

www.mheducation.es

www.mheducation.es

Física

2.º Bachillerato

Ángel Peña Sainz
José Antonio García Pérez

Andalucía

Mc
Graw
Hill
Education

FÍSICA

2

Ángel Peña Sainz

José Antonio García Pérez

Revisión técnica

Manuel Muñoz Gamero

Daniel Hermosilla Rodríguez



MADRID · BUENOS AIRES · CARACAS · GUATEMALA · LISBOA · MÉXICO
NUEVA YORK · PANAMÁ · SAN JUAN · BOGOTÁ · SÃO PAULO · AUCKLAND
HAMBURGO · LONDRES · MILÁN · MONTREAL · NUEVA DELHI · PARÍS
SAN FRANCISCO · SÍDNEY · SINGAPUR · SANT LOUIS · TOKIO · TORONTO

■ Presentación

Al elaborar este libro de Física hemos tenido presente que los alumnos y alumnas a los que va destinado se encuentran en el umbral de la universidad y de los Ciclos Formativos de Grado Superior; por ello, hemos procurado que el desarrollo de los contenidos se ajuste a la metodología adecuada, con el fin de que los estudiantes de segundo curso de Bachillerato afronten los estudios superiores con una base sólida y bien cimentada. En definitiva, se trata de introducir al estudiante en el ámbito de la Física superior mediante la adquisición de habilidades para el análisis y la interpretación de los fenómenos físicos con la precisión y rigor adecuados, siguiendo los criterios de la nueva ley educativa.

Se ha intentado que la lectura de este libro de texto sea atractiva. Se profundiza progresivamente en los conceptos, procurando que el alumnado descubra por sí mismo la necesidad de cada paso, una vez asimilado el anterior.

En el libro se incluye un elevado número de ejercicios prácticos en forma de:

- Ejemplos de actividades resueltas. Se encuentran después de desarrollar un concepto importante, con el fin de fijar las ideas que se han estudiado y que sirven, además, como modelo para la posterior resolución de problemas.
- Actividades propuestas. Constituyen una extensa colección de problemas que abarca todos los conceptos estudiados. Muchas han sido propuestas en las Pruebas de Acceso a la Universidad y aparecen señaladas con el icono . Son un material muy apreciable como elemento de trabajo en la clase y de esfuerzo personal del alumno. Todos los ejercicios llevan su solución.

A lo largo del texto se hacen referencias al margen sobre cuestiones de interés y aspectos que no se deben olvidar.

Los contenidos se han estructurado en cinco bloques temáticos, desarrollados en trece unidades didácticas: Bloque I. La actividad científica (Unidad 1); Bloque II. Interacción gravitatoria (Unidades 2, 3 y 4); Bloque III. Interacción electromagnética (Unidades 5, 6 y 7); Bloque IV. Ondas y Óptica (Unidades 8, 9 y 10); Bloque V. Física del siglo xx (Unidades 11, 12 y 13).

Al final de cada unidad se incluyen lecturas sobre aspectos relevantes de la vida cotidiana relacionados con el estudio de la unidad; ejercicios propuestos, indicando los de mayor dificultad y un apartado resumen de los conceptos básicos que se han desarrollado. Para cada bloque se ha creado la sección «Trabaja como un científico», que propone tareas con las que los alumnos pueden trabajar las competencias y que les ayudan a alcanzar los estándares de aprendizaje.

Al término de cada bloque se proponen un buen número de ejercicios seleccionados de pruebas reales de acceso a la universidad para que sirvan de preparación más específica al alumno que se vaya a presentar a dichas pruebas.

Al final del libro se incluyen varios anexos con datos de interés.

Deseamos mostrar nuestro agradecimiento a los profesores que nos han trasladado sus sugerencias o han optado por este texto, así como a todos los profesionales de McGraw-Hill/Interamericana de España que han hecho posible la realización de este libro.

Los autores

CÓMO SE UTILIZA ESTE LIBRO



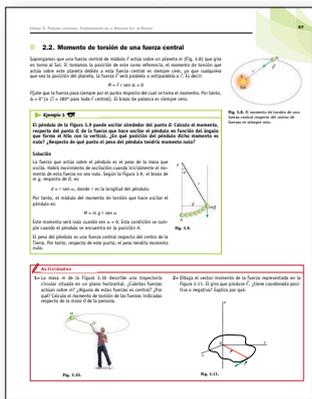
Portada

La portada incluye un índice, un texto introductorio y una imagen motivante relacionada con el contenido de la unidad.

Contenidos

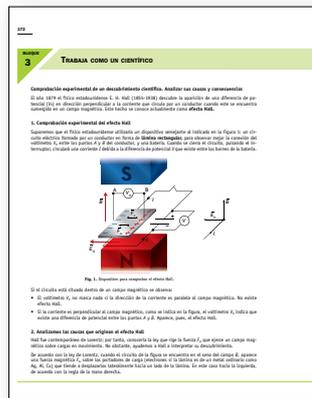
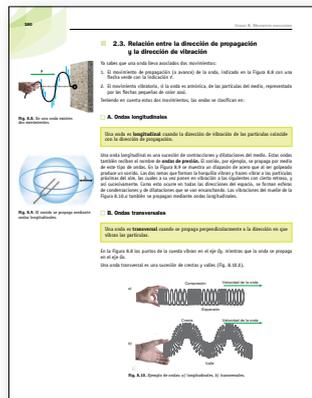
El presente libro recoge todos los contenidos actualizados de la LOMCE.

La organización de los contenidos y el uso didáctico de figuras, ilustraciones y gráficas permite un aprendizaje progresivo.



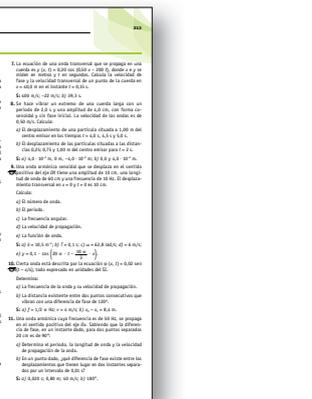
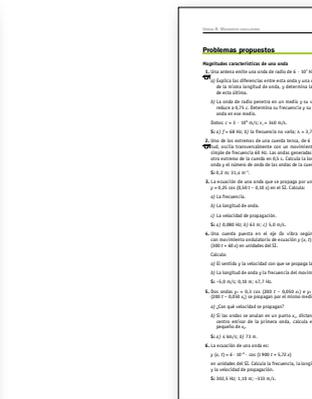
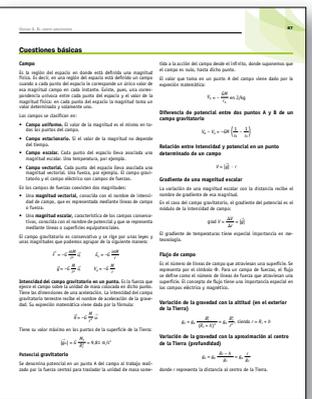
Ejemplos resueltos y Actividades

Los ejemplos resueltos permiten afianzar conocimientos especialmente complejos, generalmente con desarrollos matemáticos. También se incluyen numerosas actividades propuestas.



Trabaja como un científico

Una sección muy práctica y competencial, que permite trabajar las habilidades del alumno y refuerza lo aprendido.



Lectura

En las páginas finales encontrarás una lectura divulgativa relacionada con lo estudiado en la unidad.

Cuestiones básicas

La última página de cada unidad es un resumen con las principales definiciones y fórmulas aprendidas en la unidad.

Problemas propuestos y Actividades resueltas y propuestas

Los problemas propuestos están clasificados según su temática. Al final de cada bloque se ofrece una serie de actividades resueltas y propuestas. Mediante el símbolo se indican los ejercicios que han formado parte de pruebas de final de etapa en años anteriores.

BLOQUE 1. LA ACTIVIDAD CIENTÍFICA**Unidad 1. La actividad científica**

1 La evolución del concepto de ciencia.....	7
2 El trabajo científico.....	8
3 Las herramientas de la investigación.....	10
4 Las tecnologías de la información y la comunicación	18
Ciencia, tecnología y sociedad.....	20
Problemas propuestos.....	21

Trabaja como un científico.....	22
--	-----------

BLOQUE 2. INTERACCIÓN GRAVITATORIA**Unidad 2. Ley de la gravitación universal. Aplicaciones**

1. Interacciones a distancia.....	25
2. Antecedentes de la teoría de la Gravitación	26
3. Desarrollo de la teoría de la gravitación universal	27
4. Fuerzas conservativas y energía mecánica	31
5. Energía potencial gravitatoria asociada al sistema formado por dos partículas cualesquiera	32
6. Aplicaciones de la teoría de la gravitación universal.....	36
7. Consecuencias de la gravitación universal	45
8. Caos determinista	47
Ciencia, tecnología y sociedad.....	50
Problemas propuestos.....	51
Cuestiones básicas.....	53

Unidad 3. Fuerzas centrales. Comprobación de la segunda ley de Kepler

1. Fuerza central	55
2. Momento de torsión de una fuerza respecto de un punto	55
3. Momento angular de una partícula	58
4. Relación entre el momento de torsión y el momento angular.....	61
5. Momento angular y movimiento planetario. Segunda ley de Kepler	63
Ciencia, tecnología y sociedad.....	50
Problemas propuestos.....	69
Cuestiones básicas.....	71

Unidad 4. El campo gravitatorio

1. Interpretación de las interacciones a distancia. Concepto de campo.....	73
2. Campo gravitatorio	75
3. Intensidad del campo gravitatorio.....	76
4. Potencial del campo gravitatorio.....	80
Ciencia, tecnología y sociedad.....	84
Problemas propuestos.....	85
Cuestiones básicas.....	87

Trabaja como un científico.....	88
Actividades resueltas	90
Actividades propuestas	93

BLOQUE 3. INTERACCIÓN ELECTROMAGNÉTICA**Unidad 5. El campo eléctrico**

1. Repaso de conceptos básicos.....	95
2. Campo eléctrico	96
3. Intensidad del campo eléctrico.....	97
4. Potencial eléctrico	99
5. Flujo de líneas de campo y teorema de Gauss	105
6. Analogías y diferencias entre el campo gravitatorio y el campo eléctrico	108
7. Capacidad eléctrica. Condensadores.....	109
8. Distribución de la carga eléctrica en un conductor en equilibrio electrostático. Efecto jaula de Faraday	115
Ciencia, tecnología y sociedad.....	117
Problemas propuestos.....	118
Cuestiones básicas.....	121

Unidad 6. Electromagnetismo. El campo magnético

1. Propiedades generales de los imanes. Desarrollo del electromagnetismo	123
2. Explicación del magnetismo natural.....	124
3. Campo magnético	125
4. Fuentes del campo magnético. Creación de campos magnéticos por cargas en movimiento.....	127
5. Fuerzas sobre cargas móviles situadas en campos magnéticos. Ley de Lorentz	133
6. Fuerzas entre corrientes paralelas. Definición de amperio	141
7. Ley de Ampère.....	146
Ciencia, tecnología y sociedad.....	117
Problemas propuestos.....	147
Cuestiones básicas.....	151

Unidad 7. Inducción electromagnética

1. Inducción electromagnética. Experiencias de Faraday y de Henry.....	153
2. Leyes de Faraday y de Lenz.....	157
3. Producción de corrientes alternas mediante variaciones de flujo magnético	159
4. La energía eléctrica: importancia de su producción e impacto medioambiental.....	162
Ciencia, tecnología y sociedad.....	166
Problemas propuestos.....	167
Cuestiones básicas.....	171

Trabaja como un científico.....	172
Actividades resueltas	174
Actividades propuestas	175

BLOQUE 4. ONDAS Y ÓPTICA GEOMÉTRICA**Unidad 8. Movimiento ondulatorio**

1. Concepto de onda	177
2. Tipos de onda	179
3. Magnitudes características de las ondas armónicas.....	181
4. Ecuación de las ondas armónicas unidimensionales	185
5. Propiedades periódicas de la función de onda armónica	189
6. Estudio cualitativo de algunas propiedades de las ondas. Principio de Huygens	190
7. Transmisión de energía a través de un medio.....	195
8. Ondas estacionarias.....	198
9. Naturaleza del sonido	201
10. Velocidad de propagación de las ondas sonoras .	202
11. Cualidades del sonido	204
12. Efecto Doppler	208
13. Contaminación acústica.....	211
Ciencia, tecnología y sociedad.....	166
Problemas propuestos.....	167
Cuestiones básicas.....	171

Unidad 9. Ondas electromagnéticas. La luz

1. Síntesis electromagnética.....	219
2. Ondas electromagnéticas	220
3. Naturaleza de la luz	223
4. Propagación rectilínea de la luz	226
5. Velocidad de la luz en el vacío	227
6. Índice de refracción	228
7. Reflexión y refracción de la luz.....	230
8. Dos casos especiales de refracción de la luz	234
9. Dispersión de la luz	236
10. El color	237
11. Otros fenómenos luminosos	238
Ciencia, tecnología y sociedad.....	240
Problemas propuestos.....	241
Cuestiones básicas.....	243

Unidad 10. Óptica geométrica. Espejos y lentes

1. Conceptos básicos de Óptica geométrica	245
2. Dioptrio esférico.....	247
3. Dioptrio plano	251
4. Espejos planos.....	252
5. Espejos esféricos.....	253
6. Lentes delgadas.....	257
7. Óptica del ojo humano.....	264
Ciencia, tecnología y sociedad.....	266
Problemas propuestos.....	267
Cuestiones básicas.....	269

Trabaja como un científico.....	270
Actividades resueltas.....	271
Actividades propuestas	277

BLOQUE 5. FÍSICA DEL SIGLO XX**Unidad 11. Física relativista**

1. Introducción	279
2. Relatividad en la Mecánica clásica	280
3. Transformaciones en sistemas inerciales.....	281
4. Aplicaciones de las transformaciones de Galileo	282
5. Principio de relatividad de Galileo	285
6. El problema del electromagnetismo.....	286
7. Teoría especial de la relatividad	289
8. Transformación relativista de la velocidad	291
9. Masa relativista	292
10. Equivalencia entre masa y energía	293
Ciencia, tecnología y sociedad.....	294
Problemas propuestos.....	295
Cuestiones básicas.....	297

Unidad 12. Elementos de Física Cuántica

1. Insuficiencia de la Física clásica.....	299
2. Radiación térmica. Teoría de Planck.....	300
3. Efecto fotoeléctrico. Teoría de Einstein	303
4. Espectros atómicos. El átomo de Bohr	307
5. Hipótesis de De Broglie. Dualidad partícula-onda .	308
6. Principio de incertidumbre de Heisenberg	310
7. Mecánica Cuántica: función de onda y probabilidad	312
8. Aplicaciones de la Física Cuántica	314
Ciencia, tecnología y sociedad.....	318
Problemas propuestos.....	319
Cuestiones básicas.....	321

Unidad 13. Física nuclear. Partículas y fuerzas fundamentales

1. Composición del núcleo de los átomos. Isótopos .	323
2. Estabilidad de los núcleos. Energía de enlace	325
3. Radiactividad	327
4. Reacciones nucleares. Fisión y fusión nuclear	332
5. Armas y reactores nucleares.....	334
6. Contaminación radiactiva. Medida y detección....	336
7. Aplicaciones de los isótopos radiactivos	337
8. Materia y antimateria. Partículas fundamentales.	338
9. La unificación de las interacciones fundamentales	340
10. Origen y evolución del Universo.....	342
Ciencia, tecnología y sociedad.....	344
Problemas propuestos.....	345
Cuestiones básicas.....	347

Trabaja como un científico.....	348
Actividades resueltas	350
Actividades propuestas	355

Anexos.....	356
--------------------	------------

FUERZAS CENTRALES. COMPROBACIÓN DE LA SEGUNDA LEY DE KEPLER

- Fuerza central.
- Momento de torsión de una fuerza respecto de un punto.
- Momento angular de una partícula.
- Relación entre el momento de torsión y el momento angular.
- Momento angular y movimiento planetario. Segunda ley de Kepler.

En esta unidad vamos a comprobar que la segunda ley de Kepler es una consecuencia de la conservación del momento angular de una partícula cuando está sometida a una fuerza central.

Estudiaremos los conceptos de fuerza central, momento angular y momento de una fuerza respecto de un punto para deducir la ley de las áreas de Kepler. Aunque no sea objeto de estudio en esta unidad, sino en la Unidad 2, las consecuencias de esta ley son muy importantes.

Gracias a los principios de conservación que se rigen mediante las fuerzas centrales, podemos construir giroscopios, que son aparatos capaces de controlar la posición de los aviones, las naves espaciales y los misiles, antes de la existencia del GPS.



1. Fuerza central

Considera un planeta de masa m que se mueve alrededor del Sol en una órbita elíptica (Fig. 3.1). La fuerza gravitatoria que actúa sobre el planeta siempre se encuentra dirigida hacia el Sol, y su módulo depende solamente de la distancia r . Por tanto, se trata de una fuerza conservativa y se dice que es una **fuerza central** porque su recta de dirección pasa por un mismo punto, cualquiera que sea la posición de la partícula sobre la que está actuando.

Se pueden citar como ejemplos de fuerza central:

- La fuerza recuperadora del m.a.s.; cualquiera que sea la posición de la partícula que vibra, la fuerza elástica siempre está dirigida hacia el punto O (Fig. 3.2).
- La fuerza de atracción que ejerce el Sol sobre la Tierra en su movimiento de traslación. En general, la fuerza gravitatoria es una fuerza central. Por tanto, el peso de los cuerpos, al ser gravitatoria la atracción de la Tierra sobre los cuerpos, es otro ejemplo de fuerza central.
- La fuerza que ejerce sobre el electrón el núcleo del átomo de hidrógeno. En general, la fuerza electrostática de Coulomb es una fuerza central.
- La fuerza centrípeta y la centrífuga, pero solamente en una circunferencia (Fig. 3.3).

El caso que más nos interesa es el sistema formado por varias partículas que interactúan con una fuerza de tipo central, donde una de ellas, M , está fija en el centro de fuerzas, y las otras se mueven respecto de la primera bajo la acción de la fuerza central. Es el caso del sistema solar.

2. Momento de torsión de una fuerza respecto de un punto

Cuando se ejerce una fuerza sobre un cuerpo rígido que puede girar alrededor de algún eje, el cuerpo tenderá a realizar dicha rotación, siempre que dicha fuerza no se dirija o provenga de dicho eje.

La capacidad de una fuerza para hacer girar a un cuerpo alrededor de algún eje se mide mediante una magnitud conocida con el nombre de **momento de torsión de la fuerza**, o simplemente momento de una fuerza (Fig. 3.4). Si sobre un mismo sólido actúan simultáneamente varias fuerzas, que le hacen girar alrededor de un eje, el momento total es igual a la suma vectorial de los momentos de cada una de las fuerzas. El sentido del giro que toma el cuerpo dependerá del momento resultante.

2.1. ¿De qué depende el momento de una fuerza?

Observa la Figura 3.5 de la página siguiente: se trata de girar una tuerca alrededor del eje Ox . Para ello, aplicamos una fuerza \vec{F} en el extremo de la llave inglesa formando un ángulo ϕ con el eje Oy . Como puedes observar, solamente la componente F_z tiene la capacidad de realizar el giro. En cambio, la fuerza F_y tiene momento nulo.

La diferencia entre ambas fuerzas está en su distancia al punto O ; F_z dista r , mientras que la distancia entre F_y y el origen O es nula.

El momento de F_z viene dado por la expresión:

$$M = F_z r$$

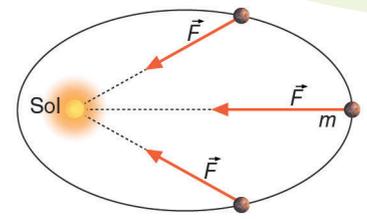


Fig. 3.1. La fuerza que actúa sobre un planeta está dirigida siempre hacia el Sol.

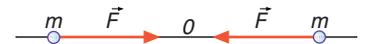


Fig. 3.2. Una partícula que vibra está sometida a una fuerza central.

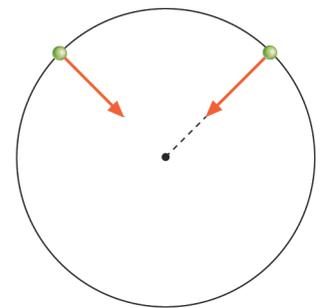


Fig. 3.3. Las fuerzas centrípeta y centrífuga en una circunferencia son fuerzas centrales. La dirección de ambas pasa por el centro de curvatura instantáneo, que en este caso es fijo.

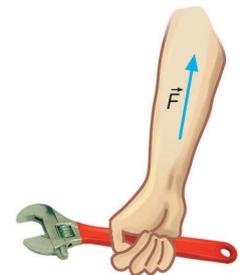


Fig. 3.4. La capacidad de la fuerza F para hacer girar la llave se mide mediante una magnitud conocida con el nombre de momento de la fuerza.

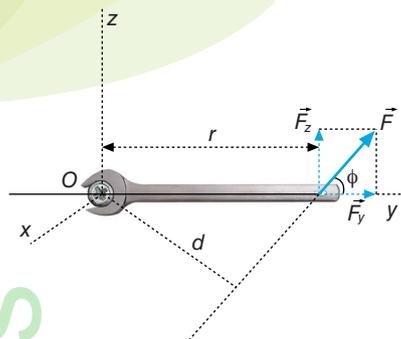


Fig. 3.5. Brazo de palanca.

! Importante

La distancia entre un punto y una recta se mide sobre la perpendicular a la recta trazada desde el punto.

Pero de la Figura 3.5 se deduce que:

$$F_z = F \sin \phi$$

Luego el momento en función de la fuerza aplicada será:

$$M = F r \sin \phi = F d$$

- La cantidad $d = r \sin \phi$, conocida como **brazo** de la fuerza (o **brazo de palanca**), representa la distancia (longitud de la perpendicular) desde el centro de rotación hasta la línea de dirección de la fuerza.
- El módulo del momento de una fuerza es igual al producto del valor de la fuerza por su brazo de palanca. Observa cómo la componente $F_y = F \cos \phi$ pasa por O y no produce rotación porque su brazo es nulo.
- El momento de una fuerza solamente está definido cuando se especifica un punto de referencia respecto del cual se halla el brazo de palanca.
- A partir de la definición de momento de torsión se ve cómo la capacidad de giro aumenta conforme se incrementa la fuerza, F , y también conforme aumenta su brazo de palanca, d .
- El momento de una fuerza se define generalmente como el producto vectorial de los vectores \vec{r} y \vec{F} :

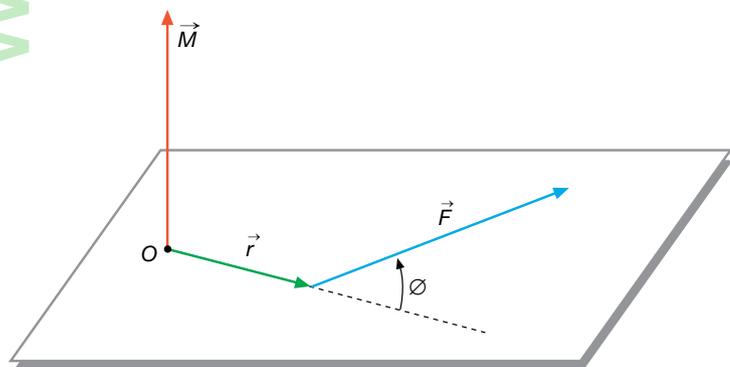
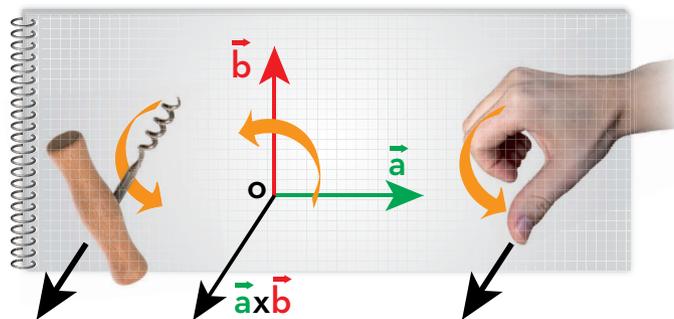
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

donde \vec{r} es el vector de posición respecto de O del punto de aplicación de la fuerza \vec{F} .

El momento \vec{M} es un vector cuya dirección es perpendicular al plano definido por \vec{r} y \vec{F} . El sentido viene determinado por el giro que debe darse al vector \vec{r} para hacerlo coincidir con la dirección y sentido de \vec{F} , por el camino más corto (Fig. 3.6).

Si mirando hacia el papel (pantalla...) el sentido de giro es contrario al de las agujas del reloj, también llamado norte (\curvearrowright), el momento viene hacia nosotros desde ese plano, igual que haría un tornillo o el pulgar de una mano derecha. El momento apuntará hacia dentro del plano si el giro se hace en el mismo sentido que el de las agujas del reloj, también llamado sur (\curvearrowleft).

Para hallar el sentido del vector momento también se utilizan las reglas del producto vectorial de dos vectores cualesquiera, conocidas como regla del tornillo y regla de la mano derecha (Fig. 3.7). Si un tornillo se coloca perpendicularmente al plano definido por los vectores \vec{a} y \vec{b} en el punto O y se hace girar de forma que tienda a llevar el primer factor (\vec{a}) sobre el segundo (\vec{b}) describiendo el menor ángulo, entonces el avance del tornillo coincide con el sentido del vector \vec{c} . Según la regla del tornillo, el producto vectorial no es conmutativo —puesto que si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$, $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{c}$ —, sino que es anticonmutativo —ya que $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ —.

Fig. 3.6. El vector \vec{M} es perpendicular al plano definido por \vec{r} y \vec{F} .Fig. 3.7. Reglas del tornillo y de la mano derecha para el producto vectorial de dos vectores: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$.

2.2. Momento de torsión de una fuerza central

Supongamos que una fuerza central de módulo F actúa sobre un planeta m (Fig. 3.8) que gira en torno al Sol. Si tomamos la posición de este como referencia, el momento de torsión que actúa sobre este planeta debido a esta fuerza central es siempre cero, ya que cualquiera que sea la posición del planeta, la fuerza \vec{F} será paralela o antiparalela a \vec{r} . Es decir:

$$M = F r \sin \phi = 0$$

Fíjate que la fuerza pasa siempre por el punto respecto del cual se toma el momento. Por tanto, $\phi = 0^\circ$ (o $\phi = 180^\circ$ para toda F central). El brazo de palanca es siempre cero.

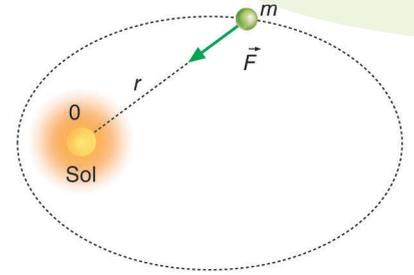


Fig. 3.8. El momento de torsión de una fuerza central respecto del centro de fuerzas es siempre cero.

Ejemplo 1

El péndulo de la Figura 3.9 puede oscilar alrededor del punto O . Calcula el momento, respecto del punto O , de la fuerza que hace oscilar el péndulo en función del ángulo que forma el hilo con la vertical. ¿En qué posición del péndulo dicho momento es nulo? ¿Respecto de qué punto el peso del péndulo tendría momento nulo?

Solución

La fuerza que actúa sobre el péndulo es el peso de la masa que oscila. Habrá movimiento de oscilación cuando inicialmente el momento de esta fuerza no sea nulo. Según la Figura 3.9, el brazo de $m g$, respecto de O , es:

$$d = \ell \sin \alpha, \text{ donde } \ell \text{ es la longitud del péndulo.}$$

Por tanto, el módulo del momento de torsión que hace oscilar el péndulo es:

$$M = m g \ell \sin \alpha$$

Este momento será nulo cuando $\sin \alpha = 0$. Esta condición se cumple cuando el péndulo se encuentra en la posición A .

El peso del péndulo es una fuerza central respecto del centro de la Tierra. Por tanto, respecto de este punto, el peso tendría momento nulo.

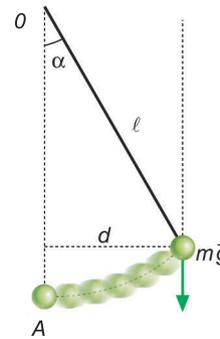


Fig. 3.9.

Actividades

1> La masa m de la Figura 3.10 describe una trayectoria circular situada en un plano horizontal. ¿Cuántas fuerzas actúan sobre m ? ¿Alguna de estas fuerzas es central? ¿Por qué? Calcula el momento de torsión de las fuerzas indicadas respecto de la mano O de la persona.

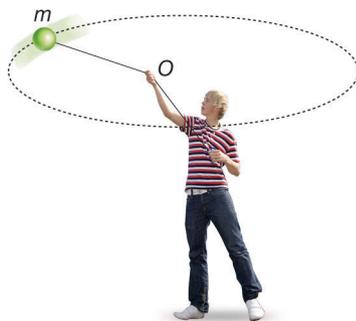


Fig. 3.10.

2> Dibuja el vector momento de la fuerza representada en la Figura 3.11. El giro que produce \vec{F} , ¿tiene coordenada positiva o negativa? Explica por qué.

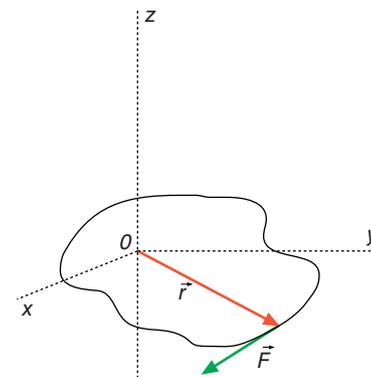


Fig. 3.11.

3. Momento angular de una partícula

En cursos anteriores te has familiarizado con el **momento lineal** o cantidad de movimiento de una partícula. Recuerda que se define como el producto de su masa por la velocidad instantánea que posee: $\vec{p} = m \vec{v}$.

Esta magnitud determina la interacción con otras partículas. Si una partícula está aislada, lo que ocurre cuando no experimenta ninguna interacción, su momento lineal permanece constante.

Si el momento lineal es importante para definir el estado dinámico de una partícula, también es importante otra magnitud conocida con el nombre de **momento angular**, semejante a la anterior, para describir el movimiento circular.

Antes hemos definido el momento de una fuerza respecto de un punto. Pero dicha definición no es exclusiva de las fuerzas. Se puede hallar el momento respecto de un punto de cualquier vector.

En la Figura 3.12 se representa una partícula de masa m que se mueve describiendo una curva con una velocidad \vec{v} . Poseerá, por tanto, una cantidad de movimiento $\vec{p} = m \vec{v}$.

Al momento respecto del punto O del vector \vec{p} se le conoce con el nombre de **momento angular** de la partícula m y se representa por la letra \vec{L} :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \vec{v}$$

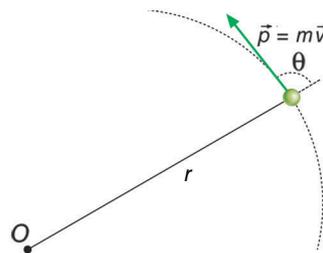


Fig. 3.12. Momento respecto de un punto de la cantidad de movimiento.

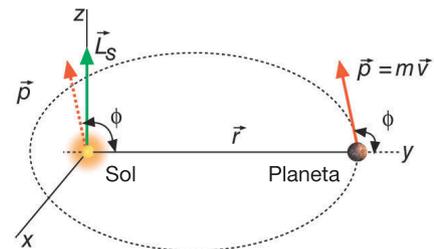


Fig. 3.13. Momento angular de un planeta respecto del Sol.

Recuerda

1. Tanto el valor como la dirección de \vec{L} dependen del punto respecto del cual se toma el momento. En cualquier circunstancia en que aparezca el momento angular, debe estar clara la posición del punto utilizado para calcularlo.
2. El momento angular es un vector perpendicular al plano definido por \vec{r} y \vec{v} (en la Fig. 3.13 este plano es el Oxy). El sentido viene dado por las reglas del producto vectorial.
3. Un caso importante es el movimiento circular. En este caso, y tomando como referencia el centro de la circunferencia, \vec{r} y \vec{v} son perpendiculares entre sí (Fig. 3.14), el momento angular es máximo y vale:

$$L_0 = m r v \text{ sen } 90^\circ = m r v = m r^2 \omega = I \omega$$

Donde $I = m r^2$ recibe el nombre de **momento de inercia** de la partícula respecto de O .

3.1. Momento angular de un sistema

El momento angular de un sistema de partículas se obtiene sumando los momentos angulares de todas y cada una de las partículas que componen el sistema.

Por ejemplo, cuando un sólido rígido tiene movimiento de rotación alrededor de un eje, cada una de sus partículas describe un movimiento circular. El momento angular del sólido respecto del eje de rotación será la suma de los momentos angulares de todas sus partículas (Fig. 3.15).

$$\begin{aligned} L &= m_1 r_1^2 \omega + m_2 r_2^2 \omega + \\ &+ m_3 r_3^2 \omega + \dots = \\ &= \omega (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots) = I \omega, \end{aligned}$$

siendo $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots$, el momento de inercia del sistema de partículas que forman el sólido rígido.

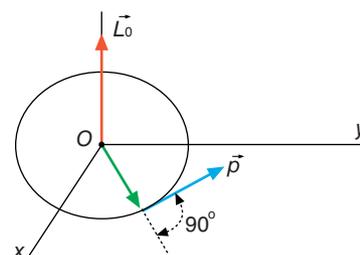


Fig. 3.14. En el movimiento circular el momento angular es constante y toma el valor máximo.

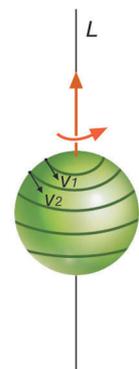


Fig. 3.15. Momento angular de un sistema de partículas.

El momento de inercia representa en el movimiento de rotación el mismo papel que la masa inerte en el movimiento de traslación: mide la inercia o resistencia que ofrece el sólido a cambiar su velocidad de giro (velocidad angular) cuando sobre él se aplica un momento de torsión de una fuerza.

El momento de inercia de un sólido respecto de un eje es una magnitud que indica cómo está distribuida la masa del sólido respecto de ese eje. Al no encontrarse cada partícula del cuerpo a la distancia R del eje (y dado que R es el valor máximo de esa posible distancia), el momento de inercia de un cuerpo será $I = a m R^2$, donde a es un número, con valor entre 0 y 1, que representa lo «lejos» del eje de rotación que se encuentra la mayoría de la masa del objeto. En un anillo, y con respecto a su eje central, a vale 1, ya que toda la masa se encuentra a la distancia R .

El momento de inercia de una esfera homogénea y maciza cuando gira alrededor de un diámetro es:

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

Donde M y R son, respectivamente, la masa y el radio de la esfera.

3.2. Momento angular terrestre

La Tierra posee dos momentos angulares debido a los dos movimientos que realiza.

- Momento angular orbital**, respecto del Sol, correspondiente a su movimiento circular, considerada la Tierra como una partícula:

$$L_0 = r M v_0 = M r^2 \omega_0$$

donde r es el radio de la órbita y ω_0 la velocidad angular orbital.

$$\omega_0 = \frac{2 \pi}{1 \text{ año}} = \frac{2 \pi}{365,25 \cdot 86400} = \frac{2 \pi}{3,15 \cdot 10^7} \text{ rad/s}$$

$$L_0 = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot (1,5 \cdot 10^{11} \text{ m})^2 \cdot \frac{2 \pi}{3,15 \cdot 10^7} = 2,7 \cdot 10^{40} \text{ kg m}^2/\text{s}$$

- Momento angular intrínseco**, correspondiente a su movimiento de rotación en torno a su eje, considerada la Tierra como un sólido.

$$L_e = I \omega$$

siendo ω la velocidad angular de rotación.

$$\omega = \frac{2 \pi}{1 \text{ día}} = \frac{2 \pi}{86400} \text{ rad/s}$$

$$L_e = \frac{2}{5} \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot (6,4 \cdot 10^6 \text{ m})^2 \cdot \frac{2 \pi}{86400} = 7,1 \cdot 10^{33} \text{ kg m}^2/\text{s}$$

El momento angular total será:

$$L_T = r M v_0 + I \omega$$

□ Momento angular de un electrón

En el caso del átomo, cada electrón también tiene dos momentos angulares. Uno debido a su movimiento alrededor del núcleo: **momento orbital** (ℓ) y otro intrínseco o **spin** (s) debido a su movimiento de rotación. Ambos momentos están cuantizados. La cuantización del primero depende del radio de la órbita o número cuántico principal. La del segundo depende del sentido de rotación del electrón. La cuantización de los momentos angulares del electrón se estudia con más detalle en la Unidad 12.

+ Más datos

Un equipo de científicos bajo la dirección de Michael Brown, jefe del Departamento de Astronomía del Instituto Tecnológico de California, descubrió en octubre de 2003 el décimo planeta del sistema solar: Eris.

Se trata de un planeta compuesto de roca y hielo, y se encuentra a más de 14000 millones de km del Sol, al que da la vuelta una vez cada 560 años.

Su tamaño viene a ser 1,5 veces mayor que el tamaño de Plutón, y tiene un diámetro aproximado de 3000 km.

Posteriormente, en 2006 y en parte debido a la aparición de este objeto, al reasignarse la categoría de planetas y planetas enanos, dejó de ser considerado planeta para pasar a ser el mayor plutoide (planetas enanos semejantes en tamaño a Plutón y más lejanos que Neptuno). El nuevo objeto recibió provisionalmente el nombre de 2003 UB313, hasta que se cambió el nombre por el de Eris, y es el objeto más alejado del sistema solar. Está situado en la «última frontera», una enorme región en forma de disco llena de fragmentos helados de lo que pudo ser el material de construcción de los planetas y los cometas actuales.

► Ejemplo 2

Un satélite de 1000 kg de masa describe una órbita circular de $1,2 \cdot 10^4$ km de radio alrededor de la Tierra. Calcula:

- a) El módulo del momento lineal y el módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra. ¿Cambian las direcciones de estos vectores al cambiar la posición del satélite en su órbita?
- b) El periodo y la energía mecánica.

Datos: masa de la Tierra $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg;
constante de gravitación $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻².

Solución

- a) Para calcular el momento lineal del satélite hemos de obtener en primer lugar su velocidad orbital. La fuerza centrípeta necesaria para que el satélite gire alrededor de la Tierra la origina la atracción gravitatoria de esta. Es decir, se cumple: $F_g = F_c$.

$$\frac{GMm_{\text{sat}}}{r_0^2} = \frac{m_{\text{sat}}v^2}{r_0} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r_0}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{12 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 5765 \text{ m/s}$$

El módulo del momento lineal será:

$$|\vec{p}| = m |\vec{v}| = 1000 \text{ kg} \cdot 5765 \text{ m/s} = 5,765 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

Al tratarse de un movimiento circular, los vectores \vec{r} y \vec{v} son perpendiculares.

Por lo tanto, el módulo del vector momento angular será:

$$|\vec{L}| = |\vec{r}| \times |\vec{p}| \sin 90^\circ = 12 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot 5,765 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = 6,92 \cdot 10^{13} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

Los vectores \vec{p} y \vec{v} tienen siempre la misma dirección y sentido. Por tanto, si la dirección de \vec{v} cambia, como ocurre en el movimiento circular, la dirección de \vec{p} también cambiará, pero siempre en el mismo plano. El vector \vec{L} permanece constante, porque el satélite se mueve bajo la acción de una fuerza central.

- b) El periodo o tiempo empleado en dar una vuelta sobre la órbita es por definición:

$$T = \frac{2\pi r_0}{v} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 12 \cdot 10^6 \text{ m}}{5765 \text{ m/s}} = 1,31 \cdot 10^4 \text{ s}$$

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GMm}{r_0}\right) = \frac{1}{2}m \left(\sqrt{\frac{GM}{r_0}}\right)^2 - \frac{GMm}{r_0} = -\frac{GMm}{2r_0} = -1,66 \cdot 10^{10} \text{ J}$$



Actividades

- 3> ¿Cuánto vale el momento de torsión de una fuerza si los vectores \vec{r} y \vec{F} son paralelos?
 ¿Cómo deben ser \vec{r} y \vec{F} para que el momento de torsión sea máximo?

- 4> Una partícula se mueve en el eje OX por la acción de una fuerza constante que se aleja del origen de coordenadas. ¿Cómo varía con el tiempo el momento angular de la partícula con respecto a dicho punto?

- 5> Una partícula con velocidad constante tiene momento angular nulo respecto de un punto. ¿Qué se deduce de esto?

- 6> Un automóvil de 1500 kg se mueve en una pista circular de 50 m de radio con una velocidad de 145 km/h. Calcula el momento angular del automóvil respecto del centro de la pista.

S: $L = 3 \cdot 10^6 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$, con dirección perpendicular al plano de la pista.

4. Relación entre el momento de torsión y el momento angular

Hemos obtenido la expresión $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ para el momento angular de una partícula, y $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ para el momento de una fuerza.

Si derivamos la primera ecuación respecto al tiempo tenemos:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}$$

El término $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (m \vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a} = \vec{F}$ es el valor de la fuerza, como nos indica la segunda ley de Newton.

El término $\frac{d\vec{r}}{dt}$ es la velocidad instantánea.

Por tanto, el producto $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times m \vec{v} = 0$, ya que los vectores \vec{v} y $m \vec{v}$ son paralelos.

Teniendo en cuenta estos resultados, la derivada del momento angular tomaría la forma:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

El **momento de la fuerza** con respecto a un punto P (o a un eje) que actúa sobre una partícula es igual a la variación que experimenta con el tiempo el momento angular de esa partícula con respecto a ese mismo punto o eje:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

4.1. Conservación del momento angular

De la expresión anterior se deduce una consecuencia importante: si no actúa ningún momento de torsión sobre una partícula, el momento angular de esa partícula permanece constante.

Es decir, si $\vec{M} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{cte.} \Rightarrow I\omega = \text{cte.}$

Esto significa que si un sistema evoluciona de tal forma que el momento de las fuerzas exteriores es cero, el momento de inercia inicial por su velocidad angular inicial es igual al momento de inercia final por su velocidad angular final:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

Actividades

7> Un satélite artificial de 100 kg de masa describe una órbita circular a una altura de 655 km. Calcula el módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra.

Datos: $R_T = 6,37 \cdot 10^6$ m; $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg; $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻².

S: $L = 5,3 \cdot 10^{12}$ m² kg s⁻¹.

8> La masa de la Luna es $7,35 \cdot 10^{22}$ kg y la distancia del centro de la Tierra al centro de la Luna $3,84 \cdot 10^8$ m. Calcula el momento angular de la Luna respecto a la Tierra. Dato: la Luna tarda 27,32 días en dar una vuelta alrededor de la Tierra.

S: $L = 2,88 \cdot 10^{34}$ kg m²/s.

! Importante

La ley de conservación del momento angular es una ley fundamental de la Física que tiene el mismo nivel de importancia que la ley de conservación del momento lineal o que la ley de conservación de la energía.

+ Más datos

Casos en los que el momento de las fuerzas exteriores es cero:

- Cuando en el sistema solamente actúan fuerzas internas, como explosiones, acoplamiento de un cuerpo con otro, etc.
- Cuando la dirección de la fuerza externa coincide con el vector de posición. Esto ocurre con las fuerzas centrales.
- Cuando las fuerzas exteriores están aplicadas en el eje de giro.

Recuerda

El principio de la conservación del momento angular es válido tanto en la Física cuántica como en la Física del cosmos y en la Física clásica.

- La cuantización del momento angular de las partículas atómicas desempeña un papel fundamental en la descripción de los sistemas atómicos y nucleares.
- La conservación del momento angular es clave en el desarrollo de las teorías sobre el origen del sistema solar y sobre la contracción de las estrellas gigantes (como se indica en la página 68). El momento angular también explica el movimiento de los astros y resuelve muchos otros problemas de Astronomía.
- Los acróbatas, los saltadores de trampolín, los patinadores sobre hielo, etc., utilizan el principio de la conservación del momento angular. Cuando un patinador quiere aumentar su velocidad angular encoge su cuerpo al máximo para que su momento de inercia sea mínimo. En cambio, cuando quiere disminuir su velocidad extiende los brazos para que el momento de inercia sea mayor. Un gato se las arregla para caer siempre sobre sus patas usando el mismo principio.

4.2. Ecuación fundamental de la dinámica del movimiento de rotación

La expresión $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ recibe el nombre de **ecuación fundamental de la dinámica de rotación**, que aplicada a un sólido rígido se puede expresar en función de la aceleración angular:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \vec{\alpha}$$

Observa la semejanza de esta expresión con la ley fundamental de la dinámica de traslación:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a}$$

El paralelismo entre el movimiento de rotación y el movimiento de traslación queda reflejado en la Tabla 3.1.

Magnitud	Movimiento de traslación	Movimiento de rotación	Relación
Espacio	s (en m)	φ (en rad)	$s = \omega R$
Masa	Inerte m (kg)	Momento de inercia (kg m ²)	$I = a m R^2$
Velocidad media	$v = \frac{s}{t}$ (m/s)	$\omega = \frac{\varphi}{t}$ (rad/s)	$v = \omega R$
Velocidad instantánea	$v = \frac{ds}{dt}$	$v = \frac{d\varphi}{dt}$	$v = \omega R$
Aceleración media	$a = \frac{v_f - v_0}{t}$ (m/s ²)	$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{t}$	$a = \alpha R$
Aceleración instantánea	$a = \frac{dv}{dt}$	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$	$a = \alpha R$
Momento	Lineal $\vec{p} = m \vec{v}$	Angular $\vec{L} = I \vec{\omega}$	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
Ecuación fundamental	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \vec{a}$	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I \vec{\alpha}$	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
Energía cinética	$E = \frac{1}{2} m v^2$	$E = \frac{1}{2} I \omega^2$	
Ecuaciones del movimiento	$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ $v_f^2 - v_0^2 = 2 a s$	$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$ $\omega_f^2 - \omega_0^2 = 2 \alpha \varphi$	

Tabla 3.1. Relación entre las magnitudes de rotación y traslación.

Actividades

9> Define los conceptos de momento lineal y momento angular referidos a un cuerpo de masa m que se mueve con una velocidad v . ¿Qué relación matemática les une? Razona cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

- El momento angular es nulo si el momento lineal también lo es.
- El momento lineal es nulo siempre que lo sea el momento angular.

10> Un planeta sigue una órbita elíptica alrededor de una estrella, cuando pasa por el periastro P , punto de su trayectoria más próximo a la estrella, y por el apoastro A , punto más alejado, explica y justifica las siguientes afirmaciones:

- Su momento angular es igual en ambos puntos y su celeridad es diferente.
- Su energía mecánica es igual en ambos puntos.

5. Momento angular y movimiento planetario. Segunda ley de Kepler

Todos los planetas y satélites se mueven bajo fuerzas centrales y, por tanto, su momento angular permanece constante. Una consecuencia de que el momento angular de un planeta permanezca constante es la ley de las áreas de Kepler.

Para deducir la ley de las áreas nos basamos en la siguiente propiedad: toda partícula que se mueve bajo la acción de una fuerza central tiene momento angular constante.

Efectivamente, ya hemos visto que el momento de la fuerza central respecto del centro de fuerzas es siempre nulo. También sabemos que:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Por tanto, si $\vec{M} = 0$, se deduce que $\vec{L} = \text{cte}$. Esto implica que el momento angular ha de permanecer constante en módulo, constante en dirección y constante en sentido, de donde se deducen las siguientes consecuencias:

1. Por ser constante la dirección del momento angular, el movimiento de la partícula tiene lugar en un plano.

En efecto, si se tiene en cuenta que \vec{L} , por definición, es perpendicular al plano definido por \vec{r} y \vec{v} , para que la dirección de \vec{L} no varíe los vectores \vec{r} y \vec{v} han de estar siempre en el mismo plano (Fig. 3.16). Las cónicas son curvas que cumplen esta condición.

2. Si \vec{L} mantiene constante su sentido, la partícula recorrerá la trayectoria siempre en el mismo sentido, como se deduce de la regla del tornillo, que nos da el sentido del producto vectorial $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$.
3. Si el módulo de \vec{L} **permanece constante**, se cumple la segunda ley de Kepler: las áreas barridas por el vector que une el centro de fuerzas con la partícula son proporcionales a los tiempos empleados en barrerlas.

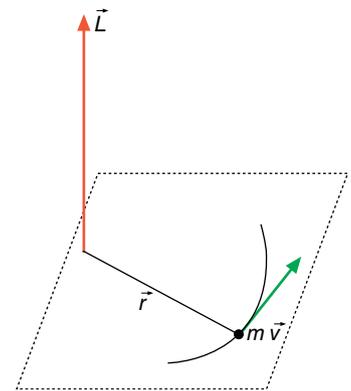


Fig. 3.16. Una partícula sometida a una fuerza central tiene una trayectoria plana.

En efecto, supongamos que un planeta tarda un tiempo dt en pasar de M hasta M' (Fig. 3.17). El vector de posición \vec{r} ha barrido en ese tiempo un área dA . Esta área es la mitad del área $|\vec{r} \times d\vec{r}|$ del paralelogramo formado por los vectores \vec{r} y $d\vec{r}$.

$$dA = \frac{1}{2} \cdot |\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2} \cdot |\vec{r} \times \vec{v} dt| = \frac{1}{2} \cdot |\vec{r} \times \vec{v}| dt$$

Teniendo en cuenta que $|\vec{L}| = |\vec{r} \times m\vec{v}| = |\vec{r} \times \vec{v}| m$, se deduce:

$$dA = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\vec{L}|}{m} dt \Leftrightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\vec{L}|}{m}$$

Si \vec{L} es constante, se deduce que $\frac{dA}{dt}$ también lo es. El término $\frac{dA}{dt}$ recibe el nombre de **velocidad areolar**.

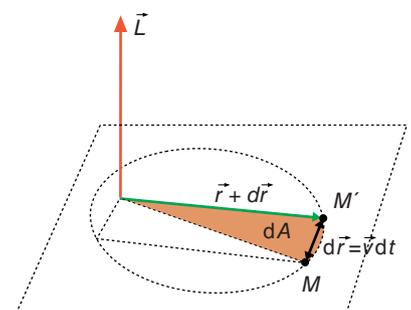


Fig. 3.17. Cuando un planeta pasa de M a M' , el vector de posición barre el área dA .

La ley de las áreas también se puede enunciar diciendo que toda partícula que se mueva bajo una fuerza central lo hace con una velocidad areolar constante.

La ley de las áreas es aplicable a cualquier fuerza central, aunque no fuera proporcional al inverso del cuadrado de la distancia. Si la fuerza central varía con $\frac{1}{r^2}$, entonces se puede demostrar que las órbitas descritas son elipses.

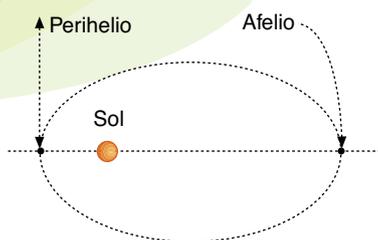


Fig. 3.18. Posiciones de perihelio y afelio de un planeta.

Recuerda

Cuando una partícula se encuentra sometida a la acción de una fuerza central, esta partícula se mueve siempre en el mismo sentido, con una trayectoria plana y con velocidad areolar constante.

En el caso de que un planeta se mueva en una órbita elíptica alrededor del Sol, las posiciones más cercana y más alejada del planeta respecto del Sol se conocen como **perihelio** y **afelio**, respectivamente (Fig. 3.18).

De la **ley de las áreas** se deduce una consecuencia importante: un planeta que gira alrededor del Sol va más deprisa en perihelio que cuando se encuentra en afelio.

Como puedes ver en la Figura 3.19, si un planeta tarda el mismo tiempo en pasar de P_1 a P_2 (afelio) que en pasar de P_3 a P_4 (perihelio), según la ley de las áreas se debe cumplir que $A_1 = A_2$.

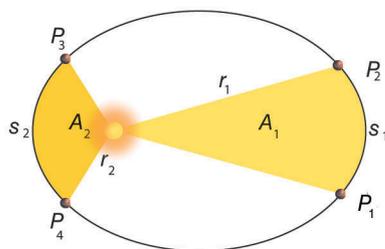


Fig. 3.19. Según la ley de las áreas, la velocidad de un planeta es mayor cuanto más próximo al Sol se encuentra.

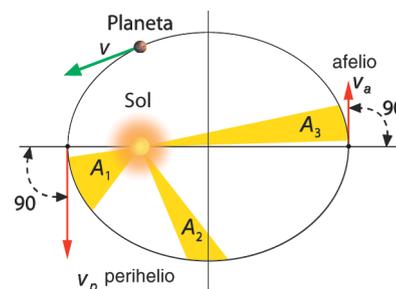


Fig. 3.20. En el perihelio y en el afelio, el vector de posición es perpendicular al vector velocidad.

Observando los triángulos mixtilíneos, vemos que se cumple:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} s_1 r_1 = \frac{1}{2} v_1 t r_1 \\ A_2 &= \frac{1}{2} s_2 r_2 = \frac{1}{2} v_2 t r_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_1 r_1 = v_2 r_2$$

como $r_1 > r_2$, se deduce que $v_1 < v_2$.

Por tanto, a medida que un planeta describe su órbita en torno al Sol, su velocidad aumenta conforme se aproxima a este, alcanzando su valor máximo en la posición de perihelio, y disminuye a medida que se aleja hasta alcanzar la mínima velocidad en el afelio.

El momento angular del planeta es constante en todos los puntos de su trayectoria. En perihelio y en afelio, el vector de posición es perpendicular al vector velocidad (Fig. 3.20). En estas posiciones se cumple que:

$$r_1 m v_1 \sin 90^\circ = r_2 m v_2 \sin 90^\circ$$

Es otra manera de obtener la propiedad:

$$r_p v_p = r_a v_a$$

Como la órbita no es perpendicular en todo momento al vector de posición a lo largo del cual actúa la fuerza central, se puede concluir que esta fuerza tiene una componente en la dirección de la trayectoria que hace variar el módulo de la velocidad.

Actividades

11> Un planeta describe una órbita elíptica alrededor del Sol. En perihelio dista del Sol $4,4 \cdot 10^{12}$ m y en afelio se encuentra a $7,4 \cdot 10^{12}$ m. Calcula la excentricidad de la órbita.

S: $e = 0,25$.

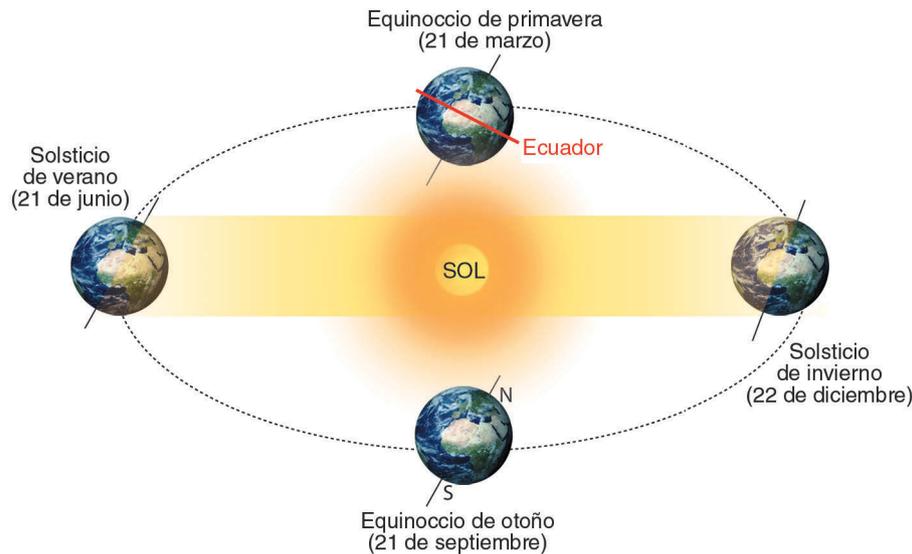


Fig. 3.21. El eje de rotación de la Tierra mantiene su orientación porque el momento angular de la Tierra es constante.

► Ejemplo 3

Un planeta imaginario se mueve en una órbita elíptica de mucha excentricidad alrededor del Sol (Fig. 3.22). Cuando está en perihelio su radio vector es $r_a = 4,0 \cdot 10^7$ km, y cuando está en afelio, $r_b = 15 \cdot 10^7$ km. Si la velocidad en perihelio es 1000 km/s, calcula:

- La velocidad en la posición de afelio.
- La velocidad areolar del planeta.
- El semieje mayor de la órbita.

Solución

- a) Como el planeta está sometido a una fuerza central ejercida por el Sol, el momento angular del planeta ha de ser constante. En las posiciones a y b , la velocidad es perpendicular a r . Por tanto, el módulo del momento angular en dichas posiciones es:

$$\left. \begin{aligned} L_a &= r_a m v_a \text{ sen } 90^\circ \\ L_b &= r_b m v_b \text{ sen } 90^\circ \end{aligned} \right\} r_a v_a = r_b v_b$$

De donde se deduce que:

$$v_b = \frac{r_a v_a}{r_b} = \frac{4 \cdot 10^7 \text{ km} \cdot 10^3 \text{ km/s}}{15 \cdot 10^7 \text{ km}} = 2,7 \cdot 10^2 \text{ km/s}$$

Es decir, se cumple la consecuencia de la ley de las áreas, según la cual el planeta que gira alrededor del Sol va más deprisa cuando se encuentra en perihelio que en afelio.

- b) La velocidad areolar es:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{|\vec{L}|}{2m} = \frac{10^3 \text{ km/s} \cdot 4 \cdot 10^7 \text{ km}}{2} = 2 \cdot 10^{10} \text{ km}^2/\text{s}$$

- c) El semieje mayor de la elipse es la semisuma de r_a y r_b :

$$a = \frac{r_a + r_b}{2} = \frac{4 \cdot 10^7 \text{ km} + 15 \cdot 10^7 \text{ km}}{2} = 9,5 \cdot 10^7 \text{ km}$$

+ Más datos

Cuando el momento angular de un cuerpo permanece constante, el eje de rotación del cuerpo no cambiará su orientación a menos que actúe un momento de torsión que lo altere. Este hecho es de gran importancia para el movimiento de la Tierra alrededor del Sol. La Tierra no experimenta un momento significativo de torsión, ya que la fuerza principal que actúa sobre ella, la atracción del Sol, es central. Por tanto, la dirección del eje de rotación de la Tierra permanece fijo respecto del Universo. Este comportamiento se pone de manifiesto en la Figura 3.21 de la página siguiente.

Aunque la trayectoria de la Tierra es aproximadamente circular, el eje de rotación de la Tierra no es perpendicular al plano definido por su órbita, sino que forma un ángulo fijo con el plano. Debido a la conservación del momento angular mantiene esta orientación al girar alrededor del Sol.

Debido a esto, el Polo Norte de la Tierra se encuentra en un continuo día durante el verano y en la oscuridad en el invierno. En el Polo Sur ocurre lo contrario (Fig. 3.21).

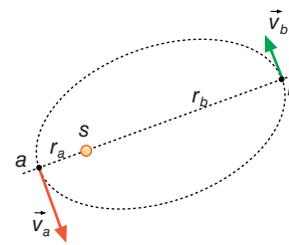


Fig. 3.22.

► Ejemplo 4

Plutón describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Indica, para cada una de las siguientes magnitudes, si su valor es mayor, menor o igual en el afelio comparado con el perihelio:

- Momento angular respecto de la posición del Sol.
- Momento lineal.
- Energía potencial.
- Energía mecánica.

Solución

- El Sol y Plutón están ligados por una fuerza central y por tanto conservativa, de forma que se cumple la ley de conservación del momento angular. De este modo, el momento angular L permanece constante en afelio y perihelio.
- Según la ley de Kepler de las áreas, $r v = \text{constante}$, por tanto, la velocidad lineal en el perihelio es mayor que en el afelio (por ser el radio menor $r_p < r_a$), el momento lineal es: $\vec{p} = m \vec{v}$, y la velocidad es mayor en el perihelio que en el afelio.
- La energía potencial en un punto es $E_p = -GM\frac{m}{r}$. Así, en el perihelio es menor que en el afelio, al ser E_p negativa y $r_p < r_a$.
- La energía mecánica se mantiene constante al tratarse de una fuerza conservativa.

► Más datos

El cometa Halley tuvo su última aparición periódica en 1986. Esta vez la expectación científica con que fue recibido contrasta con el miedo supersticioso que acompañó sus anteriores visitas.

De hecho, la aparición de un gran cometa, siempre con las mismas características, estuvo relacionada con hechos ocurridos por la misma época (asesinato de Julio César, invasión de los hunos, muerte de Ludovico Pío en triste guerra contra sus hijos, etc.).

El astrónomo inglés E. Halley (1656-1742) estudió las órbitas de grandes cometas aparecidos en los años 1456, 1531, 1607 y 1682, llegando a la conclusión de que se trataba del mismo cometa, hoy conocido con su nombre, que nos visitaba periódicamente cada 76 años, y predijo en 1705 su nueva aparición para 1769 (no pudo verla por haber muerto antes).

Hasta el presente se consideran 31 apariciones del cometa Halley rigurosamente comprobadas. La más antigua es del año 240 a.C., según documentos chinos.

Kepler, en 1607, fue el primero en calcular su órbita elíptica, muy excéntrica (0,957).

► Ejemplo 5

El cometa Halley se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. En el perihelio el cometa está a $8,75 \cdot 10^7$ km del Sol, y en el afelio está a $5,26 \cdot 10^9$ km del Sol.

- ¿En cuál de los dos puntos tiene el cometa mayor velocidad? ¿Y mayor aceleración?
- ¿En qué punto tiene mayor energía potencial? ¿Y mayor energía mecánica?

Solución

- El momento angular se conserva, ya que el cometa está sometido a una fuerza central.

Por tanto, se verifica que: $\vec{r}_a \times m \vec{v}_a = \vec{r}_p \times m \vec{v}_p$.

En el perihelio y en el afelio los vectores de posición y velocidad son perpendiculares entre sí, por lo que se cumple que $r_p v_p = r_a v_a$.

Si $r_a > r_p$, se ha de cumplir que $v_a < v_p$.

En las posiciones de perihelio y de afelio solamente existe la aceleración centrípeta o normal:

$$a_p = -\frac{GM}{r_p^2}; \quad a_a = -\frac{GM}{r_a^2} \Rightarrow \frac{a_p}{a_a} = \frac{r_a^2}{r_p^2}$$

Por tanto, se cumple que $a_p > a_a$.

- Energía potencial en el perihelio y en el afelio:

$$E_p = -\frac{GMm}{r_p}; \quad E_a = -\frac{GMm}{r_a}$$

$E_p < E_a$, al ser más negativa en el perihelio que en el afelio.

Debido a que la fuerza que actúa sobre el cometa es conservativa, la energía mecánica se conserva. Es la misma, pues, en el perihelio que en el afelio (ten en cuenta que la energía cinética en el perihelio es mayor que en el afelio y se compensa la menor energía potencial).

► Ejemplo 6

Se lanza un satélite en una dirección paralela a la superficie de la Tierra (Fig. 3.23) con una velocidad de 8000 m/s desde una altitud de 500 km. Determina la velocidad del satélite cuando alcanza su máxima altitud de 4500 km. ¿Qué excentricidad tiene la órbita que describe? Datos: $R_T = 6,4 \cdot 10^6$ m.

Solución

Como el satélite está sometido a una fuerza central dirigida hacia el centro de la Tierra, el momento angular del satélite es constante:

$$L_A = L_B; r_A m v_A = r_B m v_B$$

$$v_B = \frac{r_A v_A}{r_B} = \frac{6900 \text{ km} \cdot 8000 \text{ m/s}}{10900 \text{ km}} = 5064 \text{ m/s}$$

El centro de la Tierra coincide con uno de los focos de la elipse que describe el satélite. Por tanto, el semieje mayor será:

$$a = \frac{4500 \text{ km} + 12800 \text{ km} + 500 \text{ km}}{2} = 8,9 \cdot 10^6 \text{ m (véase la Fig. 3.24)}$$

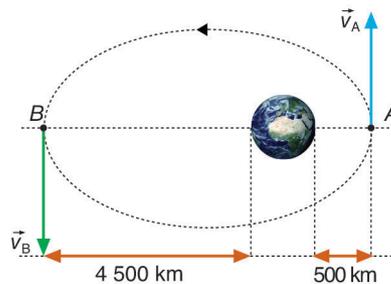


Fig. 3.24.

La distancia de uno de los focos al centro de la elipse viene dada por:

$$c = a - FA = 8900 \text{ km} - (R_T + 500 \text{ km}) = 2000 \text{ km (Fig. 3.25)}$$

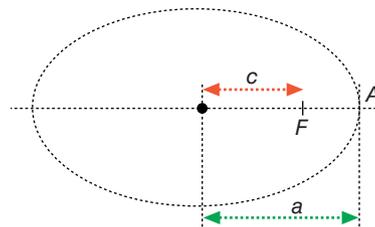


Fig. 3.25.

La excentricidad se define como:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2000 \text{ km}}{8900 \text{ km}} = 0,22$$



Fig. 3.23.

! Importante

Se denomina **excentricidad de una elipse** a la distancia que media entre el centro de la elipse y uno de sus focos. Su valor viene dado por el cociente $e = \frac{c}{a}$.

! Importante

Al igual que para el Sol se denomina afelio y perihelio, a la posición de un satélite más cercana a la Tierra se le llama **perigeo**, y a la más alejada, **apogeo**.

Actividades

- 12> ¿Cómo puedes demostrar que un planeta en una órbita circular se desplaza con un movimiento circular uniforme?
- 13> ¿Hay algún instante en que un planeta con órbita elíptica esté exento de aceleración?

- 14> Supón que repentinamente se duplica la atracción del Sol sobre la Tierra. ¿Qué puedes decir en este caso sobre la velocidad orbital de la Tierra y sobre la órbita que describe? ¿Se modificará el momento angular de la Tierra? ¿Cambiará el plano de su órbita? Razona tus respuestas.

Ciencia, tecnología y sociedad

El efecto Doppler, que veremos en la Unidad 8, nos indica que las estrellas también tienen movimiento de rotación alrededor de un eje; porque mediante el espectro se comprueba que un borde del Sol se aproxima de continuo a nosotros, mientras que el otro borde se aleja constantemente.

La velocidad de rotación de las estrellas depende de su edad. Así, las estrellas más jóvenes giran con una velocidad reducida, mientras que las estrellas próximas a su muerte giran con una velocidad angular muy elevada. Esta evolución se debe a la **ley de la conservación del momento angular**.

Las estrellas, al igual que los seres vivos, están sometidas a las leyes evolutivas que suponen un principio, un periodo de actividad, otro de decadencia y un final. Por ello, podemos hablar de **nacimiento y muerte de las estrellas**.

Nacimiento de una estrella

Los glóbulos galácticos, que no son otra cosa que nubes de gas y polvo interestelar, adquieren forma esférica con el tiempo, y se contraen por gravitación, dando lugar a una elevación de la temperatura del orden de $2500\text{ }^{\circ}\text{C}$ en la superficie, con emisión de radiaciones infrarrojas, hasta iniciarse reacciones nucleares en su interior y alcanzar millones de grados de temperatura en el centro.

La estrella nace cuando la energía que emite se encuentra en el espectro visible. Se caracteriza por su baja densidad. La edad de una estrella depende de su color: las estrellas jóvenes son de color rojo y las estrellas viejas son blancas.

En el proceso de formación de una estrella se conserva el momento angular $L = I\omega$, ya que la única fuerza que ha intervenido en la contracción del glóbulo galáctico es la atracción gravitatoria, que es una fuerza central.

Las estrellas jóvenes se caracterizan por su gran tamaño y, por tanto, un momento de inercia muy grande (al ser proporcional a

El momento angular y la evolución de las estrellas

la masa de la estrella y al cuadrado del radio), con lo que la velocidad de rotación será muy reducida.

Periodo de actividad y decadencia

Cuando el hidrógeno se agota en el núcleo de la estrella y se convierte

en helio, la estrella roja se contrae y se vuelve **pulsante** mediante la «combustión» de helio, para lo que requiere en su interior temperaturas del orden de 200 millones de grados, hasta volverse azulada y convertirse en una **enana blanca**, con una temperatura en superficie de $20000\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Una enana blanca se caracteriza por su pequeño tamaño y su elevada densidad: puede ser más pequeña que la Tierra, aunque su densidad es tan grande que un grano de arena tendría la masa de un rascacielos. En estos casos, al disminuir el tamaño, el momento de inercia también disminuye, aumentando drásticamente la velocidad angular, para que el momento angular no varíe.

Todas las estrellas, dependiendo de su masa inicial, acaban convirtiéndose en:

- **Enanas:** estrellas cuya masa es del orden del Sol.
- **Estrellas de neutrones:** estrellas de masa muy grande y diámetro de tan solo 10 a 20 km. Su densidad es tal que imposibilita la existencia de protones y electrones aislados.
- **Agujeros negros:** estrellas supermasivas. Los agujeros negros se forman cuando una estrella de gran masa sufre un colapso gravitatorio. Mientras la estrella está emitiendo luz y calor se equilibra a sí misma: la fuerza gravitatoria es contrarrestada por la fuerza hacia el exterior debida a la presión térmica originada por las reacciones nucleares. Al consumirse el combustible, esta fuerza equilibradora cesa y la estrella se contrae de tal forma que se derrumba sobre sí misma. Su campo gravitatorio es tan intenso que la velocidad de escape es superior a la de la luz. De un agujero negro no puede escapar ni la materia ni la radiación, excepto la radiación de Hawking.

CUESTIONES

1> El origen y evolución de las estrellas se basa en el principio de conservación:

a) De la energía; b) del momento angular; c) del momento lineal.

2> Una gigante roja de radio $R = 10^6\text{ km}$ y de velocidad angular ω evoluciona durante millones de años hasta convertirse en una enana blanca de $R = 5 \cdot 10^3\text{ km}$. Señala la/s respuesta/s correcta/s:

a) Su densidad ha aumentado 8000 veces; b) ω se ha multiplicado por 40000; c) el momento angular se ha dividido entre 19.

3> En el movimiento de la Tierra alrededor del Sol:

a) Se conserva el momento angular y el momento lineal; b) se conserva el momento lineal y el momento de la fuerza; c) varía el momento lineal y se conserva el momento angular.

4> Un satélite gira alrededor de un planeta describiendo una órbita elíptica, ¿cuál de las siguientes magnitudes permanece constante?

a) El momento angular; b) el momento lineal; c) la energía potencial.

Problemas propuestos

Leyes de Kepler y órbitas. Velocidad areolar

1. Razona a partir de la segunda ley de Kepler cómo cambia la velocidad de un planeta a lo largo de su órbita al variar la distancia al Sol.
2. Una de las lunas de Júpiter, Ío, describe una órbita de radio medio $4,22 \cdot 10^8$ m y un periodo de $1,53 \cdot 10^5$ s.
 - a) Calcula el radio medio de otra de las lunas de Júpiter, Calixto, cuyo periodo es de $1,44 \cdot 10^6$ s.
 - b) Obtener la masa de Júpiter sabiendo que la constante de gravitación es: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻².

S: a) $1,88 \cdot 10^9$ m; b) $1,89 \cdot 10^{27}$ kg.
3. ¿Cuánto vale en m²/s la velocidad areolar de la Tierra?
Datos: radio medio de la órbita terrestre $1,5 \cdot 10^{11}$ m.
S: $v_a = 2,2 \cdot 10^{15}$ m²/s.
4. Calcula el momento angular orbital de la Tierra si describe una órbita circular alrededor del Sol de radio $1,5 \cdot 10^{11}$ m.
Datos: $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg.
S: $L_T = 2,7 \cdot 10^{40}$ kg m²/s.

Momento angular y movimiento planetario

5. Indica sobre la trayectoria de un planeta con órbita elíptica alrededor del Sol, que ocupa uno de los focos, los puntos de máxima y mínima velocidad y los puntos de máxima y mínima energía potencial. Razona la respuesta.
6. Plutón recorre una órbita elíptica en torno al Sol situándose a una distancia $r_p = 4,4 \cdot 10^{12}$ m en perihelio y $r_a = 7,4 \cdot 10^{12}$ m en afelio. ¿En cuál de esos dos puntos será mayor la velocidad de Plutón? Razona la respuesta.
S: $v_p = 1,68 v_a$.
7. Dos satélites absolutamente idénticos recorren órbitas alrededor de la Tierra. ¿Cuál de los dos se moverá a mayor velocidad, el de mayor o el de menor radio de órbita? Razona tu respuesta.
8. Explica por qué los cometas que orbitan elípticamente alrededor del Sol tienen más velocidad cuando se encuentran cerca que cuando se encuentran lejos del Sol, considerando el carácter de fuerza central de la fuerza gravitatoria.
9. En su afelio, el planeta Mercurio está a $6,99 \cdot 10^{10}$ km del Sol, y en su perihelio queda a $4,63 \cdot 10^{10}$ km del mismo. Su velocidad orbital es $3,88 \cdot 10^4$ m/s en el afelio. ¿Cuál es su velocidad orbital en el perihelio? ¿Qué excentricidad tiene la órbita de Mercurio?
S: $v = 5,86 \cdot 10^4$ m/s; $e = 0,203$.
10. Considera una órbita elíptica alrededor de una estrella. La distancia desde la estrella hasta el punto más alejado de la órbita, llamado apoastro, es 1,2 veces la distancia al punto más cercano de la órbita, llamado periastro. Si la velocidad de un cuerpo en esta órbita es 25 km/s en el periastro, ¿cuál es su velocidad en el apoastro? Razona la respuesta.
S: $v_a = 20,8$ km/s.

11. Un cometa se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. Explica en qué punto de su órbita, afelio o perihelio, tiene mayor valor: a) la velocidad; b) la energía mecánica; c) el momento angular.
12. Los satélites Meteosat son satélites geoestacionarios situados sobre el ecuador terrestre, y con periodo orbital de un día.
 - a) Suponiendo que la órbita que describen es circular y poseen una masa de 500 kg, determina el módulo del momento angular de los satélites respecto del centro de la Tierra y la altura a que se encuentran estos satélites respecto de la superficie terrestre.
 - b) Determina la energía mecánica de los satélites.
Datos: radio terrestre = $6,37 \cdot 10^6$ m;
masa de la Tierra = $5,97 \cdot 10^{24}$ kg;
constante de gravitación universal = $6,67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻².
S: a) $|\vec{L}| = 6,48 \cdot 10^{13}$ kg m² · s⁻¹; b) $E_m = -2,36 \cdot 10^9$ J.
13. Urano es un planeta que describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:
 - a) El módulo del momento angular, respecto de la posición del Sol, en el afelio es mayor que en el perihelio y lo mismo ocurre con el momento lineal.
 - b) La energía mecánica es menor en el afelio que en el perihelio y lo mismo ocurre con la energía potencial.
14. Un planeta orbita alrededor de una estrella de masa M . La masa del planeta es $m = 10^{24}$ kg y su órbita es circular, de radio $r = 10^8$ km y periodo $T = 3$ años terrestres. Determina:
 - a) La masa de la estrella.
 - b) La energía mecánica del planeta.
 - c) El módulo del momento angular del planeta respecto al centro de la estrella.
 - d) La velocidad angular de un segundo planeta que describiese una órbita circular de radio igual a $2r$ alrededor de la estrella.
Datos: constante de gravitación universal $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻². Considera 1 año terrestre = 365 días.
S: a) $M = 6,61 \cdot 10^{28}$ kg; b) $E_m = -2,2 \cdot 10^{31}$ J;
c) $|\vec{L}| = 6,64 \cdot 10^{38}$ kg m²/s; $\omega = 2,35 \cdot 10^{-8}$ rad/s.
15. Un satélite artificial de 500 kg gira en una órbita circular a 500 km de altura sobre la superficie terrestre. Calcula:
 - a) Su velocidad.
 - b) Su energía total.
 - c) La energía necesaria para que, partiendo de esa órbita, se coloque en otra órbita circular a una altura de 10000 km.
 - d) En el proceso, ¿cómo cambia su momento angular?
Datos: radio terrestre = $6,37 \cdot 10^6$ m; masa de la Tierra = $5,98 \cdot 10^{24}$ kg; constante $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻².

Problemas propuestos

S: a) $v = 7\,620\text{ m/s}$; b) $E_T = -1,45 \cdot 10^{10}\text{ J}$; c) $\Delta E = 8,41 \cdot 10^9\text{ J}$;
d) $\Delta L = 1,43 \cdot 10^{13}\text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.

16. Un satélite de $1\,000\text{ kg}$ de masa describe una órbita circular de $1,2 \cdot 10^4\text{ km}$ de radio alrededor de la Tierra. Calcula:

a) El módulo del momento lineal y el módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra. ¿Cambian las direcciones de estos vectores al cambiar la posición del satélite en su órbita? Explica por qué.

b) El periodo y la energía mecánica del satélite en la órbita.

Datos: masa de la Tierra $M = 5,98 \cdot 10^{24}\text{ kg}$; constante de gravitación $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\text{ N m}^2\text{ kg}^{-2}$.

S: a) $|\vec{p}| = 5,76 \cdot 10^6\text{ kg m/s}$; $|\vec{L}| = 6,92 \cdot 10^{13}\text{ kg m}^2/\text{s}$;
b) $T = 3,63\text{ h}$; $E_m = -1,66 \cdot 10^{10}\text{ J}$.

17. Calcula el momento angular de Júpiter suponiendo que tiene una masa 315 veces la de la Tierra, que su radio de órbita es 5,2 veces mayor que el radio de la órbita terrestre y el periodo es $3,74 \cdot 10^8\text{ s}$.

Datos: $M_T = 6 \cdot 10^{24}\text{ kg}$; $r_{oT} = 1,5 \cdot 10^8\text{ m}$.

S: $L_J = 1,9 \cdot 10^{43}\text{ kg m}^2/\text{s}$.

18. Supongamos que por alguna razón la Tierra se contrae de modo que su radio se transforma en la mitad del que tiene ahora. ¿Cambiaría su velocidad de traslación alrededor del Sol?

19. La distancia máxima desde la Tierra hasta el Sol es $1,521 \cdot 10^{11}\text{ m}$, y su máxima aproximación es $1,471 \cdot 10^{11}\text{ m}$. La velocidad orbital de la Tierra en perihelio es $3,027 \cdot 10^4\text{ m/s}$ (Fig. 3.26). Calcula:

a) La velocidad orbital en el afelio.

b) La excentricidad de la órbita de la Tierra.

S: a) $v = 2,927 \cdot 10^4\text{ m/s}$; b) $e = 0,017$.

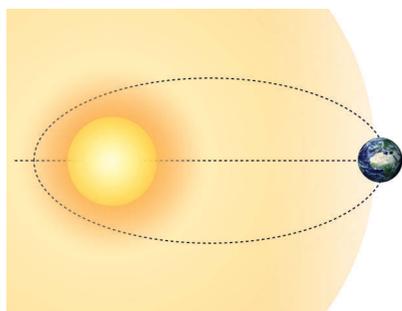


Fig. 3.26. Órbita de la Tierra.

20. ¿Es constante el módulo de la velocidad de traslación de los planetas? ¿Por qué? ¿En qué caso este módulo sería constante?

21. Un satélite de la Tierra describe una órbita elíptica. Las distancias máxima y mínima a la superficie de la Tierra son $3\,200\text{ km}$ y 400 km , respectivamente. Si la velocidad máxima del satélite es $5\,250\text{ m/s}$, halla la velocidad del satélite en los puntos de máximo y mínimo acercamiento.

Datos: $R_T = 6,4 \cdot 10^6\text{ m}$.

S: $5\,250\text{ m/s}$; $3\,719\text{ m/s}$.

22. Dibuja la órbita elíptica de un planeta alrededor del Sol y las fuerzas que intervienen en el movimiento de aquel, así como la velocidad del planeta en diversos puntos de su órbita.

23. Dos planetas de masas iguales orbitan alrededor de una estrella de masa mucho mayor. El planeta 1 se mueve en una órbita circular de radio $1,00 \cdot 10^{11}\text{ m}$ y periodo 2 años exactos. El planeta 2 se mueve en una órbita elíptica, siendo su distancia en la posición más próxima a la estrella 10^{11} m y en la más alejada $1,8 \cdot 10^{11}\text{ m}$.

a) ¿Cuál es la masa de la estrella?

b) Calcula el periodo de la órbita del planeta 2.

c) Utilizando los principios de conservación del momento angular y de la energía mecánica, halla la velocidad del planeta 2 cuando se encuentra en la posición más cercana a la estrella.

S: a) $m = 1,49 \cdot 10^{29}\text{ kg}$; b) $T = 3,4\text{ años}$; c) $v = 1,16 \cdot 10^4\text{ m/s}$.

24. Se ha lanzado un satélite en una dirección paralela a la superficie de la Tierra con una velocidad de $36\,900\text{ km/h}$ desde una altitud de 500 km para situarlo en un apogeo de $66\,700\text{ km}$ (medido desde el centro de la Tierra). ¿Qué velocidad tiene el satélite en esa posición? Datos: $R_T = 6,4 \cdot 10^6\text{ m}$.

S: $v = 3\,817\text{ km/h}$.

25. ¿Qué puntos de la superficie terrestre tienen momento angular cero respecto del centro de la Tierra en el movimiento de rotación de esta?

26. Suponiendo que la órbita de la Luna en torno a la Tierra tiene un radio de $3,84 \cdot 10^5\text{ km}$ con un periodo de 27,3 días y que su masa es 0,012 veces la de la Tierra, calcula el momento angular de la Luna respecto del centro de la Tierra. Datos: $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}\text{ kg}$.

S: $L_L = 2,8 \cdot 10^{34}\text{ kg m}^2/\text{s}$.

27. Durante el vuelo Apolo XI, el astronauta M. Collins giró en torno a la Luna, en un módulo de mando, sobre una órbita aproximadamente circular. Suponiendo que el periodo de este movimiento fuera de 90 minutos exactos y que su órbita estuviera a 100 km por encima de la superficie lunar, calcula:

a) La velocidad con que recorría la órbita.

b) Su momento angular respecto del centro del satélite, suponiendo que la masa del astronauta fuera de $80,0\text{ kg}$.

Datos: $R_L = 1,738 \cdot 10^6\text{ m}$.

S: a) $v = 2,139 \cdot 10^3\text{ m/s}$; b) $L = 3,13 \cdot 10^{11}\text{ kg m}^2/\text{s}$.

28. Un satélite artificial gira en torno a la Tierra describiendo una órbita elíptica cuya excentricidad es 0,2. Si en el perigeo dista del centro de la Tierra $7,2 \cdot 10^6\text{ m}$, ¿a qué distancia estará en el apogeo?

S: $d = 1,08 \cdot 10^7\text{ m}$.

Cuestiones básicas

- **Fuerza central** es aquella fuerza cuya dirección pasa por el mismo punto, independientemente de la posición de la partícula sobre la cual actúa.
- **Momento de torsión** de una fuerza con respecto a un punto, \vec{M} , es el producto vectorial del vector \vec{r} que une el punto con el punto de aplicación de la fuerza y el vector \vec{F} .

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Su módulo es igual a $M = F r \sin \phi$, donde ϕ es el ángulo formado por \vec{r} y \vec{F} .

El momento de torsión asociado a una fuerza central es siempre cero (o bien es 180°), puesto que lo es el ángulo formado por \vec{r} y \vec{F} .

- **Momento angular** de una partícula con respecto a un punto, \vec{L} , es el producto vectorial del vector \vec{r} (que une el punto con el punto de aplicación de \vec{p}) y el vector \vec{p} .

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m (\vec{r} \times \vec{v})$$

Su módulo es $L = m v r \sin \beta$, donde β es el ángulo formado por \vec{r} y \vec{v} .

- El **momento de la fuerza** que actúa sobre una partícula es igual a la variación del momento angular de dicha partícula.

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \\ &= \vec{v} \times m \vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = 0 + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} \end{aligned}$$

En ausencia de momentos de torsión exteriores, el momento angular de un sistema permanece constante.

Fuerza central	Momento de torsión $\vec{M} = 0$	Momento angular $L = \text{constante}$
Fuerza no central	Momento de torsión $M = F r \sin \phi$	Momento angular $L = m v r \sin \beta$

- **Velocidad areolar** es la cantidad de área barrida por el radio vector de una partícula por la unidad de tiempo. Es igual a:

$$\frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} r v \sin \alpha$$

De la expresión de la velocidad areolar se deduce que:

$$r_1 v_1 = r_2 v_2$$

- Según la **segunda ley de Kepler** se cumple que L es constante, por lo que toda partícula que se mueva bajo una fuerza central lo hace con una velocidad areolar constante.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \frac{L}{m}$$

- La posición más próxima de un planeta al Sol se llama **perihelio** y la más alejada **afelio**.

Se llama excentricidad de una órbita, e , al cociente entre la distancia focal y el radio mayor de la órbita:

$$\begin{aligned} e &= \frac{f}{R_M} = \frac{\sqrt{R_M^2 - R_m^2}}{R_M} = \\ &= \frac{R_{afelio} - R_{perihelio}}{R_{afelio} + R_{perihelio}} \end{aligned}$$

Publicaciones personalizadas a tu medida



¡Elige el contenido y crea el manual que mejor se adapta a tus necesidades!

Create permite crear una obra personalizada a través de un proceso fácil e intuitivo seleccionando material del catálogo de McGraw-Hill. Además, se puede adaptar a las necesidades de cada docente ¡añadiendo material propio!

El deseo de todos los profesores ha sido siempre tener el libro que refleje fielmente los temas del curso y con el que los alumnos dispongan de todo el material que necesitan para seguir la clase y superar la asignatura. McGraw-Hill Education fiel a su misión de ayudar a los docentes y enseñar a los estudiantes, pone a disposición de cualquier profesor su oferta editorial y la diversidad de las soluciones de aprendizaje de las que dispone para lograr este objetivo.

Entra en nuestra web:

 <http://create.mheducation.com>

**¡Accede a todo el catálogo!
y crea tu libro a medida en 3 sencillos pasos**

Centro de Enseñanza Online (CEO)

www.mhe.es

El Centro de Enseñanza Online (CEO) es un espacio donde encontrará información práctica y todos los recursos didácticos necesarios para el desarrollo de cada disciplina. Este espacio es de gran utilidad para el alumnado y el profesorado, y una herramienta imprescindible para afrontar los retos que exige el mercado laboral, cada vez más competitivo y especializado.

Organizado en tres partes:

Centro de información

El centro de información ofrece información práctica del contenido de la obra: presentación, tabla de contenido, etc. Consulte los diferentes apartados dependiendo de la información que necesite.

Centro del estudiante

El centro del estudiante está especialmente creado para que los alumnos accedan a información práctica que pueden utilizar para afianzar conocimientos y auto-evaluarse en cada disciplina.

Centro del profesor

El centro del profesor pone a su disposición material de apoyo que puede utilizar en sus clases. Rellene el formulario de registro y solicite la clave de acceso para poder consultar todos los apartados.





Una nueva forma de leer... Una nueva forma de aprender

¿Te imaginas un libro de texto adaptado a las necesidades individuales de cada estudiante?



SmartBook® es la primera y única experiencia de lectura y aprendizaje adaptativo diseñada para cambiar la forma en la que los estudiantes leen y aprenden, rompiendo con el camino lineal de los libros de texto tradicionales y adaptándose a las necesidades y al ritmo de cada estudiante.

¿Qué es?

SmartBook® es una herramienta de aprendizaje adaptativo que combina una revolucionaria tecnología desarrollada por McGraw-Hill Education con un libro digital interactivo. **SmartBook®** analiza la forma en la que lee y aprende el estudiante y, en función de sus respuestas a preguntas sobre lo estudiado y la seguridad sobre sus conocimientos, le va guiando a través de los contenidos del libro, de una manera personalizada y adaptada a su propio ritmo de aprendizaje, para que cada minuto que pasa el alumno estudiando sea lo más efectivo posible.

¿Cómo funciona?

SmartBook® consta de varias fases:



Lee

En la fase de lectura, el estudiante es guiado a través del texto para que lea de una manera adaptada a sus necesidades. En **SmartBook®** el estudiante tiene acceso al texto completo, pero se le mostrarán áreas resaltadas en **amarillo** que indican el contenido en el que debería centrar su estudio en ese momento concreto. Las áreas resaltadas del texto van variando en función de sus respuestas en la parte práctica, subrayando nuevos temas y conceptos de más nivel, una vez que el estudiante ha demostrado el dominio de los conceptos esenciales del tema.





Practica



En la fase de práctica, los estudiantes afianzan lo aprendido hasta el momento realizando una serie de actividades de diversa tipología.

Antes de responder, se pedirá al estudiante que evalúe el grado de seguridad sobre sus conocimientos:

Sé la respuesta

Eso creo

No estoy seguro

Ni idea

En función de las respuestas a esas preguntas, el grado de seguridad que establezcan y otros datos que va recogiendo el sistema mientras los estudiantes trabajan, **SmartBook®** irá ajustando el camino de aprendizaje de cada estudiante adaptándolo a su ritmo y necesidades y determinando cuál será la siguiente pregunta.



Lee



Practica

De vuelta en la fase **Lee**, el estudiante se encontrará con nuevas partes del texto resaltadas en **amarillo**, que indican el nuevo contenido a estudiar, y otras resaltadas en **verde**, que son los temas o conceptos que el estudiante ha demostrado que domina al responder correctamente a las preguntas en la fase de práctica.

Subrayado amarillo: muestra el contenido que es importante para el estudiante en este momento.

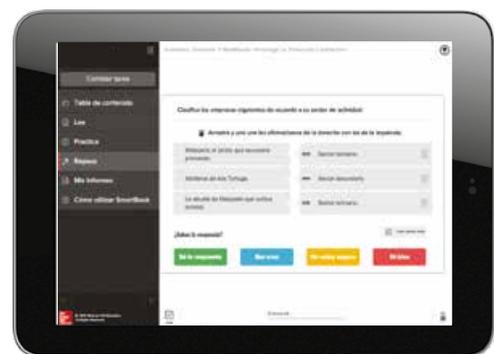
Subrayado verde: muestra el contenido que el estudiante ha demostrado que domina realizando preguntas en la fase de práctica.

La mejor manera de estudiar con **SmartBook®** es ir pasando de una fase a otra hasta completar la unidad. La propia herramienta ayudará al estudiante a identificar cuándo ha llegado el momento de cambiar de fase.



Repasa

Para asegurar el dominio de los temas y la retención a largo plazo de los conceptos aprendidos, en esta fase el estudiante repasa en forma de actividades el contenido importante que el sistema ha identificado que es más probable que olvide.



Informes completos sobre el progreso del curso



Profesor

Los informes del profesor le permiten conocer en tiempo real las fortalezas y las debilidades de sus alumnos de manera individual y a nivel global, y adaptar así sus clases y tutorías.

Estudiante

Los informes del estudiante proporcionan detalles sobre su progreso, sobre los temas que domina y los que necesita estudiar más, para que pueda maximizar su tiempo de estudio.



Beneficios

Todo son ventajas

Para el profesor:

- Mejora la calidad y la productividad de las clases.
- Facilita la adaptación de las clases al nivel y necesidades de los alumnos.
- Ayuda a prevenir el posible fracaso escolar y a remediarlo antes de que ocurra.
- Mejora el rendimiento de los alumnos y su nivel de notas.

Para el estudiante:

- Ofrece el contenido adecuado para cada estudiante en el momento preciso para maximizar el tiempo de estudio.
- Excelente preparación para clase y para los exámenes.
- Ayuda a retener conceptos clave a largo plazo.
- Ayuda a conseguir mejores notas.
- Herramienta *online*: sin descargas, sin necesidad de grabar el progreso.
- Acceso en cualquier momento a través de una conexión a Internet y desde múltiples dispositivos.
- Interfaz intuitiva y atractiva.
- Es divertido, porque permite competir con otros usuarios.



La mejor manera de sacar el máximo provecho a las ventajas de **SmartBook®** es crear una clase a la que se apuntarán tus alumnos. Los estudiantes pueden trabajar independientemente o asociados a tu clase, pero la experiencia es mucho más positiva y productiva si se integra **SmartBook®** como una parte más de la asignatura. Te damos algunas opciones o ideas:



SMARTBOOK® ...

... antes de ir a clase

Puedes decir a tus alumnos que estudien con **SmartBook®** antes de ir a clase. Así, podrás basar tus clases en los datos que obtengas con la herramienta.

... como deberes

Puedes presentar el contenido en clase y después, a modo de deberes, decirles que estudien el tema con **SmartBook®**. Posteriormente, en función de los datos que obtengas sobre el progreso, las fortalezas y las debilidades de tus alumnos, podrás reforzar ciertos contenidos y hacer un seguimiento general e individual de lo que realmente se ha aprendido.

... antes del examen

Puedes dar la unidad completa y recomendar a tus alumnos que utilicen **SmartBook®** para preparar el examen. Si tienen examen de final de curso, recuerda a tus alumnos que utilicen regularmente la fase **Repasa** para estar preparados cuando llegue el gran día.



Si tus alumnos tienen dificultades para acceder a Internet, una buena solución puede ser dedicar periódicamente tiempo de clase a **SmartBook®** en el aula de informática.

McGraw-Hill Education

una editorial global a tu servicio

www.mheducation.es

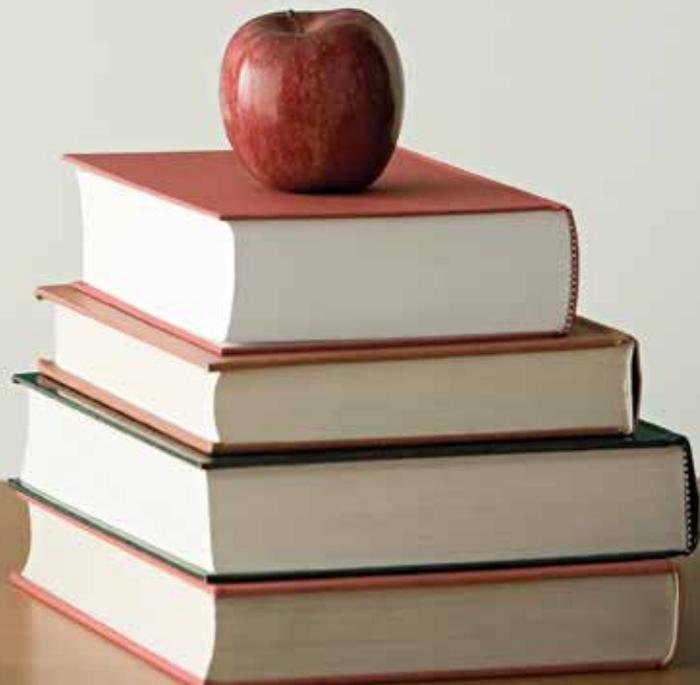


Para más información: Tel. 902 289 888

educador@mheducation.com

www.mheducation.es / www.mhe.es

La tienda de **McGraw-Hill Education** te ofrece las **mejores ventajas**



Envío GRATIS

a partir
de 25€



Consigue tus Gastos de Envío GRATIS

Ahora en **McGraw-Hill Education** te regalamos los gastos de envío. Si el importe de tu pedido es superior a 25€, los gastos de envío valorados en 5€ serán **descontados de tu compra**.

Tus libros de texto
con un
**20% de
descuento**



¡Ahórrate un 20% en los libros de tus hijos cada curso!

Compra cualquiera de nuestros títulos para Primaria y ESO y disfruta de un **descuento inmediato del 20%** en el precio de tus libros.

**5% de descuento
en todo nuestro
fondo
editorial**



5% de descuento en todo nuestro fondo editorial

Todos los productos **McGraw-Hill Education** más económicos en nuestra tienda online. Selecciona tu producto y benefíciate de un **5% de descuento** comprando cualquiera de nuestros títulos.

Nuestro proceso de compra es muy sencillo



- 1 Localiza todos nuestros productos en el apartado **TIENDA** en el menú principal.
- 2 Encuentra tu producto navegando por nuestro catálogo o en el buscador.
- 3 Añade a la **CESTA** lo que quieres adquirir e inicia el proceso de compra, pinchando en **REALIZAR PEDIDO**.

Regístrate como cliente y visualiza siempre que quieras el contenido de tu cesta o las compras realizadas

**¡Todo el fondo de McGraw-Hill Education
en papel o formato digital ahora más fácil y económico!**

www.mheducation.es

 Porque el aprendizaje lo cambia todo

Porque el aprendizaje lo cambia todo



Descubre todo sobre SmartBook® en:
www.smartbookmhe.es

Acceso y registro, vídeos tutoriales y toda la información.



Descárgate la app de SmartBook® gratuitamente en tu App Store o Play Store.

Para más información:

educador@mheducation.com

902 929 008 • 902 289 888

Consigue SmartBook® en: www.mheducation.es

