Problemas de Selectividad

1. **Una onda armónica transversal de frecuencia f = 2 Hz, longitud de onda λ = 20 cm y amplitud A = 4 cm se propaga por una cuerda en el sentido positivo del eje OX. En el instante de tiempo t = 0, la elongación en el punto x = 0 es $y = 2 \cdot \sqrt{2}$ cm:**

   a) Expresa matemáticamente la onda y represéntala gráficamente en (t = 0; 0 < x < 40 cm).

   a) Calcula la velocidad de propagación de la onda y determina, en función del tiempo, la velocidad de oscilación transversal de la partícula situada en x = 5 cm.

Propuesto en junio de 2008.

a) La ecuación general del movimiento ondulatorio es:

$$y(x, t) = A \cdot sen\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

Al sustituir los datos que proporciona el enunciado, teniendo en cuenta que $f = 1/T$, queda:

$$y(x, t) = 0{,}04 \cdot sen\left[2 \cdot \pi \cdot \left(2 \cdot t - \frac{x}{0{,}2}\right) + \varphi_0\right]$$

Para obtener el valor de la fase inicial, φ_0, sustituimos en la ecuación anterior el valor de la elongación del punto x = 0 en el instante de tiempo t = 0, dado por el enunciado:

$$y(0, 0) = 0{,}02 \cdot \sqrt{2} = 0{,}04 \cdot sen\ \varphi_0 \rightarrow sen\ \varphi_0 = \frac{0{,}02 \cdot \sqrt{2}}{0{,}04} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \varphi_0 = arcsen\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}\ \text{rad}$$

La ecuación de la onda resulta, finalmente:

$$y(x, t) = 0{,}04 \cdot sen\left[2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot t - 5 \cdot x) + \frac{\pi}{4}\right]$$

En el instante t = 0, en el que se solicita la representación gráfica, la ecuación de la onda es:

$$y(x, 0) = 0{,}04 \cdot sen\left(-10 \cdot \pi \cdot x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Para realizar la representación gráfica, conviene saber dónde están situados los máximos, de valor 0,04 m; el primero se obtendrá cuando:

$$sen\left(-10 \cdot \pi \cdot x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \rightarrow -10 \cdot \pi \cdot x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow -10 \cdot x = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \rightarrow x = -0{,}025\ \text{m}$$

Como los máximos están separados una longitud de onda, estarán en los puntos:

$$x_n = -0{,}025 + n \cdot \lambda = = (-0{,}025 + n \cdot 0{,}2)\ \text{m}$$

Por otro lado, también conviene saber dónde se encontrarán los mínimos, de valor –0,04 m. El primer mínimo se obtendrá cuando:

$$sen\left(-10 \cdot \pi \cdot x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \;\rightarrow\; -10 \cdot \pi \cdot x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \;\rightarrow\; x = 0{,}075 \text{ m}$$

Los mínimos, al igual que los máximos, están separados una longitud de onda; se encontrarán, por tanto, en los puntos:

$$x = 0{,}075 + n \cdot \lambda = (0{,}075 + n \cdot 0{,}2) \text{ m}$$

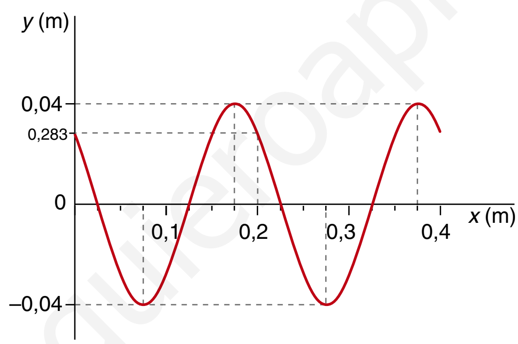
El primer punto de corte con el eje de abscisas estará en el punto que cumpla:

$$sen\left(-10 \cdot \pi \cdot x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \;\rightarrow\; -10 \cdot \pi \cdot x + \frac{\pi}{4} = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{1}{40} = 0{,}025 \text{ m}$$

Los puntos de corte con el eje de abscisas estarán separados una semilongitud de onda; por tanto, estarán en los puntos:

$$x = 0{,}025 + n \cdot \frac{\lambda}{4} = 0{,}025 + n \cdot \frac{0{,}2}{2} = (0{,}025 + n \cdot 0{,}1) \text{ m}$$

Con los datos obtenidos, la representación gráfica, para (t = 0; 0 < x < 0,4), será:



b) Las ondas se propagan con movimiento uniforme, cuya ecuación es $s = v \cdot t$. Si se toma como espacio una longitud de onda, el tiempo en recorrerlo es un período, y la ecuación del movimiento uniforme que se obtiene permite calcular la velocidad de propagación de la onda:

$$\lambda = v \cdot T = \frac{v}{f} \;\rightarrow\; v = \lambda \cdot f = 0{,}2 \cdot 2 = 0{,}4 \text{ m/s}$$

Para calcular la velocidad de oscilación transversal de una partícula, se deriva respecto al tiempo la ecuación de la posición de la onda:

$$v(x, t) = \frac{dy(x, t)}{dt} = 0{,}04 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot cos\left[2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot t - 5 \cdot x) + \frac{\pi}{4}\right] =$$

$$= 0{,}16 \cdot \pi \cdot cos\left[2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot t - 5 \cdot x) + \frac{\pi}{4}\right]$$

Para el punto x = 0,05 m, la ecuación de la velocidad de vibración en función del tiempo queda como sigue:

$$v(0{,}05, t) = 0{,}16 \cdot \pi \cdot cos\left[2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot t - 5 \cdot 0{,}05) + \frac{\pi}{4}\right] =$$

$$= 0{,}16 \cdot \pi \cdot cos\left[4 \cdot \pi \cdot t - \frac{\pi}{4}\right]$$

2. A una distancia de 10 m de una fuente sonora puntual, el nivel acústico es 80 dB. ¿Cuál es la intensidad sonora en ese punto? ¿Cuál es la potencia del sonido emitido por la fuente, si $I_0 = 10^{-12}$ W · m^{-2}?

Propuesto en junio de 2008.

La intensidad, I, de la onda y el nivel de intensidad sonora, o nivel acústico, S, están relacionados por la expresión:

$$S = 10 \cdot log \frac{I}{I_0}$$

donde $I_0 = 10^{-12}$ W · m^{-2}.

La intensidad sonora a 10 m de la fuente será:

$$80 = 10 \cdot log \frac{I}{10^{-12}} \rightarrow 8 = log\, I - log\, 10^{-12}$$

$$\rightarrow 8 = log\, I + 12 \rightarrow log\, I = -4 \rightarrow I = 10^{-4}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$$

La intensidad de una onda en un punto es la cantidad de energía por unidad de tiempo que atraviesa perpendicularmente la unidad de superficie colocada en ese punto:

$$I = \frac{E}{t \cdot S} = \frac{P}{S}$$

Como la energía se irradia en todas direcciones en forma de ondas esféricas, la superficie será $4 \cdot \pi \cdot r^2$; por tanto:

$$I = \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot r^2}$$

La potencia del sonido emitido por la fuente será, entonces:

$$P = I \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 10^{-4} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^2 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-2}\ \text{W} = 0{,}126\ \text{W}$$

3. Una onda transversal se propaga por una cuerda sobre el eje *OX* según: $y = 6 \cdot sen\,[2 \cdot \pi \cdot (100 \cdot t - 0{,}5 \cdot x)]$ (S.I.):

a) Calcula la velocidad y sentido de propagación de la onda, y la velocidad máxima de vibración.

b) Distancia que separa dos puntos que oscilan en fase.

Propuesto en junio de 2008.

a) Si comparamos la ecuación general de la posición de un punto sometido a un movimiento ondulatorio:

$$y(x,\, t) = A \cdot sen \left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

con la ecuación dada por el enunciado, se obtiene:

$$A = 6\ \text{m}$$

$$\frac{2 \cdot \pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot 100 \rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \pi \cdot 100} = \frac{1}{100\ \text{s}^{-1}} \rightarrow f = \frac{1}{T} = 100\ \text{Hz}$$

$$\frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = 2 \cdot \pi \cdot 0{,}5 \rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \pi \cdot 0{,}5} = 2\ \text{m}$$

La velocidad de propagación de la onda resulta:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = 2\ \text{m} \cdot 100\ \text{s}^{-1} = 200\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

El sentido de propagación de la onda es el sentido positivo del eje *X*, lo que se reconoce por el signo negativo que acompaña a la magnitud *x*. Si la onda se propagara en el sentido negativo del eje *X*, el signo de *x* en la ecuación sería positivo.

Si derivamos la ecuación de la posición con respecto al tiempo, se obtiene la ecuación de la velocidad de vibración:

$$v(x, t) = \frac{dy(x, t)}{dt} = 6 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 100 \cdot cos\,[2 \cdot \pi \cdot (100 \cdot t - 0{,}5 \cdot x)] =$$
$$= 1\,200 \cdot \pi \cdot cos\,[2 \cdot \pi \cdot (100 \cdot t - 0{,}5 \cdot x)]$$

Su valor máximo se dará cuando el coseno del argumento indicado en la expresión anterior valga la unidad, y dicho valor máximo será:

$$v_{máx} = 1\,200 \cdot \pi\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Los puntos que oscilan en fase están separados por distancias que son múltiplos de la longitud de onda. La distancia mínima entre dos puntos que oscilan en fase será una longitud de onda, λ, cuyo valor es 2 m.