DEPARTAMENTO DE FÍSICA E QUÍMICA	***Física 2º Bacharelato*** Gravitación 19/01/10 Nombre:	

1. Calcula la primera velocidad orbital cósmica, es decir la velocidad que tendría un satélite de órbita rasante.

2. La masa de la Luna es 81 veces menor que la de la Tierra. ¿A que distancia de la Tierra el campo gravitatorio conjunto de la Tierra y la Luna es nulo?

3. ¿A qué altura se encuentra un satélite geoestacionario?

4. Calcula la velocidad de escape en la Tierra.

5. Demuestra que si $h << R_T$ la expresión de la energía potencial gravitatoria puede expresarse por $m \cdot g \cdot h$.

6. En relación con la gravedad terrestre, una masa *m*:
A) Pesa más en la superficie de la Tierra que a 100 km de altura.
B) Pesa menos. C) Pesa igual.

7. Demuestra que la energía cinética de la Luna es la mitad del valor absoluto de su energía potencial con respecto a la Tierra.

8. Razona si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes para un péndulo simple:
a) Cuando se aumenta la amplitud la frecuencia no varía.
b) El período del péndulo es directamente proporciona a la masa.
Datos: $R_T = 6{,}38 \cdot 10^6$ m; $g_T = 9{,}81$ N·kg^{-1} ; $d_{T\text{-}L} = 380\,000$ km

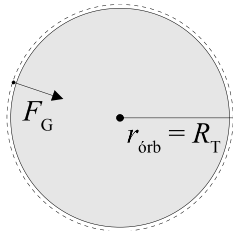
Soluciones

1. Calcula la primera velocidad orbital cósmica, es decir la velocidad que tendría un satélite de órbita rasante.

EXAMEN 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

Solución:

Como la única fuerza que actúa sobre del satélite es la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra,



$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F_G}$$

$$m\,a = F_G$$

El satélite describe una trayectoria aproximadamente circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$m\frac{v^2}{r_o} = G\frac{M_T\,m}{r_o^2}$$

Como no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal ni de la masa de la Tierra, habrá que tener en cuenta que en la superficie de la Tierra, el peso de un cuerpo mg_0 es igual a la fuerza gravitatoria

$$m\,g_0 = G\frac{M_T\,m}{R_T^2}$$

$$G\,M_T = g_0\,R_T^2$$

Despejando la velocidad v y sustituyendo los datos,

$$v_1 = \sqrt{\frac{G\,M_T}{r_o}} = \sqrt{\frac{g_0\,R_T^2}{R_T}} = \sqrt{g_0\,R_T} = \sqrt{9{,}81\,[\mathrm{N\cdot kg^{-1}}]\cdot 6{,}38\times10^6\,[\mathrm{m}]} = 7{,}91\times10^3\ \mathrm{m/s} = 7{,}91\ \mathrm{km/s}$$

2. La masa de la Luna es 81 veces menor que la de la Tierra. ¿A que distancia de la Tierra el campo gravitatorio conjunto de la Tierra y la Luna es nulo?

EXAMEN 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

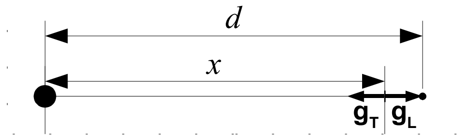
***Solución**:*

a) En ese punto los campos gravitatorios creados por la Tierra y la Luna deben ser opuestos, por lo que sus módulos han de ser iguales.

$$|\mathbf{g}_L| = |\mathbf{g}_T|$$

El campo gravitatorio es la fuerza sobre la unidad de masa. Con la ley de la gravitación universal de Newton, el vector campo gravitatorio creado por una masa M en un punto a una distancia r es

$$g = \frac{\vec{\mathbf{F}}_G}{m} = -G\frac{M}{r^2}\,\vec{\mathbf{u}}_r$$



Llamando x a la distancia del punto a la Tierra y d a la distancia entre la Tierra y la Luna,

$$G\frac{M_L}{(d-x)^2} = G\frac{M_T}{x^2}$$

Reordenando y sustituyendo $M_L = M_T / 81$

$$\frac{M_T/81}{M_T} = \frac{(d-x)^2}{x^2}$$

$$\frac{(d-x)}{x}=\pm\sqrt{\frac{1}{81}}=\pm\frac{1}{9}=\pm 0{,}111$$

siendo $d = 3{,}84\times10^8$ m

$$x = 3{,}46\times10^8 \text{ m} = 346\ 000 \text{ km}$$

La otra ***Solución*** no es válida porque pertenece a un punto en el que el campo gravitatorio no es nulo, pues los campos de ambos astros tienen el mismo sentido.

3. ¿A qué altura se encuentra un satélite geoestacionario?

Examen 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

Solución:

a) Como la única fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra,

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_G$$

$$m\, a = F_G$$

El satélite describe una trayectoria aproximadamente circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$m\frac{v^2}{r_{\text{órb}}}=G\frac{M_T\, m}{r_{\text{órb}}^2}$$

$$v^2=G\frac{M_T}{r_{\text{órb}}}$$

$$\frac{4\pi^2 r_{\text{órb}}^2}{T^2}=G\frac{M_T}{r_{\text{órb}}}$$

Como no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal ni de la masa de la Tierra, habrá que tener en cuenta que en la superficie de la Tierra, el peso de un cuerpo mg_0 es igual a la fuerza gravitatoria

$$m\, g_0=G\frac{M_T\, m}{R_T^2}$$

$$G\, M_T = g_0\, R_T^2$$

Satélite geoestacionario significa que el período T es igual al de la Tierra. $T = 24 \text{ h} = 8{,}64\times10^4$ s

$$r_{\text{órb}}=\sqrt[3]{\frac{G\, M_T\, T^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{g_0\, R_T^2\, T^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{9{,}81[\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}]\cdot(6{,}38\times10^6[\text{m}])^2(8{,}64\times10^4[\text{s}])^2}{4\pi^2}}=4{,}23\times10^7 \text{ m}$$

$$h = r_{\text{órb}} - R_T = 4{,}24\times10^7 - 6{,}38\times10^6 = 3{,}60\times10^7 \text{ m}$$

4. Calcula la velocidad de escape en la Tierra.

Examen 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

Solución:

La velocidad del escape es la velocidad mínima que habría que comunicar a un objeto situado en la superficie de un planeta para que se alejase completamente de él.
Se puede obtener una expresión de la velocidad de escape, aplicando el principio de conservación de la energía mecánica entre un punto en la superficie del planeta y otro "muy" alejado de él

$$(E_c + E_p)_{\text{SUPERFICIE}} = (E_c + E_p)_\infty$$

suponiendo que el objeto tiene en la superficie del planeta la velocidad de escape, es decir la velocidad suficiente para alcanzar el infinito.

La energía cinética en la superficie será: $E_{\text{cSUPERF}} = (E_c + E_p)_\infty - E_{\text{pSUPERF}} = ½\, m\, v^2_{\text{ESC}}$

La velocidad de escape vendrá dada por $(v_{\text{ESC}})_T = \sqrt{2\frac{(E_c + E_p)_\infty - E_{\text{p SUPERF}}}{m}}$

La energía potencial (debida al campo gravitatorio) de un objeto puntual de masa m situado a una distancia R de (del centro de) una masa puntual (o esférica) M, viene dada por la expresión

$$E_p = -G\frac{M\,m}{r}$$

cuando se toma el infinito como origen de energías potenciales: $E_{P\infty} = 0$.
La energía potencial de un objeto de masa m en la superficie de la Tierra será:

$$E_{pT} = -G\frac{M_T\, m}{r_T}$$

La energía cinética en el infinito se toma como 0, ya que la velocidad de escape es la velocidad mínima para que el objeto llegue al infinito (digamos que "llega y se para").
Entonces, la velocidad de escape para la Tierra será

$$(v_{\text{ESC}})_T = \sqrt{2G\frac{M_T}{R_T}}$$

Como no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal ni de la masa de la Tierra, habrá que tener en cuenta que en la superficie de la Tierra, el peso de un cuerpo mg_0 es igual a la fuerza gravitatoria

$$m\,g_0 = G\frac{M_T\, m}{R_T^2}$$

$$G\, M_T = g_0\, R_T^2$$

$$(v_{\text{ESC}})_T = \sqrt{2G\frac{M_T}{R_T}} = \sqrt{2g_0\frac{R_T^2}{R_T}} = \sqrt{2\cdot 9{,}81[\text{m}\cdot\text{s}^{-2}]\cdot 6{,}38\times 10^6[\text{m}]} = 1{,}12\times 10^3\,\text{m/s} = 11{,}2\,\text{km/s}$$

5. Demuestra que si $h \ll R_T$ la expresión de la energía potencial gravitatoria puede expresarse por $m\cdot g\cdot h$.

EXAMEN 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

Solución:

La energía potencial gravitatoria de una masa m que se encuentra a una distancia r del centro de la Tierra, es

$$E_P = -G\frac{M_T\, m}{r}$$

donde M_T es la masa de la Tierra y G es la constante de la gravitación universal.
La variación de energía potencial de la masa m entre un punto de la superficie ($r = R_T$) y otro a una altura h ($r = R_T + h$), es

$$\Delta E_P = -G\frac{M_T\, m}{R_T + h} - \left(-G\frac{M_T\, m}{R_T}\right) = G\, M_T\, m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right) = G\, M_T\, m\left(\frac{h}{R_T\cdot(R_T + h)}\right) = m\left(\frac{G\, M_T}{R_T\cdot(R_T + h)}\right)h$$

En la superficie terrestre, el peso es:

$$mg = G\frac{M_T\, m}{R_T^2}$$

de donde

$$g = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

Si la altura $h \ll R_T$,

$$R_T + h \approx R_T$$

y

$$\left(\frac{G M_T}{R_T \cdot (R_T + h)}\right) \approx g$$

por lo que

$$\Delta E_P = m\left(\frac{G M_T}{R_T \cdot (R_T + h)}\right) h \approx m g h$$

6. En relación con la gravedad terrestre, una masa *m*:
A) Pesa más en la superficie de la Tierra que a 100 km de altura.
B) Pesa menos.
C) Pesa igual.
Examen 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

Solución: A

El peso *P* de un objeto de masa *m* en la Tierra es la fuerza *F* con que la Tierra lo atrae, que viene dada por la ley de Newton de la gravitación universal

$$P = F = G\frac{M_{\mathrm{T}} m}{r^2}$$

en la que *G* es la constante de la gravitación universal, M_{T} es la masa de la Tierra, y *r* es la distancia entre el objeto, supuesto puntual, y el centro de la Tierra.
Cuando el objeto se encuentra en la superficie de la Tierra, *r* es el radio de la Tierra R_{T}. Cuando se encuentre a una altura h = 100 km,

$$r = R_{\mathrm{T}} + h > R_{\mathrm{T}}$$

por tanto, al ser mayor el denominador de la expresión, la fuerza peso será menor.

7. Demuestra que la energía cinética de la Luna es la mitad del valor absoluto de su energía potencial.
Examen 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

Solución:

La energía cinética de un satélite viene dada por la expresión:

$$E_{\mathrm{c}} = ½\, m\, \mathrm{v}^2$$

pero la velocidad de un satélite se deduce de la fuerza de gravitación terrestre

$$F = G\frac{M_{\mathrm{T}} m}{r^2}$$

que al ser la única fuerza, le produce una aceleración normal o centrípeta v^2 / r, por lo que:

$$G\frac{M_{\mathrm{T}} m}{r^2} = m\frac{\mathrm{v}^2}{r}$$

y

$$\frac{1}{2} m\,\mathrm{v}^2 = G\frac{M_{\mathrm{T}} m}{r}$$

que es la mitad que el valor absoluto de la energía potencial

$$E_{\mathrm{p}} = -G\frac{M_{\mathrm{T}} m}{r}$$

$$E_{\mathrm{c}} = \left| E_{\mathrm{p}} \right| / 2$$

8. Razona si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes para un péndulo simple:
a) Cuando se aumenta la amplitud la frecuencia no varía.
b) El período del péndulo es directamente proporciona a la masa.
Examen 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

Solución:

La ecuación del período del péndulo es $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ en la que l es la longitud del péndulo y g es la aceleración de la gravedad.

a) Verdadero, pues en la ecuación anterior no aparece la amplitud sino la longitud del péndulo y la aceleración de la gravedad. La frecuencia es la inversa del período. Sin embargo la amplitud debe ser suficientemente pequeña (de modo que el ángulo y el seno sean prácticamente iguales. Se suele tomar $\varphi < 15º$)

b) Falso, como se ve en la ecuación, el período sólo depende de la longitud del péndulo (en un lugar donde g se considere constante)