2}$$

$$g_0 = \frac{GM}{R^2}$$

$$\boxed{P_h = 550\ N}$$

[7]

$$g_{LUNA} = \frac{GM_L}{R_L^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}}{(1{,}74 \cdot 10^6)^2} = \boxed{1{,}62\ m/s^2}$$

[8]

$$\left.\begin{array}{l} P_T = mg_0 \\ P_L = mg_L \end{array}\right\} m = \frac{P_T}{g_0} \Rightarrow P_L = \frac{P_T}{g_0} g_L = \frac{689}{9{,}8} \cdot 1{,}62$$

$$\boxed{P_L = 114\ N}$$

[9]

$$g = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow M = \frac{gR^2}{G} = \frac{3{,}7 \cdot (3{,}4 \cdot 10^6)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}}$$

$$\boxed{M = 6{,}4 \cdot 10^{23}\ kg}$$

10

$$M_P = \frac{M_T}{10}$$

$$V_P = V_T \Rightarrow \frac{4\pi}{3} R_P^3 = \frac{4\pi}{3} R_T^3 \Rightarrow R_P = R_T$$

$$P = m g_P = m \frac{G M_P}{R_P^2} = \frac{m\, G\, M_T/10}{R_T^2}$$

$$P = \frac{m\, G M_T}{10\, R_T^2} = \frac{m g_0}{10} = \frac{10 \cdot 9{,}8}{10} = \boxed{9{,}8\ N}$$

FÍSICA - 2º BACHILLERATO
INTERACCIÓN GRAVITATORIA - HOJA 7

1. Un satélite describe una órbita circular situada a 1000 km sobre la superficie de la Tierra.
   a) ¿Cuál es su velocidad orbital?
   b) ¿Cuánto vale su periodo de revolución, expresado en horas?

   Sol. a) $7,4 \cdot 10^3$ m/s b) 1,7 h

2. Un satélite se encuentra en una órbita circular alrededor de la Tierra con un periodo de 2 horas.
   a) ¿Cuál es el radio de su órbita?
   b) ¿A qué altura de la superficie de la Tierra se encuentra el satélite?

   Sol. a) $8,1 \cdot 10^6$ m b) $1,7 \cdot 10^6$ m

3. Se dice que un satélite terrestre es geoestacionario cuando su periodo de revolución coincide con el periodo de rotación de la Tierra. Este tipo de satélites están situados siempre sobre un mismo punto por encima de la superficie terrestre. ¿A qué altura debe situarse un satélite geoestacionario?

   Sol. $3,6 \cdot 10^7$ m

4. ¿Qué velocidad debe tener un átomo de helio para escapar de la superficie del Sol? ($M_S = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg, $R_S = 6,96 \cdot 10^8$ m)

   Sol. $6,2 \cdot 10^5$ m/s

5. ¿Con qué velocidad se debe lanzar un cohete desde la superficie de la Tierra para que alcance una altura de 12000 km?

   Sol. $9 \cdot 10^3$ m/s

6. Un satélite artificial gira en torno a la Tierra describiendo una órbita circular de 7000 km de radio. Calcula la velocidad y el periodo de revolución del satélite. ($M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg)

   Sol. $7,6 \cdot 10^3$ m/s 1,6 h

7. Un satélite gira en torno a la Tierra describiendo una órbita circular situada a 500 km de altura, empleando 1,57 h en dar una vuelta completa. A partir de estos datos, calcula la masa de la Tierra. ($R_T = 6400$ km)

   Sol. $6 \cdot 10^{24}$ kg

8. ¿Qué radio tiene la órbita de un satélite artificial de 200 kg que gira alrededor de la Tierra con una velocidad de 5434 m/s?

   Sol. $1,35 \cdot 10^7$ m

9. Calcula la velocidad de escape de un cohete lanzado desde la Luna. ($M_L = 7,36 \cdot 10^{22}$ kg, $R_L = 1,74 \cdot 10^6$ m)

   Sol. $2,38 \cdot 10^3$ m/s

10. El satélite Meteosat nos envía tres veces al día imágenes de Europa para confeccionar los mapas del tiempo. Calcula:
    a) Su periodo de revolución.
    b) El radio de su órbita.

    Sol. a) 8 h b) $2,0 \cdot 10^7$ m

FÍSICA - INT. GRAVITATORIA - HOJA 7 - SOLUCIONES

1 a) $v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6{,}4 \cdot 10^{6} + 10^{6}}} = \boxed{7{,}4 \cdot 10^{3}\ m/s}$

b) $v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot (6{,}4 \cdot 10^{6} + 10^{6})}{7{,}4 \cdot 10^{3}\ m/s}$

$T = 6283\ s = \boxed{1{,}75\ h}$

2 a) $T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}} \Rightarrow \frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{r^3}{GM}} \Rightarrow \frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{r^3}{GM} \Rightarrow$

$r^3 = \frac{T^2 GM}{4\pi^2} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{7200^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{4\pi^2}}$

$T = 2h = 7200\ s$

$\boxed{r = 8{,}1 \cdot 10^{-6}\ m}$

b) $r = R + h \Rightarrow h = r - R = 8{,}1 \cdot 10^{6} - 6{,}4 \cdot 10^{6} = \boxed{1{,}7 \cdot 10^{6}\ m}$

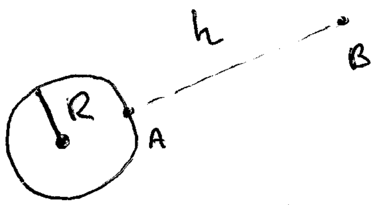
3 $T = 24h = 86400\ s$

$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM}{4\pi^2}} = 4{,}23 \cdot 10^{7}\ m$

$h = r - R = 4{,}23 \cdot 10^{7} - 6{,}4 \cdot 10^{6} = \boxed{3{,}6 \cdot 10^{7}\ m}$

4 $v_e = \sqrt{\frac{2GM_s}{R_s}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}}{6{,}96 \cdot 10^{8}}} = \boxed{6{,}2 \cdot 10^{5}\ m/s}$

5



$h = 12000\ km = 1{,}2 \cdot 10^7\ m$

$$\boxed{E_{m_A} = E_{m_B}}$$

Sólo actúa la gravedad

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_A^2 - \frac{GM\cancel{m}}{R} = -\frac{GM\cancel{m}}{R+h}$$

$$v_A^2 = \frac{2GM}{R} - \frac{2GM}{R+h} = 2GM\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right]$$

$$v_A = \sqrt{2GM\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right]}$$

$$v_A = \sqrt{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}\left[\frac{1}{6{,}4 \cdot 10^6} - \frac{1}{(6{,}4 \cdot 10^6 + 1{,}2 \cdot 10^7)}\right]}$$

$$\boxed{v_A = 9 \cdot 10^3\ m/s}$$

6

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{7 \cdot 10^6}} = \boxed{7{,}6 \cdot 10^3\ m/s}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 7 \cdot 10^6}{7{,}6 \cdot 10^3} = 5{,}8 \cdot 10^3\ s = \boxed{1{,}6\ h}$$

7

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi(R+h)}{T} = \frac{2\pi \cdot (6{,}4 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5)}{5652} = 7670\ m/s$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{R+h} \Rightarrow M = \frac{v^2(R+h)}{G}$$

$$M = \frac{7670^2(6{,}4 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5)}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} = \boxed{6 \cdot 10^{24}\ kg}$$

8

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r} \Rightarrow r = \frac{GM}{v^2}$$

$$r = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{5434^2} = \boxed{1{,}35 \cdot 10^7 \ m}$$

9

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_L}{R_L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}}{1{,}74 \cdot 10^6}} = \boxed{2{,}38 \cdot 10^3 \ m/s}$$

10

a) $$\nu = \frac{3 \text{ vueltas}}{1 \text{ día}} = \frac{3 \text{ vueltas}}{24 \ h}$$

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{24}{3} = \boxed{8 \ h = 28.800 \ s}$$

b) Ejercicio 2 $\rightarrow$ $$r = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM}{4\pi^2}}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{28800^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{4\pi^2}} = \boxed{2 \cdot 10^7 \ m}$$

FÍSICA - 2º BACHILLERATO
INTERACCIÓN GRAVITATORIA - HOJA 8

1. Un satélite de 500 kg se mueve en una órbita circular de 9000 km de radio alrededor de la Tierra. Calcula:
   a) Su energía cinética.
   b) Su energía potencial.
   c) Su energía mecánica.

   Sol. a) $1{,}1 \cdot 10^{10}$ J b) $-2{,}2 \cdot 10^{10}$ J c) $-1{,}1 \cdot 10^{10}$ J

2. Se lanza verticalmente hacia arriba un cuerpo de 500 kg desde la superficie de la Tierra, con una velocidad de 5000 m/s.
   a) ¿Qué altura alcanzará?
   b) ¿Qué velocidad horizontal hay que darle en ese punto para que se mueva en una órbita circular alrededor de la Tierra?
   c) ¿Cuánto vale su energía de enlace?

   Sol. a) $1{,}6 \cdot 10^{6}$ m b) $7{,}1 \cdot 10^{3}$ m/s c) $-1{,}3 \cdot 10^{10}$ J

3. Calcula el trabajo necesario para trasladar un satélite terrestre de 500 kg desde una órbita circular de radio $2R_T$ hasta otra de radio $3R_T$.

   Sol. $2{,}6 \cdot 10^{9}$ J

4. Se coloca una satélite de 1000 kg en órbita circular a 300 km sobre la superficie terrestre. Halla:
   a) La velocidad
   b) la aceleración
   c) el periodo
   d) el trabajo necesario para poner en órbita el satélite.

   Sol. a) $7{,}7 \cdot 10^{3}$ m/s b) $8{,}8$ m/s^2 c) 1,5 h d) $3{,}3 \cdot 10^{10}$ J

5. Un satélite de 500 kg describe una órbita circular alrededor de la Tierra. Sabiendo que su energía de enlace es $-6{,}1 \cdot 10^{9}$ J, calcula a qué altura de la superficie se encuentra.

   Sol. 10000 km

6. El trabajo necesario para que un satélite de 1000 kg cambie desde su órbita inicial a otra de 6000 km de radio es $1{,}7 \cdot 10^{10}$ J. ¿Cuál es el radio de la órbita inicial del satélite?

   Sol. 4000 km

7. Un satélite artificial de 200 kg gira en una órbita circular a una altura h sobre la superficie de la Tierra. Sabiendo que a esa altura el valor de la aceleración de la gravedad es la mitad del valor que tiene en la superficie terrestre, calcula:
   a) La velocidad del satélite
   b) Su energía mecánica.

   Sol. a) $6{,}6 \cdot 10^{3}$ m/s b) $-4{,}4 \cdot 10^{9}$ J

FÍSICA - INT. GRAVITATORIA - HOJA 8 - SOLUCIONES

1 a) $E_c = \frac{1}{2} m v^2$

$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r}$ $\Bigg\}$ $E_c = \frac{1}{2} m \frac{GM}{r}$

$$\boxed{E_c = \frac{GMm}{2r}}$$

ÓRBITAS CIRCULARES

$$E_c = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 500}{2 \cdot 9 \cdot 10^6} = \boxed{1{,}1 \cdot 10^{10}\ J}$$

b) $E_p = -\frac{GMm}{r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 500}{9 \cdot 10^6} = \boxed{-2{,}2 \cdot 10^{10}\ J}$

c) $E_m = E_c + E_p = 1{,}1 \cdot 10^{10} - 2{,}2 \cdot 10^{10} = \boxed{-1{,}1 \cdot 10^{10}\ J}$

$$\boxed{E_m = -\frac{GMm}{2r} = -E_c} \longrightarrow$$ OTRO MODO DE VERLO

2 a) $E_{m_B} = E_{m_A}$

$$-\frac{GM\cancel{m}}{R+h} = \frac{1}{2}\cancel{m} v_A^2 - \frac{GM\cancel{m}}{R}$$

$$R+h = \frac{-GM}{\frac{v_A^2}{2} - \frac{GM}{R}}$$

$$h = -\frac{GM}{\frac{v_A^2}{2} - \frac{GM}{R}} - R$$

$$h = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{\frac{5000^2}{2} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6{,}4 \cdot 10^6}} - 6{,}4 \cdot 10^6$$

$$h = 8 \cdot 10^6 - 6{,}4 \cdot 10^6 = \boxed{1{,}6 \cdot 10^6\ m}$$

b) $$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6{,}4 \cdot 10^6 + 1{,}6 \cdot 10^6}} = \boxed{7{,}1 \cdot 10^3\ m/s}$$

c) $$E_m = -\frac{GMm}{2r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 500}{2(6{,}4 \cdot 10^6 + 1{,}6 \cdot 10^6)} = \boxed{-1{,}3 \cdot 10^{10}\ J}$$

$\boxed{3}$ $$W = E_{m_B} - E_{m_A}$$

$$W = -\frac{GMm}{2 \cdot 3R_T} - \left(-\frac{GMm}{2 \cdot 2R_T}\right) = \frac{GMm}{2R_T}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$W = \frac{GMm}{12R_T} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 500}{12 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6} = \boxed{2{,}6 \cdot 10^9\ J}$$

$\boxed{4}$ a) $$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6{,}4 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^5}} = \boxed{7{,}7 \cdot 10^3\ m/s}$$

b) $$a = \frac{v^2}{R+h} = \frac{(7{,}7 \cdot 10^3)^2}{6{,}4 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^5} = \boxed{8{,}8\ m/s^2}$$

c) $T = \frac{2\pi(R+h)}{v} = \frac{2\pi(6{,}4\cdot10^6 + 3\cdot10^5)}{7{,}7\cdot10^3} = 5467\ s$

$T = 5467\ s \cdot \frac{1h}{3600s} = \boxed{1{,}5\ h}$

d) $W = E_{m_B} - E_{m_A}$

$W = -\frac{GMm}{2(R+h)} - \left(-\frac{GMm}{R}\right)$

$W = -\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot6\cdot10^{24}\cdot1000}{2(6{,}4\cdot10^6+3\cdot10^5)} + \frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot6\cdot10^{24}\cdot1000}{6{,}4\cdot10^6}$

$\boxed{W = 3{,}3\cdot10^{10}\ J}$

$\boxed{5}$ $E_m = -\frac{GMm}{2r} \Rightarrow r = -\frac{GMm}{2E_m} \Rightarrow$

$\Rightarrow R+h = -\frac{GMm}{2E_m} \Rightarrow h = -\frac{GMm}{2E_m} - R \Rightarrow$

$h = -\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot6\cdot10^{24}\cdot500}{2(-6{,}1\cdot10^9)} - 6{,}4\cdot10^6$

$h = 1\cdot10^7\ m = \boxed{1\cdot10^4\ km}$

6

$$W = E_{m_B} - E_{m_A}$$

$$W = -\frac{GMm}{2r_B} - \left(-\frac{GMm}{2r_A}\right)$$

$$W = \frac{GMm}{2r_A} - \frac{GMm}{2r_B}$$

$$W + \frac{GMm}{2r_B} = \frac{GMm}{2r_A}$$

$$\frac{W}{GMm} + \frac{1}{2r_B} = \frac{1}{2r_A}$$

$$\frac{2W}{GMm} + \frac{1}{r_B} = \frac{1}{r_A}$$

$$r_A = \frac{1}{\frac{2W}{GMm} + \frac{1}{r_B}}$$

$$r_A = \frac{1}{\frac{2 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{10}}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 10^{3}} + \frac{1}{6 \cdot 10^{6}}} = 3{,}97 \cdot 10^{6}\ m$$

$$r_A = 3{,}97 \cdot 10^{6}\ m \simeq \boxed{4 \cdot 10^{3}\ km}$$

7) Primero calcularemos la altura.

a)

$$g = \frac{g_0}{2}$$

$$\frac{GMm}{(R+h)^2} = \frac{GMm}{2R^2} \Rightarrow 2R^2 = (R+h)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R+h = \sqrt{2} \cdot R \Rightarrow \boxed{h = \sqrt{2} \cdot R - R = 0{,}4R}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} = \sqrt{\frac{GM}{\sqrt{2} \cdot R}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{\sqrt{2} \cdot 6{,}4 \cdot 10^{6}}}$$

$$\boxed{v = 6{,}6 \cdot 10^{3}\ m/s}$$

b) $$E_m = -\frac{GMm}{2(R+h)} = -\frac{GMm}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot R}$$

$$E_m = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 200}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot 6{,}4 \cdot 10^{6}} = \boxed{-4{,}4 \cdot 10^{9}\ J}$$

FÍSICA - 2º BACHILLERATO
INTERACCIÓN GRAVITATORIA - HOJA 9

1. Enuncia las leyes del movimiento planetario de Kepler.

2. De acuerdo con la 2ª Ley de Kepler, ¿puede ser constante la velocidad de un planeta en su movimiento alrededor del Sol? ¿Por qué?

3. ¿Cuándo alcanza un planeta su velocidad máxima? ¿Y la mínima?

4. ¿Existe algún tipo de órbita en la que la velocidad orbital sea constante?

5. Enuncia la Ley de la Gravitación Universal (LGU) de Newton.

6. Escribe la expresión matemática de la LGU para dos partículas puntuales o dos esferas de densidad uniforme.

7. ¿Qué significado tiene el signo menos en la expresión matemática de la LGU?

8. Si la interacción gravitatoria afecta a todos los cuerpos del Universo, ¿por qué es apreciable sólo a escala cósmica?

9. ¿De qué depende el campo gravitatorio creado por un cuerpo en cada punto del espacio?

10. ¿Cómo varía el campo gravitatorio al aumentar la distancia a la masa fuente?

11. ¿Dónde se hace nulo el campo gravitatorio creado por una partícula?

12. ¿Qué es la energía cinética?

13. ¿Qué es la energía potencial gravitatoria?

14. ¿Cuándo alcanza su valor máximo la energía potencial gravitatoria?

15. ¿Cuál es el signo de la energía potencial gravitatoria?

16. Tenemos dos partículas sometidas a una interacción gravitatoria mutua. Explica cómo varía su energía potencial si las separamos o si las acercamos.

17. ¿Qué es la energía mecánica?

18. ¿Cuándo se conserva la energía mecánica de un cuerpo?

19. Cuando realizamos algún tipo de trabajo sobre un cuerpo, ¿puede conservarse su energía mecánica?

20. Cuando un cuerpo se mueve sometido únicamente a la acción de una fuerza gravitatoria existen dos magnitudes cuyo valor permanece constante durante todo el movimiento. ¿Cuáles son?

21. ¿Qué es la velocidad de escape?

22. Cuando ponemos un satélite en órbita, cuando cambiamos la órbita de un satélite y, en general, cada vez que modificamos el estado de movimiento de un cuerpo sometido a la acción de fuerzas gravitatorias, ¿qué expresión matemática general nos permite calcular la energía necesaria para realizar dichos cambios?

FÍSICA - 2º BACHILLERATO
INTERACCIÓN GRAVITATORIA - HOJA 9
SOLUCIONES

1. *Enuncia las leyes del movimiento planetario de Kepler.*

1ª Ley: Los planetas describen órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos.
2ª Ley: El vector de posición del planeta con respecto al Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.
3ª Ley: Los cuadrados de los periodos de revolución son directamente proporcionales a los cubos de las distancias medias al Sol.

2. *De acuerdo con la 2ª Ley de Kepler, ¿puede ser constante la velocidad de un planeta en su movimiento alrededor del Sol? ¿Por qué?*

No, al tratarse de órbitas elípticas, la distancia al Sol cambia continuamente. Para que el vector de posición barra áreas iguales en tiempos iguales es necesario que la velocidad del planea sea distinta a lo largo de su trayectoria: menor cuanto más lejos está del Sol, alcanzando su valor mínimo en el afelio y su máximo en el perihelio.

3. *¿Cuándo alcanza un planeta su velocidad máxima? ¿Y la mínima?*

La velocidad máxima se alcanza en el perihelio (mínima distancia al Sol) y la mínima en el afelio (máxima distancia al sol).

4. *¿Existe algún tipo de órbita en la que la velocidad orbital sea constante?*

Si, la órbita circular, al no variar la distancia, tampoco cambia la velocidad.

5. *Enuncia la Ley de la Gravitación Universal (LGU) de Newton.*

Cualquier par de cuerpos en el Universo se atrae mutuamente con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre sus centros.

6. *Escribe la expresión matemática de la LGU para dos partículas puntuales o dos esferas de densidad uniforme.*

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{u}_r$$

7. *¿Qué significado tiene el signo menos en la expresión matemática de la LGU?*

Indica la dirección de la fuerza, nos informa de su carácter atractivo.

8. *Si la interacción gravitatoria afecta a todos los cuerpos del Universo, ¿por qué es apreciable sólo a escala cósmica?*

Debido al pequeñísimo valor de la constante gravitatoria G, el módulo de la fuerza sólo tiene un valor apreciable si las masas (al menos una de ellas) son muy grandes.

9. *¿De qué depende el campo gravitatorio creado por un cuerpo en cada punto del espacio?*

Del valor de su masa y de la distancia del cuerpo al punto considerado.

10. *¿Cómo varía el campo gravitatorio al aumentar la distancia a la masa fuente?*

Disminuye con el cuadrado de la distancia.

11. *¿Dónde se hace nulo el campo gravitatorio creado por una partícula?*

En el infinito.

12. *¿Qué es la energía cinética?*

Es la energía que posee un cuerpo debido a su estado de movimiento.

13. *¿Qué es la energía potencial gravitatoria?*

Es la energía que posee un cuerpo por estar sometido a la acción de un campo gravitatorio. Nos informa de lo ligado que está dicho cuerpo a la masa que crea el campo.

14. *¿Cuándo alcanza su valor máximo la energía potencial gravitatoria?*

Su valor máximo es cero, y se alcanza cuando la distancia entre los cuerpos que interactúan es infinita. En el resto de los casos, la energía potencial gravitatoria siempre es negativa, más negativa cuanto más próximos entre sí están ambos cuerpos.

15. *¿Cuál es el signo de la energía potencial gravitatoria?*

Siempre es negativa, salvo en el infinito, que es donde se anula.

16. *Tenemos dos partículas sometidas a una interacción gravitatoria mutua. Explica cómo varía su energía potencial si las separamos o si las acercamos.*

Si las separamos, su energía potencial aumenta (se hace menos negativa). Si las acercamos su energía potencial disminuye (se hace más negativa).

17. *¿Qué es la energía mecánica?*

Es la suma de las energías cinética y potencial de un cuerpo.

18. *¿Cuándo se conserva la energía mecánica de un cuerpo?*

Cuando se mueve bajo la acción, únicamente, de fuerzas conservativas.

19. *Cuando realizamos algún tipo de trabajo sobre un cuerpo, ¿puede conservarse su energía mecánica?*

No, el trabajo es energía que se aporta a un cuerpo o se extrae de él, por tanto, su energía mecánica aumentará o disminuirá respectivamente.

20. *Cuando un cuerpo se mueve sometido únicamente a la acción de una fuerza gravitatoria existen dos magnitudes cuyo valor permanece constante durante todo el movimiento. ¿Cuáles son?*

La energía mecánica y el momento angular.

21. *¿Qué es la velocidad de escape?*

Es la velocidad mínima que debe alcanzar un cuerpo para escapar de la acción del campo gravitatorio al que se encuentra sometido. Al alcanzar la velocidad de escape, la energía mecánica del cuerpo se hace nula.

22. *Cuando ponemos un satélite en órbita, cuando cambiamos la órbita de un satélite y, en general, cada vez que modificamos el estado de movimiento de un cuerpo sometido a la acción de fuerzas gravitatorias, ¿qué expresión matemática general nos permite calcular la energía necesaria para realizar dichos cambios?*

$$W_{AB} = E_m(B) - E_m(A)$$

FÍSICA - 2º BACHILLERATO

INTERACCIÓN GRAVITATORIA - HOJA 10

1. La distancia máxima desde la Tierra hasta el Sol es $1{,}521\cdot10^{11}$ m mientras que la distancia mínima es $1{,}471\cdot10^{11}$ m. La velocidad orbital de la Tierra en el perihelio es $3{,}027\cdot10^{4}$ m/s. Calcula:
   a) La velocidad orbital en el afelio.
   b) La excentricidad de la órbita de la Tierra.
   Sol. a) $2{,}927\cdot10^{4}$ m/s b) 0,017

2. ¿Es constante el módulo de la velocidad de traslación de los planetas? ¿Por qué? ¿En qué caso este módulo sería constante?

3. En su afelio, el planeta Mercurio está a $6{,}99\cdot10^{10}$ km del Sol, y en su perihelio se encuentra a $4{,}63\cdot10^{10}$ km del mismo. Su velocidad orbital es $3{,}88\cdot10^{4}$ m/s en el afelio.
   a) ¿Cuál es su velocidad orbital en el perihelio?
   b) ¿Qué excentricidad tiene la órbita de Mercurio?
   Sol. a) $5{,}86\cdot10^{4}$ m/s b) 0,2

4. Se ha lanzado un satélite en dirección paralela a la superficie de la Tierra con una velocidad de 36900 km/h desde una altitud de 500 km para situarlo en un apogeo de 66700 km (medido desde el centro de la Tierra). ¿Qué velocidad, expresada en km/h, tiene el satélite en el apogeo?
   Sol. 3817 km/h

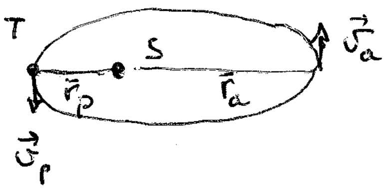
5. Calcula el momento angular de la Tierra suponiendo que describe una órbita circular alrededor del Sol con un radio de $1{,}5\cdot10^{11}$ m.
   Sol. $2{,}7\cdot10^{40}$ kg m^2/s

6. Suponiendo que la órbita de la Luna en torno a la Tierra tiene un radio de 3,84·105 km con un periodo de 27,3 días y que su masa es 0,012 veces la de la Tierra, calcula el momento angular de la Luna respecto al centro de la Tierra.
   Sol. $2{,}8\cdot10^{34}$ kg m^2/s

7. Un satélite artificial de 2500 kg de masa dista $6{,}8\cdot10^{6}$ m del centro de la Tierra en el perigeo y $7{,}2\cdot10^{6}$ m en el apogeo. Si la velocidad máxima del satélite es $3{,}5\cdot10^{3}$ m/s, calcula:
   a) La velocidad mínima del satélite.
   b) El semieje mayor de la órbita elíptica que describe.
   c) La excentricidad de la elipse.
   d) La energía mecánica del satélite.
   e) A qué altura sobre la superficie terrestre se encuentra al satélite en su máxima aproximación.
   Sol. a) $3{,}3\cdot10^{3}$ m/s b) $7\cdot10^{6}$ m c) 0,029
   d) $-1{,}31\cdot10^{11}$ J e) $4\cdot10^{5}$ m

FÍSICA 2º BACH - INT. GRAVITATORIA - HOJA 10

1



$r_a = 1{,}521 \cdot 10^{11}\ m$ $v_a = ?$

$r_p = 1{,}471 \cdot 10^{11}\ m$ $v_p = 3{,}027 \cdot 10^{4}\ m/s$

a) Como $\vec{L}$ se conserva $\Rightarrow$ $r_a v_a = r_p v_p$

$$v_a = \frac{r_p v_p}{r_a} = \frac{1{,}471 \cdot 10^{11} \cdot 3{,}027 \cdot 10^{4}}{1{,}521 \cdot 10^{11}} = \boxed{2{,}927 \cdot 10^{4}\ m/s}$$

b) $$e = \frac{c}{a} = \frac{a - r_p}{a}$$

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{1{,}521 \cdot 10^{11} + 1{,}471 \cdot 10^{11}}{2} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\ m$$

$$e = \frac{1{,}496 \cdot 10^{11} - 1{,}471 \cdot 10^{11}}{1{,}496 \cdot 10^{11}} = \boxed{0{,}017}$$

2 No, si $\vec{L}$ se conserva, como $L = mrv \operatorname{sen}\alpha$, al variar r, debe cambiar v para que el producto se mantenga constante.

Si la órbita fuera una <u>circunferencia</u>, entonces $L = mRv \operatorname{sen} 90^\circ$, donde m, R y α son constantes. En este caso, para que L se conserve, $\underline{\underline{v}}$ debe ser también <u>constante</u>.

3

$r_a = 6{,}99 \cdot 10^{10}\ km = 6{,}99 \cdot 10^{13}\ m$

$r_p = 4{,}63 \cdot 10^{10}\ km = 4{,}63 \cdot 10^{13}\ m$

$v_a = 3{,}88 \cdot 10^{4}\ m/s \qquad v_p\,?$

a) $r_a v_a = r_p v_p$

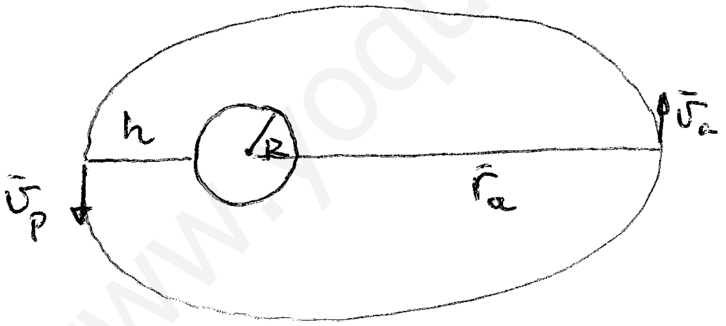
$$v_p = \frac{r_a v_a}{r_p} = \frac{6{,}99 \cdot 10^{13} \cdot 3{,}88 \cdot 10^{4}}{4{,}63 \cdot 10^{13}} = \boxed{5{,}86 \cdot 10^{4}\ m/s}$$

b) $e = \frac{c}{a} = \frac{a - r_p}{a}$

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{6{,}99 \cdot 10^{13} + 4{,}63 \cdot 10^{13}}{2} = 5{,}81 \cdot 10^{13}\ m$$

$$e = \frac{5{,}81 \cdot 10^{13} - 4{,}63 \cdot 10^{13}}{5{,}81 \cdot 10^{13}} = \boxed{0{,}2}$$

4



Vamos a trabajar con km y km/h.

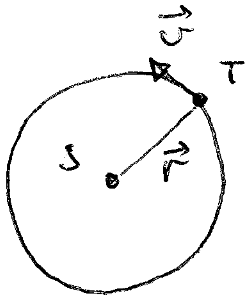
$v_p = 36900\ km/h \qquad r_a = 66700\ km$

$r_p = R + h = 6{,}4 \cdot 10^{3}\ km + 500\ km = 6{,}9 \cdot 10^{3}\ km$

$r_a v_a = r_p v_p$

$$v_a = \frac{r_p v_p}{r_a} = \frac{6{,}9 \cdot 10^{3} \cdot 36900}{66700} = \boxed{3817\ km/h}$$

5



$L = M_T r v \cdot \text{sen}\,\alpha$

$M_T = 6 \cdot 10^{24}\ kg \qquad M_{SOL} = 2 \cdot 10^{30}\ kg$

$\alpha = 90^\circ \Rightarrow \text{sen}\,90^\circ = 1$

Órbita circular $\Rightarrow$ $v = \sqrt{\dfrac{GM_{SOL}}{r}}$

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{1{,}5 \cdot 10^{11}}} = 2{,}98 \cdot 10^{4}\ m/s$$

$$L = M_T \cdot r \cdot v = 6 \cdot 10^{24} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11} \cdot 2{,}98 \cdot 10^{4} = \boxed{2{,}7 \cdot 10^{40}\ kgm^2/s}$$

6

$L = M_{LUNA} \cdot r \cdot v \cdot \text{sen}\,\alpha$ órbita circular $\alpha = 90^\circ$, $\text{sen}\,\alpha = 1$

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 3{,}84 \cdot 10^{5}\ km}{27{,}3\ \text{días}}$$

$$v = \frac{2\pi \cdot 3{,}84 \cdot 10^{8}\ m}{2{,}36 \cdot 10^{6}\ s} = 9{,}28 \cdot 10^{2}\ m/s$$

$L = M_{LUNA} \cdot r \cdot v \cdot \text{sen}\,\alpha = 0{,}012\, M_T \cdot r \cdot v \cdot \text{sen}\,\alpha$

$L = 0{,}012 \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 3{,}84 \cdot 10^{8} \cdot 9{,}28 \cdot 10^{2} \cdot \text{sen}\,90^\circ$

$$L = \boxed{2{,}6 \cdot 10^{34}\ kg\,m^2/s}$$

7

$m = 2500\ kg$

$r_p = 6{,}8 \cdot 10^6\ m$ $\qquad v_{máx} = v_p = 3{,}5 \cdot 10^3\ m/s$

$r_a = 7{,}2 \cdot 10^6\ m$

a) $\boxed{v_{mín} = v_a}$

$r_a v_a = r_p v_p \Rightarrow v_a = \dfrac{r_p v_p}{r_a} = \dfrac{6{,}8 \cdot \cancel{10^6} \cdot 3{,}5 \cdot 10^3}{7{,}2 \cdot \cancel{10^6}} = \boxed{3{,}3 \cdot 10^3\ m/s}$

b) $a = \dfrac{r_a + r_p}{2} = \dfrac{6{,}8 \cdot 10^6 + 7{,}2 \cdot 10^6}{2} = \boxed{7 \cdot 10^6\ m}$

c) $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{a - r_p}{a} = \dfrac{7 \cdot \cancel{10^6} - 6{,}8 \cdot \cancel{10^6}}{7{,}2 \cdot \cancel{10^6}} = \boxed{0{,}028}$

d) $E_m = E_c + E_p = \dfrac{1}{2} m v^2 - \dfrac{GMm}{r}$

Como es constante, puedo calcularla en cualquier punto de la órbita. Elijo el perigeo:

$E_m = \dfrac{1}{2} m v_p^2 - \dfrac{GMm}{r_p}$

$E_m = \dfrac{1}{2} \cdot 2500 \cdot (3{,}5 \cdot 10^3)^2 - \dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 2500}{6{,}8 \cdot 10^6}$

$\boxed{E_m = -1{,}3 \cdot 10^{11}\ J}$

e) $r_p = R + h \Rightarrow h = r_p - R$

$h = 6{,}8 \cdot 10^6 - 6{,}4 \cdot 10^6 = \boxed{4 \cdot 10^5\ m}$

FÍSICA - 2º BACHILLERATO

INTERACCIÓN GRAVITATORIA - HOJA 11

1.C Plutón describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Indica, para cada una de las siguientes magnitudes, si su valor es mayor, menor o igual en el afelio comparado con el perihelio:
a) Momento angular respecto a la posición del Sol.
b) Momento lineal.
c) Energía potencial.
d) Energía mecánica.

2.P Se coloca un satélite meteorológico de 1000 kg en una órbita circular a 300 km de la superficie terrestre:
a) Determina la velocidad lineal, la aceleración radial y el periodo del satélite en la órbita.
b) Calcula el trabajo que se requiere para poner en órbita el satélite.
Datos: Radio medio terrestre, $R_T = 6370$ km

3.C El cometa Halley se mueve en órbita elíptica alrededor del Sol. En el perihelio, el cometa está a $8{,}75 \cdot 10^7$ km del Sol, y en el afelio está a $5{,}26 \cdot 10^9$ km del Sol.
a) ¿En cuál de los dos puntos tiene el cometa mayor velocidad? ¿Y mayor aceleración?
b) ¿En qué punto tiene mayor energía potencial? ¿Y mayor energía mecánica?

4.C a) Enuncia la primera y la segunda ley de Kepler sobre el movimiento planetario.
b) Comprueba que la segunda ley de Kepler es un caso particular del teorema de conservación del momento angular.

5.P Se pone en órbita un satélite artificial de 600 kg a una altura de 1200 km sobre la superficie de la Tierra. Si el lanzamiento se ha realizado desde el nivel del mar, calcula:
a) ¿Cuánto ha aumentado la energía potencial gravitatoria del satélite?
b) ¿Qué energía adicional hay que suministrar al satélite para que escape de la acción del campo gravitatorio terrestre desde esa órbita?
Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m

6.C En el movimiento circular de un satélite en torno a la Tierra, determina:
a) La expresión de la energía cinética en función de las masas del satélite y de la Tierra, y del radio de la órbita.
b) La relación que existe entre su energía mecánica y su energía potencial.

7.P Mercurio describe una órbita elíptica alrededor del Sol. En el afelio, su distancia al Sol es de $6{,}99 \cdot 10^{10}$ m, y su velocidad orbital es de $3{,}88 \cdot 10^4$ m/s, siendo su distancia al Sol en el perihelio de $4{,}60 \cdot 10^{10}$ m:
a) Calcula la velocidad orbital de Mercurio en el perihelio.
b) Calcula las energías cinética, potencial y mecánica de Mercurio en el perihelio.
c) Calcula el módulo de su momento lineal y de su momento angular en el perihelio.
d) De las magnitudes calculadas en los apartados anteriores, di cuáles son iguales en el afelio.
Datos: $M_{MERCURIO} = 3{,}18 \cdot 10^{23}$ kg $M_{SOL} = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg

8.C Un planeta esférico tiene un radio de 3000 km, y la aceleración de la gravedad en su superficie es 6 m/s^2:
a) ¿Cuál es su densidad media?
b) ¿Cuál es la velocidad de escape para un objeto situado en la superficie de este planeta?

9.P La velocidad angular con la que un satélite describe una órbita circular en torno al planeta Venus es $\omega_1 = 1{,}45 \cdot 10^{-4}$ rad/s, y su momento angular respecto al centro de la órbita es $L_1 = 2{,}2 \cdot 10^{12}$ kg m^2 s^{-1}:
a) Determina el radio r_1 de la órbita del satélite y su masa.
b) ¿Qué energía sería preciso invertir para cambiar a otra órbita circular con velocidad angular de 10^{-4} rad/s?
Datos: $M_{VENUS} = 4{,}87 \cdot 10^{24}$ kg

10.C Suponiendo un planeta esférico que tenga un radio la mitad del radio terrestre e igual densidad que la Tierra, calcula:
a) La aceleración de la gravedad en la superficie de dicho planeta. ($g_{TIERRA} = 9{,}81$ m/s)
b) La velocidad de escape de un objeto desde la superficie del planeta, si la velocidad de escape desde la superficie terrestre es 11,2 km/s.

FÍSICA - GRAVITACIÓN - HOJA 11

① a) $\vec{L}$ es constante durante toda la trayectoria

b) $\vec{p} = m\vec{v}$, como $v_p > v_a \Rightarrow p_p > p_a$

c) $E_p = -\frac{GMm}{r}$, como $r_p < r_a \Rightarrow (E_p)_a > (E_p)_p$

d) E_m es la misma en todos los puntos de la elipse.

② a)

$$\left.\begin{array}{l} F = ma \\ a = \frac{v^2}{r} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \\ r = R_T + h \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6{,}37 \cdot 10^6 + 300000}} = \underbrace{7{,}7 \cdot 10^3 \ m/s}$$

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(7{,}7 \cdot 10^3)^2}{6{,}67 \cdot 10^6} = \underbrace{8{,}9 \ m/s^2}$$

$$v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 6{,}67 \cdot 10^6}{7{,}7 \cdot 10^3} = \underbrace{5{,}4 \cdot 10^3 \ s}$$

b) $W = (E_m)_{órbita} - (E_m)_{superficie}$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$(E_m)_{órbita} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m\left(\frac{GM}{r}\right) - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}$$

$$(E_m)_{superficie} = -\frac{GMm}{R_T}$$

$$W = -\frac{GMm}{2r} - \left(-\frac{GMm}{R_T}\right) = GMm\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right)$$

$$W = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 1000 \left(\frac{1}{6{,}37 \cdot 10^6} - \frac{1}{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^6}\right) = \underbrace{3{,}3 \cdot 10^{10} \ J}$$

③ a) Como $\vec{L} = cte \Rightarrow L_a = L_p \Rightarrow r_a v_a = r_p v_p$

Al ser menor r_p, $\boxed{v_p > v_a}$

$$a = \frac{v^2}{r}, \text{ como } \left.\begin{matrix} v_a < v_p \\ r_a > r_p \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{v_a^2}{r_a} < \frac{v_p^2}{r_p} \Leftrightarrow \boxed{a_a < a_p}$$

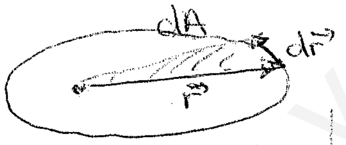
b) $E_p = -\frac{GMm}{r}$, como $r_a > r_p \Rightarrow -\frac{GMm}{r_a} > -\frac{GMm}{r_p}$

$\Leftrightarrow (E_p)_a > (E_p)_p$ (Hay que tener en cuenta que E_p es negativa)

E_m es constante en toda la trayectoria

④ a) 1ª ley → Los planetas describen órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos

2ª ley → El vector de posición del planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

b) 

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$$dA = \frac{1}{2}|\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}|\, dt = \frac{1}{2}\frac{|\vec{L}|}{m}\, dt$$

$\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v})$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{|\vec{L}|}{2m} = cte, \text{ ya que } \vec{L} \text{ se conserva.}}$$

⑤ a) $\Delta E_p = (E_p)_h - (E_p)_{superficie} = -\frac{GMm}{R+h} - \left(-\frac{GMm}{R}\right)$

$\Delta E_p = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = 5{,}96 \cdot 10^9\ J$ $(h = 1200000\ m)$

b) Para que escape de la acción del campo, $(E_m)_{final} = 0$

$$W = (E_m)_{final} - (E_m)_{inicial} = 0 - \left(-\frac{GMm}{2(R+h)}\right) = 1{,}58 \cdot 10^{10}\ J$$

⑥ a) $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ (Ver problema 2) $\rightarrow$ $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} m \left(\frac{GM}{r}\right) = \frac{GMm}{2r}}$$

b) $$\boxed{E_m = E_c + E_p = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r} = \frac{1}{2} E_p}$$

⑦ a) $\vec{L} = cte \Rightarrow v_a r_a = v_p r_p$

$$v_p = \frac{v_a r_a}{r_p} = \frac{3{,}88 \cdot 10^4 \cdot 6{,}99 \cdot 10^{10}}{4{,}6 \cdot 10^{10}} = 5{,}9 \cdot 10^4 \ m/s$$

b) $$(E_c)_p = \frac{1}{2} m v_p^2 = \frac{1}{2}\, 3{,}18 \cdot 10^{23} \cdot (5{,}9 \cdot 10^4)^2 = 5{,}53 \cdot 10^{32} \ J$$

$$(E_p)_p = -\frac{GMm}{r_p} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30} \cdot 3{,}18 \cdot 10^{23}}{4{,}6 \cdot 10^{10}} = -9{,}2 \cdot 10^{32} \ J$$

$$(E_m)_p = (E_c)_p + (E_p)_p = -3{,}66 \cdot 10^{32} \ J$$

c) $$p_p = m v_p = 3{,}18 \cdot 10^{23} \cdot 5{,}9 \cdot 10^4 = 1{,}88 \cdot 10^{28} \ kg\,m/s$$

$$L_p = m r_p v_p \,\text{sen}\, 90^\circ = 8{,}63 \cdot 10^{38} \ kg\,m^2/s$$

d) Como E_m y L son constantes, su valor coincide en el afelio y en el perihelio

⑧ a) $\rho = \frac{M}{V}$ $g = \frac{GM}{R^2}$ $V = \frac{4\pi R^3}{3}$

$$\rho = \frac{gR^2/G}{4\pi R^3/3} = \frac{3g}{4\pi G R} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot \pi \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 3 \cdot 10^6} = 7158 \ kg/m^3$$

b) Para escapar del campo gravitatorio del planeta hay que alcanzar una $E_m = 0$

$$E_m = \frac{1}{2} m v_e^2 - \frac{GMm}{R} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cancel{m} v_e^2 = \frac{GM\cancel{m}}{R}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2G\, gR^2/G}{R}} = \sqrt{2gR}$$

$$\boxed{g = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow M = \frac{gR^2}{G}}$$

$$v_e = \sqrt{2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 10^6} = 6 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

(9) a) (Problema 2) $\rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ Movimiento circular $\rightarrow v = \omega r$

$$\Rightarrow \omega r = \sqrt{\frac{GM}{r}} \Rightarrow \omega^2 r^2 = \frac{GM}{r} \Rightarrow r^3 = \frac{GM}{\omega^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 4{,}87 \cdot 10^{24}}{(1{,}45 \cdot 10^{-4})^2}} = 2{,}49 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$L = mrv = mr\omega r = m\omega r^2 \Rightarrow m = \frac{L}{\omega r^2} = 24{,}5 \text{ kg}$$

b) $(E_m)_{\text{órbita}} = -\frac{GMm}{2r}$

Para cambiar de órbita hace falta dar una energía igual a la diferencia de E_m $\Rightarrow W = (E_m)_2 - (E_m)_1$

$$W = -\frac{GMm}{2r_2} - \left(-\frac{GMm}{2r_1}\right) = \frac{GMm}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = 3{,}51 \cdot 10^7 \text{ J}$$

$$\boxed{r_1 = 2{,}49 \cdot 10^7 \text{ m}}$$

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega_2^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 4{,}87 \cdot 10^{24}}{(10^{-4})^2}} = \boxed{3{,}19 \cdot 10^7 \text{ m}}$$

(10) a) $g = \frac{GM}{R^2}$ $d = \frac{M}{V} = \frac{M}{4\pi R^3/3}$

$R_p = \frac{R_T}{2}$ $\boxed{d_p = d_T}$

$$\boxed{\frac{M_p}{4\pi R_p^3/3} = \frac{M_T}{4\pi R_T^3/3}} \Rightarrow \frac{M_p}{R_p^3} = \frac{M_T}{R_T^3}$$

$$M_p = M_T \left(\frac{R_p}{R_T}\right)^3 = M_T \left(\frac{R_T}{2R_T}\right)^3 = M_T \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{M_T}{8}$$

$M_p = \frac{M_T}{8}$ $R_p = \frac{R_T}{2}$

$$g_p = \frac{GM_p}{R_p^2} = \frac{G\,M_T/8}{(R_T/2)^2} = \frac{4\,G M_T}{8\,R_T^2} = \frac{GM_T}{2R_T^2} = \frac{g_T}{2}$$

$$\boxed{g_p = \frac{g_T}{2} = 4{,}9\ m/s^2}$$

b) (Ver Ejercicio 8,b) $\rightarrow$ $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

$$(v_e)_p = \sqrt{\frac{2GM_p}{R_p}} = \sqrt{\frac{2G\,M_T/8}{R_T/2}} = \sqrt{\frac{2GM_T}{4R_T}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

$$(v_e)_p = \frac{1}{2}(v_e)_T = \boxed{5{,}6\ km/s}$$