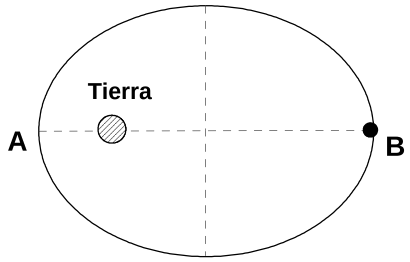
✉ Actividad 1

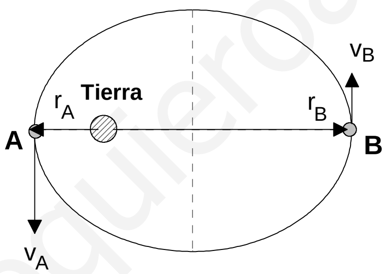
[a] Enuncia la tercera ley de Kepler y comprueba su validez para una órbita circular.
[b] Un satélite artificial describe una órbita elíptica alrededor de la Tierra, como se indica en la figura. Las velocidades en los extremos del eje mayor son v_A y v_B. Si la masa de la Tierra es M y la constante de la gravitación G, calcula la distancia AB.
[c] Explica razonadamente si v_A es mayor, igual o menor que v_B.



Respuesta

[a] Comprueba que a partir de la tercera ley de Kepler se puede deducir la ley de gravitación universal.

[b] En primer lugar, se dibuja las velocidades, relativas al satélite, en los puntos A y B.



El movimiento del satélite está regido por dos leyes de conservación: la del momento angular y la de la energía mecánica. En consecuencia, se cumple que:

$$\left.\begin{array}{c} r_A m v_A = r_B m v_B \\ \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GMm}{r_A} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{GMm}{r_B} \end{array}\right\} \text{, simplificando se llega a: } \left.\begin{array}{c} r_A v_A = r_B v_B \\ v_A^2 - 2\frac{GM}{r_A} = v_B^2 - 2\frac{GM}{r_B} \end{array}\right\}$$

De la 1ª ecuación se deduce que: $r_A = \frac{v_B}{v_A} r_B$; llevando este resultado a la 2ª ecuación, escrita en la forma $v_B^2 - v_A^2 = 2GM(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A})$, queda: $v_B^2 - v_A^2 = 2GM(\frac{1}{r_B} - \frac{v_A}{v_B r_B})$;
$v_B^2 - v_A^2 = 2GM(\frac{v_B - v_A}{v_B r_B})$, de donde se puede obtener el valor de r_B:

$$r_B = \frac{2GM(v_B - v_A)}{v_B(v_b^2 - v_A^2)} = \frac{2GM(v_B - v_A)}{v_B(v_B - v_A)(v_B + v_A)} = \frac{2GM}{v_B(v_B + v_A)}$$. El valor de r_A es, entonces,

$r_A = \frac{2GM}{v_A(v_B + v_A)}$. Por lo tanto, la distancia AB es: $d_{AB} = r_A + r_B = \frac{2GM}{v_A v_B}$.

[c] El satélite evoluciona sometido a la acción de una fuerza central; en consecuencia, el momento angular del satélite respecto a la Tierra se conserva, esto es, $r_A m v_A = r_B m v_B$; $r_A v_A = r_B v_B$; como en el punto A el satélite se encuentra más cerca de la Tierra que en el punto B, la rapidez en A es mayor que la rapidez en B.

☙ Actividad 2

En los Juegos Olímpicos del año terrestre 2124 celebrados en Marte, un atleta marciano obtiene la medalla de oro en salto de altura al superar el listón colocado a 5,75 m.

[a] Calcula la gravedad en Marte.

[b] Si las pruebas olímpicas se hubieran realizado en la Tierra, calcula la altura que hubiera podido saltar el atleta marciano.

DATOS: Constante de la Gravitación Universal, G = 6,67·10^{-11} U.S.I., masa de Marte, M = 6,50·10^{23} kg, radio de Marte, R = 3400 km, gravedad en la superficie de la Tierra, g = 9,81 m/s².

Respuesta

[a] Hay que entender, en primer lugar, que "gravedad en Marte" significa intensidad del campo gravitatorio en su superficie. Por lo tanto, $g_{Marte} = G\frac{M_{Marte}}{R^2_{Marte}} = 6,67 \cdot 10^{-11}\frac{6,50\cdot10^{23}}{(3,4\cdot10^6)^2} = 3,75\frac{N}{kg}$.

[b] Se puede calcular la rapidez con que el atleta marciano inicia el salto. De entre las ecuaciones del MRUA la más significativa ahora es: $v^2-v_o^2 = 2a\Delta y$; al aplicarla al salto en Marte queda: $0 - v_o^2 = 2 \cdot (-3,75) \cdot 5,75$; $v_o^2 = 43,1$; $v_o = 6,57(\frac{m}{s})$. Para calcular la altura en la Tierra aplicamos la misma ecuación, con la diferencia de que ahora la incógnita es el desplazamiento vertical: $0 - 43,1 = 2 \cdot (-9,81) \cdot \Delta y$; $\Delta y = \frac{43,1}{19,6} = 2,20\ m$.

☙ Actividad 3

La N.A.S.A. coloca en órbita circular un satélite artificial de 300 kg de masa, de forma que un observador terrestre, convenientemente situado, podría verlo inmóvil en el firmamento. Este tipo de satélite se denomina geoestacionario o geosincrónico y se utiliza principalmente en comunicaciones.

[a] Calcula el radio de la órbita y su altura respecto a la superficie terrestre.

[b] Determina la energía mecánica del satélite en su órbita.

DATOS: Constante de la Gravitación Universal, G = 6,67·10^{-11} U.S.I., masa de la Tierra, M = 5,97·10^{24} kg, radio de la Tierra, R = 6370 km.

Respuesta

[a] De la información del enunciado se deduce que el periodo del satélite es de 24 h. Si se aplica la 2ª ley de Newton al satélite, se puede escribir: $G\frac{M_T m}{r^2} = m\omega^2 r$; por otro lado, sabemos que $\omega = \frac{2\pi}{T}$; de ambas, simplificando la masa del satélite, se llega a: $G\frac{M_T}{r^3} = \frac{4\pi^2}{T^2}$; $r^3 = \frac{GM_T T^2}{4\pi^2}$; $r = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot5,97\cdot10^{24}\cdot(8,64\cdot10^4)^2}{4\pi^2}} = 42,2 \cdot 10^6\ m = 42.200\ km$. La altura respecto a la superficie terrestre es: $h = r - R_T = 42,2 \cdot 10^6 - 6,37 \cdot 10^6 = 35,8 \cdot 10^6\ m = 35.800\ km$. Vemos que los resultados son independientes de la masa del satélite y que la altura a que se encuentra un satélite geoestacionario es casi seis veces el radio terrestre (35800/6370 = 5,62).

[b] La energía mecánica de un cuerpo que describe una órbita circular se calcula mediante: $E_m = -G\frac{M_T m}{2r}$; así que $E_m = -6.67 \cdot 10^{-11}\frac{5,97\cdot10^{24}\cdot300}{2\cdot4,22\cdot10^7} = -1.42 \cdot 10^9(J)$.

☙ Actividad 4

[a] Explica el concepto de energía potencial gravitatoria. ¿Qué energía potencial gravitatoria tiene una partícula de masa m situada a una distancia r de otra de masa M?
[b] La energía potencial gravitatoria de una partícula de masa m en las proximidades de la superficie de un planeta, por ejemplo la Tierra, puede expresarse en la forma aproximada E_p = mgh, donde h es la altura respecto a un cierto nivel de referencia. ¿En qué circunstancias es válida esta expresión? El mencionado nivel de referencia, ¿debe ser necesariamente la superficie del planeta? Razona tus contestaciones.

Respuesta

[a] Consulta los apuntes de Física.

[b] Si se toma como referencia la superficie del planeta, la energía potencia gravitatoria de una partícula de masa *m* a una distancia *r* del centro del planeta, de radio R, se calcula mediante: $U(r) = \int_R^r \frac{GMm}{r^2} = -GMm[\frac{1}{r}]_R^r = GMm[\frac{1}{R} - \frac{1}{r}] = GMm(\frac{r-R}{rR})$. Se cumple que $r = R + h$, siendo h la altura de la partícula respecto a la superficie.
En las proximidades del planeta, se puede hacer la siguiente aproximación: $r = R + h \simeq R$, por lo que la expresión anterior se puede escribir como sigue:
$U = GMm\left[\frac{h}{(R+h)R}\right] = \frac{GMmh}{R^2} = mg_o h$, ya que $g_o = \frac{GM}{R^2}$.
La condición que hemos impuesto es que la partícula se mueva cerca de la superficie terrestre; por otro lado, al hacer la integral se ha supuesto que la energía potencial gravitatoria es cero en la superficie del planeta.

☙ Actividad 5

[a] Escribe y comenta la Ley de Gravitación Universal.
[b] La Tierra tarda un año en realizar su órbita en torno al Sol. Esta órbita es aproximadamente circular con radio R = $1{,}49 \cdot 10^{11}$ m. Sabiendo que G = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2kg^{-2}, calcula la masa del Sol.

Respuesta

[a] Consulta el libro de Física.

[b] La Tierra evoluciona por la acción de la fuerza de atracción gravitatoria del Sol; esta fuerza se comporta como fuerza centrípeta, por lo que, al aplicar la 2ª ley de Newton al movimiento de la Tierra, queda: $G\frac{M_S M_T}{r^2} = M_T \omega^2 r$; la masa de la Tierra se puede simplificar en esta expresión y, como $\omega = \frac{2\pi}{T}$, finalmente se llega a $M_S = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$.

El periodo del movimiento de la Tierra alrededor del Sol vale:
$T = 365\ (días) \cdot 24\left(\frac{horas}{día}\right) \cdot 3600\left(\frac{s}{día}\right) = 3,15 \cdot 10^7 (s)$. La masa del Sol es, entonces,
$M_S = \frac{4\pi^2 \cdot (1{,}49 \cdot 10^{11})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (3{,}15 \cdot 10^7)^2} = 1,97 \cdot 10^{30} (kg)$.

✍ Actividad 6

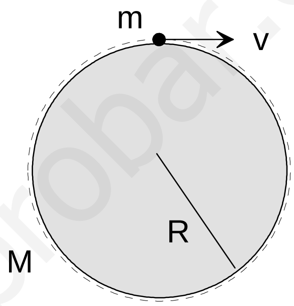
Imagina un planeta sin atmósfera, perfectamente esférico, de radio R = 5000 km y masa M = $5 \cdot 10^{24}$ kg. Desde su superficie, se dispara horizontalmente un proyectil. G = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2kg^{-2}.

[a] Calcula la velocidad con que debe dispararse el proyectil para que describa una órbita circular rasante a la superficie del planeta.

[b] Explica qué es la "velocidad de escape" y calcúlala en nuestro caso.

Respuesta

[a] Se aplica la 2ª ley de Newton al proyectil en su órbita circular rasante. El radio de esta órbita coincide con el radio del planeta, R. Se cumple que $G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{v^2}{R}$; al simplificar, queda: $G\frac{M}{R} = v^2$; $v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5 \cdot 10^{24}}{5 \cdot 10^6}} = 8,17 \cdot 10^3 (\frac{m}{s})$.



[b] La velocidad de escape es la velocidad que hay que comunicar a una partícula en la superficie de un planeta para que escape de su atracción gravitatoria. Se calcula mediante la expresión: $v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5 \cdot 10^{24}}{5 \cdot 10^6}} = 1,15 \cdot 10^4 (\frac{m}{s})$.
Este resultado es coherente con el del apartado anterior: hace falta más energía cinética para lanzar, desde la superficie del planeta, un satélite al "infinito" que para ponerlo en órbita.

✍ Actividad 7

[a] Momento angular de una partícula: definición; teorema de conservación.

[b] Un satélite artificial, de masa m = 200 kg, describe una órbita circular de radio R = 6700 km en torno a la Tierra. Calcula su momento angular respecto al centro de la Tierra. ¿Es constante? ¿Por qué?

DATOS: G = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2kg^{-2}; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg.

Respuesta

[a] Véase el libro de Física.

[b] El módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra se calcula mediante: $L = Rmv$, donde v es la rapidez del satélite en su órbita. Esta rapidez se puede calcular a partir de la 2ª ley de Newton aplicada al movimiento circular del satélite: $G\frac{M_T m}{R^2} = m\frac{v^2}{R}$, de donde se deduce que $v = \sqrt{\frac{GM_T}{R}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6{,}7 \cdot 10^6}} = 7,72 \cdot 10^3 (\frac{m}{s})$. En consecuencia,

$L = 6,7 \cdot 10^6 (m) \cdot 200 (kg) \cdot 7,72 \cdot 10^3 (\frac{m}{s}) = 1,03 \cdot 10^{13} \left(\frac{kg \cdot m^2}{s}\right)$.

Actividad 8

La Luna es aproximadamente esférica, con radio R = $1{,}74\cdot10^6$ m y masa M = $7{,}35\cdot10^{22}$ kg.

[a] Calcula la aceleración de la gravedad en la superficie lunar.

[b] Si se deja caer una piedra desde una altura de 2 m sobre la superficie lunar, ¿cuál será su velocidad al chocar con la superficie?

DATOS: G = $6{,}67\cdot10^{-11}$ Nm²kg^{-2}.

Respuesta

[a] La aceleración debida a la gravedad coincide numéricamente con la intensidad del campo gravitatorio, esto es, $g_o = \frac{GM}{R^2} = \frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot7{,}35\cdot10^{22}}{(1{,}74\cdot10^6)^2} = 1{,}62(\frac{N}{kg})$.

[b] Se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado; para este ejercicio se puede utilizar la expresión: $v^2 - v_o^2 = 2g_o h$; como la velocidad inicial es nula, $v = \sqrt{2\cdot1{,}62\cdot2} = \pm2{,}55(\frac{m}{s})$. En este caso, si consideramos positivas las magnitudes que apuntan hacia arriba, lo el signo "-" tiene sentido, así que la velocidad es -2,55 (m/s).

Actividad 9

[a] Enuncia la *tercera ley de Kepler* y comprueba que se cumple para órbitas circulares en torno a un planeta esférico de masa M.

[b] Los satélites de comunicaciones geoestacionarios describen órbitas circulares en el plano ecuatorial de la Tierra. El periodo de estas órbitas coincide con el de rotación de la Tierra (un día), de forma que cada satélite geoestacionario se encuentra siempre sobre el mismo punto del ecuador. Calcula el radio de esta órbita.

DATOS: G = $6{,}67\cdot10^{-11}$ Nm²kg^{-2}; $M_T = 5{,}98\cdot10^{24}$ kg.

Respuesta

[a] Se trata de deducir la 3ª ley de Kepler a partir de la ley de la gravitación universal y de las leyes de Newton de la dinámica. La fuerza gravitatoria sobre un objeto en órbita circular alrededor de un planeta se comporta como fuerza centrípeta, por lo que $G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$, de donde se deduce que $v^2 = \frac{GM}{r}$. Por otro lado, el periodo del movimiento circular del objeto es: $T = \frac{2\pi r}{v}$, por lo que $T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{v^2}$; al sustituir en esta igualdad el valor de la rapidez antes calculado, se llega a: $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3$, expresión que corresponde a la 3ª ley de Kepler.

[b] De la información del enunciado se deduce que el periodo del satélite es de 24 h. Acabamos de ver que $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3$, de donde se deduce que $r^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2}$;

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}\cdot(8{,}64\cdot10^4)^2}{4\pi^2}} = 42{,}2\cdot10^6\ m = 42.200\ km.$$

↻ Actividad 10

Una nave espacial, con los motores apagados, describe una órbita circular de radio R = $2{,}55\cdot10^{7}$ m en torno a la Tierra.

[a] Calcula la velocidad orbital de la nave y el periodo de la órbita.
[b] Calcula la energía cinética y la energía potencial gravitatoria de la nave, de masa m = $5\cdot10^{3}$ kg.
[c] ¿Cuánto trabajo tendrían que realizar, como mínimo, los motores de la nave para escapar de la atracción gravitatoria de la Tierra? Explica tu planteamiento.

DATOS: G = $6{,}67\cdot10^{-11}$ Nm²kg⁻²; M_T = $5{,}98\cdot10^{24}$ kg.

Respuesta

[a] Se aplica la 2ª ley de Newton a la nave espacial en su órbita circular. La fuerza gravitatoria sobre la nave espacial se comporta como fuerza centrípeta, por lo que $G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$, de donde se deduce que $v^2 = \frac{GM_T}{r}$; $v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{2{,}55\cdot10^{7}}} = 3{,}95\cdot10^{3}(\frac{m}{s})$. El periodo es el tiempo invertido por la nave en una vuelta completa: $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\cdot2{,}55\cdot10^{7}}{3{,}95\cdot10^{3}} = 4{,}06\cdot10^{4}(s) = 11{,}3(h)$.

[b] La energía cinética es: $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}5\cdot10^{3}\cdot(3{,}95\cdot10^{3})^2 = 3{,}90\cdot10^{10}(J)$.
La energía potencial gravitatoria vale: $U = -G\frac{M_T m}{r} = -\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot5\cdot10^{3}}{2{,}55\cdot10^{7}} = -7{,}82\cdot10^{10}(J)$

[c] La energía mecánica de la nave es: $E_m = 3{,}90\cdot10^{10}(J) - 7{,}82\cdot10^{10}(J) = -3{,}92\cdot10^{10}(J)$. Si se quiere que la nave escape de la atracción terrestre, es decir, que llegue al “infinito”, deberá tener una energía mecánica nula (sin energía cinética ni potencial gravitatoria). En consecuencia, se deberá cumplir: $E_{m,\,órbita} + W_{motores} = E_{m,\,\infty}$; $-3{,}92\cdot10^{10}(J) + W_{motores} = 0$; $W_{motores} = 3{,}92\cdot10^{10}(J)$. Este es el valor mínimo, ya que la nave llega al “infinito” con velocidad nula.

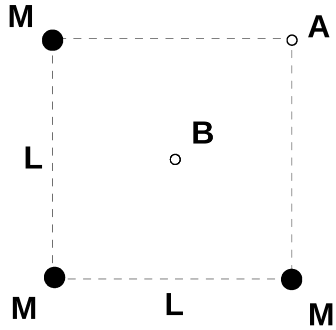
ଓ Actividad 11

Tres partículas iguales de masa M están fijas en tres vértices de un cuadrado de lado L.

[a] Determina el potencial gravitatorio en los puntos A y B, vértice vacante y centro del cuadrado, respectivamente.

[b] Si situamos una cuarta partícula en el punto A y la soltamos con velocidad inicial nula, se moverá hacia B. ¿Por qué? Determina la velocidad de esta partícula cuando pase por B.

Supón conocida la constante de gravitación universal, G.



Respuesta

[a] El potencial gravitatorio del campo creado por una partícula de masa M , a una distancia r, se calcula mediante: $V = -G\frac{M}{r}$. El potencial gravitatorio en el punto A es la suma de los potenciales gravitatorios asociados a las tres partículas; el punto A está de dos ellas a una distancia L, mientras que de la otra se encuentra a una distancia igual a la diagonal del cuadrado: $L\sqrt{2}$. Por lo tanto,

$$V_{total,\,A} = -2G\frac{M}{L} - G\frac{M}{L\sqrt{2}} = -\frac{4GM}{2L} - \frac{\sqrt{2}\,GM}{2L} = -\frac{GM(4+\sqrt{2}\,)}{2L}$$

De manera similar se calcula el potencial gravitatorio en el punto B; en este caso, el punto se encuentra a la misma distancia de las tres partículas: $\frac{\sqrt{2}\,L}{2} = \frac{L}{\sqrt{2}}$; en consecuencia,

$$V_{total,\,B} = -3\frac{GM\sqrt{2}}{L} = -\frac{3\sqrt{2}\,GM}{L} = -\frac{6\sqrt{2}\,GM}{2L}$$

[b] Puede comprobarse que el potencia gravitatorio en A es mayor que el potencial gravitatorio en B; una partícula se mueve espontáneamente de los puntos de mayor potencial a los de menor potencial; por lo tanto, la cuarta partícula se moverá de A a B. La simetría de la distribución sugiere que la cuarta partícula se moverá según la diagonal que pasa por los puntos A y B. Para determinar su velocidad en B tenemos en cuenta la conservación de la energía mecánica:
$E_{m,\,A} = E_{m,\,B}$; $mV_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mV_B$; al simplificar la masa de la cuarta partícula, queda: $V_A - V_B = \frac{1}{2}v_B^2$; $v_B^2 = 2(V_A - V_B)$. Al sustituir los valores de los potenciales gravitatorios se llega a: $v_B^2 = 2\left[-\frac{GM(4+\sqrt{2}\,)}{2L} + \frac{6\sqrt{2}\,GM}{2L}\right] = \frac{GM}{L}(-4 - \sqrt{2}\, + 6\sqrt{2}\,) = 3,071\frac{GM}{L}$. La velocidad de la partícula cuando pasa por B es, finalmente, $v_B = \sqrt{\frac{3GM}{L}}$.

ଓ Actividad 12

[a] Escribe y comenta la Ley de Gravitación Universal.

[b] Calcula el radio de la órbita de Neptuno en torno al Sol, supuesta circular, sabiendo que tarda 165 años terrestres en recorrerla.

DATOS: G = 6,67·10^{-11} Nm²kg^{-2}; M$_{Sol}$ = 1,99·10^{30} kg.

Respuesta

[a] Véase cualquier libro de texto.

[b] Si se aplica la 2ª ley de Newton al planeta Neptuno, se puede escribir: $G\frac{M_S M_N}{r^2} = M_N\omega^2 r$; por otro lado, sabemos que $\omega = \frac{2\pi}{T}$; de ambas, simplificando la masa del planeta, se llega a: $G\frac{M_S}{r^3} = \frac{4\pi^2}{T^2}$; $r^3 = \frac{GM_S T^2}{4\pi^2}$; por otro lado, el periodo del movimiento circular de Neptuno vale: $T = 165(años)\cdot 365\left(\frac{días}{año}\right)\cdot 24\left(\frac{horas}{día}\right)\cdot 3600\left(\frac{s}{día}\right) = 5,20\cdot 10^9(s)$; el radio de la órbita es, entonces, $r = \sqrt[3]{\frac{GM_S T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 1,99\cdot 10^{30}\cdot (5,2\cdot 10^9)^2}{4\pi^2}} = 4,50\cdot 10^{12}\ m$.

☙ Actividad 13

[a] La intensidad media del campo gravitatorio terrestre en la superficie de la Tierra es g = 9,81 N/kg. Calcula la masa de la Tierra.
[b] ¿A qué altura sobre la superficie se reduce g a la mitad del valor indicado?
DATOS: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2kg^{-2}*; radio de la Tierra:* $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ *m.*

Respuesta

[a] En la superficie terrestre, la intensidad del campo gravitatorio vale: $g_o = G\frac{M_T}{R^2}$; de esta ecuación se deduce que $M_T = \frac{g_o R^2}{G} = \frac{9{,}81(N/kg)\cdot(6{,}37\cdot10^6)^2(m^2)}{6{,}67\cdot10^{-11}(Nm^2kg^{-2})} = 5,98 \cdot 10^{24}(kg)$.

[b] Se ha de cumplir que $g = \frac{1}{2}g_o$, es decir, $G\frac{M_T}{r^2} = \frac{1}{2}G\frac{M_T}{R^2}$, de donde se deduce que $r^2 = 2R^2$; $r = \sqrt{2}\,R$. Por otro lado, sabemos que $r = R + h$, por lo que $h = r - R$; al sustituir el valor calculado de r, queda: $h = \sqrt{2}\,R - R = (\sqrt{2} - 1)R = 0,414 \cdot 6,37 \cdot 10^6 = 2,64 \cdot 10^6(m)$.

☙ Actividad 14

Una sonda de exploración, de masa m = 500 kg, describe una órbita circular en torno a Marte. Sabiendo que el radio de dicha órbita es $R = 3{,}50\cdot10^6$ m, que la masa de Marte es $M = 6{,}42\cdot10^{23}$ kg y que $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ Nm^2kg^{-2}, calcula:
[a] La velocidad orbital de la sonda y su momento angular respecto al centro de Marte.
[b] Las energías cinética, potencial y mecánica de la sonda.

Respuesta

[a] Se aplica la 2ª ley de Newton a la sonda de exploración en su órbita circular. La fuerza gravitatoria sobre la sonda se comporta como fuerza centrípeta, por lo que $G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$, de donde se deduce que $v^2 = \frac{GM}{r}$; $v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot6{,}42\cdot10^{23}}{3{,}50\cdot10^6}} = 3,50 \cdot 10^3(\frac{m}{s})$.
El módulo del momento angular de la sonda es:

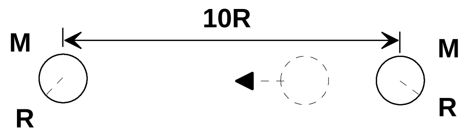
$$L = rmv = 3,50 \cdot 10^6(m) \cdot 500(kg) \cdot 3,50 \cdot 10^3(\tfrac{m}{s}) = 6,13 \cdot 10^{12}\left(\frac{kg\cdot m^2}{s}\right).$$

[b] La energía cinética es: $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}5 \cdot 10^2 \cdot (3,50 \cdot 10^3)^2 = 3,06 \cdot 10^9(J)$.
La energía potencial gravitatoria vale: $U = -G\frac{Mm}{r} = -\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot6{,}42\cdot10^{23}\cdot5\cdot10^2}{3{,}50\cdot10^6} = -6,12 \cdot 10^9(J)$.
La energía mecánica de la sonda es, entonces:

$$E_m = 3,06 \cdot 10^9(J) - 6,12 \cdot 10^9(J) = -3,06 \cdot 10^9(J).$$

☙ Actividad 15

[a] Explica los conceptos de *energía potencial gravitatoria* y *potencial gravitatorio*. ¿Qué potencial gravitatorio crea una partícula de masa M? ¿Cómo son las superficies equipotenciales?
[b] Imagina dos esferas iguales de masa M y radio R. Se sitúan de forma que la distancia entre sus centros es 10R y se libera una de ellas con velocidad inicial nula. ¿Con qué velocidad se moverá cuando llegue a chocar con la otra? Supón conocida la constante de gravitación universal.

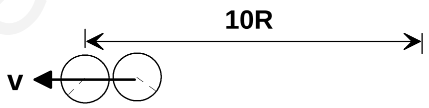


Respuesta

[a] Véase dichos conceptos en cualquier manual de Física.

El potencial gravitatorio creado por una partícula de masa M, en un punto situado a una distancia r de su centro, está dado por: $V = -G\frac{M}{r}$.
Las superficies equipotenciales son los lugares geométricos en los que el potencial gravitatorio es constante; de acuerdo con la expresión anterior, si V es constante, r también lo es, por lo que el lugar geométrico de los puntos que equidistan de otro fijo es una circunferencia, si se trabaja en el plano, o una superficie esférica, para casos tridimensionales.

[b] Las esferas evolucionan sometidas a la acción de un campo conservativo, así que la energía mecánica del sistema permanece constante. Sea el estado 1 el mostrado en el enunciado y sea el estado 2 el representado a continuación:



Tenemos que: $E_{m,\, estado\ 1} = E_{m,\, estado\ 2}$. En el estado 1 el sistema sólo tiene energía potencial gravitatoria, mientras que en el estado 2 el sistema tiene energía cinética y energía potencial gravitatoria; por lo tanto, $-G\frac{M^2}{10R} = \frac{1}{2}Mv^2 - G\frac{M^2}{2R}$; $\frac{1}{2}Mv^2 = G\frac{M^2}{2R} - G\frac{M^2}{10R}$; $\frac{1}{2}Mv^2 = 2G\frac{M^2}{5R}$; al dividir todo por M y multiplicar por dos, queda: $v^2 = \frac{4GM}{5R}$. La rapidez de la esfera móvil cuando choca con la esfera fija es, entonces, $v = \sqrt{\frac{4GM}{5R}}$.

☙ Actividad 16

[a] Explica el concepto de *energía potencial gravitatoria*. ¿Qué energía potencial gravitatoria tiene una partícula de masa *m* situada a una distancia *r* de otra de masa *M*?
[b] Seguro que la expresión $E_p = mgh$ para la energía potencial gravitatoria te resulta familiar. Explica su significado y las circunstancias en las que es aplicable.

Respuesta

[a] Consulta el libro, o incluso los apuntes, de Física.

La energía potencial gravitatoria de una partícula de masa m, en un punto situado a una distancia r de otra partícula de masa M, está dada por: $U = -G\frac{Mm}{r}$.

[b] Si se toma como referencia la superficie del planeta, la energía potencia gravitatoria de una partícula de masa m a una distancia r del centro del planeta, de radio R, se calcula mediante: $U(r) = \int_R^r \frac{GMm}{r^2} = -GMm[\frac{1}{r}]_R^r = GMm[\frac{1}{R} - \frac{1}{r}] = GMm(\frac{r-R}{rR})$. Se cumple que $r = R + h$, siendo h la altura de la partícula respecto a la superficie.
En las proximidades del planeta, se puede hacer la siguiente aproximación: $r = R + h \simeq R$, por lo que la expresión anterior se puede escribir como sigue:
$U = GMm\left[\frac{h}{(R+h)R}\right] = \frac{GMmh}{R^2} = mg_o h$, ya que $g_o = \frac{GM}{R^2}$.
La condición que hemos impuesto es que la partícula se mueva cerca de la superficie terrestre; por otro lado, al hacer la integral se ha supuesto que la energía potencial gravitatoria es cero en la superficie del planeta.

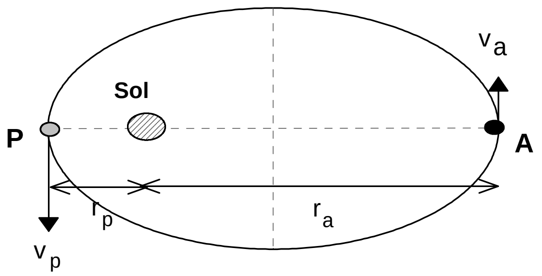
☙ Actividad 17

[a] *Momento angular de una partícula*: definición; teorema de conservación.
[b] Un cometa realiza una órbita elíptica con el Sol en uno de los focos. El cociente entre las distancias máxima (afelio) y mínima (perihelio) del cometa al centro del Sol es $\frac{r_a}{r_p} = 100$. Calcula la relación entre las velocidades del cometa en estos dos puntos, $\frac{v_a}{v_p}$.

Respuesta

[a] Véase el libro de Física.

[b] En primer lugar, dibujamos un esquema con las posiciones del cometa respecto al Sol:



El cometa evoluciona sometido a la acción de una fuerza central; en consecuencia, el momento angular del cometa respecto al Sol se conserva, esto es, $r_a m v_a = r_p m v_p$; de donde se deduce que: $\frac{r_a}{r_p} = \frac{v_p}{v_a}$; estos cocientes son iguales a 100, por lo que $\frac{v_a}{v_p} = 0,01$; como en el punto P el cometa se encuentra más cerca del Sol que en el punto A, la rapidez en P es mayor que la rapidez en A. La distancia al Sol y la rapidez del cometa son inversamente proporcionales.

☙ Actividad 18

[a] Enuncia las *Leyes de Kepler*.
[b] Europa es un satélite de Júpiter que tarda 3,55 días en recorrer su órbita, de $6{,}71\cdot10^{8}$ m de radio medio, en torno a dicho planeta. Otro satélite de Júpiter, Ganímedes, tiene un periodo orbital de 7,15 días. Calcula el radio medio de la órbita de Ganímedes y la masa de Júpiter.
Constante de gravitación: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ Nm²kg^{-2}.

Respuesta

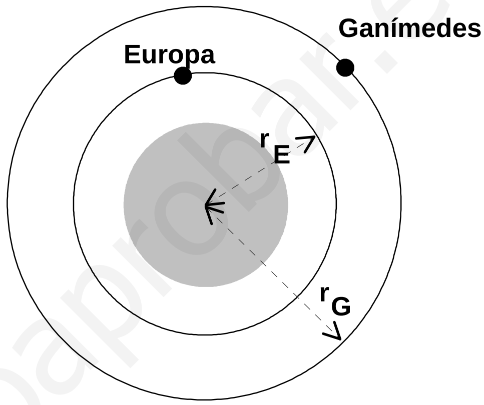
[a] Consulta el libro de Física.

[b] En primer lugar, se dibuja un esquema con los dos satélites de Júpiter. Se ha de cumplir para los mismos la 3ª ley de Kepler: los cuadrados de los periodos son proporcionales a los cubos de las distancias medias de los satélites al planeta, esto es, $\left[\frac{T^2}{r^3}\right]_{Europa} = \left[\frac{T^2}{r^3}\right]_{Ganímedes}$, que se puede escribir: $\left[\frac{T_G}{T_E}\right]^2 = \left[\frac{r_G}{r_E}\right]^3$;

$r_G = r_E\left[\frac{T_G}{T_E}\right]^{\frac{2}{3}}$

$r_G = 6,71\cdot10^8(m)\cdot\left[\frac{7{,}15\ días}{3{,}55\ días}\right]^{\frac{2}{3}}$

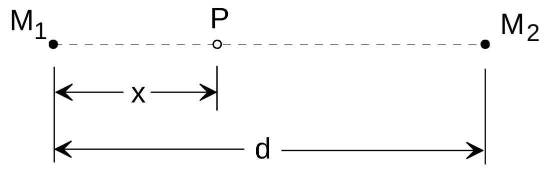
$r_G = 1,07\cdot10^9(m)$.



Para hallar la masa de Júpiter nos fijamos en los datos relativos al satélite Europa. Éste evoluciona por la acción de la fuerza de atracción gravitatoria de Júpiter; esta fuerza se comporta como fuerza centrípeta, por lo que, al aplicar la 2ª ley de Newton al movimiento de Europa, queda: $G\frac{M_J M_E}{r^2} = M_E\omega^2 r$; la masa de Europa se puede simplificar en esta expresión y, como $\omega = \frac{2\pi}{T}$, finalmente se llega a $M_J = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$.
El periodo del movimiento de Europa alrededor de Júpiter vale:
$T = 3,55\ (días)\cdot 24\left(\frac{horas}{dia}\right)\cdot 3600\left(\frac{s}{dia}\right) = 3,07\cdot10^5(s)$. La masa de Júpiter es, entonces, $M_J = \frac{4\pi^2\cdot(6{,}71\cdot10^8)^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot(3{,}07\cdot10^5)^2} = 1,90\cdot10^{27}(kg)$.

☙ Actividad 19

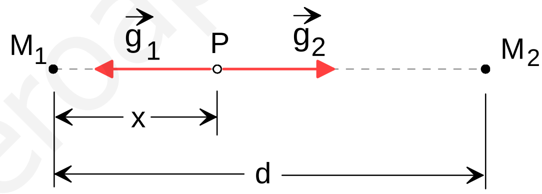
[a] Explica el concepto de *campo gravitatorio* creado por una o varias partículas.
[b] Dos partículas de masas M_1 y $M_2 = 4M_1$ están separadas una distancia d = 3 m. En el punto P, situado entre ellas, el campo gravitatorio total creado por estas partículas es nulo. Calcula la distancia x entre P y M_1.



Respuesta

[a] Si se dispone en una región del espacio de una o más partículas, el espacio alrededor de las mismas adquiere ciertas características que no existían cuando las partículas no estaban. Este hecho se puede comprobar acercando otra partícula de prueba. Decimos que las partículas originales han creado un campo gravitatorio. Éste está descrito vectorialmente mediante la llamada **intensidad del campo gravitatorio**. Si el campo gravitatorio está creado por varias partículas, la intensidad del campo gravitatorio resultante es la suma vectorial de las intensidades individuales: $\vec{g}_{total} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{g}_i$.

[b] Dibujamos los vectores intensidad del campo gravitatorio, creados por cada una de las partículas, en el punto P:



Los módulos de dichas intensidades son: $g_1 = G\frac{M_1}{x^2}$ y $g_2 = G\frac{4M_1}{(3-x)^2}$. Como la intensidad del campo gravitatorio resultante es nula, se cumplirá que $g_{total} = g_1 - g_2 = 0$; $G\frac{M_1}{x^2} = G\frac{4M_1}{(3-x)^2}$; $\frac{1}{x^2} = \frac{4}{(3-x)^2}$; si se extrae la raíz cuadrada, tenemos: $x = \frac{3-x}{2}$; 2x = 3-x; 3x = 3; x = 1 (m).

☙ Actividad 20

[a] Escribe y comenta la *Ley de Gravitación Universal*.
[b] Recientemente ha sido puesto en órbita el satélite europeo *Envisat* (*environment satellite*; satélite del medio ambiente). La altura de su órbita sobre la superficie de la Tierra es h = 800 km. Calcula la velocidad orbital del *Envisat* y el periodo de su órbita.
DATOS: G = 6,67·10⁻¹¹ Nm²kg⁻²; M_T = 5,97·10²⁴ kg; R_T = 6,37·10⁶ m.

Respuesta

[a] Véase el libro de Física.

[b] El radio de la órbita del *Envisat* es: $r = R_T + h = 6,37 \cdot 10^6 + 0,8 \cdot 10^6 = 7,17 \cdot 10^6 (m)$. Se aplica la 2ª ley de Newton a dicho satélite en su órbita circular. La fuerza gravitatoria sobre el mismo se comporta como fuerza centrípeta, por lo que $G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$, de donde se deduce que $v^2 = \frac{GM_T}{r}$; $v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{7{,}17 \cdot 10^6}} = 7,45 \cdot 10^3 (\frac{m}{s})$. El periodo es el tiempo invertido por la nave en una vuelta completa: $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 7{,}17 \cdot 10^6}{7{,}45 \cdot 10^3} = 6,05 \cdot 10^3 (s) = 1,68 (h)$.

↬ Actividad 21

[a] Calcula la intensidad del campo gravitatorio, *g*, en la superficie de Júpiter. ¿A qué altura sobre la superficie de Júpiter, *h*, se reduce *g* al valor superficial terrestre de 9,81 N/kg? *DATOS: G = 6,67·10^{-11} Nm²kg^{-2}; M_J = 1,90·10^{27} kg; R_J = 6,98·10^{7} m.*

[b] El periodo de oscilación de un péndulo simple en la superficie de la Tierra es T = 1,2 s. ¿Cuál sería su periodo de oscilación en la superficie de Júpiter?

Respuesta

[a] En la superficie de Júpiter la intensidad del campo gravitatorio se calcula mediante: $g_o = G\frac{M_J}{R_J^2} = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}90\cdot 10^{27}}{(6{,}98\cdot 10^{7})^2} = 26{,}0\left(\frac{N}{kg}\right)$. Esta intensidad es algo más de dos veces y media superior a la existente en la superficie terrestre.

A una distancia *r* del centro de Júpiter, la intensidad del campo gravitatorio es: $g = G\frac{M_J}{r^2}$; de donde se deduce que $r^2 = \frac{GM_J}{g}$; $r = \sqrt{\frac{GM_J}{g}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}90\cdot 10^{27}}{9{,}81}} = 1{,}14\cdot 10^{8}(m)$; la altura sobre la superficie será, entonces, $h = r - R_J = 1{,}14\cdot 10^{8} - 6{,}98\cdot 10^{7} = 4{,}42\cdot 10^{6}(m)$.

[b] El periodo de oscilación de un péndulo de longitud L está dado por la expresión: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

En la superficie terrestre, el periodo es: $T_{Tierra} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_{o,Tierra}}}$.

En la superficie jupiterina, el periodo vale: $T_{Júpiter} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_{o,Júpiter}}}$.

Al dividir la segunda ecuación por la primera, se obtiene: $\frac{T_{Júpiter}}{T_{Tierra}} = \sqrt{\frac{g_{o,Tierra}}{g_{o,Júpiter}}}$; $\frac{T_{Júpiter}}{T_{Tierra}} = \sqrt{\frac{9{,}81}{26}} = 0{,}614$; $T_{Júpiter} = 0{,}614\cdot T_{Tierra} = 0{,}614\cdot 1{,}2(s) = 0{,}737(s)$. Este resultado es coherente con el hecho de que, cuanto mayor sea la atracción gravitatoria, menor será la duración de una oscilación completa del péndulo.

≈ Actividad 22

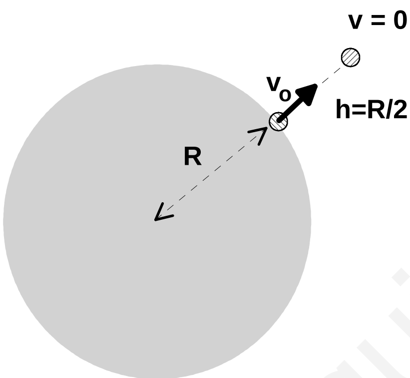
[a] Explica el concepto de *energía potencial gravitatoria*. ¿Qué energía potencial gravitatoria tiene una partícula de masa *m* situada a una distancia *r* de otra partícula de masa *M*?
[b] Un planeta esférico sin atmósfera tiene masa M = $1{,}2\cdot10^{23}$ kg y radio R = $1{,}3\cdot10^{6}$ m. Desde su superficie se lanza verticalmente un proyectil que llega a alcanzar una altura máxima h = R/2 antes de volver a caer hacia la superficie. ¿Con qué velocidad inicial se ha lanzado el proyectil?
$G = 6{,}67\cdot10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$.

Respuesta

[a] Consulta el libro, o incluso los apuntes, de Física.

La energía potencial gravitatoria de una partícula de masa *m*, en un punto situado a una distancia *r* de otra partícula de masa *M*, está dada por: $U = -G\frac{Mm}{r}$.

[b] Se trata de un ejercicio que puede resolver fácilmente mediante la ley de conservación de la energía mecánica; pero antes, dibujamos un esquema de la situación. La posición final del proyectil es: $r = R + h = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$.



Se cumple que:

$$E_{m,\,inicial} = E_{m,\,final}$$

$$\frac{1}{2}mv_o^2 - G\frac{Mm}{R} = -G\frac{Mm}{r}$$

Al dividir todo por *m* vemos que el resultado es independiente de la masa del proyectil:

$$\frac{1}{2}v_o^2 = GM\left(\frac{1}{R} - \frac{2}{3R}\right)$$

$$v_o^2 = 2GM\frac{1}{3R};\ v_o^2 = \frac{2GM}{3R}$$

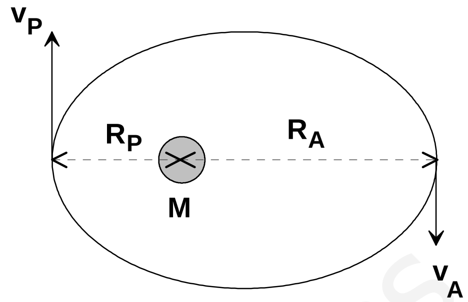
$$v_o = \sqrt{\frac{2\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\cdot1{,}2\cdot10^{23}}{3\cdot1{,}3\cdot10^{6}}} = 2{,}03\cdot10^{3}\left(\frac{m}{s}\right).$$

☙ Actividad 23

Un satélite artificial describe una órbita elíptica, con el centro de la Tierra en uno de sus focos.

[a] En el movimiento orbital del satélite, ¿se conserva su energía mecánica? ¿Y su momento angular respecto al centro de la Tierra? Razona tus respuestas.

[b] Supón que se conocen las distancias máxima y mínima del satélite al centro de la Tierra (apogeo y perigeo), R_A y R_P respectivamente. Plantea razonadamente, sin resolverlas, las ecuaciones necesarias para determinar las velocidad orbitales del satélite en estos puntos, v_A y v_P.
DATOS: Constante de gravitación universal, G. Masa de la Tierra, M.



Respuesta

[a] Si se supone que el satélite evoluciona sometido exclusivamente a la acción del campo gravitatorio terrestre, que es un campo conservativo, la energía mecánica del satélite permanece constante.
La fuerza gravitatoria sobre el satélite es una fuerza central, así que el momento de la misma respecto al centro de la Tierra es nulo; en consecuencia, el momento angular del satélite también permanece constante.

[b] La conservación de la energía mecánica exige que: $E_{m,P} = E_{m,A}$, esto es, $\frac{1}{2}mv_P^2 - G\frac{Mm}{R_P} = \frac{1}{2}mv_A^2 - G\frac{Mm}{R_A}$; al dividir por la masa del satélite m, multiplicar por dos y reordenar los términos de la igualdad, se llega a: $v_P^2 - v_A^2 = 2GM\left(\frac{1}{R_P} - \frac{1}{R_A}\right)$ (1)

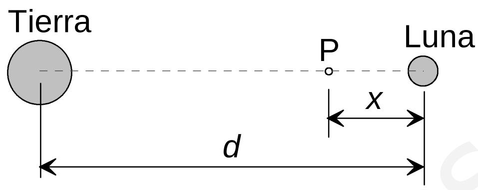
La conservación del momento angular implica que: $R_P m v_P = R_A m v_A$; $R_P v_P = R_A v_A$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2) se obtendría las velocidad orbitales v_A y v_P. Si tienes ganas, puedes comprobar que las soluciones de este sistema de ecuaciones son:

$$v_A = \sqrt{\frac{2GMR_P}{R_A(R_A+R_P)}}$$
$$v_P = \sqrt{\frac{2GMR_A}{R_P(R_A+R_P)}}$$

☙ Actividad 24

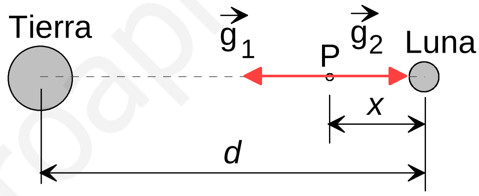
[a] Explica el concepto de *campo gravitatorio* creado por una o varias partículas.
[b] La distancia entre los centros de la Tierra y la Luna es d = $3{,}84 \cdot 10^8$ m. En un cierto punto P, situado entre ambas, el campo gravitatorio total es nulo. Sabiendo que la masa de la Tierra es 81 veces superior a la de la Luna, calcula la distancia *x* entre P y el centro de la Luna.



Respuesta

[a] Véase la actividad 19.

[b] Dibujamos los vectores intensidad del campo gravitatorio, creados por la Tierra y la Luna, en el punto P:



Los módulos de dichas intensidades son: $g_1 = G\frac{M_T}{(d-x)^2}$ y $g_2 = G\frac{M_L}{x^2}$. Como la intensidad del campo gravitatorio resultante es nula, se cumplirá que $g_{total} = g_1 - g_2 = 0$; $G\frac{M_L}{x^2} = G\frac{M_T}{(d-x)^2}$; $(\frac{d-x}{x})^2 = \frac{M_T}{M_L}$; si se extrae la raíz cuadrada, tenemos: $\frac{d-x}{x} = \sqrt{\frac{M_T}{M_L}}$; el miembro de la derecha vale 9, por lo que $d - x = 9x$; $d = 10x$; $x = \frac{d}{10} = 3,84 \cdot 10^7 (m)$.

☙ Actividad 25

Dos planetas esféricos tienen masas diferentes, M_1 y $M_2 = 9M_1$, pero en sus superficies la intensidad del campo gravitatorio es la misma, $g_1 = g_2$.

[a] Calcula la relación entre los radios de los planetas, R_2/R_1, y entre sus densidades de masa, ρ_2/ρ_1.

[b] ¿Son iguales las velocidades de escape desde las superficies de los dos planetas? Razona tu respuesta.

Respuesta

[a] En primer lugar, escribimos las expresiones de las intensidades de campo gravitatorio debidas a los dos planetas: $\begin{cases} g_1 = G\frac{M_1}{R_1^2} \\ g_2 = G\frac{9M_1}{R_2^2} \end{cases}$. Si son iguales se cumplirá que $R_2^2 = 9R_1^2$; $\frac{R_2}{R_1} = 3$.

En función de la densidad y del tamaño del planeta, la masa del mismo es: $M_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3\rho_1$.

Las intensidades de campo gravitatorio son, ahora: $\begin{cases} g_1 = \frac{4}{3}G\pi R_1\rho_1 \\ g_2 = \frac{4}{3}G\pi R_2\rho_2 \end{cases}$. Si estas intensidades son iguales, se cumplirá: $R_1\rho_1 = R_2\rho_2$; $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{3}$.

[b] La velocidad de escape es la velocidad que hay que comunicar a una partícula en la superficie de un planeta para que escape de su atracción gravitatoria. Se calcula mediante la expresión: $v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR}$. Vemos que la velocidad de escape depende de la intensidad de campo gravitatorio en la superficie del planeta y del radio del mismo. En nuestro caso, los dos planetas tienen el mismo valor de la intensidad y diferente radio ($R_2 > R_1$); por lo tanto, la velocidad de escape será mayor para el segundo planeta.

☙ Actividad 26

[a] Enuncia las *Leyes de Kepler* y demuestra la tercera en el caso particular de órbita circulares.

[b] Neptuno y la Tierra describen órbitas en torno al Sol, siendo el radio medio de la primera órbita treinta veces mayor que el de la segunda. ¿Cuántos años terrestres tarda Neptuno en recorrer su órbita?

Respuesta

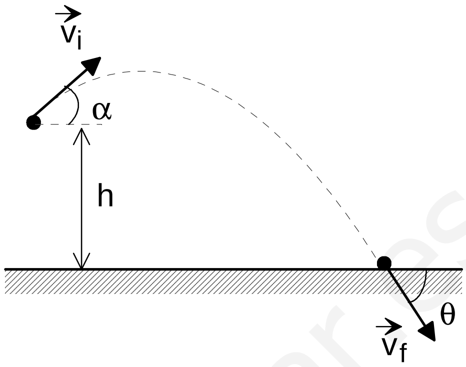
[a] Consulta el libro de Física.
Se trata de deducir la 3ª ley de Kepler a partir de la ley de la gravitación universal y de las leyes de Newton de la dinámica. La fuerza gravitatoria sobre un objeto en órbita circular alrededor de un planeta se comporta como fuerza centrípeta, por lo que $G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$, de donde se deduce que $v^2 = \frac{GM}{r}$. Por otro lado, el periodo del movimiento circular del objeto es: $T = \frac{2\pi r}{v}$, por lo que $T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{v^2}$; al sustituir en esta igualdad el valor de la rapidez antes calculado, se llega a: $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3$, expresión que corresponde a la 3ª ley de Kepler.

[b] De acuerdo con la 3ª ley de Kepler, $\left[\frac{T^2}{r^3}\right]_{Neptuno} = \left[\frac{T^2}{r^3}\right]_{Tierra}$; $\left[\frac{T_{Neptuno}}{T_{Tierra}}\right]^2 = \left[\frac{r_{Neptuno}}{r_{Tierra}}\right]^3$; $\frac{T_{Neptuno}}{T_{Tierra}} = \left[\frac{r_{Neptuno}}{r_{Tierra}}\right]^{3/2}$; $T_{Neptuno} = \left[\frac{r_{Neptuno}}{r_{Tierra}}\right]^{3/2} T_{Tierra} = 30^{3/2} \cdot 1(año) = 9,7(años)$.

✉ Actividad 27

[a] Explica cómo es y qué intensidad tiene el *campo gravitatorio en las proximidades de la superficie terrestre*. ¿Qué energía potencial gravitatoria tiene una partícula de masa *m* en presencia de este campo? Explica tu contestación.

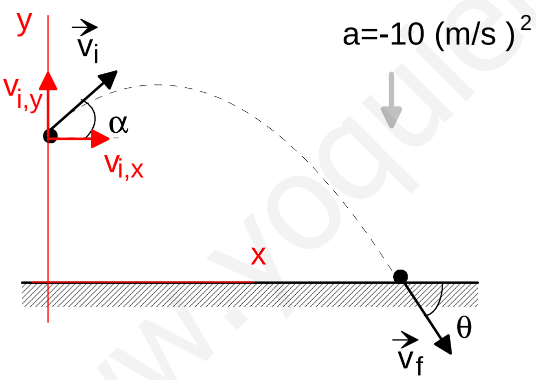
[b] Desde una altura respecto al suelo h = 10 m se lanza una partícula con velocidad inicial v_i = 20 m/s, formando un ángulo α = 30º con la horizontal. Supuesta despreciable la fricción con el aire, determina la velocidad de la partícula cuando choca con el suelo, $\vec{v}_f$ (módulo, v_f, y ángulo respecto al suelo, θ). Considera g = 10 m/s².



Respuesta

[a] Véase cualquier libro de Física.

[b] En primer lugar, se elige un sistema de referencia; las condiciones iniciales son, entonces, $\begin{cases} x_o = 0 \\ y_o = 10(m) \end{cases}$ $\begin{cases} v_{i,x} = 20\ \cos\ 30 = 17,3(\frac{m}{s}) \\ v_{i,y} = 20\ sen\ 30 = 10,0(\frac{m}{s}) \end{cases}$ a continuación, se escriben las ecuaciones de los movimientos en los ejes X e Y:



$Eje\ X \begin{cases} x = 17,3 \cdot t \\ v_x = 17,3(\frac{m}{s}) \end{cases}$

$EjeY \begin{cases} y = 10 + 10 \cdot t - 5 \cdot t^2 \\ v_y = 10 - 10 \cdot t \end{cases}$

El tiempo que tarda en llegar al suelo se obtiene de la condición: y = 0,
$0 = 10 + 10 \cdot t - 5 \cdot t^2 \quad ; \quad t = 2,73(s)$;
así que las componentes de la velocidad cuando la partícula llega al suelo son: $\begin{cases} v_x = 17,3(\frac{m}{s}) \\ v_y = 10 - 27,3 = 17,3(\frac{m}{s}) \end{cases}$. El módulo de esta velocidad es: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 17,3 \cdot \sqrt{2} = 24,5(\frac{m}{s})$, la cual forma con la horizontal un ángulo $\theta = -45^o$.

Actividad 28

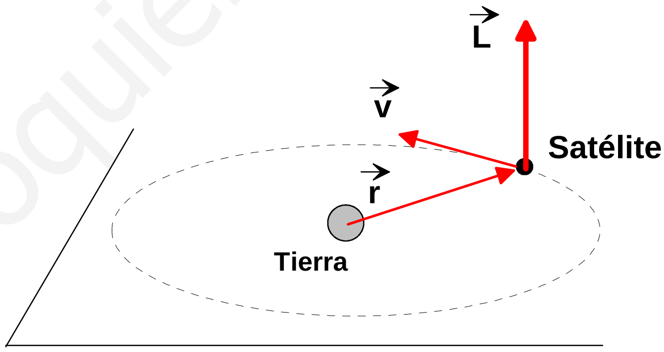
[a] *Momento angular de una partícula*: definición; teorema de conservación.
[b] Un satélite artificial de masa m = 500 kg describe una órbita circular en torno a la Tierra, a una altura h = 600 km sobre su superficie. Calcula el módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra. Si la órbita está en el plano ecuatorial, ¿qué dirección tiene el momento angular, $\vec{L}$? ¿Es $\vec{L}$ un vector constante? ¿Por qué?
DATOS: G = 6,67·10^{-11} Nm²kg^{-2}. Masa y radio de la Tierra: M_T = 5,98·10^{24} kg; R_T = 6,37·10^6 m.

Respuesta

[a] Consulta el libro de Física.

[b] En primer lugar, se calcula la velocidad del satélite en su órbita circular. El radio de la órbita del satélite es: $r = R_T + h = 6,37 \cdot 10^6 + 0,6 \cdot 10^6 = 6,97 \cdot 10^6 (m)$La fuerza gravitatoria sobre el mismo se comporta como fuerza centrípeta, por lo que $G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$, de donde se deduce que $v^2 = \frac{GM_T}{r}$; $v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6,97 \cdot 10^6}} = 7,56 \cdot 10^3 (\frac{m}{s})$.

El módulo del momento angular se calcula mediante:
$L = rmv = 6,97 \cdot 10^6 (m) \cdot 500 (kg) \cdot 7,56 \cdot 10^3 (\frac{m}{s}) = 2,63 \cdot 10^{13} \left(\frac{kg \cdot m^2}{s}\right)$.
La dirección del momento angular es perpendicular al plano de la órbita, esto es, perpendicular al plano ecuatorial. Se trata de un vector constante, ya que el momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra se conserva. La conservación del momento angular es debido a que el momento de la fuerza gravitatoria sobre el satélite, respecto al centro de la Tierra, es cero. El sentido del momento angular se muestra en la siguiente figura.



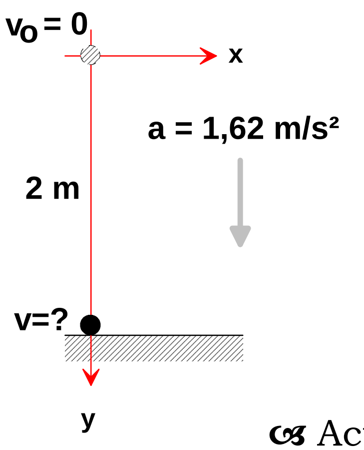
Actividad 29

[a] Escribe y comenta la *Ley de Gravitación Universal*.
[b] Se deja caer un cuerpo desde una altura h = 2 m sobre la superficie de la Luna. Calcula su velocidad cuando choca con la superficie y el tiempo de caída.
DATOS: G = 6,67·10⁻¹¹ Nm²kg⁻². Masa y radio de la Luna: M_L = 7,34·10²² kg; R_L = 1,74·10⁶ m.

Respuesta

[a] Consulta cualquier libro de Física.

[b] Hemos se calcular la aceleración en la superficie lunar; esta aceleración coincide numéricamente con la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Luna, esto es, $a_L = g_o = G\frac{M_L}{R_L^2} = 6,67 \cdot 10^{-11}\frac{7,34 \cdot 10^{22}}{(1,74 \cdot 10^6)^2} = 1,62\left(\frac{m}{s^2}\right)$. Con el sistema de referencia mostrado en la figura, y teniendo en cuenta que se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, se puede escribir:



$$v^2 - v_o^2 = 2a\Delta y$$
$$v = \sqrt{2a\Delta y} = \pm\sqrt{2 \cdot 1,62 \cdot 2} = 2,55\left(\frac{m}{s}\right)$$

De las dos soluciones que tiene la raíz cuadrada, se ha elegido el signo "+", que es el que tiene sentido de acuerdo con el sistema de referencia.

Actividad 30

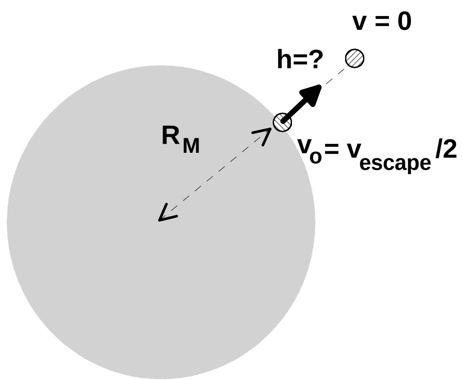
La aceleración de la gravedad en la superficie de Marte es g = 3,87 m/s².
[a] Calcula la masa de Marte.
[b] Se lanza verticalmente un objeto desde la superficie de Marte, con velocidad inicial igual a la mitad de la de escape. Calcula la máxima altura sobre la superficie, *h*, que llega a alcanzar el objeto.
DATOS: G = 6,67·10⁻¹¹ Nm²kg⁻². Radio de la Tierra: R_M = 3,32·10⁶ m.

Respuesta

[a] La intensidad del campo gravitatorio en la superficie de Marte es: $g_o = G\frac{M_M}{R_M^2}$; de donde se deduce que: $M_M = \frac{g_o R_M^2}{G} = \frac{3,87(N/kg)\cdot(3,32\cdot10^6)^2(m^2)}{6,67\cdot10^{-11}(Nm^2/kg^2)} = 6,40 \cdot 10^{23}(kg)$.

[b] Se sabe que la velocidad de escape está dada por: $v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM_M}{R_M}}$. El objeto se mueve en un campo de fuerzas conservativo en el que la energía mecánica permanece constante. Por lo tanto;

$$E_{m,\,inicial} = E_{m,\,final}$$
$$\frac{1}{2}mv_o^2 - G\frac{M_M m}{R_M} = -G\frac{M_M m}{r}$$



Si se divide todo por la masa *m* del objeto y se sustituye la velocidad inicial por su valor, queda:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{2GM_M}{R_M} - \frac{GM_M}{R_M} = -\frac{GM_M}{r}$$
$$-\frac{3}{4}\frac{GM_M}{R_M} = -\frac{GM_M}{r}$$

Simplificando se llega a:

$$r = \frac{4}{3}R_M;\ h = r - R_M = \frac{4}{3}R_M - R_M = \frac{1}{3}R_M;$$
$$h = \frac{1}{3}3,32 \cdot 10^6 = 1,11 \cdot 10^6(m).$$

☙ Actividad 31

Un satélite de masa m = 500 kg describe una órbita circular de radio r = 7,50·10^6 m en torno a la Tierra.

[a] Calcula la velocidad orbital del satélite.

[b] Para pasar a otra órbita circular de radio $2r$, ¿cuánto trabajo deben realizar los motores del satélite?

DATOS: G = 6,67·10^{-11} Nm²kg^{-2}. Masa de la Tierra: M_T = 5,98·10^{24} kg.

Respuesta

[a] Se aplica la 2ª ley de Newton al satélite en su órbita circular. La fuerza gravitatoria sobre el satélite se comporta como fuerza centrípeta, por lo que $G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$, de donde se deduce que $v^2 = \frac{GM_T}{r}$; $v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{7{,}50\cdot 10^6}} = 7{,}29\cdot 10^3(\frac{m}{s})$.

[b] El trabajo que tienen que hacer los motores es la diferencia entre las energías mecánicas final e inicial: $W_{motores} = E_{m,\,final} - E_{m,\,inicial}$.
Por otro lado, la energía mecánica de un objeto de masa m que describe una órbita circular de radio r en torno a la Tierra está dada por: $E_m = -\frac{GM_T m}{2r}$; en consecuencia,

$$W_{motores} = -\frac{GM_T m}{4r} + \frac{GM_T m}{2r} = GM_T m(-\frac{1}{4r} + \frac{1}{2r}) = \frac{GM_T m}{4r}$$

$$W_{motores} = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 500}{4\cdot 7{,}50\cdot 10^6} = 6{,}65\cdot 10^9(J)$$

Actividad 32

[a] Explica el concepto de *campo gravitatorio creado por una o varias partículas*.

La Tierra es aproximadamente esférica, de radio R_T = 6,37·10^6 m. La intensidad media del campo gravitatorio en su superficie es g_g = 9,81 m/s².

[b] Calcula la densidad de masa media de la Tierra, ρ.
[c] ¿A qué altura h sobre la superficie de la Tierra se reduce g a la cuarta parte de g_o?
DATO: G = 6,67·10^{-11} Nm²kg^{-2}.

Respuesta

[a] Si se dispone en una región del espacio de una o más partículas, el espacio alrededor de las mismas adquiere ciertas características que no existían cuando las partículas no estaban. Este hecho se puede comprobar acercando otra partícula de prueba. Decimos que las partículas originales han creado un campo gravitatorio. Éste está descrito vectorialmente mediante la llamada **intensidad del campo gravitatorio**. Si el campo gravitatorio está creado por varias partículas, la intensidad del campo gravitatorio resultante es la suma vectorial de las intensidades individuales: $\vec{g}_{total} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{g}_i$.

[b] La densidad es la masa por unidad de volumen; para el caso de la Tierra, la densidad está dada por: $\rho = \frac{M_T}{V_T} = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} = \frac{3M_T}{4\pi R_T^3}$. Vemos que se necesita conocer la masa de la Tierra. Esta magnitud se puede calcular a partir de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie terrestre: $g_o = G\frac{M_T}{R_T^2}$; de donde se deduce que $M_T = \frac{g_o R_T^2}{G}$; sustituyendo este valor en la expresión anterior tenemos: $\rho = \frac{3g_o R_T^2}{4\pi G R_T^3} = \frac{3g_o}{4\pi G R_t} = \frac{3\cdot 9,81}{4\pi\cdot 6,67\cdot 10^{-11}\cdot 6,37\cdot 10^6} = 5,51\cdot 10^3\left(\frac{kg}{m^3}\right)$.

[c] A una distancia r del centro de la Tierra, la intensidad del campo gravitatorio es: $g = G\frac{M_T}{r^2}$; por otro lado, la intensidad del campo gravitatorio en la superficie terrestre es: $g_o = G\frac{M_T}{R_T^2}$; al dividir la segunda por la primera, queda: $\frac{g_o}{g} = \frac{r^2}{R_T^2}$; el miembro de la izquierda vale 4, por lo que $r^2 = 4R_T^2$; $r = 2R_T$; la altura sobre la superficie es, entonces,

$$h = r - R_T = R_T = 6,37\cdot 10^6 (m).$$

☙ Actividad 33

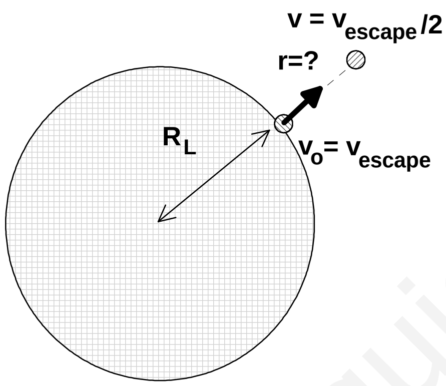
[a] Calcula la velocidad de escape desde la superficie de la Luna.
[b] Se lanza verticalmente un objeto desde la superficie de la Luna, con velocidad inicial igual a la de escape. ¿A qué distancia del centro de la Luna se reduce su velocidad a la mitad de la inicial?

DATOS: G = 6,67·10⁻¹¹ Nm²kg⁻². Masa y radio de la Luna: M_L = 7,34·10²² kg; R_L = 1,74·10⁶ m.

Respuesta

[a] La velocidad de escape es la velocidad que hay que comunicar a una partícula en la superficie lunar para que escape de su atracción gravitatoria. Se calcula mediante la aplicación de la ley de conservación de la energía mecánica: $E_{m,\,inicial} = E_{m,\,\infty}$, esto es, $\frac{1}{2}mv_{escape}^2 - G\frac{M_L m}{R_L} = 0$; de donde se deduce que $v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM_L}{R_L}}$.

[b] El objeto se mueve en un campo de fuerzas conservativo en el que la energía mecánica permanece constante. Por lo tanto;



$$E_{m,\,inicial} = E_{m,\,final}$$
$$\frac{1}{2}mv_{escape}^2 - G\frac{M_L m}{R_L} = \frac{1}{2}m\frac{1}{4}v_{escape}^2 - G\frac{M_L m}{r}$$

De esta ecuación hemos de obtener el valor de *r*; antes de que el alumno se lance como un poseso a sustituir valores, es conveniente llevar a cabo alguna simplificación algebraica. Si se divide todo por la masa *m* del objeto y se multiplica por ocho, queda:

$$4v_{escape}^2 - 8G\frac{M_L}{R_L} = v_{escape}^2 - 8G\frac{M_L}{r}$$
$$3v_{escape}^2 - 8G\frac{M_L}{R_L} = -8G\frac{M_L}{r}$$

Sustituyendo la velocidad de escape por su valor se llega a: $6G\frac{M_L}{R_L} - 8G\frac{M_L}{R_L} = -8G\frac{M_L}{r}$; $-2G\frac{M_L}{R_L} = -8G\frac{M_L}{r}$; $\frac{2}{R_L} = \frac{8}{r}$; $r = 4R_L = 4 \cdot 1,74 \cdot 10^6 = 6,96 \cdot 10^6 (m)$.

Observa la sencillez y la elegancia de la respuesta por haber utilizado “letricas”.

☙ Actividad 34

Desde la superficie de un planeta esférico sin atmósfera, de radio R = 2,3·10^6 m y masa M = 8,6·10^{23} kg, se dispara un proyectil con velocidad inicial v_o horizontal, es decir, en dirección tangente a la superficie.

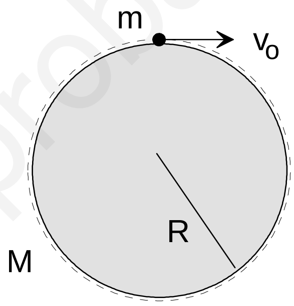
[a] Calcula el valor de v_o para que el proyectil describa una órbita circular rasante a la superficie del planeta. ¿Cuál es el periodo de esta órbita?

[b] Si el proyectil se dispara con una velocidad doble de la anterior, ¿escapará de la atracción gravitatoria del planeta? Justifica tu respuesta.

DATO: G = 6,67·10^{-11} Nm²kg^{-2}.

Respuesta

[a] Se aplica la 2ª ley de Newton al proyectil en su órbita circular rasante. El radio de esta órbita coincide con el radio del planeta, R. Se cumple que $G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{v_o^2}{R}$; al simplificar, queda: $G\frac{M}{R} = v_o^2$; $v_o = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 8{,}6\cdot 10^{23}}{2{,}3\cdot 10^6}} = 5{,}00 \cdot 10^3 (\frac{m}{s})$. El periodo de esta órbita es: $T = \frac{2\pi R}{v_o} = \frac{2\pi\cdot 2{,}3\cdot 10^6}{5\cdot 10^3} = 2{,}89 \cdot 10^3 (s) = 0{,}80(h)$.



[b] La velocidad de escape es la velocidad que hay que comunicar a una partícula en la superficie de un planeta para que escape de su atracción gravitatoria. Se calcula mediante la expresión: $v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 8{,}6\cdot 10^{23}}{2{,}3\cdot 10^6}} = 7{,}06 \cdot 10^3 (\frac{m}{s})$.

Si se lanza el proyectil con una velocidad doble de la obtenida en el apartado anterior, se supera con creces la velocidad de escape y el proyectil escapa de la atracción gravitatoria del planeta; incluso llega al "infinito" con una velocidad distinta del cero.

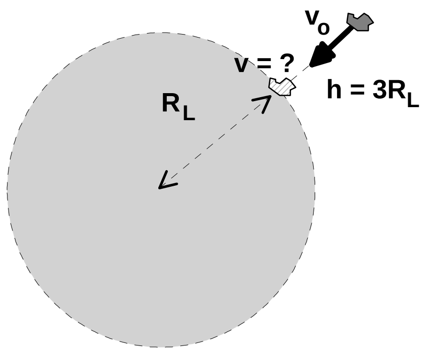
Actividad 35

[a] Explica el concepto de *energía potencial gravitatoria*. ¿Qué energía potencial gravitatoria tiene una partícula de masa *m* situada a una distancia *r* de otra partícula de masa M?
[b] Un meteorito se dirige hacia la Luna, de masa $M_L = 7{,}34 \cdot 10^{22}$ kg y radio $R_L = 1{,}74 \cdot 10^6$ m. A una altura $h = 3R_L$ sobre la superficie de la Luna, la velocidad del meteorito es $v_o = 500$ m/s. Calcula su velocidad cuando choca con la superficie.
DATO: G = 6,67·10⁻¹¹ Nm²kg⁻².

Respuesta

[a] Consulta el libro de Física.

[b] La energía mecánica del meteorito permanece constante, ya que evoluciona en un campo conservativo. En el instante inicial el meteorito se encuentra a una distancia $r = h + R_L = 4R_L$ del centro de la Luna. Se cumple, entonces, que:



$$E_{m,\,inicial} = E_{m,\,final}$$
$$\frac{1}{2}mv_o^2 - G\frac{M_L m}{4R_L} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_L m}{R_L}$$

Si se multiplica toda por dos y se divide por la masa del meteorito *m*, se obtiene:

$$v_o^2 - G\frac{M_L}{2R_L} = v^2 - 2G\frac{M_L}{R_L}$$
$$v^2 = v_o^2 + 3G\frac{M_L}{2R_L};\; v = \sqrt{v_o^2 + 3G\frac{M_L}{2R_L}}$$
$$v = \sqrt{500^2 + \frac{3 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}34 \cdot 10^{22}}{2 \cdot 1{,}74 \cdot 10^6}} = 1{,}68 \cdot 10^3 \left(\frac{m}{s}\right)$$

La velocidad del meteorito cuando choca con la superficie lunar es mayor, como tiene que ser, que la que tenía inicialmente.

Actividad 36

[a] Enuncia las *Leyes de Kepler* y demuestra la tercera en el caso particular de órbitas circulares.

[b] Rhea y Titán son dos satélites de Saturno que tardan, respectivamente, 4,52 y 15,9 días terrestres en recorrer sus órbitas en torno a dicho planeta. Sabiendo que el radio medio de la órbita de Rhea es $5{,}29 \cdot 10^8$ m, calcula el radio medio de la órbita de Titán y la masa de Saturno.

DATO: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm²kg^{-2}.

Respuesta

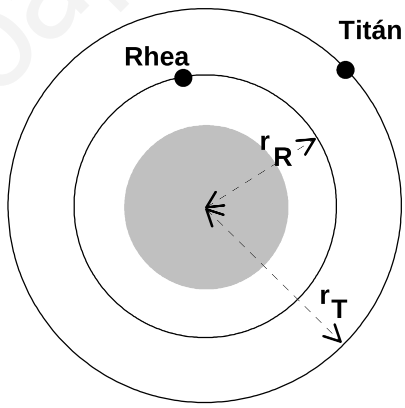
[a] Se trata de deducir la 3ª ley de Kepler a partir de la ley de la gravitación universal y de las leyes de Newton de la dinámica. La fuerza gravitatoria sobre un objeto en órbita circular alrededor de un planeta se comporta como fuerza centrípeta, por lo que $G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$, de donde se deduce que $v^2 = \frac{GM}{r}$. Por otro lado, el periodo del movimiento circular del objeto es: $T = \frac{2\pi r}{v}$, por lo que $T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{v^2}$; al sustituir en esta igualdad el valor de la rapidez antes calculado, se llega a: $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3$, expresión que corresponde a la 3ª ley de Kepler.

[b] En primer lugar, se dibuja un esquema con los dos satélites de Saturno. Se ha de cumplir para los mismos la 3ª ley de Kepler: los cuadrados de los periodos son proporcionales a los cubos de las distancias medias de los satélites al planeta, esto es, $\left[\frac{T^2}{r^3}\right]_{Rhea} = \left[\frac{T^2}{r^3}\right]_{Titán}$, que se puede escribir: $\left[\frac{T_R}{T_T}\right]^2 = \left[\frac{r_R}{r_T}\right]^3$;

$r_T = r_R\left[\frac{T_T}{T_R}\right]^{\frac{2}{3}}$

$r_T = 5{,}29 \cdot 10^8 (m) \cdot \left[\frac{15{,}9 \; días}{4{,}52 \; días}\right]^{\frac{2}{3}}$

$r_T = 1{,}22 \cdot 10^9 (m)$.



Para hallar la masa de Saturno nos fijamos en los datos relativos al satélite Rhea. Éste evoluciona por la acción de la fuerza de atracción gravitatoria de Saturno; esta fuerza se comporta como fuerza centrípeta, por lo que, al aplicar la 2ª ley de Newton al movimiento de Rhea, queda: $G\frac{M_S M_R}{r^2} = M_R \omega^2 r$; la masa de Rhea se puede simplificar en esta expresión y, como $\omega = \frac{2\pi}{T}$, finalmente se llega a $M_S = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$.

El periodo del movimiento de Rhea alrededor de Saturno vale:

$T = 4{,}52 \; (días) \cdot 24 \left(\frac{horas}{día}\right) \cdot 3600 \left(\frac{s}{día}\right) = 3{,}91 \cdot 10^5 (s)$. La masa de Saturno es, entonces,

$M_S = \frac{4\pi^2 \cdot (5{,}29 \cdot 10^8)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (3{,}91 \cdot 10^5)^2} = 5{,}73 \cdot 10^{26} (kg)$.

ଓ Actividad 37

[a] Escribe y comenta la *Ley de Gravitación Universal*.
[b] Dos planetas esféricos tienen la misma masa, $M_1 = M_2$, pero la aceleración de la gravedad en la superficie del primero es cuatro veces mayor que en la del segundo, $g_1 = 4g_2$. Calcula la relación entre los radios de los planetas, R_1/R_2, y entre sus densidades, ρ_1/ρ_2.

Respuesta

[a] Consulta el libro de Física.

[b] En primer lugar, escribimos las expresiones de la intensidad del campo gravitatorio para los dos planetas: $\begin{cases} g_1 = \frac{GM_1}{R_1^2} \\ g_2 = \frac{GM_2}{R_2^2} \end{cases}$. Al imponer la condición del enunciado se llega a: $\frac{1}{R_1^2} = \frac{4}{R_2^2}$; $\frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{1}{4}$; $\frac{R_1}{R_2} = 0,5$. Se comprueba, como tiene que ser, que en el planeta más pequeño -con la misma masa- la intensidad del campo gravitatorio en su superficie es mayor.
En función de la densidad y del tamaño del planeta, la masa del mismo es: $M_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho_1$. Las intensidades del campo gravitatorio son, ahora: $\begin{cases} g_1 = \frac{4}{3} G\pi R_1 \rho_1 \\ g_2 = \frac{4}{3} G\pi R_2 \rho_2 \end{cases}$. Con la condición del enunciado, se cumplirá: $R_1\rho_1 = 4R_2\rho_2$; $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{4R_2}{R_1} = \frac{4}{0{,}5} = 8$. Con las condiciones del enunciado vemos que el planeta más pequeño ha de ser el más denso.

ଓ Actividad 38

La relación entre los radios medios de las órbitas de Marte y la Tierra en torno al Sol es R_M/R_T = 1,53. Calcula el periodo de la órbita de Marte en torno al Sol (duración del "año marciano").

Respuesta

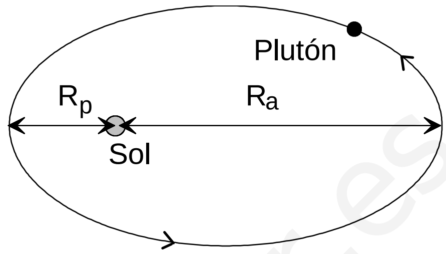
Se ha de cumplir para los dos planetas la 3ª ley de Kepler: los cuadrados de los periodos son proporcionales a los cubos de las distancias medias de los planetas al Sol, esto es, $\left[\frac{T^2}{R^3}\right]_{Tierra} = \left[\frac{T^2}{R^3}\right]_{Marte}$; esta igualdad se puede escribir como sigue: $\left(\frac{R_M}{R_T}\right)^3 = \left(\frac{T_M}{T_T}\right)^2$; se extrae la raíz cuadrada a los dos miembros de la igualdad: $\left(\frac{R_M}{R_T}\right)^{3/2} = \frac{T_M}{T_T}$; de donde se deduce que: $T_M = T_T\left(\frac{R_M}{R_T}\right)^{3/2}$.

El periodo de revolución de la Tierra en torno al Sol es de 1 año; en consecuencia, el periodo de revolución de Marte alrededor del Sol será: $T_M = 1(año) \cdot (1,53)^{3/2} = 1,89(años)$. El "año marciano" dura 1,89 años terrestres.

Actividad 39

La órbita de Plutón en torno al Sol es notablemente excéntrica. La relación de distancias máxima y mínima entre su centro y el del Sol (afelio y perihelio) es R_a/R_p = 5/3. Razonando tus respuestas, calcula la relación (cociente) entre los valores en el afelio y en el perihelio de las siguientes magnitudes de Plutón:

[a] Momento angular respecto al centro del Sol.
[b] Energía cinética.
[c] Energía potencial gravitatoria.



Respuesta

[a] Sobre Plutón está actuando una fuerza gravitatoria dirigida hacia el centro del Sol. El momento de esta fuerza respecto dicho punto es cero, por lo que el momento angular de Plutón, respecto al centro del Sol, es constante. Por lo tanto, la relación entre los valores de esta magnitud en el afelio y en el perihelio es igual a la unidad: $\frac{L_a}{L_p} = 1$.

[b] El momento angular de una partícula de masa m, que lleva una rapidez v, situada a una distancia r del punto de referencia está dada por: $L = mrv$. Por otro lado, la energía cinética de dicha partícula vale: $E_c = \frac{1}{2}mv^2$. De la primera ecuación, $v = \frac{L}{mr}$; sustituyendo esta expresión en la segunda ecuación se llega a $E_c = \frac{L^2}{2mr^2}$.

Aplicando esta expresión al caso de Plutón, en el afelio y en el perihelio, se obtiene: $\begin{cases} E_{c,a} = \frac{L_a^2}{2MR_a^2} \\ E_{c,p} = \frac{L_p^2}{2MR_p^2} \end{cases}$. Los momento angulares son iguales, por lo que $\frac{E_{c,a}}{E_{c,p}} = \frac{R_p^2}{R_a^2} = (\frac{3}{5})^2 = \frac{9}{25}$.
La rapidez en el afelio es menor que en el perihelio, lo mismo que la energía cinética.

[c] La energía potencial gravitatoria se calcula mediante: $U = -G\frac{Mm}{r}$; esta magnitud es inversamente proporcional a la distancia de Plutón al Sol; por lo tanto, $\frac{U_a}{U_p} = \frac{R_p}{R_a} = \frac{3}{5}$.

ɞ Actividad 40

Io es un satélite de Júpiter cuya masa es M_{io} = 8,9·10^{22} kg y su radio R_{io} = 1,8·10^{6} m. El radio de la órbita, supuesta circular, en torno a Júpiter es r = 4,2·10^{8} m.

[a] ¿Cuál es el periodo de rotación de Io en torno a Júpiter?

[b] Determina la velocidad y la aceleración de Io en su órbita, (módulo y dirección).

DATOS: G = 6,67·10^{-11} Nm²kg^{-2}; $M_{Júpiter}$ = 1,90·10^{27} kg; $R_{Júpiter}$ = 6,98·10^{7} m.

Respuesta

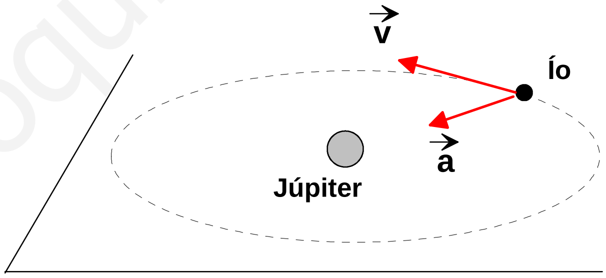
[a] Se aplica la 2ª ley de Newton al satélite en su órbita circular. La fuerza gravitatoria que ejerce Júpiter sobre el satélite Ío se comporta como fuerza centrípeta, por lo que $G\frac{M_J M_{Io}}{r^2} = M_{Io}\omega^2 r$; como $\omega = \frac{2\pi}{T}$, la expresión de la 2ª ley de Newton se puede escribir: $G\frac{M_J}{r^3} = \frac{4\pi^2}{T^2}$; de donde se deduce que $T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_J}$; $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (4{,}2\cdot 10^8)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}90\cdot 10^{27}}} = 1,52 \cdot 10^5 (s)$.

[b] El módulo de la velocidad se obtiene de la aplicación de la 2ª ley de Newton escrita de forma conveniente: $G\frac{M_J M_{Io}}{r^2} = M_{Io}\frac{v^2}{r}$; $v = \sqrt{\frac{GM_J}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}90\cdot 10^{27}}{4{,}2\cdot 10^8}} = 1,74 \cdot 10^4 (\frac{m}{s})$.

También se puede obtener el valor de la rapidez una vez conocido el periodo: $v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi\cdot 4{,}2\cdot 10^8}{1{,}52\cdot 10^5} = 1,74 \cdot 10^4 (\frac{m}{s})$.

La aceleración de Io coincide con el valor de la intensidad del campo gravitatorio, debido a Júpiter, a esa distancia; esto es, $a = g = G\frac{M_J}{r^2} = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}90\cdot 10^{27}}{(4{,}2\cdot 10^8)^2} = 0.718\left(\frac{m}{s^2}\right)$.

La dirección y el sentido de los vectores velocidad y aceleración se muestran en la siguiente figura. La velocidad es tangente a la trayectoria y la aceleración, que es centrípeta, está dirigida hacia el centro de Júpiter. Son dos vectores perpendiculares que están en el mismo plano.



Actividad 41

[a] Defina el concepto de fuerza conservativa indicando dos ejemplos reales.
[b] Justifique la relación entre la fuerza y la energía potencial gravitatoria.
[c] La Estación Espacial Internacional (ISS) describe alrededor de la Tierra una órbita prácticamente circular a una altura h = 390 km sobre la superficie terrestre. Calcula su energía cinética, y su energía potencial respecto al campo gravitatorio, sabiendo que su masa es de $4{,}2\cdot10^5$ kg.
DATOS: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ Nm²kg^{-2}; $M_{Tierra} = 5{,}97\cdot10^{24}$ kg; $R_{Tierra} = 6{,}38\cdot10^6$ m.

Respuesta

[a] Consulta los apuntes de Física.

[b] Consideremos el sistema formado por la Tierra y una partícula. La energía potencial gravitatoria en un punto es el trabajo realizado, en contra de las fuerzas conservativas, para llevar la partícula desde el nivel de referencia al punto en cuestión. Si se supone que la energía potencial gravitatoria es nula cuando la distancia tiende a infinito, la energía potencial y la fuerza están relacionadas mediante: $U = -\int_{\infty}^{r} F(r)dr$, donde *F(r)* es la fuerza dada por la ley de gravitación universal.

[c] El radio de la órbita de la ISS es: $r = h + R_T = 0{,}39\cdot10^6 + 6{,}38\cdot10^6 = 6{,}77\cdot10^6(m)$. Se aplica la 2ª ley de Newton a la estación espacial en su órbita circular. Se cumple que $G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$; al simplificar, queda: $v_o = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}}{6{,}77\cdot10^6}} = 7{,}67\cdot10^3(\frac{m}{s})$.
La energía cinética de la ISS es: $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}4{,}2\cdot10^5\cdot(7{,}67\cdot10^3)^2 = 1{,}24\cdot10^{13}(J)$.
La energía potencial gravitatoria de la ISS vale:
$U = -G\frac{M_T m}{r} = -\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}\cdot4{,}2\cdot10^5}{6{,}77\cdot10^6} = -2{,}47\cdot10^{13}(J)$.

La energía mecánica de la ISS, suma de los dos energías anteriores, resulta ser negativa (*$-1{,}23\cdot10^{13}$ J*). Este resultado confirma que la trayectoria de la ISS es cerrada, es decir, que su evolución está ligada a la Tierra, como tiene que ser.

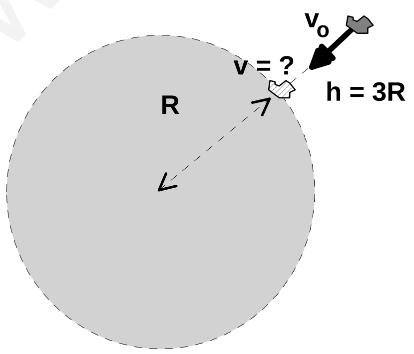
Actividad 42

[a] Explica el concepto de *energía potencial gravitatoria*. ¿Qué energía potencial gravitatoria tiene una partícula de masa *m* situada a una distancia *r* de otra partícula de masa *M*?
[b] Un asteroide se aproxima radialmente hacia un planeta esférico sin atmósfera, de masa M y radio R. Cuando la distancia entre el asteroide y la superficie del planeta es h = 3R, la rapidez del asteroide es v_o. Determina su velocidad cuando choca con la superficie del planeta.
Supón conocida la constante de gravitación universal, G.

Respuesta

[a] Consulta el libro de Física.

[b] La energía mecánica del asteroide permanece constante, ya que evoluciona en un campo conservativo. En el instante inicial el asteroide se encuentra a una distancia $r = h + R = 4R$ del centro del planeta. Se cumple, entonces, que:



$$E_{m,\,inicial} = E_{m,\,final}$$
$$\frac{1}{2}mv_o^2 - G\frac{Mm}{4R} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R}$$

Si se multiplica toda por dos y se divide por la masa del asteroide *m*, se obtiene:

$$v_o^2 - G\frac{M}{2R} = v^2 - 2G\frac{M}{R}$$
$$v^2 = v_o^2 + 3G\frac{M}{2R};\ v = \sqrt{v_o^2 + 3G\frac{M}{2R}}$$

La rapidez del meteorito cuando choca con la superficie lunar es mayor, como tiene que ser, que la que tenía inicialmente. La dirección de la velocidad es radial y el sentido hacia el centro del planeta.

Actividad 43

Los satélites de comunicaciones son geoestacionarios, es decir, describen órbitas ecuatoriales en torno a la Tierra con un periodo de revolución de un día, igual al de rotación de nuestro planeta. Por ello, la posición aparente de un satélite geoestacionario, visto desde la Tierra, es siempre la misma.

[a] Calcula el radio de la órbita geoestacionaria y la velocidad orbital del satélite.

[b] Calcula la energía mecánica de un satélite geoestacionario de masa m = 500 kg.

DATOS: G = $6{,}67\cdot10^{-11}$ Nm²kg^{-2}; M_{Tierra} = $5{,}97\cdot10^{24}$ kg.

Respuesta

[a] De la información del enunciado se deduce que el periodo del satélite es de 24 h. Si se aplica la 2ª ley de Newton al satélite, se puede escribir: $G\frac{M_T m}{r^2} = m\omega^2 r$; por otro lado, sabemos que $\omega = \frac{2\pi}{T}$; de ambas, simplificando la masa del satélite, se llega a: $G\frac{M_T}{r^3} = \frac{4\pi^2}{T^2}$; $r^3 = \frac{GM_T T^2}{4\pi^2}$; $r = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}\cdot(8{,}64\cdot10^4)^2}{4\pi^2}} = 42{,}2\cdot10^6\ m = 42.200\ km$.

La velocidad orbital del satélite se puede calcular, entre otras maneras, como sigue: $v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi\cdot4{,}22\cdot10^7(m)}{8{,}64\cdot10^4(s)} = 3{,}07\cdot10^3(\frac{m}{s})$.

[b] La energía mecánica de un cuerpo que describe una órbita circular en el campo gravitatorio terrestre se calcula mediante:

$E_m = -G\frac{M_T m}{2r}$; así que $E_m = -6.67\cdot10^{-11}\frac{5{,}97\cdot10^{24}\cdot500}{2\cdot4{,}22\cdot10^7} = -2.36\cdot10^9(J)$.

Actividad 44

[a] Enuncia y comenta la Ley de Gravitación Universal. A partir de dicha ley establece el concepto de energía potencial gravitatoria.

[b] Un satélite de m = 100 kg describe una órbita circular, sobre el ecuador terrestre, a una distancia tal que su periodo orbital coincide con el de rotación de la Tierra (satélite geoestacionario). Calcula el radio de la órbita, la energía mínima necesaria para situarlo en dicha órbita y el momento angular del satélite respecto del centro de la Tierra.
DATOS: G = $6{,}67\cdot10^{-11}$ Nm²kg^{-2}; M_{Tierra} = $5{,}97\cdot10^{24}$ kg; R_{Tierra} = $6{,}38\cdot10^{6}$ m.

Respuesta

[a] Consulta el libro de Física.

[b] De la información del enunciado se deduce que el periodo del satélite es de 24 h. Si se aplica la 2ª ley de Newton al satélite, se puede escribir: $G\frac{M_T m}{r^2} = m\omega^2 r$; por otro lado, sabemos que $\omega = \frac{2\pi}{T}$; de ambas, simplificando la masa del satélite, se llega a: $G\frac{M_T}{r^3} = \frac{4\pi^2}{T^2}$; $r^3 = \frac{GM_T T^2}{4\pi^2}$; $r = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}\cdot(8{,}64\cdot10^4)^2}{4\pi^2}} = 42{,}2\cdot10^6\ m = 42.200\ km.$

La energía mínima necesaria para situarlo en dicha órbita se obtiene de la conservación de la energía mecánica: $E_{m,inicial} = E_{m,final}$; $E_c - G\frac{M_T m}{R_T} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r}$; se donde se deduce que: $E_c = GM_T m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right) = 6,67\cdot10^{-11}\cdot5,97\cdot10^{24}\cdot100\cdot(1,57\cdot10^{-7} - 0,118\cdot10^{-7}) =$
$= 5,78\cdot10^9(J).$

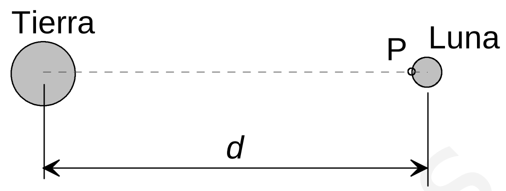
El momento angular está dado por: $L = rmv$, donde r es el radio de la órbita y v la velocidad orbital. La velocidad orbital del satélite se puede calcular, entre otras maneras, como sigue:
$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi\cdot4{,}22\cdot10^7(m)}{8{,}64\cdot10^4(s)} = 3,07\cdot10^3(\frac{m}{s})$; por lo tanto,
$L = 42,2\cdot10^6(m)\cdot100(kg)\cdot3,07\cdot10^3(\frac{m}{s}) = 1,30\cdot10^{13}(\frac{kg\cdot m^2}{s}).$

Actividad 45

[a] Explica el concepto de *campo gravitatorio* creado por una o varias partículas.

Consideramos la Tierra y la Luna aproximadamente esféricas, de radios $R_T = 6{,}38\cdot10^6$ m y $R_L = 1{,}74\cdot10^6$ m. La distancia entre los centros de la Tierra y la Luna es $d = 3{,}84\cdot10^8$ m.

[b] Compara el valor de la intensidad de campo gravitatorio en el punto P de la superficie lunar, situado en la línea que une el centro de la Luna con el de la Tierra, creado por la Luna, con el valor, en ese mismo punto, del campo creado por la Tierra.



DATOS: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ Nm²kg⁻²; $M_{Tierra} = 5{,}97\cdot10^{24}$ kg; $M_{Luna} = 7{,}35\cdot10^{22}$ kg.

Respuesta

[a] Consulta el libro de Física.

[b] El módulo de la intensidad del campo gravitatorio lunar en el punto P está dado por la expresión: $g_o(P) = G\frac{M_L}{R_L^2}$.

En el mismo punto P, el módulo de la intensidad del campo gravitatorio terrestre está dado por: $g_T(P) = G\frac{M_T}{(d-R_L)^2}$.

Para hacer la comparación se divide la primera expresión por la segunda y queda:
$\frac{g_o(P)}{g_T(P)} = \frac{M_L}{M_T}(\frac{d-R_L}{R_L})^2 = \frac{M_L}{M_T}\left(\frac{d}{R_L} - 1\right)^2 \simeq \frac{M_L}{M_T}(\frac{d}{R_L})^2$; por lo tanto,
$\frac{g_o(P)}{g_T(P)} = 1,23 \cdot 10^{-2} \cdot (2,21 \cdot 10^2)^2 = 601$. Esto significa que la intensidad de campo gravitatorio en la superficie lunar, debido a la Luna, es seiscientas veces mayor que la intensidad de campo gravitatorio en la superficie lunar debido a la Tierra.

Otro procedimiento, para las personas más incrédulas, consiste en calcular primero las intensidad de campo gravitatorio y después hacer la comparación. Así,
$g_o(P) = \frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot7{,}35\cdot10^{22}}{(1{,}74\cdot10^6)^2} = 1,62\left(\frac{N}{kg}\right)$ y $g_T(P) = \frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}}{(3{,}82\cdot10^8)^2} = 2,73 \cdot 10^{-3}\left(\frac{N}{kg}\right)$. Al dividir estas dos cantidades se obtiene: $\frac{1{,}62}{2{,}73\cdot10^{-3}} = 593$.

☙ Actividad 46

[a] Escribe y comenta la *ley de Gravitación Universal*.
[b] El satélite metereológico SMOS (*Soil moisture and ocean salinity*) de masa m = 683 kg se pretende colocar en una órbita circular (polar) a una altura h = 755 km sobre la superficie terrestre. (*Fecha prevista de lanzamiento: 9/9/2009*).

- Calcula la variación que experimentará el peso del satélite en la órbita respecto del que tiene en la superficie terrestre.
- Determina la velocidad orbital del satélite y el número de veces que recorrerá la órbita cada día.

DATOS: G = 6,67·10^{-11} Nm²kg^{-2}; M_{Tierra} = 5,97·10^{24} kg; R_{Tierra} = 6,38·10^{6} m.

Respuesta

[a] Consulta el libro de Física.

[b] El peso del satélite en la superficie terrestre se calcula mediante:

$$P_o = G\frac{M_T m}{R_T^2} = 6,67 \cdot 10^{-11}\frac{5,97\cdot 10^{24}\cdot 683}{(6,38\cdot 10^6)^2} = 6,68 \cdot 10^3\ N$$

El peso del satélite en la órbita es:

$$P_o = G\frac{M_T m}{(R_T+h)^2} = 6,67 \cdot 10^{-11}\frac{5,97\cdot 10^{24}\cdot 683}{(6,38\cdot 10^6+7,55\cdot 10^5)^2} = 5,34 \cdot 10^3\ N$$

La variación del peso es, por lo tanto,

$$\Delta P = P - P_o = 5,34 \cdot 10^3 - 6,68 \cdot 10^3 = -1,34 \cdot 10^3 N$$

La variación del peso también puede expresarse como una fracción del peso del satélite en la superficie terrestre; en efecto,

$$\frac{\Delta P}{P_o} \cdot 100 = \frac{-1,34\cdot 10^3}{6,68\cdot 10^3} \cdot 100 = -20,1\%$$

El peso del satélite, al pasar de la superficie terrestre a la órbita, ha disminuido alrededor del 20%.

Vamos ahora con la segunda parte. El radio de la órbita del satélite es: $r = h + R_T = 7,55 \cdot 10^5 + 6,38 \cdot 10^6 = 7,14 \cdot 10^6 (m)$. Si se aplica la 2ª ley de Newton al satélite, se puede escribir: $G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$; al simplificar la expresión, queda: $G\frac{M_T}{r} = v^2$, de donde se deduce que la velocidad orbital es: $v = \sqrt{\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,97\cdot 10^{24}}{7,14\cdot 10^6}} = 7,47 \cdot 10^3\ \frac{m}{s}$.

Hallamos ahora el periodo del satélite: $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\cdot 7,14\cdot 10^6}{7,47\cdot 10^3} = 6,01 \cdot 10^3\ s$. El número de vueltas que el satélite da en un día es, entonces, $\frac{24(h)\cdot 3600(s/h)}{6,01\cdot 10^3(s)} = 14,4\ vueltas$.

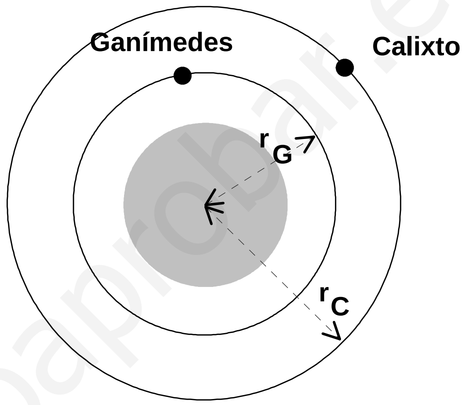
Actividad 47

[a] Enuncia y explica las *leyes de Kepler*. Demuestra la tercera en el caso de órbitas circulares.
[b] Ganímedes y Calixto son dos de los más de 60 satélites que tiene Júpiter. El primero, el satélite más grande del sistema solar, tarda 7,15 días en recorrer su órbita en torno a Júpiter de $1{,}07 \cdot 10^9$ m de radio medio. Calixto, el satélite con más cráteres del sistema solar, describe una órbita con un radio medio de $1{,}88 \cdot 10^9$ m. Determina el periodo orbital de Calixto y la masa de Júpiter.
DATO: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm²kg⁻²

Respuesta

[a] Consulta el libro de Física.

[b] En primer lugar, se dibuja un esquema con los dos satélites de Júpiter. Se ha de cumplir para los mismos la 3ª ley de Kepler: los cuadrados de los periodos son proporcionales a los cubos de las distancias medias de los satélites al planeta, esto es, $\left[\frac{T^2}{r^3}\right]_{Calixto} = \left[\frac{T^2}{r^3}\right]_{Ganímedes}$, que se puede escribir: $\left[\frac{T_C}{T_G}\right]^2 = \left[\frac{r_C}{r_G}\right]^3$;
$T_C = T_G\left[\frac{r_C}{r_G}\right]^{3/2}$;
$T_C = 7,15(días)\left[\frac{1{,}88 \cdot 10^9(m)}{1{,}07 \cdot 10^9(m)}\right]^{3/2}$;
$T_C = 7,15(días) \cdot 2,33 = 16,7(días)$.



Para hallar la masa de Júpiter nos fijamos en los datos relativos al satélite Ganímedes -también podríamos utilizar los datos relativos a Calixto-. Éste evoluciona por la acción de la fuerza de atracción gravitatoria de Júpiter; esta fuerza se comporta como fuerza centrípeta, por lo que, al aplicar la 2ª ley de Newton al movimiento de Ganímedes, queda: $G\frac{M_J M_G}{r^2} = M_G \omega^2 r$; la masa de Ganímedes se puede simplificar en esta expresión y, como $\omega = \frac{2\pi}{T}$, finalmente se llega a $M_J = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$.
El periodo del movimiento de Ganímedes alrededor de Júpiter vale:
$T = 7,15\ (días) \cdot 24\left(\frac{horas}{dia}\right) \cdot 3600\left(\frac{s}{dia}\right) = 6,18 \cdot 10^5(s)$. La masa de Júpiter es, entonces,
$M_J = \frac{4\pi^2 \cdot (1{,}07 \cdot 10^9)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (6{,}18 \cdot 10^5)^2} = 1,90 \cdot 10^{27}(kg)$.

☙ Actividad 48

El satélite metereológico SMOS (*Soil moisture and ocean salinity*) de masa m = 683 kg se pretende colocar en una órbita circular (polar) a una altura h = 755 km sobre la superficie terrestre. (*Fecha prevista de lanzamiento: 9/9/2009*).

[a] Calcula las energías cinética y total que tendrá el satélite en la órbita.

[b] Suponiendo el satélite en la órbita citada, determina su velocidad de escape y su momento angular respecto al centro de la Tierra.

DATOS: G = 6,67·10^{-11} Nm²kg^{-2}; M_{Tierra} = 5,97·10^{24} kg; R_{Tierra} = 6,38·10^{6} m.

Respuesta

[a] El radio de la órbita del satélite es: $r = h + R_T = 7,55 \cdot 10^5 + 6,38 \cdot 10^6 = 7,14 \cdot 10^6 (m)$. Si se aplica la 2ª ley de Newton al satélite, se puede escribir: $G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$; al simplificar r en los dos miembros de la expresión y multiplicar por $\frac{1}{2}$, queda: $G\frac{M_T m}{2r} = \frac{1}{2}mv^2$. Pero el miembro de la derecha representa la energía cinética, así que:
$E_c = G\frac{M_T m}{2r} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{5,97 \cdot 10^{24} \cdot 683}{2 \cdot 7,14 \cdot 10^6} = 1,90 \cdot 10^{10} (J)$.
Para hallar la energía total o mecánica vamos a hacer uso de los resultados precedentes:
$E_m = E_c + E_p = G\frac{M_T m}{2r} - G\frac{M_T m}{r} = -G\frac{M_T m}{2r} = -1,90 \cdot 10^{10} (J)$.

[b] Se debe cumplir que la energía mecánica del satélite en la órbita más la energía cinética que se le suministra ha de ser igual a su energía mecánica en el infinito -ha escapado de la atracción terrestre-: $E_m(órbita) + E_c(escape) = E_m(\infty)$; la energía mecánica en el infinito es cero, pues el satélite carece de energía potencial y suponemos que "llega" allí con velocidad nula; en consecuenica, $E_c(escape) = -E_m(órbita) = 1,90 \cdot 10^{10} (J)$. La velocidad de escape es, finalmente, $v_{escape} = \sqrt{\frac{2 \cdot E_c(escape)}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,90 \cdot 10^{10}}{683}} = 7,5 \cdot 10^3 (\frac{m}{s})$.
Esta velocidad es menor que la velocidad de escape calculada en la superficie terrestre, lo cual confirma la coherencia del resultado obtenido.

El módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra se calcula mediante: $L = rmv$, donde v es la velocidad orbital del satélite. Dicha velocidad vale:
$v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_c(órbita)}{m}} = 7,5 \cdot 10^3 (\frac{m}{s})$. Nótese que, aunque el resultado numérico es el mismo que el obtenido con la velocidad de escape, los conceptos son radicalmente diferentes. El momento angular es, entonces, $L = 7,14 \cdot 10^6 \cdot 683 \cdot 7,5 \cdot 10^3 = 3,66 \cdot 10^{13} \left(\frac{kg \cdot m^2}{s}\right)$.