DEPARTAMENTO DE FÍSICA E QUÍMICA	***Física 2º Bach.*** Tema: Gravitación 31/01/06 Nombre:	

Problemas

[3 PUNTOS / UNO]

1. En enero de 2006 el canal BBC Ciencia publicó el descubrimiento de un planeta similar a la Tierra. Calcula la distancia promedio aproximada del planeta «OGLE-2005-BLG-390Lb» a la estrella roja alrededor de la que gira en unidades astronómicas (UA), es decir, comparada con la distancia de la Tierra al Sol.
   (Supón que la masa de la estrella roja es aproximadamente la mitad de la del Sol)

Descubren planeta similar a la Tierra

19-01-06

Rebecca Morelle
BBC, Ciencia

Un equipo internacional de astrónomos descubrió fuera del sistema solar el planeta más pequeño y parecido a la Tierra que haya sido identificado hasta el presente.

El nuevo planeta tiene una masa cinco veces mayor que la de la Tierra y puede ser encontrado a 25.000 años luz en la Vía Láctea, girando alrededor de una pequeña estrella roja.

Las frías temperaturas del planeta hacen que las posibilidades de encontrar vida sean poco probables.

El planeta, que lleva el nombre OGLE-2005-BLG-390Lb, toma unos 10 años en completar su órbita alrededor de su estrella materna, similar al Sol pero menos caliente y más pequeña.

Está en la misma galaxia que la Tierra, la Vía Láctea, pero más cerca del centro galáctico.

Al igual que la Tierra, el planeta tiene un núcleo rocoso y una atmósfera probablemente fina. No obstante, su amplia órbita y las condiciones de su estrella materna significa que es un mundo frío.

Las temperaturas calculadas de su superficie son de 220 grados centígrados bajo cero, lo que quiere decir que posiblemente sea líquido congelado.

"Esto es muy excitante e importante", dijo el profesor Michael Bode, de la Universidad John Moores de Liverpool, uno de los principales investigadores del proyecto RoboNet que colaboró con el proyecto.

"Este es el planeta más parecido a la Tierra que hayamos descubierto hasta el presente en términos de su masa y de la distancia de su estrella materna", declaró a la BBC.

DATOS:
distancia de la Tierra al Sol: 1 UA = $1{,}5\times10^8$ km
masa del Sol: $M_S = 1{,}99\times10^{30}$ kg
constante de la gravitación universal:
$G = 6{,}67\times10^{-11}\ \text{N·m}^2\text{·kg}^{-2}$
velocidad de la luz: $c = 2{,}99\times10^5$ km/s
masa de la Luna: $M_L = 0{,}0123\ M_T$
distancia de la Tierra la Luna: 384 000 km

Solución:

Datos:

período del planeta:	$T_P = 10$ años
período de la Tierra:	$T_T = 1$ año
masa de la estrella:	$M_E = M_S / 2$
radio de la órbita de la Tierra:	$r_T = 1$ UA

Incógnitas:

radio de la órbita del planeta:	r_P

Ecuaciones:

Ley de Newton de la gravitación:	$F = G\,M\,m / r^2$
M.C.U.	$a = a_N = v^2 / r$ $v = 2\,\pi\,r / T$
2ª Ley de Newton:	$\sum \mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$

Cálculos:

La única fuerza que actúa sobre cada planeta es la gravitatoria de su estrella central, y está dirigida hacia el centro de ella.

$$G\,M\,\cancel{m} / r^2 = \cancel{m}\,v^2 / r = \cancel{m}\,(2\,\pi\,r / T)^2 / r$$
$$G\,M = 4\,\pi^2\,r^3 / T^2$$

que despejando r, permite calcular el radio de la órbita:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G\,M\,T^2}{(2\,\pi)^2}}$$

Dividiendo la ecuación referida al planeta con la de la Tierra girando alrededor del Sol, da:

$$\frac{r_P}{r_T}=\frac{\sqrt[3]{\frac{G M_E T_P^2}{(2\pi)^2}}}{\sqrt[3]{\frac{G M_S T_T^2}{(2\pi)^2}}}=\sqrt[3]{\frac{M_E T_P^2}{M_S T_T^2}}=\sqrt[3]{\frac{(M_S/2)(10\cdot T_T)^2}{M_S T_T^2}}=\sqrt[3]{50}=3,7\approx 4$$

El planeta gira alrededor de su estrella a unas cuatro unidades astronómicas.

2. ¿A qué distancia de la Tierra el campo gravitatorio conjunto de la Tierra y la Luna es nulo?

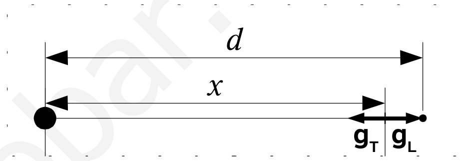
Solución:

En ese punto los campos gravitatorios creados por la Tierra y la Luna deben ser opuestos, por lo que sus módulos han de ser iguales.

$$|\mathbf{g}_L| = |\mathbf{g}_T|$$

El campo gravitatorio es la fuerza sobre la unidad de masa. Con la ley de la gravitación universal de Newton, el vector campo gravitatorio creado por una masa M en un punto a una distancia r es

$$g=\frac{\vec{\mathbf{F}}_G}{m}=-G\frac{M}{r^2}\vec{\mathbf{u}}_r$$



Llamando x a la distancia del punto a la Tierra y d a la distancia entre la Tierra y la Luna,

$$G\frac{M_L}{(d-x)^2}=G\frac{M_T}{x^2}$$

Reordenando y sustituyendo M_L = 0,0123 M_T

$$\frac{0{,}123\,M_T}{M_T}=\frac{(d-x)^2}{x^2}$$

$$\frac{(d-x)}{x}=\pm\sqrt{0{,}0123}=\pm 0{,}111$$

siendo d = 3,84×10⁸ m

x = 3,46×10⁸ m = 346 000 km

La otra solución no es válida porque pertenece a un punto en el que el campo gravitatorio no es nulo, pues los campos de ambos astros tienen el mismo sentido.

Teoría

[1 PUNTO / UNO]

1. Un satélite gira alrededor de un planeta describiendo una órbita elíptica ¿Cuál de las siguientes magnitudes permanece constante?:
   A) Momento angular.
   B) Momento lineal.
   C) Energía potencial.

Solución: C

El momento angular $\mathbf{L}_O$ de una partícula de masa m que se mueve con una velocidad $\mathbf{v}$ respecto a un punto O que se toma como origen es:

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r}\times m\mathbf{v}$$

Para estudiar su variación, derivamos con respecto al tiempo:

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}=\frac{d(\vec{\mathbf{r}}\times m\vec{\mathbf{v}})}{dt}=\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}+\frac{d\,m\vec{\mathbf{v}}}{dt}=\vec{\mathbf{v}}\times m\vec{\mathbf{v}}+\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}}=\vec{\mathbf{0}}+\vec{\mathbf{0}}=\vec{\mathbf{0}}$$

El primer sumando da el vector **0** porque la velocidad **v** y el momento lineal m**v** son paralelos. El segundo sumando también da el vector **0** porque, al ser el campo de fuerzas un campo central, el vector de posición **r** con origen en el punto origen del campo y el vector fuerza (dirigido hacia ese origen) son vectores paralelos.

Cuando una partícula se mueve en un campo de fuerzas centrales, el momento angular respecto al punto origen de la fuerza es un vector constante, ya que su derivada es cero.

2. ¿Cómo varía g desde el centro de la Tierra hasta la superficie (suponiendo la densidad constante)?
   A) Es constante $g = GM_T/R_T^2$
   B) Aumenta linealmente con la distancia r desde el centro de la Tierra $g = g_0\, r / R_T$
   C) Varía con la distancia r desde el centro de la Tierra según $g = GM_T / (R_T + r)^2$

Solución: B

En el interior de la Tierra (supuesta una esfera maciza de densidad constante):

$$g_i = G\frac{m}{r^2}$$

en la que m es la masa de la esfera de radio r interior al punto en el que deseamos calcular el valor del campo g_i. Si la densidad ρ es la misma que la de la Tierra:

$$\rho = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

$$m = \frac{M_T r^3}{R_T^3}$$

$$g_i = G\frac{M_T r^3}{r^2 R_T^3} = G\frac{M_T}{R_T^3} r = G\frac{M_T}{R_T^2}\frac{r}{R_T} = g_0 \frac{r}{R_T}$$

3. Una masa se desplaza en un campo gravitatorio desde un lugar en que su energía potencial vale -200 J hasta otro donde vale -400 J. ¿Cuál es el trabajo realizado por o contra el campo?
   A) -200 J   B) 200 J   C) -600 J

Solución: B

El trabajo que hace una fuerza conservativa entre dos puntos A y B es:

$$W_{A\to B} = -\Delta E_P = E_{P\,A} - E_{P\,B} = -200\ [J] - (-400\ [J]) = 200\ J$$

que es el trabajo que hace la fuerza del campo.
Las masas se mueven en un campo gravitatorio en el sentido de los potenciales decrecientes, que es el sentido de la fuerza del campo, por lo que el trabajo es positivo.
El trabajo que realiza una fuerza exterior cuando una masa se desplaza entre esos dos puntos se puede calcular suponiendo que la variación de energía cinética es nula. En ese caso:

$$W_{RESULTANTE} = \Delta E_c = 0$$

$$W_{CAMPO} + W_{EXTERIOR} = 0$$

$$W_{EXTERIOR} = -W_{CAMPO} = -200\ J$$

4. La altura a la que el campo gravitatorio terrestre vale lo mismo que en un punto interior de la Tierra (supuesta una esfera homogénea de densidad constante) situado a una profundidad de ¾ R_T es:
   A) $h = R_T$ B) $h = ¼\, R_T$ C) $h = ¾\, R_T$

Solución: A

La gravedad terrestre varía con la profundidad como se demostró en la cuestión 2.

$$g_i = g_0 \frac{r}{R_T}$$

A una profundidad de ¾ R_T, la distancia al centro de la Tierra es:

$$r = R_T - ¾\ R_T = ¼\ R_T$$

$$g_i = ¼\ g_0$$

La gravedad terrestre varía con con la altura.
La intensidad del campo gravitatorio g creado por una masa M esférica a una distancia r del centro, en el exterior de la esfera es:

$$g = G\ M / r^2$$

Para la Tierra, a una altura $h = r - R_T$, de la superficie

$$g_h = \frac{G M_T}{(R_T + h)^2}$$

Comparando con el valor en la superficie de la Tierra

$$g_0 = \frac{G M_T}{R_T^2}$$

Dividiendo ambas expresiones

$$\frac{g_h}{g_0} = \frac{\frac{G M_T}{(R_T + h)^2}}{\frac{G M_T}{R_T^2}} = \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2}$$

por lo que la gravedad disminuye con la altura.

Si a la altura h, g tiene que valer lo mismo que a la profundidad de ¾ R_T

$$\frac{g_h}{g_0} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{R_T^2}{(R_T + h)^2} = \frac{1}{4}$$

$$R_T + h = 2\ R_T$$

$$h = R_T$$