EXAMEN FÍSICA 2º BACHILLERATO – TEMA 1: CAMPO GRAVITATORIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

La prueba consiste de dos opciones, A y B, y el alumno deberá optar por una de las opciones y resolver las tres cuestiones y los dos problemas planteados en ella, sin que pueda elegir cuestiones o problemas de diferentes opciones. Cada cuestión o problema puntuará sobre un máximo de dos puntos. No se contestará ninguna pregunta en este impreso.

OPCIÓN A

Cuestión 1.-

a) Desde la superficie de la Tierra se lanza verticalmente hacia arriba un objeto con una velocidad v. Si se desprecia el rozamiento, calcule el valor de v necesario para que el objeto alcance una altura igual al radio de la Tierra
b) Si se lanza el objeto desde la superficie de la Tierra con una velocidad doble a la calculada en el apartado anterior ¿escapará o no del campo gravitatorio terrestre?

Datos: Constante de Gravitación $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$
Masa de la Tierra $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}\ kg$
Radio medio de la Tierra $R_T = 6370\ km$

Cuestión 2.- Llamando g_0 y V_0 a la intensidad de campo gravitatorio y al potencial gravitatorio en la superficie terrestre respectivamente, determine en función del radio de la Tierra:

a) La altura sobre la superficie terrestre a la cual la intensidad de campo gravitatorio es $g_0/2$
b) La altura sobre la superficie terrestre a la cual el potencial gravitatorio es $V_0/2$

Cuestión 3.- Sabiendo que la aceleración de la gravedad en un movimiento de caída libre en la superficie de la Luna es un sexto de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra y que el radio de la Luna es aproximadamente 0,27 R_T (siendo R_T el radio terrestre), calcule:

a) La relación entre las densidades medias $\dfrac{\rho_{Luna}}{\rho_{Tierra}}$
b) La relación entre las velocidades de escape de un objeto desde sus respectivas superficies $\dfrac{Ve_{Luna}}{Ve_{Tierra}}$

Problema 1.- La velocidad angular con la que un satélite describe una órbita circular en torno al planeta Venus es $\omega_1 = 1{,}45 \cdot 10^{-4}$ rad/s y su momento angular respecto al centro de la órbita es $L_1 = 2{,}2 \cdot 10^{12}$ kg· m²·s⁻¹.

a) Determine el radio r_1 de la órbita del satélite y su masa.
b) ¿Qué energía sería preciso invertir para cambiar a otra órbita circular con velocidad angular $\omega_2 = 10^{-4}$ rad/s?

Datos:
Constante de Gravitación Universal $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$
Masa de Venus $M_v = 4{,}87 \cdot 10^{24}\ kg$

Problema 2.- Un planeta esférico tiene 3200 km de radio y la aceleración de a gravedad en su superficie es 6,2 m/s^2. Calcule:

a) La densidad media del planeta y la velocidad de escape desde su superficie.
b) La energía que hay que comunicar a un objeto de 50 kg de masa para lanzarlo desde la superficie del planeta y ponerlo en órbita circular alrededor del mismo de forma que su periodo sea de 2 horas.

Datos: Constante de Gravitación $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

EXAMEN FÍSICA 2º BACHILLERATO – TEMA 1: CAMPO GRAVITATORIO

OPCIÓN B

Cuestión 1.- Plutón describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Indique para cada una de las siguientes magnitudes si su valor es mayor, menor o igual en el afelio (punto más alejado del Sol) comparado con el perihelio (punto más próximo al Sol):

a) momento angular respecto a la posición del Sol
b) momento lineal
c) energía potencial
d) energía mecánica.

Cuestión 2.- Cuatro masas puntuales idénticas de 6 kg cada una están situadas en los vértices de un cuadrado de lado igual a 2 m. Calcule:

a) El campo gravitatorio que crean las cuatro masas en el centro de cada lado del cuadrado.
b) El potencial gravitatorio creado por las cuatro masas en el centro del cuadrado, tomando el infinito como origen de potenciales.

Dato : Constante de Gravitación Universal $G = 6{,}67 \times 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

Cuestión 3.-

a) ¿Con qué frecuencia angular debe girar un satélite de comunicaciones, situado en una órbita ecuatorial, para que se encuentre siempre sobre el mismo punto de la Tierra?
b) ¿A qué altura sobre la superficie terrestre se encontrará el satélite citado en el apartado anterior?

Datos: Gravedad en la superficie de la Tierra = $9{,}8\ m \cdot s^{-2}$
Radio medio de la Tierra = $6{,}37 \times 10^6$ m

Problema 1.- Fobos es un satélite de Marte que gira en una órbita circular de 9380 km de radio, respecto al centro del planeta, con un periodo de revolución de 7,65 horas. Otro satélite de Marte, Deimos, gira en una órbita de 23460 km de radio. Determine:

a) La masa de Marte.
b) El período de revolución del satélite Deimos.
c) La energía mecánica del satélite Deimos.
d) El módulo del momento angular de Deimos respecto al centro de Marte.

Datos:
Constante de Gravitación Universal $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$
Masa de Fobos $= 1{,}1 \times 10^{16}$ *kg*
Masa de Deimos $= 2{,}4 \times 10^{15}$ *kg*

Problema 2.- La nave espacial Discovery, lanzada en octubre de 1998, describía en torno a la Tierra una órbita circular con una velocidad de $7{,}62\ km \cdot s^{-1}$.

a) ¿A qué altitud se encontraba?
b) ¿Cuál era su período? ¿Cuántos amaneceres contemplaban cada 24 horas los astronautas que viajaban en el interior de la nave?

Datos: Constante de Gravitación $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$
Masa de la Tierra $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ *kg*
Radio medio de la Tierra $R_T = 6370$ *km*

EXAMEN FÍSICA 2º BACHILLERATO – TEMA 1: CAMPO GRAVITATORIO

SOLUCIONES OPCIÓN A

Cuestión 1

a) Aplicamos el teorema de conservación de la energía mecánica.

$$Ec_i + Ep_i = Ep_f$$

$$1/2\, mv^2 - \frac{G M_T\, m}{R_T} = -\frac{G M_T\, m}{R_T + h}$$

$$1/2\, v^2 = \frac{G M_T}{R_T} - \frac{G M_T}{R_T + h}$$

$$v = \sqrt{2\left(\frac{2GM_T}{2R_T} - \frac{GM_T}{2R_T}\right)} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11} \times 5{,}98\cdot 10^{24}}{6{,}37\cdot 10^{6}}} = 7913{,}05\ ms^{-1}$$

b) Velocidad de lanzamiento v= 15826,09 m/s Comprobamos que es mayor que la velocidad mínima de escape y por tanto e*l objeto sí que escapará del campo gravitatorio terrestre*

Calculamos la velocidad mínima necesaria para que un objeto escape a la atracción gravitatoria. En el punto situado a distancia infinita la energía potencial y la energía cinética son nulas.

$$Ec_i + Ep_i = 0_f$$

$$1/2\, mv_e^2 - \frac{G M_T\, m}{R_T} = 0$$

$$v_e = \sqrt{2\frac{GM_T}{R_T}} = 11190 \text{ m/s}$$

Cuestión 2:

a) En la superficie de la Tierra, la intensidad de campo gravitatorio es $g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}$

y a una altura h sobre la superficie terrestre la intensidad de dicho campo es $g = G\frac{M_T}{(R_T+h)^2}$.

La condición $g=g_0/2$ se da a una altura h a la que $(R_T+h)^2 = 2R_T^2 \Rightarrow \boxed{h = R_T\left(\sqrt{2}-1\right)}$.

b) Análogamente con el potencial gravitatorio:

$V_0 = -G\frac{M_T}{R_T}$ y $V = -G\frac{M_T}{(R_T+h)}$. La condición $V=V_0/2$ se da si $R_T + h = 2R_T \Rightarrow \boxed{h = R_T}$

EXAMEN FÍSICA 2º BACHILLERATO – TEMA 1: CAMPO GRAVITATORIO

SOLUCIONES OPCIÓN A

Cuestión 3.-

a)

$$g_T = \frac{G\,M_T}{(R_T)^2} \quad ; \; g_L = \frac{G\,M_L}{(R_L)^2}$$

$$1/6\; g_T = g_L \quad ; \quad 1/6\,\frac{G\,M_T}{(R_T)^2} = \frac{G\,M_L}{(R_L)^2}$$

G se puede eliminar; la masa de la Tierra y la Luna son igual a su volumen por su densidad

$$1/6\,\frac{4/3\,\pi\,(R_T)^3\,\rho_T}{(R_T)^2} = \frac{4/3\,\pi\,(R_L)^3\,\rho_L}{(R_L)^2}$$

simplificando: $1/6\; R_T\,\rho_T = R_L\,\rho_L$

y como $R_L = 0{,}27\;R_T$: $1/6\; R_T\,\rho_T = 0{,}27\;R_T\,\rho_L$

$$\frac{\rho_L}{\rho_T} = \frac{1}{6\cdot 0{,}27} = 0{,}617$$

b)

$$v_e = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}} \quad ; \quad v_{eT} = \sqrt{\frac{2\,G\,M_T}{R_T}} \quad v_{eL} = \sqrt{\frac{2\,G\,M_L}{R_L}}$$

$$\frac{v_{eT}}{v_{eL}} = \frac{\sqrt{\dfrac{2\,G\,M_T}{R_T}}}{\sqrt{\dfrac{2\,G\,M_L}{0{,}27\;R_T}}} = \sqrt{0{,}27\,\frac{M_T}{M_L}} =$$

Sustituyendo la masa de la Tierra y de la Luna por sus expresiones en términos de volumen y densidad se obtiene

$$\frac{v_{eT}}{v_{eL}} = \sqrt{0{,}27\,\frac{4/3\,\pi\,(R_T)^3\,\rho_T}{4/3\,\pi\,(R_L)^3\,\rho_L}} = \sqrt{0{,}27\,\frac{(R_T)^3\,\rho_T}{(R_L)^3\,\rho_L}} = 4{,}71$$

teniendo en cuenta que $R_L \approx 0{,}27\;R_T$ y que $\rho_L = 0{,}617\;\rho_T$

$$\frac{v_{eL}}{v_{eT}} = \frac{1}{4{,}71} = 0{,}21$$

Problema 1.-

a) Para que el satélite esté en una órbita estable alrededor de Venus debe cumplirse:

$$\left.\begin{array}{l} G\dfrac{M_v\cdot m_s}{R^2} = m_s\dfrac{v_s^2}{R} \\ v_s = w_s\cdot R \end{array}\right\} \Rightarrow G\frac{M_v}{R^2} = \frac{w_s^2\cdot R^2}{R} \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{G\cdot M_v}{w_s^2}} = \mathbf{24906130m}$$

Ahora, utilizando el dato del momento angular se obtiene la masa del satélite:

SOLUCIONES OPCIÓN A

$$L_1 = R \cdot m_s \cdot v_s = m_s \cdot w_s \cdot R^2 \Rightarrow m_s = \frac{L_1}{R^2 \cdot w_s} = \mathbf{24{,}45\ Kg}$$

b) Vamos a calcular el radio de la nueva órbita con $\omega_2 = 10^{-4}$ rad/s:

$$R_2 = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_v}{w_2^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 4{,}87 \cdot 10^{24}}{(10^{-4})^2}} = 31906923 \quad m$$

$$W = Ep_1 - Ep_2 = G \cdot M_v \cdot m_s \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R1}\right) = \mathbf{-69966435J}$$

Problema 2.-

a) De la expresión que nos proporciona el valor del campo gravitatorio, despejamos el valor de la masa del planeta:

$$g = G\frac{M}{R^2}; \qquad M = \frac{gR^2}{G} = \frac{6{,}2 \cdot (3{,}2 \cdot 10^6)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} = 9{,}52 \cdot 10^{23}\ kg$$

El valor de la densidad se obtiene a partir de la relación entre la masa y el volumen.

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{3 \cdot 9{,}52 \cdot 10^{23}}{4 \cdot \pi \cdot (3{,}2 \cdot 10^6)^3} = 6935{,}8\ kg/m^3 \approx 6{,}9\ g/cm^3$$

Para calcular su velocidad de escape igualamos a cero el valor de la energía de un supuesto cuerpo de masa "m" que se encuentre en su superficie.

$$\frac{1}{2}mv_e^2 - G\frac{Mm}{r} = 0$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 9{,}52 \cdot 10^{23}}{3{,}2 \cdot 10^6}} = 6299{,}72\ m/s \approx 6{,}3\ km/s$$

b) La energía de un satélite en una órbita es la suma de la cinética y de la potencial:

$$E = E_c + E_p = G\frac{Mm}{2r} - G\frac{Mm}{r} = -G\frac{Mm}{2r}$$

Aplicando el principio de conservación de la energía, el satélite debe ser lanzado con una Ec_0 que sumada a la potencial que posee en la superficie del planeta sea igual al total de la energía en la órbita.

$$E_{c0} - G\frac{Mm}{R} = -G\frac{Mm}{2r}; \quad E_{c0} = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2r}\right)$$

Calculamos el radio que tiene que tener la órbita para que el satélite tenga un periodo de dos horas.

SOLUCIONES OPCIÓN A

$$T = 2\cdot 60\cdot 60 = 7200 \text{ s}$$

$$v = \frac{2\pi r}{T}; \qquad T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{G\frac{M}{r}}}; \qquad T^2 = \frac{4\pi}{GM} r^3$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}T^2} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 9{,}52\cdot 10^{23}}{4\pi^2}(7200)^2} = 4368738 \text{ m} \approx 4{,}37\cdot 10^6 \text{ m}$$

Sustituyendo en la expresión de la energía cinética:

$$E_{c0} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 9{,}52\cdot 10^{23}\cdot 50\left(\frac{1}{3{,}2\cdot 10^6} - \frac{1}{8{,}74\cdot 10^6}\right) = 6{,}27\cdot 10^8 \text{ J}$$

EXAMEN FÍSICA 2º BACHILLERATO – TEMA 1: CAMPO GRAVITATORIO

SOLUCIONES OPCIÓN B

Cuestión 1.-

a) El teorema de conservación del momento angular dice que para una partícula o sistema de partículas aislado (sin fuerzas exteriores al sistema), el momento angular se conserva. El sistema solar se puede considerar un sistema de fuerzas aislado de modo que en él, los planetas conservan su momento angular en su rotación alrededor del Sol.

b) La expresión del momento lineal es p = m·v , además sabemos que según la segunda ley de Kepler se conserva la velocidad areolar y para que esto ocurra el valor de la velocidad tiene que ser diferente en los distintos puntos de la órbita, por tanto el valor del momento lineal será diferente en el afelio y en el perihelio.

c) La energía potencial depende de la distancia a la que se encuentran los dos cuerpos de modo que como el afelio y el perihelio se caracterizan por estar a diferente distancia, en ellos el valor de la energía potencial será diferente.

d) En un campo de fuerzas conservativo, se conserva la suma de las energías cinética y potencial, es decir se conserva el valor de la energía mecánica. El sistema solar es un campo de fuerzas conservativo ya que en él, el trabajo que se realiza para trasladar una partícula entre dos puntos, depende de las posiciones inicial y final de la misma y no de la trayectoria seguida. Como consecuencia la energía mecánica tiene el mismo valor en el afelio y en el perihelio.

Cuestión 2.-

a) Primero, ponemos las masas (m_1, m_2, m_3 y m_4) en los vértices de un cuadrado (A, B, C, D) y elegimos el centro de uno de los lados (P). Si elegimos el lado superior del cuadrado, su centro tendrá como coordenadas (1,2), por lo que los vectores de dirección serán:

A(0,2) m	$\overline{AP}=\overline{P\text{-}A}=(1,0)$ m	$\lvert\overline{AP}\rvert=1$ m
B(2,2) m	$\overline{BP}=(-1,0)$ m	$\lvert\overline{BP}\rvert=1$ m
C(2,0) m	$\overline{CP}=(-1,2)$ m	$\lvert\overline{CP}\rvert=\sqrt{5}$ m
D(0,0) m	$\overline{DP}=(1,2)$ m	$\lvert\overline{DP}\rvert=\sqrt{5}$ m
P(1,2) m		

Cada campo se calcula con la expresión: $\vec{E}_i=\frac{-G\cdot M}{r^2}\cdot\vec{U}r_i=\frac{-G\cdot M}{r^3}\cdot\vec{r}_i$ por lo que tenemos 4 campos que habrá que sumar vectorialmente:

$$\vec{E}_A=\frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot6}{1^3}\cdot(1{,}0)\quad;\quad\vec{E}_B=\frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot6}{1^3}\cdot(-1{,}0)\quad;\quad\vec{E}_C=\frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot6}{(\sqrt{5})^3}\cdot(-1{,}2)\quad;$$

$$\vec{E}_A=\frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot6}{(\sqrt{5})^3}\cdot(1{,}2)\quad;\quad\boxed{\vec{E}=\vec{E}_A+\vec{E}_B+\vec{E}_C+\vec{E}_D=(0,-1{,}4318\cdot10^{-10})\frac{N}{kg}\rightarrow|\vec{E}|=1{,}4318\cdot10^{-10}\frac{N}{kg}}$$

En el caso del lado superior, el campo resultante es totalmente vertical y hacia abajo. En el resto de lados, por simetría, la magnitud del campo es la misma, la dirección es perpendicular al lado y el sentido es tal que el vector campo entra en el cuadrado.

b) Cada masa se encuentra a una distancia del centro del cuadrado igual a $\sqrt{2}$ m, luego el potencial que crea cada masa en dicho punto es:

$$V_i=\frac{-G\cdot M}{r}=\frac{-6{,}67\cdot10^{-11}N\cdot m^2\cdot Kg^{-2}\cdot6\text{Kg}}{\sqrt{2}\,m}=-2{,}83\cdot10^{-10}\frac{J}{Kg}$$

Al ser una magnitud escalar, los potenciales se van sumando pero sin anularse, por lo que obtenemos:

$$\mathbf{V_T = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 4\cdot(-2{,}83\cdot10^{-10}) = -1{,}132\cdot10^{-9}\ J/Kg}$$

EXAMEN FÍSICA 2º BACHILLERATO – TEMA 1: CAMPO GRAVITATORIO

SOLUCIONES OPCIÓN B

Cuestión 3.-

a) Para que un satélite se encuentre siempre sobre el mismo punto, el periodo del satélite debe ser igual al periodo de la tierra, en su giro de rotación.

$$T = 1\ \text{dia} = 24\ \text{horas} = 86400\ \text{seg}$$

$$\omega_{ROT} = \frac{2\pi}{T} \qquad \omega_{ROT} = 7'27 \times 10^{-5}\ \text{rad}/\text{s}$$

b) La altura se halla estableciendo que la fuerza gravitatoria es la que mantiene al satélite en su orbita circular:

$$F_G = F_N \ : \ G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R^2} = m_s \cdot \frac{V_s^2}{R}$$

Despejando R:

$$R = \frac{G \cdot M_T}{V_s^2} \quad (1)$$

Si la velocidad o frecuencia angular es $\omega = 7'27 \times 10^{-5}\ \text{rad}/\text{s}$ $\qquad V_s = \omega \cdot R \quad (2)$

Sustituyendo en (1) la velocidad del satélite:

$$R = \frac{G \cdot M_T}{(\omega \cdot R)^2}$$

despejando el radio de la orbita

$$R = \left[\frac{G \cdot M_T}{\omega^2}\right]^{1/3} \quad (3)$$

Ecuación de la que se desconoce la M_{TIERRA}.

El producto $G \cdot M_T$, se puede obtener de la gravedad terrestre ya que la fuerza de atracción gravitacional en la superficie de la tierra es el peso:

$$g_o = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2} \rightarrow G \cdot M_T = g_o \cdot R_T^2 \ \rightarrow \ \boxed{R = \sqrt[3]{\frac{g_o \cdot R_T^2}{\omega^2}} = 4{,}222 \cdot 10^7 m} \ \rightarrow \ \boxed{h = R - R_T = 3{,}585 \cdot 10^7 m}$$

Problema 1.-

a) Usando la segunda ley de Newton para el satélite Fobos, obtenemos

$$\frac{V^2{}_{FOBOS}}{R_{FOBOS}} = G \cdot \frac{M_{MARTE}}{R^2{}_{FOBOS}}$$

$$M_{MARTE} = \frac{R_{FOBOS}}{G} \left(\frac{2\Pi \cdot R_{FOBOS}}{T_{FOBOS}}\right)^2 \approx 6{,}44 \cdot 10^{23} Kg$$

b) Del mismo modo, para el satélite Deimos encontramos

$$\left(\frac{2\Pi \cdot R_{DEIMOS}}{T_{DEIMOS}}\right)^2 = G \cdot \frac{M_{MARTE}}{R_{DEIMOS}}$$

$$T_{DEIMOS} = \left(\frac{4\Pi^2 \cdot R^3_{DEIMOS}}{G \cdot M_{MARTE}}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 30{,}25\ horas$$

SOLUCIONES OPCIÓN B

c) Puesto que la velocidad de Deimos es

$$V_{DEIMOS}=\frac{2\Pi \cdot R_{DEIMOS}}{T_{DEIMOS}}\approx 1353\,\frac{m}{s}$$

entonces, su energía mecánica vendrá dada por

$$E_{DEIMOS}=\frac{1}{2}M_{DEIMOS}V^2{}_{DEIMOS}-G\frac{M_{MARTE}M_{DEIMOS}}{R_{DEIMOS}}\approx -2{,}19\cdot 10^{21}\,J$$

d) El momento angular de Deimos es:

$$L = M_{DEIMOS} \cdot R_{DEIMOS} \cdot V_{DEIMOS} = 7{,}6 \cdot 10^{25}\ Kg\cdot m^2\cdot s^{-1}$$

Problema 2.-

a) La velocidad tiene que ser tal que se compense gravedad y aceleración radial.

$$G\frac{M_T}{r^2}=\frac{v^2}{r}\Rightarrow r = G\frac{M_T}{v^2}=6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{5{,}98\cdot 10^{24}}{7\,620^2}=6{,}87\cdot 10^6\ m$$

La altura sobre la superficie de la Tierra es: $h = r - R_T = 6\,870 - 6\,370 = 500$ km

b) El periodo es: $T=\frac{2\cdot\pi\cdot r}{v}=\frac{2\cdot\pi\cdot 6{,}87\cdot 10^6}{7\,620}=5\,665\ s = 1{,}57$ horas

Por tanto verían: $N_{amaneceres}=\frac{24}{T}=\frac{24}{1{,}57}=15{,}3$ amaneceres.

Algunos días verían 15 amaneceres y algún día 16.