TEMA 1

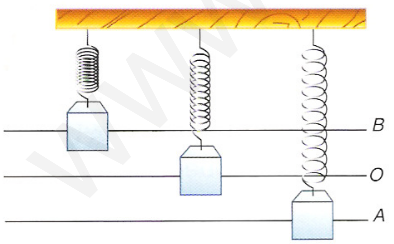
MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

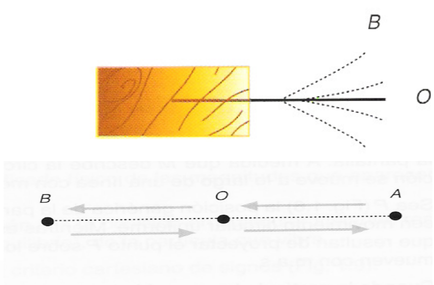
1.-Movimiento periódico.

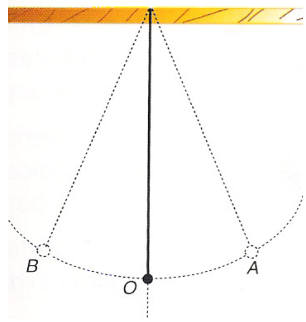
Un móvil realiza un movimiento periódico cuando, a intervalos iguales de tiempo, las variables del movimiento (posición, velocidad y aceleración) toman el mismo valor. Ejemplos de movimientos periódicos son: el movimiento de las agujas de un reloj, el movimiento de la Tierra alrededor del Sol.

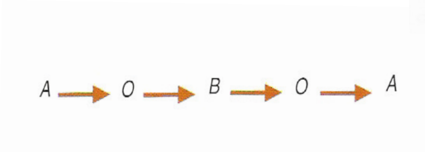
2.-Movimiento oscilatorio

A los movimientos periódicos que tienen lugar hacia uno y otro lado de una posición de equilibrio, es decir, aquellos en los que la dirección del movimiento cambia bruscamente, se les llama **oscilatorios**. En estos movimientos, la posición del móvil pasa alternativamente por un máximo y un mínimo respecto a un origen







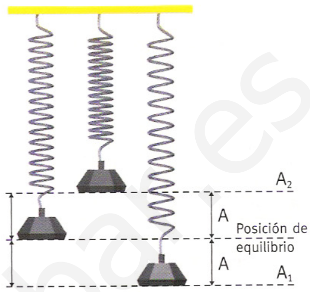


En los tres casos, al separar el cuerpo hasta la posición A y dejarlo en libertad, se mueve hacia la posición O de equilibrio, pero no se detiene en ella sino que la sobrepasa hasta alcanzar la posición B, en donde se paran momentáneamente, luego vuelven hasta A, y así sucesivamente repitiéndose el movimiento. Al movimiento de ida y vuelta se llama **oscilación, vibración o ciclo.**

Recibe el nombre de **período (T)** el tiempo invertido en realizar una vibración completa y se mide en segundos. Siendo la **frecuencia (ν)** el número de vibraciones o ciclos que realiza el móvil en la unidad de tiempo y se mide en Hertzios (Hz) o s^{-1}.

3.-Movimiento vibratorio armónico simple.

Es el que realiza una partícula que recorre indefinidamente, en un movimiento de vaivén, un segmento rectilíneo, es decir, cambia su posición alternativamente de un lado al otro de un punto fijo de equilibrio, y la fuerza que en cada instante tira de la partícula hacia el centro de la trayectoria es proporcional a la distancia a la que se encuentre de dicho centro (fuerza recuperadora elástica), de expresión:



$$\boxed{F = -kx}$$

Se dice que el cuerpo oscila a ambos lados de la posición de equilibrio y constituye un ***oscilador armónico***.

En los movimientos armónicos la posición, la velocidad y la aceleración del movimiento vibratorio pueden expresarse utilizando funciones sinusoidales (seno y coseno).

3. I. Magnitudes características.

Período (T) el tiempo invertido en realizar una vibración completa y se mide en segundos.

Frecuencia (ν) el número de vibraciones o ciclos que realiza el móvil en la unidad de tiempo y se mide en Hertz, aunque generalmente se denomina hertzio (Hz) o s^{-1}.
$1Hz=1s^{-1}$=1vibración/s=1ciclo/s.

De las definiciones de período y frecuencia se deduce: $T = \frac{1}{\nu}$

Centro de oscilación. Es el punto medio del segmento que recorre el móvil.
Elongación (y) Posición que ocupa la partícula en cualquier instante referida a la posición de equilibrio. Representa la distancia entre la posición que ocupa el móvil y el centro de oscilación. Su unidad en el S.I. es el metro (m).

Amplitud (A). Es el valor máximo que puede tomar la elongación, coincide con la máxima separación del móvil respecto a la posición de equilibrio. La distancia entre las dos posiciones extremas del móvil será 2A. Su unidad en el S.I es el metro.

Pulsación o frecuencia angular (ω) Su valor es $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Se mide en rad/s. Aunque se mide en las mismas unidades que la velocidad angular se llama de distinta forma porque los movimientos armónicos no tienen velocidad angular.

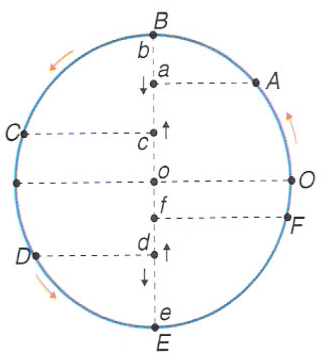
4.-Estudio cinemático del movimiento armónico simple (m.a.s)

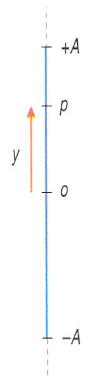
4. I.-Ecuación del m.a.s.

La ecuación del m.a.s. consiste en expresar la relación que existe entre la posición del móvil en cada instante (elongación) y el tiempo.

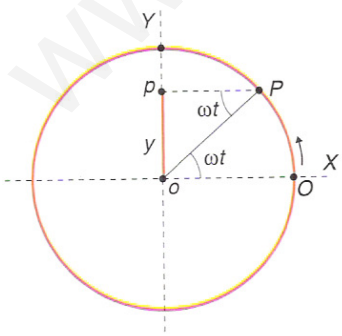
Para deducir dicha ecuación vamos a hacer uso de la relación existente entre el m.a.s y un movimiento circular uniforme, ya que el m.a.s. se puede considerar como *la proyección sobre un diámetro de las sucesivas posiciones que ocuparía un móvil que se mueva con movimiento circular uniforme.*

Supongamos un móvil que recorre una circunferencia con movimiento circular uniforme, y otro que recorre su diámetro, ocupando en cada instante la proyección de la posición del primero sobre el diámetro vertical BE, es decir, mientras que el primero recorre la circunferencia ocupando las posiciones O, A, B, C, etc, el otro recorre el diámetro ocupando las posiciones o, a, b, c, etc... Si la primera partícula sale desde el punto O, y se mueve recorriendo la circunferencia en sentido contrario al de las agujas del reloj, la segunda partícula arranca desde el punto o, centro del diámetro. Al recorrer la primera partícula el primer cuadrante, la segunda se dirige desde o hasta b. Al recorrer el movimiento circular el segundo cuadrante la proyección cambia de sentido y se dirige hacia o. Posteriormente la partícula que se mueve sobre el diámetro se encamina hacia e y después vuelve de nuevo hacia o. Si el primero da una vuelta completa a la circunferencia, el segundo recorre doblemente el diámetro.





Cuando en el movimiento circular se ha recorrido un cuarto de vuelta, el tiempo transcurrido ha sido un cuarto de período, y el m.a.s. ha recorrido el valor máximo de la elongación, es decir, la amplitud (A). Al recorrer la circunferencia completa, el tiempo transcurrido es de un período y en el diámetro se ha efectuado una vibración completa.



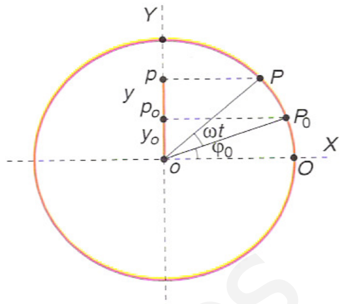
El movimiento rectilíneo sobre el diámetro es un m.a.s. ya que se trata de un movimiento oscilatorio a lo largo de un segmento rectilíneo, a ambos lados de la posición central y cuando estudiemos su dinámica demostraremos que la fuerza que en cada instante tira de la partícula hacia el centro de la trayectoria es proporcional a la distancia a la que se encuentre de dicho centro.

Si la primera partícula parte de O, con velocidad angular constante ω, al cabo de un tiempo t está en la posición P y ha descrito un ángulo $\varphi = \omega t$. La segunda partícula está, en ese instante, en p y su separación respecto al origen (y) es:

$$\boxed{y = A.sen\omega t}$$

Si la partícula no parte del origen, es decir, comienza el movimiento desde una posición con un ángulo φ_0, la ecuación de la elongación será:

$$\boxed{y = A.sen(\omega t + \varphi_0)}$$



A, $\omega\ y\ \varphi_0$ son constantes que hay que determinar para dejar la ecuación del movimiento como una función de y=f(t)
En esta ecuación al término $(\omega t + \varphi_0)$ se le llama **fase.** Su valor determina el estado de vibración en cada instante. Se mide en radianes (rad)

A φ_0 se le llama **fase inicial o corrección de fase.** Su unidad es el radián**.** El valor de la fase inicial se determina con las condiciones iniciales (conociendo el valor de la elongación en el instante inicial, es decir, para t=0)

Se podría haber considerado la proyección sobre el eje horizontal y haber obtenido la expresión:

$$\boxed{x = A.\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

Emplearemos la ecuación en función del seno.

Cuando la diferencia de fase entre dos posiciones sea un número par de veces π los estados de vibración de las dos posiciones serán iguales: $\Delta\varphi = 2n\pi$ rad. Esto ocurrirá cuando el tiempo que transcurra entre las dos posiciones sea $\Delta t = nT$, ya que al transcurrir cada período el móvil repite posición. Se dice entonces que los estados de vibración están ***en fase o en concordancia de fase.***

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega t_2 + \varphi_0) - (\omega t_1 + \varphi_0) = \omega t_2 + \varphi_0 - \omega t_1 - \varphi_0 = \omega(t_2 - t_1)$$

Sustituyendo $(t_2 - t_1)$ por nT y ω por su valor queda: $\Delta\varphi = 2n\pi$

Dos posiciones están en ***oposición de fase*** cuando sus estados de vibración son opuestos. Si la partícula se dirige hacia las elongaciones positivas, su opuesto es cuando se dirige hacia las elongaciones negativas, y viceversa. Esto ocurre cuando la diferencia de fase es igual a un número impar de veces π radianes: $\Delta\varphi = (2n-1)\pi$ rad.

Actividad 1.- ¿Cuál es el intervalo de tiempo que separa dos puntos que se encuentran en oposición de fase?

Actividad 2.-Un objeto cuelga de un muelle y describe un m.a.s. con una amplitud de 10 cm y 0,1 s de período. En el instante inicial el muelle alcanza su máxima separación negativa. Deduce la ecuación del movimiento.

Actividad 3.-Una partícula animada de m.a.s. inicia el movimiento en el extremo positivo de su trayectoria y tarda 0,25 s en llegar al centro de la misma. La distancia entre ambas posiciones es de 20 cm. Calcula: a) La frecuencia del movimiento. b) La ecuación del movimiento. c) La posición de la partícula 0,5 s después de iniciar el movimiento.

Actividad 4.-Una partícula recorre un segmento de 8cm de longitud en 0,05 s, animada con un m.a.s. Si en el instante inicial su elongación tiene el máximo valor positivo, calcula: a) La ecuación del movimiento. b) La posición en el instante 1,85 s. c) La diferencia de fase entre el instante anterior y el instante inicial.

4. II.-Ecuación de la velocidad m.a.s.

Para deducir la ecuación de la velocidad del m.a.s. tenemos en cuenta que se trata de un movimiento rectilíneo y que, por lo tanto, la velocidad tiene de módulo la derivada de la posición (elongación) con respecto al tiempo. Suponiendo la fase inicial nula:

$$\mathrm{v} = \frac{dy}{dt} = A\omega.\cos\omega t = A\omega\sqrt{1-sen^2\omega t} = \omega\sqrt{A^2 - A^2.sen^2\omega t} = \omega\sqrt{A^2 - y^2}$$

Hemos tenido en cuenta que $sen^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$

Si hubiera fase inicial la expresión sería:

$$\boxed{\mathrm{v} = A\omega.\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

La velocidad es función periódica del tiempo. Su valor depende de la posición de la partícula. Tiene el valor máximo cuando la partícula pasa por el centro de la trayectoria, y=0, y se anula en los extremos, cuando $y = \pm A$

Actividad 5.-La ecuación de un m.a.s. es $y = 0{,}2.sen(6\pi t + \pi)$ m. Calcula: a) La amplitud, pulsación, período, frecuencia y fase inicial. b) La velocidad en el instante inicial, la velocidad máxima y la velocidad cuando $t = 0{,}5s$

4. III.-Ecuación de la aceleración del m.a.s.

La aceleración del m.a.s se obtiene derivando la ecuación de la velocidad con respecto al tiempo:

$$\boxed{a = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = -A\omega^2.sen\omega t = -\omega^2 y}$$

Si hubiera fase inicial quedaría: $a = -A\omega^2.sen(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y$

La aceleración es también periódica. Su valor depende de la posición de la partícula. Es variable, y proporcional y de signo opuesto a la posición. Es nula en el centro y máxima en los extremos. Está desfasada $\pi/2$ rad con respecto a la velocidad.

Actividad 6.-Un móvil, animado de un m.a.s., recorre un segmento de 8 cm de longitud. La frecuencia del movimiento es igual a 10 s^{-1}, y en el instante inicial el móvil se

encuentra en la posición de equilibrio. Calcula: a) La ecuación del movimiento. b) La velocidad y la aceleración en el instante inicial.
Actividad 7.-Una partícula vibra con una velocidad máxima de 20 m/s y una amplitud de 10 cm. Calcula: a) La frecuencia del movimiento. b) La aceleración máxima.

4. IV.-Representaciones gráficas

Realicemos la representación gráfica de las ecuaciones de la elongación, velocidad y aceleración en función del tiempo, para ello deducimos los valores de dichas magnitudes a lo largo de un período, de las ecuaciones:

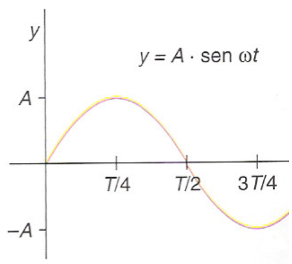
$$y = A.sen\,\omega t$$
$$\mathrm{v} = A\omega.\cos\omega t$$
$$a = -A\omega^2.sen\,\omega t$$

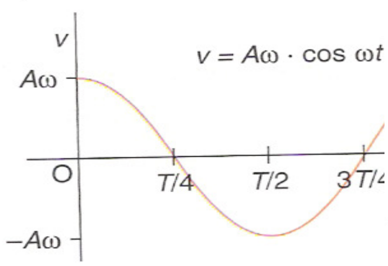
Y se tiene en cuenta que $\omega = \frac{2\pi}{T}$

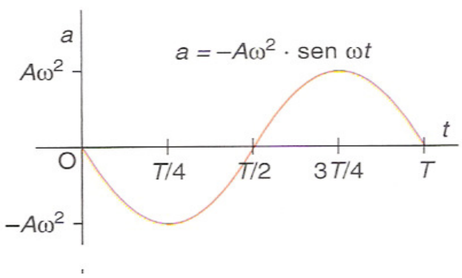
Suponemos que la fase inicial del movimiento es cero y construimos la siguiente tabla de valores:

t	$\frac{2\pi}{T}.t$	y	v	a
0	0	0	$A\omega$	0
$\frac{T}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	A	0	$-A\omega^2$
$\frac{T}{2}$	π	0	$-A\omega$	0
$\frac{3T}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	-A	0	$A\omega^2$
T	2π	0	$A\omega$	0

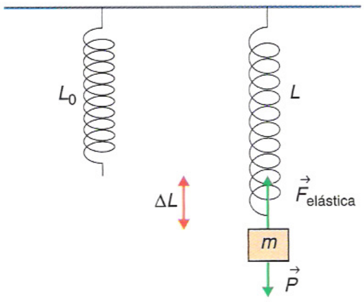
Representando estos valores en unos ejes:







5.-Estudio dinámico del m.a.s.



Cuando se cuelga un objeto de un muelle o resorte, de masa despreciable y longitud l_0, se observa que se estira hasta alcanzar una longitud l.El alargamiento experimentado por el muelle vale:

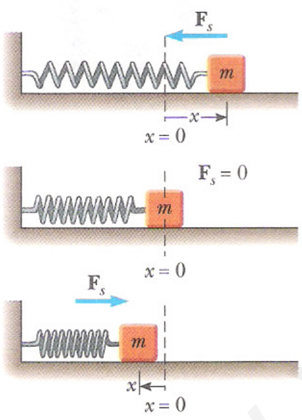
$$\Delta l = l - l_0 .$$

Las fuerzas que actúan sobre el muelle son el peso y la fuerza elástica. Aplicando la condición de equilibrio, una vez que se halla alargado hasta l, y la ley de Hooke:

$$\sum \vec{F} = 0; \quad P - F_{elástica} = 0; \quad \mathrm{P} = \mathrm{F}_{\text{elástica}}; \quad mg = k(l - l_0); \quad k = \frac{mg}{l - l_0} = \frac{mg}{\Delta l}$$

Siendo ***k* la constante elástica.**

Lo mismo ocurriría si el cuerpo está unido al muelle sobre una superficie horizontal



Suponiendo el sistema libre de rozamiento, al separar el muelle de su posición de equilibrio y dejarlo oscilar, sobre el objeto actuará una fuerza que, por la ley de Hooke, tendrá una expresión $F = -kx$ o $F = -ky$, según como se designe a la elongación, que es la expresión de la fuerza productora de un m.a.s. Siendo x o y el alargamiento experimentado por el resorte, Δl Si el cuerpo se desplaza a la derecha de la posición de equilibrio $(x > 0)$ la fuerza ejercida por el muelle (fuerza recuperadora) actúa hacia la izquierda. Cuando el cuerpo se desplaza hacia la izquierda de la posición de equilibrio $(x < 0)$ la fuerza ejercida por el resorte actúa hacia la derecha. En la posición de equilibrio (x=0) la fuerza es nula.

Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica y teniendo en cuenta el valor de la aceleración del m.a.s:

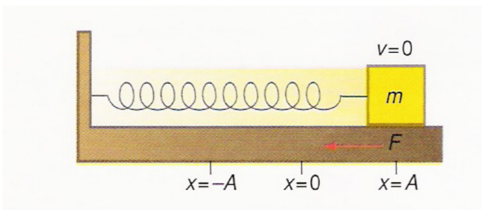
$$F = ma = m(-\omega^2 y) = -m\omega^2 y$$

Comparando las dos expresiones de la fuerza:

$$-ky = -m\omega^2 y .$$

Por lo tanto:

$$\boxed{k = m\omega^2}$$



En los extremos del movimiento la fuerza sería de la forma:

F = -kA o bien, F = kA

A partir de la expresión $k = m\omega^2$, se pueden deducir las siguientes relaciones:

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$; como $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$; $\dfrac{2\pi}{T} = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ elevando al cuadrado y despejando T, queda :

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

El período de las oscilaciones de un m.a.s. depende de la masa del móvil y de la constante elástica o recuperadora de dicho movimiento.

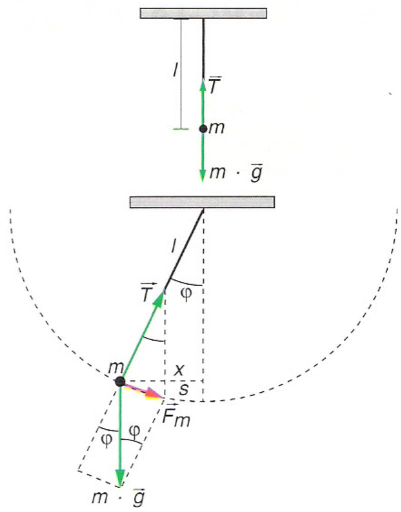
Actividad 8.-Si se duplica la masa que soporta un muelle, ¿cómo varía su frecuencia de oscilación?

Actividad 9.- Un muelle tiene una longitud de 20 cm cuando cuelga de él una masa de 100 g. Si añadimos 500 g alcanza una longitud de 25 cm. ¿Cuánto vale la constante elástica?

Actividad 10.- Un muelle se estira 4 cm cuando se cuelga de él un objeto de 20 kg. A continuación, se estira el muelle 3 cm más y se le deja oscilar libremente. Determina el período y la pulsación del movimiento. Calcula la elongación, velocidad, aceleración y fuerza elástica a los 2,1 s de iniciado el movimiento.

Actividad 11.-Un resorte, de constante elástica 50 N/m, tiene una longitud de 20 cm cuando cuelga de él una masa de 0,5 kg. a) ¿Qué longitud tiene el resorte cuando no está deformado? b) ¿Qué longitud tomará el resorte cuando a la masa anterior se añade otra de 2 kg?

6.-Péndulo simple.



Supongamos un péndulo compuesto por una pequeña bola colgada de un hilo inextensible y relativamente largo para que el ángulo φ correspondiente a pequeñas separaciones sea muy pequeño.

El péndulo está en reposo en la posición de equilibrio porque en dicha posición el peso de la bola y la tensión del hilo se equilibran.

$$\sum \vec{F} = 0; \qquad \vec{P} + \vec{T} = 0$$

Al separar el péndulo de su posición de equilibrio, la resultante ya no es nula y se rompe el equilibrio, porque el peso se descompone en dos componentes, una de ellas, en la dirección del hilo (perpendicular a la dirección del movimiento) que es anulada por la tensión del hilo y no contribuye al movimiento del cuerpo. La otra componente, es la responsable del movimiento del cuerpo y actúa en la dirección de dicho movimiento y su módulo es:

$$F = -mgsen\varphi$$

El signo menos se utiliza para indicar que la fuerza tiende a llevar al péndulo a la posición de equilibrio. Cuando el cuerpo se mueva a la izquierda de la posición de equilibrio, la fuerza actuará en sentido contrario e igual ocurrirá cuando el cuerpo se mueva a la derecha de la posición de equilibrio.

Para ángulos menores de 10º se puede aplicar la aproximación de que el seno del ángulo en radianes es, aproximadamente, igual al valor del ángulo en radianes $(sen\varphi \cong \varphi)$.

Actividad 12.-Comprueba, utilizando la calculadora, que se cumple la aproximación anterior.

Entonces la expresión de la fuerza para el péndulo, considerando oscilaciones con ángulo pequeños, será:

$$F = -mg\varphi$$

A partir de la relación que existe entre el arco y el ángulo:

$x = \varphi.l \quad \Rightarrow \varphi = \dfrac{x}{l}$ por lo que $F = -\dfrac{mgx}{l} = -kx$

En la que x representa el desplazamiento respecto a la posición central o de equilibrio, por lo tanto, similar a $F = -ky$

En la expresión de la fuerza *x* es el desplazamiento que en un instante determinado ha experimentado el péndulo; *l* es la longitud del péndulo y *k* recibe el nombre de constante recuperadora y tiene de valor, en el caso del péndulo:

$$K = \frac{mg}{l}$$

La fuerza recuperadora es periódica, depende del desplazamiento y su dirección es la misma que la del desplazamiento y su sentido es siempre hacia la posición de equilibrio, indicando lo último mediante el signo menos.
Si $k = m\omega^2$ para un m.a.s y para un péndulo simple cuando describe un m.a.s. también vale $k = \dfrac{mg}{l}$ igualando las dos expresiones:

$$\omega^2 = \frac{g}{l}; \quad \omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}; \quad \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{l};$$

$$\boxed{\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{g}}}}$$

La expresión anterior permite calcula el valor del período de un péndulo simple. Se observa que es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud del péndulo, e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la aceleración de la gravedad.

Actividad 13.- Dos péndulos simples tienen distinta longitud. La del primero es doble que la del segundo. ¿En qué relación están sus períodos de oscilación?

Actividad 14.-Un péndulo tiene un período de 1 s en un lugar en el que la aceleración de la gravedad es 9,8 m/s^2. ¿Cuánto valdrá el período cuando se traslade a un lugar en el que $g = 9{,}7 m/s^2$?

7.-Energía del movimiento vibratorio armónico simple.

Una partícula sometida a un m.a.s. tiene dos tipos de energía: una, asociada a la velocidad del movimiento (cinética) y otra, asociada a la fuerza elástica que produce el movimiento (energía potencial elástica).

Para la **energía cinética**, teniendo en cuenta que su valor es $\frac{m\text{v}^2}{2}$ y que en el caso del m.a.s. la velocidad es: $\text{v} = A\omega.\cos(\omega t + \varphi_0)$, si $\varphi_0 = 0$

$$Ec = \frac{1}{2}m\text{v}^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2.\cos^2\omega.t = \frac{1}{2}kA^2.\cos^2\omega.t = \frac{1}{2}kA^2(1 - sen^2\omega.t) = \frac{1}{2}k(A - y^2)$$

$$\boxed{Ec = \frac{1}{2}k(A^2 - y^2)}$$

La energía cinética es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud. Su valor depende de la posición. Tiene su máximo valor en el centro de la trayectoria cuando y=0, y se anula en los extremos, cuando y=A.

En cuanto a la energía potencial elástica asociada al m.a.s.:

$$W_{F_{elástica}} = -\Delta Ep = \int_0^y F_e.dy = \int_0^y -k.y.dy = -\int_0^y k.y.dy$$

Se puede escribir: $\Delta Ep = \int_0^y k.y.dy$

Si tenemos en cuenta que $Ep = 0$, en $y = 0$, resulta al integrar:

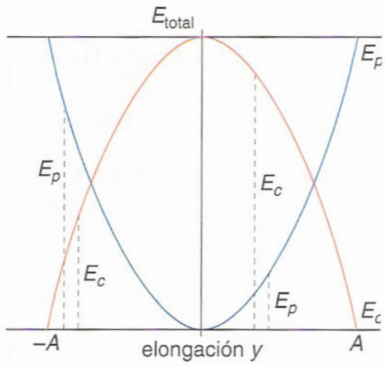
$$Ep = k\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^y = \frac{1}{2}ky^2$$

$$\boxed{Ep = \frac{1}{2}ky^2}$$

Conocidas la energía cinética y la potencial de un m.a.s. se puede calcular su energía mecánica como la suma de la energía cinética y la energía potencial elástica:

$$E_m = Ec + Ep = \frac{1}{2}k\left(A^2 - y^2\right) + \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}k.A^2 = \frac{1}{2}m.\omega^2 A^2 = 2m\pi^2\nu^2 A^2$$

Se ha utilizado que $\omega = 2\pi\nu$



Representación gráfica de la energía cinética y de la energía potencial en función de la posición.

Mientras no exista rozamiento, la energía mecánica, E_m, permanece constante. Al vibrar la masa en uno y otro sentido, la energía se transforma de potencial a cinética y viceversa.

En la gráfica se observa la variación de los dos tipos de energía de la partícula al moverse con un m.a.s. Cuando y=A, toda la energía de la partícula estará en forma de energía potencial. Al aproximarse la partícula a la posición de equilibrio, aumentará su energía cinética y disminuirá su energía potencial, siendo ésta nula en la posición de equilibrio, para $y = 0$.La recta superior muestra el valor de la energía mecánica, siendo en cualquier posición la suma de los dos tipos de energía igual al valor de dicha energía mecánica.

EJERCÍCIOS DE MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

1. Una masa de 80 kg oscila con una frecuencia 2 Hz y amplitud 10 cm sobre una superficie horizontal sin rozamiento, ¿cuánto vale la constante del muelle?

2. Una partícula describe un movimiento oscilatorio armónico simple, de forma que su aceleración máxima es de 18 m/s^2 y su velocidad máxima es de 3 m/s. Encontrar: a) La frecuencia de oscilación de la partícula. b) La amplitud del movimiento.

3. Un punto material de masa 25 g describe un m.a.s. de 10 cm de amplitud y período igual a 1 s. En el instante inicial, la elongación es máxima. Calcula: a) La velocidad máxima que puede alcanzar dicha masa. b) El valor de la fuerza recuperadora a los 0,125 s.

4. La energía total de un cuerpo que realiza un m.a.s es de 3.10^{-4} J y la fuerza máxima que actúa sobre el es $1'5.10^{-2}$ N. Si el período de las vibraciones es 2 s y la fase inicial 60º, determinar: a) La ecuación del movimiento. b) Su velocidad y aceleración para t=0.

5. Al estudiar estáticamente un muelle se obtienen las siguientes lecturas:

Masa suspendida (g)	0,	2,	6,	10,	15,	20,
Long. muelle (mm)	70,0	72,0	76,1	79,9	84,9	99,2

Calcúlese la constante del muelle.

6. La ecuación de un movimiento armónico es $y = 6.sen\pi.t$ en unidades del S.-I. a) ¿Cuál es su período, frecuencia y amplitud? b) Si la masa del cuerpo es 0,25 kg, ¿Cuál será su energía cinética en el instante $t = 0,25$ s? c) ¿En qué instante alcanzará la separación máxima por primera vez?

7. El período de un m.a.s es 2 s y la amplitud 3 cm. El móvil pasa por el punto medio de la trayectoria en $t = 1$ s. Escribe la ecuación del movimiento y halla la velocidad para $t = 2$ s.

8. ¿Cuál es la ecuación de un m.a.s. que posee una amplitud de 15 cm, una frecuencia de 4 Hz y que en el instante inicial, el móvil se encuentra en el punto medio de la amplitud positiva.

9. ¿En qué instantes y posiciones se igualan la energía cinética y potencial de una partícula que describe un m.a.s?

10. Un punto vibra con una amplitud de 4 cm y una frecuencia de 50 Hz. Halla: a) La máxima velocidad con la que vibra. b) La velocidad cuando la elongación vale 1 cm. c) ¿Cuántas vibraciones da en un minuto?

11. Un muelle de 12 cm de longitud, de masa despreciable, tiene uno de sus extremos fijo en la pared vertical mientras que el otro está unido a una masa que descansa sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Se le aplica una fuerza de 30 N para mantenerlo estirado hasta una longitud de 18 cm. En esta posición se suelta para que oscile libremente con una frecuencia angular (pulsación) de π rad/s, calcula: a) la constante recuperadora del resorte; b) La masa que oscila; c) la ecuación del m.a.s resultante d) las energías cinética y potencial cuando x= 3 cm

12. La aceleración de una partícula de 4 g está definida por $a = -16\pi^2 y$. La longitud del segmento horizontal que recorre es de 12 cm y al comenzar a medir el tiempo el cuerpo se encuentra en la posición $y = 3\sqrt{2}$ cm. Calcula: a) La ecuación del movimiento. b) Máximo valor de la velocidad. c) La elongación cuando la velocidad es máxima. c) Energía cinética, potencial y mecánica cuando y=2 cm

13. Un bloque de 2 kg de masa está unido a un resorte de $k = 10^{-2} N/m$. Si en el instante inicial el resorte está en su posición de equilibrio y la velocidad del bloque es de 10 m/s, calcula la máxima deformación del muelle.

14. Una partícula está animada de un m.a.s de período 12 s y fase inicial nula. Determina**:** a) El tiempo que ha de transcurrir hasta que la velocidad sea la mitad que la velocidad máxima. b) ¿En qué instante la elongación es la mitad de la amplitud?

15. Una partícula de 1 g de masa inicia un movimiento armónico simple en el punto de máxima elongación, que se encuentra a 1 m del origen. El tiempo que tarda la partícula desde el instante inicial hasta que alcanza el origen es de 0’25 s. Calcula: a) La pulsación del movimiento.; b) La fuerza que actúa sobre la partícula, transcurridos 0,1 s desde el instante inicial.

16. ¿Cómo varían la velocidad máxima y la aceleración máxima de un m.a.s.: a) si se duplica la frecuencia y se duplica la amplitud; b) si se duplica la frecuencia manteniendo la amplitud?

17. Un resorte elástico de masa despreciable está fijo por uno de sus extremos y por el otro sostiene una masa de 5 kg. Se separa la masa de su posición de equilibrio, se le suelta y se observa que el cuerpo realiza oscilaciones armónicas tales que 10 oscilaciones duran 3,14 s. Calcula la constante recuperadora del muelle.

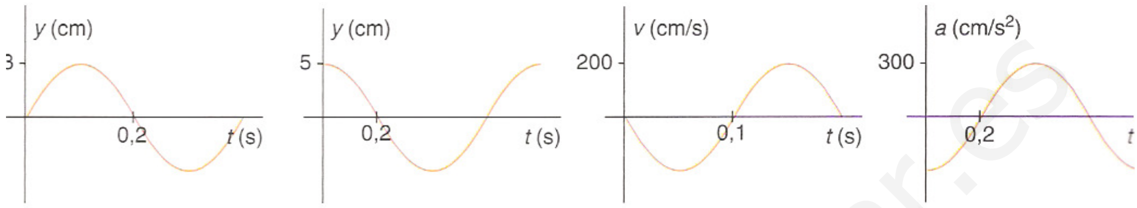
18. Una partícula que describe un mas recorre 16 cm en cada ciclo de su movimiento y su aceleración máxima es 48 m/s^2. Calcula la frecuencia, el período y la velocidad máxima de la partícula.

19. Los períodos de dos péndulos A y B son tales que $T_A = 3T_B$**.** ¿En qué relación están sus longitudes?

20. Un cuerpo de masa 1,4 kg se conecta a un muelle de constante elástica 15 N.m^{-1} y el sistema comienza a oscilar. La amplitud del movimiento es 2 cm. Calcula: a) La energía total del sistema; b) La energía cinética y la potencial cuando el desplazamiento del cuerpo es de 1,3 cm.; c) La velocidad máxima del cuerpo.

21. Colgado de un soporte hay un resorte de constante elástica $k = 40\, N/m$ del que cuelga una masa de 1 kg. En estas circunstancias y en equilibrio, la masa dista un metro del soporte. a) ¿Cuál es la longitud del resorte cuando no hay suspendida ninguna masa?; b) Ahora se deja caer, una masa de 0,5 kg que queda unida a la primera y el sistema comienza a oscilar. ¿Cuál es la frecuencia de oscilación?

22. Deduce la ecuación de la elongación para los movimientos representados en la figura:



23. De un muelle vertical, del que se desprecia su masa, se cuelga una masa de 60 g que lo deforma 3 cm cuando se lleva al equilibrio: a) ¿Cuál es el valor de la constante elástica?; b) ¿Y el período de oscilación del sistema? c) Si ahora se añade una masa de 40 g, ¿cuál será ahora la nueva deformación del resorte en equilibrio? ¿Y el período de oscilación?

24. Una partícula que describe un movimiento armónico simple recorre una distancia de 16 cm en cada ciclo de su movimiento y su aceleración máxima es de 48 cm/s^2. Calcula la frecuencia, el período y la velocidad máxima de la partícula

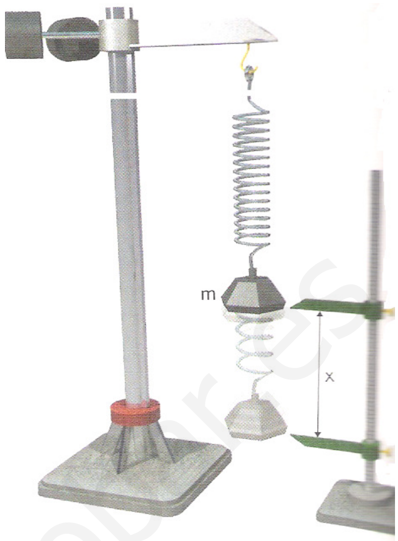
25. Un cuerpo de 200 g unido a un resorte horizontal oscila, sin rozamiento, sobre una mesa, a lo largo del eje de las X, con una frecuencia angular de 8 rad/s. En el instante inicial, el alargamiento del resorte es de 4 cm respecto a la posición de equilibrio y el cuerpo lleva en ese instante una velocidad de -20 cm/s. Calcula la amplitud y la fase inicial del m.a.s. realizado por el cuerpo, así como la constante elástica del resorte y la energía mecánica del sistema.

26. Un objeto de 2,4 kg está sujeto a un muelle horizontal de constante 4,5 N/m. El muelle se estira 10 cm y se deja oscilar en libertad. Determina la frecuencia del movimiento, el período, la amplitud, la velocidad máxima y la aceleración máxima. ¿Cuando alcanza el objeto su posición de equilibrio? ¿Cuánto vale la aceleración en ese instante?

27. Una masa puntual de 150 g unida a un muelle horizontal de constante elástica 65 N/m constituye un oscilador armónico. Si la amplitud del m.a.s que origina es de 5 cm, calcula: a) La energía `potencial del sistema cuando la velocidad de oscilación es nula; b) la energía cinética del sistema cuando la velocidad de oscilación es máxima; c) La energía cinética y la energía potencial elástica del sistema cuando la aceleración de la masa es igual a 13 m/s^2

Práctica 1.- OSCILADOR ARMÓNICO.

Objetivo.
Estudiar la dependencia del período de un muelle de la masa colgada de él.



Material.
Muelle; barra soporte; pinza; portapesas; pesas; cronómetro.

Procedimiento.

Se construye el montaje de la figura.
Se colocan distintas masas en el muelle y se mide el valor de 10 oscilaciones, realizando 3 medidas para cada masa y se calcula la media.
Se repite la operación para tres masas distintas y se pasan los datos a la siguiente tabla:

masa(kg)	media de 10 oscilaciones(s)	Período T (s)	T^2 (s^2)	Constante k (N/m)

Sabiendo que $k = m\omega^2$ y el valor de $\omega = \frac{2\pi}{T}$ se deduce que:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k}.m$$

De esta forma conociendo el período y la masa en cada caso se pude calcular la constante elástica.
<u>Método gráfico.</u>-También se puede hacer utilizando la representación gráfica de T^2 frente a m, ya que entonces saldría una línea recta cuya pendiente permitiría calcular el valor de k.

$$T^2 = bm \qquad \text{siendo } b = \frac{4\pi^2}{k}$$

Práctica 2.-DETERMINACIÓN DE LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD (g) MEDIANTE UN PÉNDULO SIMPLE

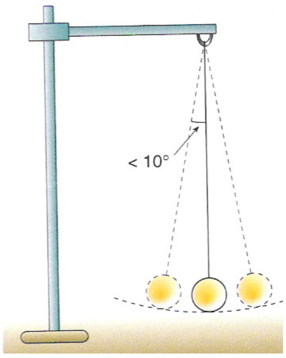
Objetivo.

Determinación de g con un péndulo simple y comprobación de que, para oscilaciones pequeñas, el período de un péndulo no depende de la amplitud de la oscilación ni de la masa que se cuelga del hilo.

Material.

Soporte; doble nuez; varilla; péndulo simple; regla graduada; cronómetro.

Procedimiento.-



Se realiza el montaje de la figura.
Se hace oscilar el péndulo para oscilaciones correspondientes a ángulo pequeños y teniendo la precaución de que el movimiento se efectúe en un plano y no realice movimientos elípticos.
Se mide el tiempo que tarda en realizar 10 oscilaciones (movimiento completo de ida y vuelta). Se realiza la medida varias veces y se calcula la media.

El período de un péndulo simple tiene como valor $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Se trasladan los datos a la siguiente tabla:

Longitud del péndulo (m)	Media de 10 oscilaciones (s)	Período (s)	Valor de g

*<u>Método gráfico.-</u>*Se pueden construir péndulos de distintas longitudes y calcular el período para cada uno de ellos. Se representa el cuadrado de los diferentes períodos frente a la longitud.. Se traza una recta ajustada a la nube de puntos y calculando la pendiente de dicha recta se puede calcular la aceleración de la gravedad:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l \qquad \text{del tipo } y = mx$$

La pendiente sería: $m = \frac{4\pi^2}{g}$

RESOLUCIÓN DE LAS ACTIVIDADES

Actividad 1.- ¿Cuál es el intervalo de tiempo que separa dos puntos que se encuentran en oposición de fase?

Dos puntos están en oposición de fase cuando la diferencia de fase es igual a un número impar de veces π radianes: $\Delta\varphi = (2n-1)\pi$ rad. Por lo tanto:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega.t_2 \omega.t_1) = \omega(t_2 - t_1) = \omega\Delta t = \frac{2\pi}{T}\Delta t$$

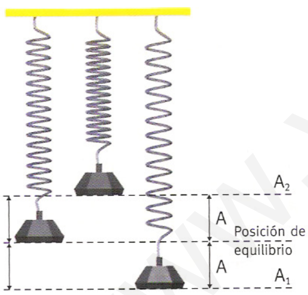
Igualando el valor anterior al de la diferencia de fase entre dos puntos que están en oposición de fase:

$\frac{2\pi}{T}\Delta t = (2n-1)\pi$; despejando Δ t:

$$\boxed{\Delta t = (2n-1)\frac{T}{2}}$$

Cuando el intervalo de tiempo que separa los dos puntos sea un número impar de veces la mitad del período, dichos puntos estarán en oposición de fase.

Actividad 2.-Un objeto cuelga de un muelle y describe un m.a.s. con una amplitud de 10 cm y 0,1 s de período. En el instante inicial el muelle alcanza su máxima separación negativa. Deduce la ecuación del movimiento.



Se trata de un m.a.s. por lo que su ecuación general es:

$$y = A.sen(\omega t + \varphi_0)$$

Al conocer la amplitud, A=0,1 m, queda determinar la pulsación y la fase inicial para dejar $y = f(t)$:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,1} = 20\pi \text{ rad/s}$$

Para el cálculo de la fase inicial, φ_0, se sustituye en la ecuación general que para t=0 el valor de y es: $y = -0.1$ m

$$-0.1 = 0,1.sen(20\pi.0 + \varphi_0); \quad -1 = \text{sen}\varphi_0 \quad \Rightarrow \varphi_0 = \frac{3}{2}\pi \text{ rad}$$

La ecuación del m.a.s será:

$$\boxed{y = 0,1.sen\left(20\pi.t + \frac{3}{2}\pi\right) \text{ en m.}}$$

Actividad 3.-Una partícula animada de m.a.s. inicia el movimiento en el extremo positivo de su trayectoria y tarda 0,25 s en llegar al centro de la misma. La distancia entre ambas posiciones es de 20 cm. Calcula: **a)** La frecuencia del movimiento. **b)** La ecuación del movimiento. **c)** La posición de la partícula 0,5 s después de iniciar el movimiento.

$$\text{Datos}\begin{cases} Para\ \ \mathrm{t = 0 \Rightarrow y = A} \\ \mathrm{A = 0{,}20\,m} \\ \mathrm{t = 0{,}25\,s = \frac{T}{4}} \Rightarrow T = 4.0{,}25 = 1\,\mathrm{s} \end{cases}$$

a) $\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{1} = 1\,\mathrm{Hz}$

b) Se trata de un m.a.s. por lo que su ecuación general es:

$$y = A.sen(\omega t + \varphi_0)$$

Al conocer la amplitud, A=0,2 m, queda determinar la pulsación y la fase inicial para dejar $y = f(t)$:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\ \mathrm{rad/s}$$

Para el cálculo de la fase inicial, φ_0, se sustituye en la ecuación general que para t=0 el valor de y es: $y = 0{,}2$ m

$$0.2 = 0{,}2.sen(2\pi.0 + \varphi_0);\quad 1 = \mathrm{sen}\varphi_0 \quad \Rightarrow \ \varphi_0 = \frac{\pi}{2}\ \mathrm{rad}$$

La ecuación del m.a.s será:

$$\boxed{y = 0{,}2.sen\left(2\pi.t + \frac{\pi}{2}\right)\ \text{en m.}}$$

c) Sustituyendo en la ecuación del m.a.s. t por 0,5 s:

(Para trabajar con la ecuación del m.a.s hay que poner la calculadora en modo rad)

$$y = 0{,}2.sen\left(2\pi.0{,}5 + \frac{\pi}{2}\right) = -0{,}2\,\mathrm{m}$$

Actividad 4.-Una partícula recorre un segmento de 8cm de longitud en 0,05 s, animada con un m.a.s. Si en el instante inicial su elongación tiene el máximo valor positivo, calcula: **a)** La ecuación del movimiento. **b)** La posición en el instante 1,85 s. **c)** La diferencia de fase entre el instante anterior y el instante inicial.

$$\text{Datos}\begin{cases} Para\ \ \mathrm{t}=0 \Rightarrow \mathrm{y}=\mathrm{A} \\ \mathrm{l}=8\,\mathrm{cm}=2\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{A}=4\,\mathrm{cm}=0{,}08\,\mathrm{m} \\ \mathrm{t}=0{,}05\,\mathrm{s}=\dfrac{\mathrm{T}}{2} :\Rightarrow T=2.0{,}05=0{,}1\,\mathrm{s} \end{cases}$$

a) Se trata de un m.a.s. por lo que su ecuación general es:

$$y = A.sen(\omega t + \varphi_0)$$

Al conocer la amplitud, A=0,04 m, queda determinar la pulsación y la fase inicial para dejar $y = f(t)$:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}1} = 20\pi \text{ rad/s}$$

Para el cálculo de la fase inicial, φ_0, se sustituye en la ecuación general que para t=0 el valor de y es: $y = 0{,}04$ m

$$0.04 = 0{,}04.sen(20\pi.0 + \varphi_0); \quad 1 = \mathrm{sen}\varphi_0 \quad \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

La ecuación del m.a.s será:

$$\boxed{y = 0{,}04.sen\left(20\pi.t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ en m.}}$$

b) Se sustituye en la ecuación del movimiento, t por 1,85 s

(Para trabajar con la ecuación del m.a.s hay que poner la calculadora en modo rad)

$$y = 0{,}04.sen\left(20\pi..1{,}85 + \frac{\pi}{2}\right) = -0{,}04 \text{ m}$$

c) $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega.t_2 \omega.t_1) = \omega(t_2 - t_1) = \omega\Delta t = 20\pi(1{,}85 - 0) = 37\pi$ rad

Actividad 5.-La ecuación de un m.a.s. es $y = 0{,}2.sen(6\pi t + \pi)$ m. Calcula: **a)** La amplitud, pulsación, período, frecuencia y fase inicial. **b)** La velocidad en el instante inicial, la velocidad máxima y la velocidad cuando $t = 0{,}5s$

a) Comparando la ecuación dada con la ecuación general del m.a.s

$$y = A.sen(\omega t + \varphi_0)$$
$$y = 0{,}2.sen(6\pi t + \pi)$$

Se deduce que: A=0,2 m. $\omega = 6\pi$ rad/s $\varphi_0 = \pi$ rad

Como $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$; T $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{6\pi} = \dfrac{1}{3}$ s

Al ser la frecuencia la inversa del período: $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{1/3} = 3$ Hz

b) La ecuación de la velocidad es:

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{v} = A\omega.\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Para t=0: $\mathrm{v} = 0{,}2.6\pi.\cos(6\pi.0 + \pi) = -1{,}2\pi$ m/s

La velocidad máxima se alcanza cuando el $\cos(6\pi.t + \pi) = 1$, por lo que:

$$\mathrm{v}(\text{máxima}) = A\omega = 0{,}2.6\pi = 1{,}2\pi \text{ m/s}$$

La velocidad para t=0,5 s, será: $\mathrm{v} = 0{,}2.6\pi.\cos(6\pi.0{,}5 + \pi) = -1{,}2\pi$ m/s

Actividad 6.-Un móvil, animado de un m.a.s., recorre un segmento de 8 cm de longitud. La frecuencia del movimiento es igual a 10 s^{-1}, y en el instante inicial el móvil se encuentra en la posición de equilibrio. Calcula: **a)** La ecuación del movimiento. **b)** La velocidad y la aceleración en el instante inicial.

a) Datos $\begin{cases} \mathrm{l} = 8\,\mathrm{cm} = 2\mathrm{A};\ \mathrm{A} = 4\,\mathrm{cm} = 0{,}04\,\mathrm{m} \\ \nu = \text{frecuencia} = 10\,\mathrm{Hz} \\ \text{Para t} = 0 \Rightarrow \mathrm{y} = 0 \end{cases}$

Se trata de un m.a.s. por lo que su ecuación general es:

$$y = A.sen(\omega t + \varphi_0)$$

Al conocer la amplitud, A=0,04 m, queda determinar la pulsación y la fase inicial para dejar $y = f(t)$:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi.\upsilon = 2\pi.10 = 20\pi \text{ rad/s}$$

Para el cálculo de la fase inicial, φ_0, se sustituye en la ecuación general que para t=0 el valor de y es: $y = 0$ m

$0 = 0.sen(20\pi.0 + \varphi_0)$; $0 = \mathrm{sen}\varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = 0$ rad

La ecuación del m.a.s será:

$$\boxed{y = 0{,}04.sen(20\pi.t) \text{ en m.}}$$

b) La ecuación de la velocidad es:

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{v} = A\omega.\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Para t=0: $\mathrm{v} = 0{,}04.20\pi.\cos(20\pi.0) = 0{,}8\pi$ m/s

c) La ecuación de la aceleración se obtiene derivando la ecuación de la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = -A\omega^2.sen(\omega.t + \varphi_0) = -\omega^2 y$$

Sustituyendo datos y calculando para t=0:

$$a = -0{,}04(20\pi)^2 sen(20\pi.0) = 0$$

Actividad 7.-Una partícula vibra con una velocidad máxima de 20 m/s y una amplitud de 10 cm. Calcula: **a)** La frecuencia del movimiento. **b)** La aceleración máxima.

a) La ecuación de la velocidad es:

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{v} = A\omega.\cos(\omega t + \varphi_0)$$

La velocidad máxima se alcanza cuando el $\cos(6\pi.t + \pi) = 1$, por lo que:

$$\mathrm{v}(\text{máxima}) = A\omega = 0{,}1.\omega = 20 \text{ m/s} \Rightarrow \omega = \frac{20}{0{,}1} = 200 \text{ rad/s}$$

b) $a = \dfrac{d\mathrm{v}}{dt} = -A\omega^2.sen(\omega.t + \varphi_0)$

La aceleración será máxima cuando el seno de la fase alcance valor de -1:

$$a(máxima) = A.\omega^2 = 0{,}1.200^2 = 4000 \text{ m/s}^2$$

Actividad 8.-Si se duplica la masa que soporta un muelle, ¿cómo varía su frecuencia de oscilación?

A partir de la expresión de la constante elástica, $k = m\omega^2$, se pueden deducir las siguientes relaciones:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}};\ \text{como}\ \omega = \frac{2\pi}{T};\ \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{elevando al cuadrado y despejando T, queda :}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Elevando al cuadrado y teniendo en cuenta que la frecuencia es la inversa del período:

$$\frac{1}{\upsilon_1^2} = 4\pi^2 \frac{m_1}{k} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_1^2 = \frac{k}{4\pi^2 m_1}$$

Para una masa m$_2$ se tiene: $\upsilon_2^2 = \dfrac{k}{4\pi^2 m_2}$

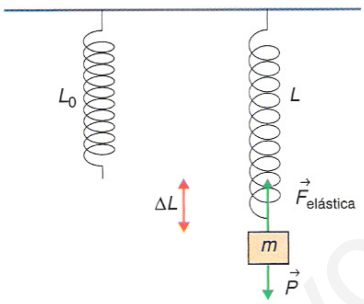
Dividiendo la segunda ecuación entre la primera:

$$\frac{\upsilon_2^2}{\upsilon_1^2} = \frac{k.4\pi^2 m_1}{k.4\pi^2 m_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

Al ser $m_2 = 2m_1$ queda: $\dfrac{\upsilon_2^2}{\upsilon_1^2} = \dfrac{m_1}{2m_1} = 05; \ \Rightarrow \ \upsilon_2^2 = 0{,}5\upsilon_1^2 \ \Rightarrow \ \upsilon_2 = 0{,}71\upsilon_1$

La frecuencia al duplicar la masa se hace 0,71 veces la frecuencia anterior.

Actividad 9.- Un muelle tiene una longitud de 20 cm cuando cuelga de él una masa de 100 g. Si añadimos 500 g alcanza una longitud de 25 cm. ¿Cuánto vale la constante elástica?



Cuando se cuelga un objeto de un muelle o resorte, de masa despreciable y longitud l_0, se observa que se estira hasta alcanzar una longitud l.El alargamiento experimentado por el muelle vale:

$$\Delta l = l - l_0 .$$

Las fuerzas que actúan sobre el muelle son el peso y la fuerza elástica. Aplicando la condición de equilibrio, una vez que se halla alargado hasta l, y la ley de Hooke:

$$\sum \vec{F} = 0; \quad P - F_{elástica} = 0; \quad \mathrm{P} = \mathrm{F}_{\text{elástica}}; \quad mg = k(l - l_0); \quad k = \frac{mg}{l - l_0} = \frac{mg}{\Delta l}$$

Siendo ***k* la constante elástica.**

A partir del valor de la constante elástica: $k = \dfrac{mg}{l - l_0}$

Sustituyendo datos en esta ecuación:

$k = \dfrac{0{,}1.9{,}8}{0{,}2 - l_0}$; Al añadir 0,5 kg, la constante eléstica no cambia pues se trata del mismo muelle:

$k = \dfrac{0{,}6.9{,}8}{0{,}25 - l_0}$; Se resuelve el sistema formado por las dos ecuaciones y sale:

$$l_0 = 0{,}19 \text{ m}; \quad k = 98 \text{ N/m}$$

Actividad 10.- Un muelle se estira 4 cm cuando se cuelga de él un objeto de 20 kg. A continuación, se estira el muelle 3 cm más y se le deja oscilar libremente. Determina el período y la pulsación del movimiento. Calcula la elongación, velocidad, aceleración y fuerza elástica a los 2,1 s de iniciado el movimiento.

La fuerza que provoca el alargamiento del muelle es el peso de la masa de 20 kg

$$k = \frac{mg}{\Delta l} = \frac{20.9{,}8}{0{,}04} = 4900 \text{ N/m}$$

Una vez colgada la masa de 20 kg y estando el muelle en reposo se le estira 3 cm provocando una oscilación de amplitud 3 cm

Como la constante elástica es: $k = m\omega^2 = m(2\pi.\upsilon)^2 = 4\pi^2 m\upsilon^2$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{k}{4\pi^2 m}} = 2{,}49 \text{ Hz} \qquad T = \frac{1}{\upsilon} = \frac{1}{2{,}49} = 0{,}4 \text{ s}$$

Para tener la ecuación del m.a.s. falta calcular la pulsación y la fase inicial:
La ecuación general es:

$$y = A.sen(\omega t + \varphi_0)$$

Al conocer la amplitud, A=0,03 m, queda determinar la pulsación y la fase inicial para dejar $y = f(t)$:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi.\upsilon = 2\pi.2{,}49 = 4{,}98\pi \text{ rad/s}$$

Para el cálculo de la fase inicial, φ_0, se sustituye en la ecuación general que para t=0 el valor de y es: $y = -0{,}03$ m

$$-0{,}03 = 0{,}03.sen(4{,}98\pi.0 + \varphi_0); \quad -1 = \text{sen}\varphi_0 \quad \Rightarrow \varphi_0 = \frac{3}{2}\pi \text{ rad}$$

La ecuación del m.a.s será:

$$\boxed{y = 0{,}03.sen\left(4{,}98\pi.t + \frac{3}{2}\pi\right) \text{ en m.}}$$

La elongación para t=2,1 s, valdrá:

$$y = 0{,}03.sen\left(4{,}98\pi.2{,}1 + \frac{3}{2}\pi\right) = -3{,}95.10^{-3}\,m$$

La ecuación de la velocidad es:

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{v} = A\omega.\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Para t=2,1 s: $\mathrm{v} = 0{,}03.4{,}98\pi.\cos(4{,}98\pi.2{,}1 + \frac{3}{2}\pi) = 0{,}15\pi$ m/s

La ecuación de la aceleración se obtiene derivando la ecuación de la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = -A\omega^2.sen(\omega.t + \varphi_0) = -\omega^2 y$$

Sustituyendo datos y calculando para t=2,1 s:

$$a = -0{,}03(4{,}98\pi)^2\,sen\left(4{,}98\pi.2{,}1 + \frac{3}{2}\pi\right) = 0{,}97\ \mathrm{m/s^2}$$

La fuerza elástica es $F = -ky$

Alos 2,1 s la fuerza elástica tomará el valor que resulte de sustituir en la ecuación anterior k por su valor y la elongación por su valor para t=2,1 s

$$F = -\,4900.\left(-\,3{,}95.10^{-3}\right) = 19{,}36\ \mathrm{N}$$

Actividad 11.-Un resorte, de constante elástica 50 N/m, tiene una longitud de 20 cm cuando cuelga de él una masa de 0,5 kg. **a)** ¿Qué longitud tiene el resorte cuando no está deformado? **b)** ¿Qué longitud tomará el resorte cuando a la masa anterior se añade otra de 2 kg?

$$\sum\vec{F} = 0;\ \ P - F_{elástica} = 0;\ \ \mathrm{P} = \mathrm{F_{elástica}};\ \ mg = k(l - l_0);\ \ k = \frac{mg}{l - l_0} = \frac{mg}{\Delta l}$$

a) $k = \dfrac{mg}{l - l_0};\quad 50 = \dfrac{0{,}5.9{,}8}{0{,}2 - \mathrm{l_0}};\quad 50.(0{,}2 - \mathrm{l_0}) = 0{,}5.9{,}8;$

Resolviendo la ecuación: $\mathrm{l_0} = 0{,}102\ \mathrm{m} = 10{,}2\ \mathrm{cm}$

b) $k = \dfrac{mg}{l - l_0};\quad 50 = \dfrac{2{,}5.9{,}8}{l - 0{,}102};\quad 50.(l - 0{,}102) = 2{,}5.9{,}8;$

Resolviendo la ecuación: $l = 0{,}592\ \mathrm{m} = 59{,}2\ \mathrm{cm}$

Actividad 13.- Dos péndulos simples tienen distinta longitud. La del primero es doble que la del segundo. ¿En qué relación están sus períodos de oscilación?

Actividad 14.-Un péndulo tiene un período de 1 s en un lugar en el que la aceleración de la gravedad es 9,8 m/s^2. ¿Cuánto retrasará o adelantará al cabo de un día cuando se traslade a un lugar en el que $g = 9{,}7m/s^2$?