FÍSICA - 2º BACHILLERATO

CAMPO ELÉCTRICO

HOJA 5

TEOREMA DE GAUSS

1. MOD 2009 En el plano x=0 existe una distribución superficial infinita de carga cuya densidad superficial de carga es $\sigma_1 = +10^{-6}$ C/m^2.

   a) Empleando el teorema de Gauss determine el campo eléctrico generado por esta distribución de carga en los puntos del espacio de coordenadas (1,0,0) y (-1,0,0).

   Una segunda distribución superficial infinita de carga de densidad superficial σ_2 se sitúa en el plano x = 3.

   b) Empleando el teorema de Gauss determine el valor de σ_2 para que el campo eléctrico resultante de ambas distribuciones superficiales de carga en el punto (-2,0,0) sea $\vec{E} = 10^4\ \vec{i}\ N/C$

   Nota: Todas las coordenadas están expresadas en unidades del SI.
   Dato: Permitividad eléctrica del vacío $\varepsilon_0 = 8{,}85\times10^{-12}$ C^2 N^{-1} m^{-2}

   Sol. a) 56497 N/C b) $-1{,}18\cdot10^{-6}$ C/m^2

2. Enuncia el Teorema de Gauss. Una carga de $-2\cdot10^{-6}$ C se sitúa en el centro de un cubo que tiene 10 cm de arista. Determina el flujo eléctrico a través del cubo. ¿Cambiaría el resultado si la carga se encontrara dentro del cubo pero no en su centro?
   Dato: K= $9\cdot10^9$ N m^2 C^{-2}

   Sol. $2{,}26\cdot10^5$ N m^2 C^{-1}

3. Un cascarón esférico de 4 m de radio tiene uniformemente repartida una carga de $2\cdot10^{-6}$ C. Calcula el potencial eléctrico en un punto que dista 2 m de su centro y en otro punto que dista 6 m de su centro.
   Dato: K= $9\cdot10^9$ N m^2 C^{-2}.

   Sol. 4500 V 3000 V

4. Estamos midiendo el flujo eléctrico que atraviesa una superficie cerrada y obtenemos un valor nulo. ¿Podremos deducir, con toda seguridad que no hay cargas eléctricas en el interior de dicha superficie? Razona tu respuesta.

5. Se tiene un plano de grandes dimensiones con una densidad superficial de carga de $3\cdot10^{-9}$ C/m^2. Calcula:

   a) El campo eléctrico uniforme que genera.

   b) El trabajo que se realiza al desplazar una carga de -2 μC desde el punto A, a 2 cm de la placa, hasta el punto B, a 8 cm de la misma.

   Sol. a) 169,5 N/C b) $2\cdot10^{-5}$ J

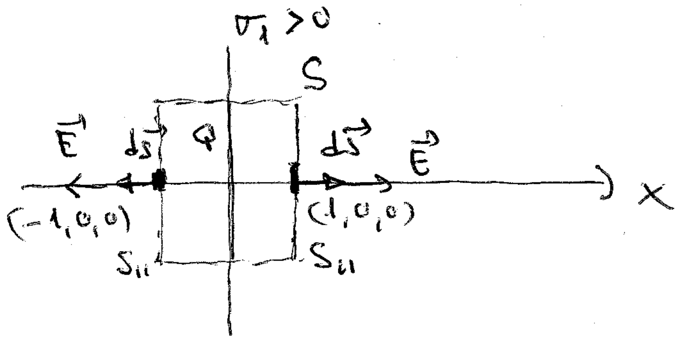
6. Si se coloca de forma vertical una superficie plana cargada uniformemente y se cuelga de ella, mediante un hilo de masa despreciable, un esfera de 2 g con una carga de 4 nC, observamos que el ángulo que forma el hilo es de 35º. ¿Cuál es la densidad superficial de carga de dicha superficie?

   Sol. $6\cdot10^{-5}$ C/m^2

CAMPO ELÉCTRICO – HOJA 5 – TMA. GAUSS

1

a)



S = prisma de base cuadrada.

En realidad, la forma de la base es indiferente, con tal de que sea paralela al plano cargado

$$\phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2\int_{S_{11}} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

El campo $\vec{E}$ sólo fluye a través de las superficies paralelas al plano (S_{11}). El flujo a través del resto de la superficie S es nulo.

$$\phi = 2\int_{S_{11}} E\cdot dS\cdot \cos 0 = 2E\int_{S_{11}} dS = 2E\cdot S_{11}$$

Aplico el Tma. de Gauss:

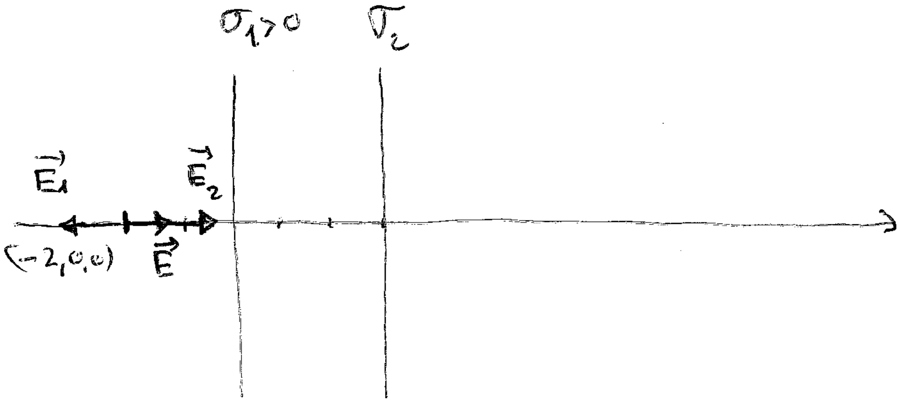
$$\phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$2ES_{11} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S_{11}} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{10^{-6}}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}} = \boxed{56497\ N/C}$$

b)

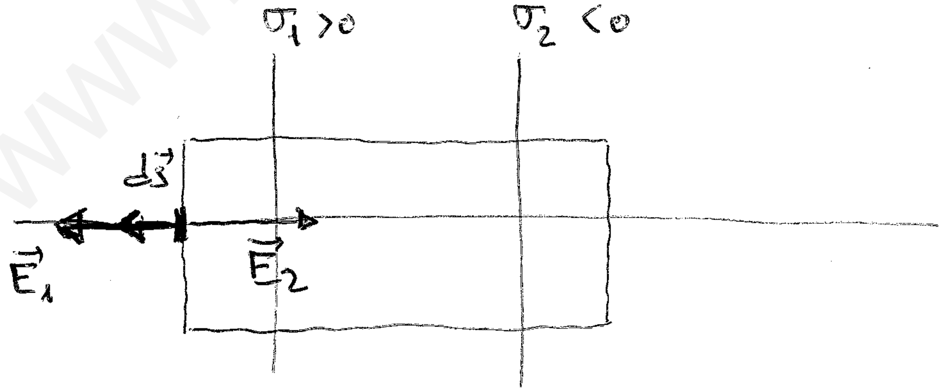


Para que $\vec{E}$ resultante en $(-2,0,0)$ esté orientado hacia el sentido positivo del eje X, es necesario que $\vec{E}_2$ sea opuesto a $\vec{E}_1$ y que $E_2 > E_1$, de modo que:

$$\boxed{E = E_2 - E_1} \rightarrow \text{Igualdad entre módulos}$$

Por tanto, $\sigma_2 < 0$.

Tomamos una superficie S como la del apartado anterior que encierre parte de los dos planos cargados:



Ahora:
$$\begin{cases} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = E_1 \, dS \cos 0^\circ = E_1 \cdot dS \\ \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = E_2 \, dS \cos 180^\circ = -E_2 \cdot dS \end{cases}$$

$$\phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2\int_{S_{\parallel}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2\int_{S_{\parallel}} (\vec{E}_1+\vec{E}_2)\cdot d\vec{S}$$

Suma vectorial

$$\phi = 2\left[\int_{S_{\parallel}} \vec{E}_1\cdot d\vec{S} + \int_{S_{\parallel}} \vec{E}_2\cdot d\vec{S}\right]$$

$$\phi = 2\left[E_1\int_{S_{\parallel}} dS - E_2\int_{S_{\parallel}} dS\right] = 2\left[E_1 S_{\parallel} - E_2 S_{\parallel}\right]$$

$$\phi = 2(E_1 - E_2)\, S_{\parallel}$$

Aplico el Tma. de Gauss

$$\phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} + \frac{Q_2}{\varepsilon_0}$$

$$2(E_1 - E_2)\, S_{\parallel} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} + \frac{Q_2}{\varepsilon_0}$$

$$2\varepsilon_0 (E_1 - E_2)\, S_{\parallel} = Q_1 + Q_2$$

$$2\varepsilon_0 (E_1 - E_2) = \frac{Q_1}{S_{\parallel}} + \frac{Q_2}{S_{\parallel}} = \sigma_1 + \sigma_2$$

$$\sigma_2 = 2\varepsilon_0 (E_1 - E_2) - \sigma_1$$

Como $E = E_2 - E_1$, reordeno.

$$\sigma_2 = -2\varepsilon_0 (E_2 - E_1) - \sigma_1$$

$$\sigma_2 = -2\varepsilon_0 E - \sigma_1$$

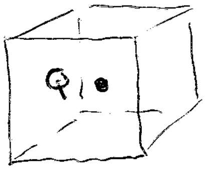
$$\sigma_2 = -2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 10^4 - 10^{-6}$$

$$\boxed{\sigma_2 = -1{,}18\cdot 10^{-6}\ C/m^2}$$

2

Tma. Gauss: El flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga encerrada por dicha superficie.

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad Q \equiv \text{carga neta}$$



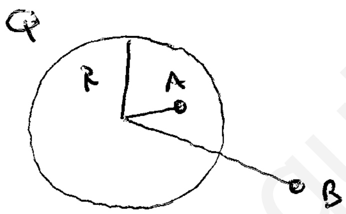
Aplicando el Tma. de Gauss:

$$\phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}} = \boxed{2{,}26 \cdot 10^{5} \ \frac{Nm^2}{C}}$$

ϕ no depende del punto en el que esté la carga, siempre que se encuentre dentro de S

3

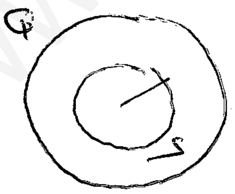
a)



$r_A = 2m$

$r_B = 6m$

Aplicamos el Tma. de Gauss para hallar el campo eléctrico en el punto A.



$$\phi_S = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = 0 \ \frac{Nm^2}{C}$$

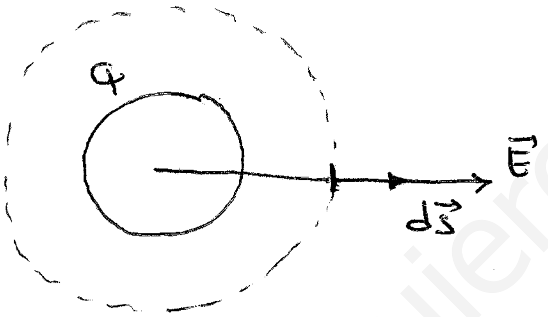
la superficie S no contiene ninguna carga en su interior.

$\phi = 0 \Rightarrow \vec{E}$ es nulo dentro de la esfera.

Si $\vec{E}$ es nula dentro de la esfera, el potencial eléctrico V es constante en todo el interior de la esfera cargada. Podemos calcularlo en cualquier punto, en particular, en la misma superficie.

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{KQ}{R} = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 2\cdot 10^{-6}}{4} = \boxed{4500\ V}$$

Ahora calculamos $\vec{E}$ en $r = 6$ m. Para ello aplicamos el Tma. de Gauss:



$$\phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_S E\cdot dS\cdot \cos 0$$

$$\phi = E\oint_S dS = E\cdot S = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Tma. de Gauss

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{KQ}{r^2} \Rightarrow$$ El campo creado por la esfera cargada es el mismo que crearía una carga puntual Q.

El potencial creado por la esfera será, en puntos exteriores, igual al creado por una carga puntual:

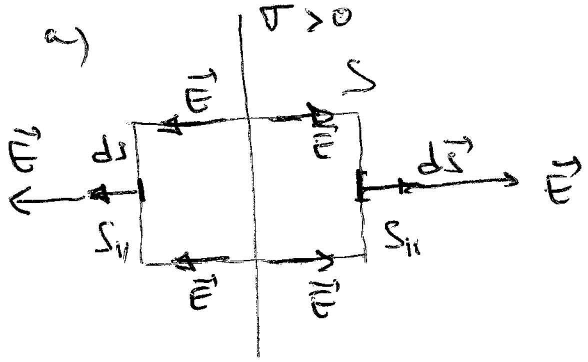
$$V = \frac{KQ}{r} = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 2\cdot 10^{-6}}{6} = \boxed{3000\ V}$$

4

$$\phi = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad q \equiv \text{carga neta.}$$

Si $\phi = 0 \Rightarrow$ la carga neta es nula, pero puede haber cargas de distinto signo que se anulen mutuamente.

5 a)



$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_S E \cdot ds \cos 0$$

$$\phi = E \oint_S ds$$

$$\phi = 2E \int_{S_{\parallel}} ds = 2E S_{\parallel}$$

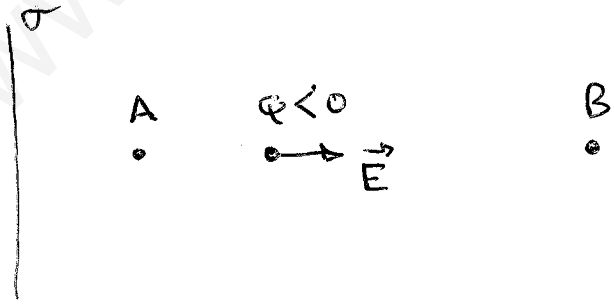
Sólo habrá flujo a través de las caras paralelas.

$$\phi = 2ES_{\parallel} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Tma. de Gauss

$$E = \frac{q}{2\varepsilon_0 S_{\parallel}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{3 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} = \boxed{169{,}5 \ N/C}$$

b)



Las cargas negativas tienden a moverse en sentido opuesto al campo, ya que $\vec{F} = q\vec{E}$.

Para llevar una carga $q<0$ desde A hasta B tenemos que realizar un trabajo <u>en contra</u> del campo eléctrico.

Dicho trabajo será igual, en valor absoluto, que el que realizaría el campo uniforme, pero de signo contrario.

El trabajo que el campo realizaría sobre q entre A y B es:

Campo uniforme

$$W = q\,(V_A - V_B) = q\,E\,d$$

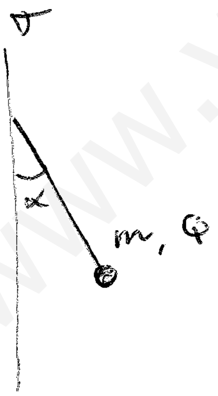
$$W = -2\cdot10^{-6}\cdot 169{,}5\cdot 0{,}06$$

$$W = -2\cdot10^{-5}\ \text{J}$$

Por tanto, el trabajo que debemos realizar, en contra del campo es:

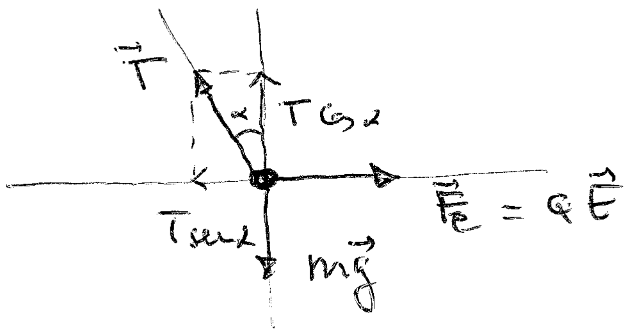
$$\boxed{W = 2\cdot10^{-5}\ \text{J}}$$

$\boxed{6}$



$\alpha = 35^\circ$

En el equilibrio, las fuerzas que actúan sobre la carga son:



$$\left.\begin{array}{l} T \operatorname{sen}\alpha = QE \\ T \cos\alpha = mg \end{array}\right\} \quad \tan\alpha = \frac{QE}{mg}$$

El campo uniforme creado por el plano es:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$\tan\alpha = \frac{QE}{mg} = \frac{Q\sigma}{mg\,2\varepsilon_0}$$

$$\sigma = \frac{2\, mg\, \varepsilon_0 \tan\alpha}{Q}$$

$$\sigma = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot \tan 35^\circ}{4 \cdot 10^{-9}}$$

$$\boxed{\sigma = 6 \cdot 10^{-5}\ C/m^2}$$