3 Estudio de movimientos sencillos y su composición

Actividades del interior de la unidad

1. Una persona recorre 4,5 km en 20 min, descansa 10 min y regresa al punto de partida en 30 min. Suponiendo el camino recto y la velocidad constante en cada etapa, calcula las ecuaciones del movimiento en cada etapa y dibuja la gráfica *x-t* del movimiento.

Tomamos como origen para todas las etapas el punto de partida.

Durante la primera etapa (los 20 primeros minutos), la persona se aleja del origen con una velocidad, supuestamente constante, de valor:

$$v = \frac{x}{t} \rightarrow v = \frac{4{,}5 \text{ km}}{20 \text{ min}} = \frac{4\,500 \text{ m}}{1200 \text{ s}} = 3{,}75 \text{ m/s}$$

Luego, las ecuaciones de la primera etapa son las de un m.r.u. con v positiva:

$$x_1 = v \cdot t = 3{,}75 \cdot t \quad ; \quad v_1 = 3{,}75 \text{ m/s}$$

Durante la segunda etapa, los 10 minutos siguientes, la persona está en reposo; por tanto, su velocidad es cero y se encuentra siempre a 4,5 km del origen; luego, las ecuaciones de la segunda etapa son:

$$x_2 = 4\,500 \text{ m} \quad ; \quad v_2 = 0$$

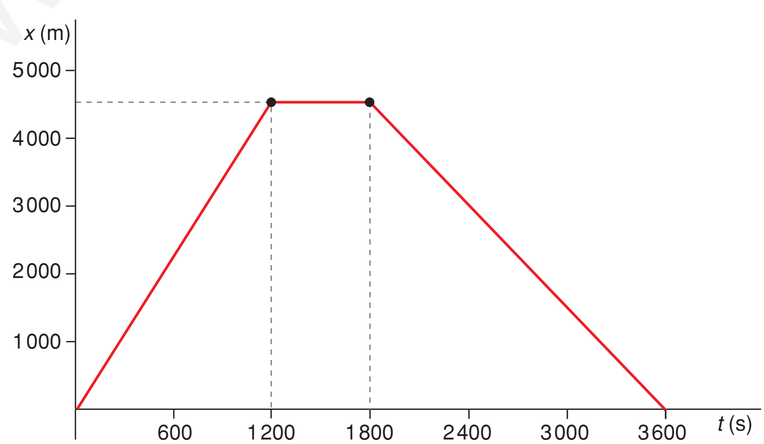
Durante la tercera etapa, la persona inicia el movimiento a 4,5 km y se dirige hacia el origen; luego, realiza un m.r.u. con velocidad negativa, cuyo valor absoluto es:

$$v = \frac{x}{t} \rightarrow v = \frac{4{,}5 \text{ km}}{30 \text{ min}} = \frac{4\,500 \text{ m}}{1\,800 \text{ s}} = 2{,}5 \text{ m/s}$$

Por tanto, las ecuaciones de la tercera etapa son:

$$x_3 = 4\,500 - 2{,}5 \cdot t \quad ; \quad v_3 = -2{,}5 \text{ m/s}$$

La gráfica *x-t* del movimiento es:



2. Dos hermanos van desde el pueblo *A* al pueblo *B*, que dista 3 km del primero. El hermano mayor, que camina con una rapidez de 9 km/h, sale del punto *A* y, en el mismo instante, pero 500 m por delante de él, sale el más pequeño caminando a 7,2 km/h. Calcula: a) El tiempo que tarda cada uno en llegar al pueblo *B*. b) El tiempo que tarda el mayor en adelantar al pequeño. c) La distancia a la que se encuentra de *A* cuando lo adelanta. Dibuja en un mismo diagrama la gráfica *x-t* de ambos movimientos.

a) Ambos hermanos se mueven con m.r.u. El hermano mayor recorre 3 km con una velocidad de 9 km/h; luego, tarda un tiempo:

$$x = v \cdot t \rightarrow t_{mayor} = \frac{x}{v} = \frac{3\ \text{km}}{9\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{1}{3}\ \text{h} = 20\ \text{min} = 1\,200\ \text{s}$$

El hermano menor recorre 2,5 km con una velocidad de 7,2 km/h; por tanto, tarda:

$$x = v \cdot t \rightarrow t_{menor} = \frac{x}{v} = \frac{2{,}5\ \text{km}}{7{,}2\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{2500\ \text{m}}{2} = 1250\ \text{s}$$

El hermano mayor tarda menos que el menor; luego, lo adelanta antes de llegar a *B*.

b) Expresamos ambas velocidades en unidades del S.I.:

$$v_{mayor} = 9\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{9\,000\ \text{m}}{3\,600\ \text{s}} = 2{,}5\ \text{m/s} \quad ; \quad v_{menor} = 7{,}2\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{7\,200\ \text{m}}{3\,600\ \text{s}} = 2\ \text{m/s}$$

Situando el origen en el pueblo *A*, la posición inicial del hermano mayor es cero, pero como el pequeño sale 500 m más allá del origen y en el sentido del movimiento, su posición inicial es $x_0 = 500$ m. La ecuación del movimiento de cada uno es:

$$x_{mayor} = v_{mayor} \cdot t = 2{,}5 \cdot t$$

$$x_{menor} = x_0 + v_{menor} \cdot t = 500 + 2 \cdot t$$

Cuando el mayor adelanta al pequeño, ambos se encuentran a la misma distancia del origen. Igualando ambas ecuaciones, obtenemos:

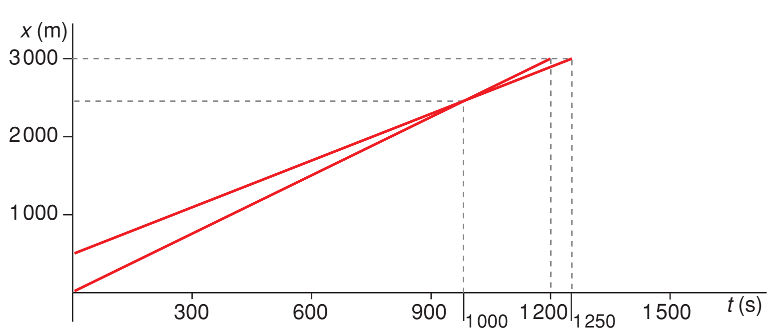
$$x_{mayor} = x_{menor} \rightarrow 2{,}5 \cdot t = 500 + 2 \cdot t \rightarrow 0{,}5 \cdot t = 500 \rightarrow t = 1\,000\ \text{s}$$

Por tanto, el mayor tarda 16 minutos y 40 segundos en adelantar al pequeño.

c) La distancia a la que lo adelanta es:

$$x = x_{mayor} = 2{,}5 \cdot 1\,000 = 2\,500\ \text{m}$$

Y la gráfica de ambos movimientos es:



3. Deduce, siguiendo las indicaciones del texto, la ecuación:

$$\boldsymbol{v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot (x - x_0)}$$

Escribe dicha expresión cuando el móvil parte del reposo desde el origen.

Partiendo de las ecuaciones del m.r.u.a.:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad ; \quad v = v_0 + a \cdot t \quad ; \quad a = \text{cte}$$

Despejamos t en la ecuación de la velocidad:

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

Y lo sustituimos en la de la posición:

$$x = x_0 + v_0 \cdot \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{(v - v_0)^2}{a^2}$$

Desarrollando esta última expresión:

$$x - x_0 = \frac{v \cdot v_0 - v_0^2}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2 - 2 \cdot v \cdot v_0 + v_0^2}{a}$$

y simplificando:

$$x - x_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2 - v_0^2}{a}$$

Finalmente llegamos a la expresión que nos indica el enunciado:

$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot (x - x_0)$$

Si el móvil parte del reposo, su velocidad inicial es nula, $v_0 = 0$, y como sale del origen, su posición inicial es $x_0 = 0$. Por tanto, la expresión anterior se escribe en este caso en la forma:

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot x$$

4. Un automóvil que parte del reposo alcanza una velocidad de 100 km/h en 10 s. Calcula su aceleración y el espacio recorrido en ese tiempo. Dibuja las gráficas *x-t* y *v-t* del movimiento.

Como el automóvil parte del reposo, si situamos el origen en el punto de salida, las ecuaciones del movimiento se escriben en la forma:

$$x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad ; \quad v = a \cdot t$$

Expresamos la velocidad que alcanza el automóvil en unidades del S.I.:

$$v = 100 \text{ km/h} = 27{,}78 \text{ m/s}$$

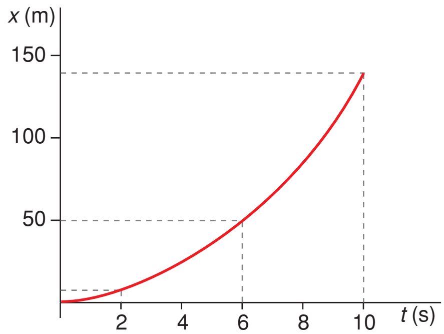
La aceleración la obtenemos sustituyendo los datos, en unidades del S.I., en la ecuación de la velocidad:

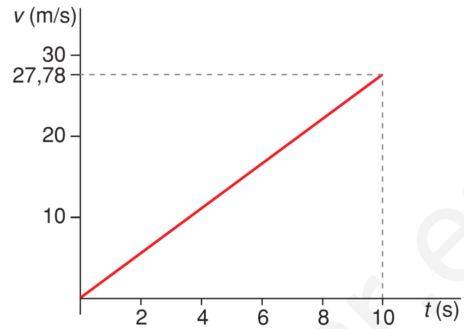
$$v = a \cdot t \rightarrow 27{,}78 = a \cdot 10 \rightarrow a = 2{,}78 \text{ m/s}^2$$

El espacio recorrido en ese tiempo es:

$$x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot 2{,}78 \cdot 10^2 = 139 \text{ m}$$

Las gráficas de este movimiento son:





5. Calcula la aceleración de un cuerpo que parte del reposo y posee una velocidad de 20 m/s después de recorrer 100 m.

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales del movimiento, sus ecuaciones son:

$$x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad ; \quad v = a \cdot t \rightarrow v^2 = 2 \cdot a \cdot x$$

Sustituyendo en la última expresión, tenemos:

$$20^2 = 400 = 2 \cdot a \cdot 100 \quad \rightarrow \quad a = 2 \text{ m/s}^2$$

6. Un autobús que circula a 90 km/h frena y se detiene en 5 s. Calcula la aceleración de frenado y el espacio que recorre hasta pararse. Dibuja las gráficas *x-t* y *v-t* en este caso.

La velocidad inicial del autobús es v_0 = 90 km/h = 25 m/s. Situando el origen en el punto donde empieza a frenar y suponiendo constante la aceleración de frenado, las ecuaciones del movimiento son:

$$x = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad ; \quad v = v_0 + a \cdot t$$

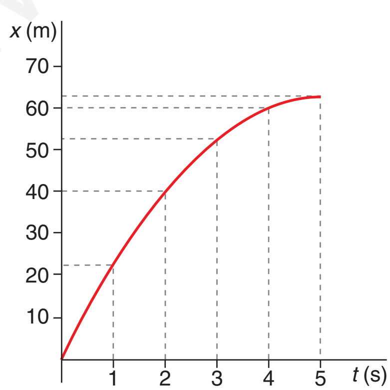
Cuando el autobús se detiene, su velocidad es cero. Sustituyendo en la segunda ecuación:

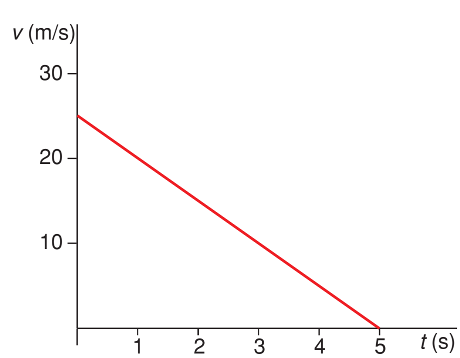
$$0 = 25 + a \cdot 5 \quad \rightarrow \quad a = -5 \text{ m/s}^2$$

El espacio recorrido mientras está frenando vale:

$$x = 25 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot (-5) \cdot 5^2 = 62{,}5 \text{ m}$$

Las gráficas *x-t* y *v-t* de este movimiento son:





7. Un cuerpo sale del origen con una velocidad inicial de 4 m/s y una aceleración de 6 m/s². Calcula el espacio recorrido en el primer segundo, en el segundo y en el tercero.

Situando el origen en la posición inicial del cuerpo, la ecuación de la posición es:

$$x = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \rightarrow x = 4 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot t^2 = 4 \cdot t + 3 \cdot t^2$$

El espacio recorrido en el primer segundo es:

$$\Delta x_1 = x(1) - x(0) = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 - 0 = 7 \text{ m}$$

El espacio recorrido en el segundo es la distancia que separa las posiciones que ocupa el cuerpo en $t = 1$ s y $t = 2$ s:

$$x(2) = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 = 20 \text{ m} \quad ; \quad x(1) = 7 \text{ m} \rightarrow \Delta x_2 = x(2) - x(1) = 20 - 7 = 13 \text{ m}$$

Procediendo del mismo modo, el espacio recorrido en el tercer segundo es:

$$x(3) = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 = 39 \text{ m} \quad ; \quad x(2) = 20 \text{ m} \rightarrow \Delta x_3 = x(3) - x(2) = 39 - 20 = 19 \text{ m}$$

8. ¿Desde qué altura se ha de soltar un cuerpo para que llegue al suelo con una velocidad de 100 km/h? ¿Cuánto tiempo está en el aire?

Como el movimiento es de caída libre, sus ecuaciones son:

$$y = H - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad ; \quad v = -g \cdot t$$

Cuando el cuerpo llega al suelo, $y = 0$ y $v = -100$ km/h $= -27{,}78$ m/s. Tomando $g = 9{,}8$ m/s², resulta:

$$0 = H - 4{,}9 \cdot t^2 \quad ; \quad -27{,}78 = -9{,}8 \cdot t$$

Por tanto, despejando en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera:

$$t = 2{,}83 \text{ s}$$

$$H = 4{,}9 \cdot t^2 = 4{,}9 \cdot 2{,}83^2 = 39{,}24 \text{ m}$$

9. Se deja caer un cuerpo y tarda 3 s en llegar al suelo. Calcula desde qué altura se soltó y su velocidad al llegar al suelo.

Las ecuaciones del movimiento del cuerpo, tomando $g = 9{,}8$ m/s², son:

$$y = H - 4{,}9 \cdot t^2 \quad ; \quad v = -9{,}8 \cdot t$$

Cuando el cuerpo llega al suelo:

$$0 = H - 4{,}9 \cdot 3^2 \rightarrow H = 44{,}1 \text{ m}$$

$$v = -9{,}8 \cdot 3 = -29{,}4 \text{ m/s}$$

El cuerpo se soltó desde una altura de 44,1 m, y llega al suelo con una velocidad de 29,4 m/s.

10. Dibuja las gráficas *y-t* y *v-t* de un cuerpo que se suelta desde una altura de 45 m. Considera $g = 10$ m/s².

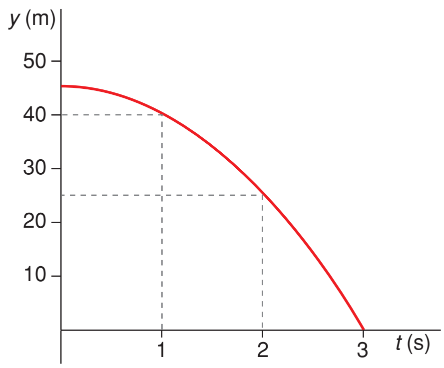
Con los datos del enunciado, las ecuaciones del movimiento del cuerpo son:

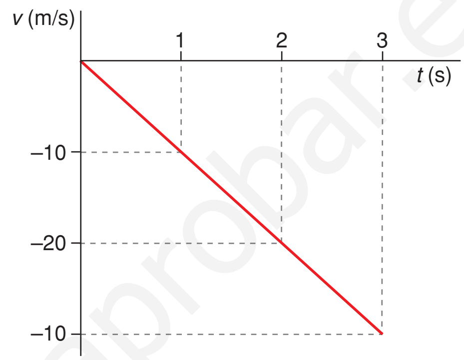
$$y = 45 - 5 \cdot t^2 \quad ; \quad v = -10 \cdot t$$

Dando valores al tiempo en cada ecuación, tenemos:

t	0	1	2	3
y	45	40	25	0
v	0	–10	–20	–30

Las gráficas *y-t* y *v-t* de este movimiento son:





11. Desde el suelo lanzamos verticalmente hacia arriba una pelota con una velocidad de 12 m/s. Calcula el tiempo que tarda en volver al suelo, la altura máxima que alcanza y la velocidad con que llega al suelo.

Tomando el origen en el punto de lanzamiento (el suelo), la posición inicial es $y_0 = 0$, y las ecuaciones del movimiento son:

$$y = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 12 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 \quad ; \quad v = v_0 - g \cdot t = 12 - 9{,}8 \cdot t$$

Cuando el cuerpo vuelve al suelo, su posición es $y = 0$, lo que nos permite calcular el tiempo transcurrido:

$$0 = 12 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2$$

Esta ecuación tiene dos soluciones: $t = 0$, que corresponde al instante inicial o de lanzamiento, y $t = 12/4{,}9 = 2{,}45$ s, que corresponde al instante en que regresa al suelo, lo que nos pide el enunciado.

La velocidad del cuerpo al llegar al suelo es el valor de esta magnitud en el instante $t = 2{,}45$ s; por tanto:

$$v = 12 - 9{,}8 \cdot 2{,}45 = -12 \text{ m/s}$$

El cuerpo regresa al suelo con la misma velocidad con que fue lanzado; el signo negativo indica que el cuerpo está bajando.

Cuando el cuerpo alcanza la altura máxima, su velocidad se anula; luego:

$$v = 0 \;\rightarrow\; 0 = 12 - 9{,}8 \cdot t \;\rightarrow\; t = \frac{12}{9{,}8} = 1{,}225 \text{ s}$$

Sustituyendo en la ecuación de la posición, tenemos:

$$y = 12 \cdot 1{,}225 - 4{,}9 \cdot 1{,}225^2 = 7{,}35 \text{ m}$$

Luego, el cuerpo alcanza una altura máxima de 7,35 m.

12. Lanzamos desde el suelo una moneda verticalmente hacia arriba con una velocidad de 15 m/s y, en el mismo instante y desde una altura de 40 m, se lanza verticalmente hacia abajo una piedra con una velocidad de 5 m/s. Calcula la altura a la que se cruzan. ¿La moneda está subiendo o bajando en ese instante? ¿Dónde está la piedra cuando la moneda alcanza su altura máxima?

Tomando el mismo origen para el movimiento de ambos cuerpos y orientando el semieje Y positivo en la vertical ascendente, sus ecuaciones son:

Para la moneda:

$$y_1 = 15 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 \quad ; \quad v_1 = 15 - 9{,}8 \cdot t$$

Para la piedra:

$$y_2 = 40 - 5 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 \quad ; \quad v_2 = -5 - 9{,}8 \cdot t$$

Cuando los cuerpos se cruzan, se cumple que $y_1 = y_2$; luego:

$$y_1 = y_2 \rightarrow 15 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 = 40 - 5 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2$$

$$15 \cdot t = 40 - 5 \cdot t \rightarrow 20 \cdot t = 40 \rightarrow t = 2 \text{ s}$$

Por tanto, los cuerpos se cruzan a los 2 segundos y se encuentran a una altura:

$$y = y_1 = y_2 = 15 \cdot 2 - 4{,}9 \cdot 2^2 = 10{,}4 \text{ m}$$

La velocidad de la moneda en ese instante es:

$$v_1 = 15 - 9{,}8 \cdot 2 = -4{,}6 \text{ m/s}$$

donde el signo negativo indica que la moneda está bajando.

La moneda alcanza la altura máxima cuando su velocidad es cero; luego:

$$v_1 = 0 = 15 - 9{,}8 \cdot t \rightarrow t = 1{,}53 \text{ s}$$

En ese instante, la piedra se encuentra a una altura:

$$y_2 = 40 - 5 \cdot 1{,}53 - 4{,}9 \cdot (1{,}53)^2 = 20{,}88 \text{ m}$$

13. Una pelota rueda por una mesa horizontal de 75 cm de altura con una velocidad de 10 m/s y, cuando llega al borde, cae al suelo. Calcula: a) La distancia a la que cae de la mesa. b) Su velocidad al llegar al suelo.

La pelota realiza un tiro horizontal, cuyas ecuaciones son:

$$x = v_0 \cdot t = 10 \cdot t \quad ; \quad v_x = 10 \text{ m/s}$$

$$y = H - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 0{,}75 - 4{,}9 \cdot t^2 \quad ; \quad v_y = -g \cdot t = -9{,}8 \cdot t$$

Cuando la pelota llega al suelo, la coordenada y vale 0; luego:

$$0 = 0{,}75 - 4{,}9 \cdot t^2 \rightarrow t = 0{,}39 \text{ s}$$

Es decir, la pelota tarda en caer desde la mesa al suelo 0,39 segundos.

a) La pelota cae a una distancia de la mesa:

$$x = 10 \cdot t = 10 \cdot 0{,}39 = 3{,}9 \text{ m}$$

b) La pelota llega al suelo con una velocidad:

$$\left.\begin{array}{l} v_x = 10 \text{ m/s} \\ v_y = -9{,}8 \cdot t = -9{,}8 \cdot 0{,}39 = -3{,}82 \text{ m/s} \end{array}\right\} \rightarrow v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{10^2 + 3{,}82^2} = 10{,}7 \text{ m/s}$$

14. Un avión vuela horizontalmente a 150 m/s y suelta un paquete que tarda 10 s en caer al suelo. Calcula: a) La altura de vuelo del avión. b) La distancia hasta la vertical del punto de lanzamiento a la que cae el paquete.

El paquete realiza un tiro horizontal, de ecuaciones:

$$x = v_0 \cdot t = 150 \cdot t \quad ; \quad v_x = 150 \text{ m/s}$$
$$y = H - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = H - 4{,}9 \cdot t^2 \quad ; \quad v_y = -g \cdot t = -9{,}8 \cdot t$$

a) Como el paquete tarda 10 segundos en llegar al suelo, la altura desde la que cae es:

$$0 = H - 4{,}9 \cdot 10^2 \rightarrow H = 490 \text{ m}$$

Luego, el avión vuela a una altura de 490 m.

b) Para calcular la distancia a la que cae el paquete del pie de la vertical del punto de lanzamiento, sustituimos el tiempo de vuelo en la ecuación de la coordenada x:

$$x = 150 \cdot 10 = 1500 \text{ m}$$

15. Si un arquero dispara una flecha horizontalmente desde una altura de 1,50 m y llega al suelo a una distancia de 200 m, calcula la velocidad con que sale la flecha del arco y con la que llega al suelo.

Como la flecha es disparada horizontalmente, su velocidad inicial solo tiene componente horizontal y, por tanto, realiza un tiro horizontal, cuyas ecuaciones son:

$$x = v_0 \cdot t \quad ; \quad v_x = v_0$$
$$y = H - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 1{,}5 - 4{,}9 \cdot t^2 \quad ; \quad v_y = -g \cdot t = -9{,}8 \cdot t$$

Cuando la flecha llega al suelo, $y = 0$ y $x = 200$ m, luego:

$$200 = v_0 \cdot t \quad ; \quad 0 = 1{,}5 - 4{,}9 \cdot t^2$$

De la segunda ecuación despejamos el tiempo que tarda en caer la flecha: $t = 0{,}55$ s. Sustituyendo en la primera ecuación, obtenemos la velocidad inicial de la flecha:

$$200 = v_0 \cdot 0{,}55 \rightarrow v_0 = \frac{200}{0{,}55} = 363{,}64 \text{ m/s}$$

Las componentes de la velocidad de la flecha al llegar al suelo son:

$$v_x = 364 \text{ m/s} \quad ; \quad v_y = -9{,}8 \cdot 0{,}55 = -5{,}39 \text{ m/s}$$

Luego, el módulo de la velocidad de la flecha en ese instante es:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{363{,}64^2 + 5{,}39^2} = 363{,}68 \text{ m/s}$$

16. Obtén las expresiones de la altura máxima, del tiempo de vuelo y del alcance, para un cuerpo lanzado desde el suelo con una elevación α. Comprueba que el alcance tiene el mismo valor para ángulos complementarios.

Partimos de las ecuaciones de la velocidad y de la posición en un tiro oblicuo con altura inicial nula:

$$x = v_{0x} \cdot t = v_0 \cdot cos\,\alpha \cdot t \quad ; \quad v_x = v_{0x} = v_0 \cdot cos\,\alpha$$
$$y = v_0 \cdot sen\,\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad ; \quad v_y = v_0 \cdot sen\,\alpha - g \cdot t$$

La altura máxima se alcanza cuando la componente vertical de la velocidad del cuerpo se anula:

$$v_y = 0 \rightarrow v_0 \cdot sen\,\alpha = g \cdot t \rightarrow t = \frac{v_0 \cdot sen\,\alpha}{g}$$

Sustituyendo este tiempo en la ecuación de la componente vertical de la posición, obtenemos la altura máxima:

$$y_{máx} = v_0 \cdot sen\,\alpha \cdot \frac{v_0 \cdot sen\,\alpha}{g} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{v_0^2 \cdot sen^2\,\alpha}{g^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2 \cdot sen^2\,\alpha}{g}$$

Para obtener el tiempo de vuelo, igualamos a cero la componente vertical de la posición:

$$y = 0 \rightarrow v_0 \cdot sen\,\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 0 \rightarrow t \cdot (v_0 \cdot sen\,\alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t) = 0$$

Excluyendo la solución $t = 0$ (instante inicial), el tiempo de vuelo es:

$$t = 2 \cdot \frac{v_0 \cdot sen\,\alpha}{g}$$

Observa que este tiempo es el doble del obtenido anteriormente para la altura máxima, ya que el lanzamiento es desde el suelo.

El alcance es la distancia horizontal recorrida durante el tiempo de vuelo:

$$x_{máx} = v_0 \cdot cos\,\alpha \cdot t = v_0 \cdot cos\,\alpha \cdot 2 \cdot \frac{v_0 \cdot sen\,\alpha}{g} \rightarrow x_{máx} = \frac{v_0^2 \cdot 2 \cdot sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha}{g}$$

Haciendo uso de la relación trigonométrica del ángulo doble, finalmente resulta:

$$x_{máx} = \frac{v_0^2 \cdot sen\,(2 \cdot \alpha)}{g}$$

Si consideramos un ángulo β, complementario de α, obtenemos:

$$\beta = 90° - \alpha \rightarrow x_{máx} = \frac{v_0^2 \cdot sen\,(2 \cdot \beta)}{g} = \frac{v_0^2 \cdot sen\,[2 \cdot (90° - \alpha)]}{g}$$

Teniendo en cuenta que *sen* $(90° - \alpha) =$ *cos* α y que *cos* $(90° - \alpha) =$ *sen* α, y haciendo uso de nuevo de la relación del ángulo doble:

$$sen\,[2 \cdot (90° - \alpha)] = 2 \cdot sen\,(90° - \alpha) \cdot cos\,(90° - \alpha) = 2 \cdot cos\,\alpha \cdot sen\,\alpha = sen\,(2 \cdot \alpha)$$

Llegamos, finalmente, a la expresión anteriormente obtenida para el alcance:

$$x_{máx} = \frac{v_0^2 \cdot sen\,(2 \cdot \alpha)}{g}$$

17. Un jugador de baloncesto lanza el balón desde una altura de 2,50 m con una elevación de 37° y encesta en la canasta situada a 6,25 m de distancia y 3,05 m de altura. Calcula la velocidad con que lanzó el balón.

El balón sigue una trayectoria correspondiente a un tiro oblicuo. Si situamos el origen en el pie de la vertical del punto de lanzamiento, las ecuaciones del movimiento son:

$$x = v_0 \cdot cos\,\alpha \cdot t = v_0 \cdot 0{,}8 \cdot t \quad ; \quad v_x = v_0 \cdot 0{,}8$$

$$y = H + v_0 \cdot sen\,\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 2{,}5 + v_0 \cdot 0{,}6 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 \quad ; \quad v_y = v_0 \cdot 0{,}6 - 9{,}8 \cdot t$$

Cuando el balón entra en la canasta, la coordenada x de su posición vale 6,25 m y la coordenada y vale 3,05 m; sustituyendo estos valores en las respectivas ecuaciones, tenemos:

$$6{,}25 = v_0 \cdot 0{,}8 \cdot t \quad ; \quad 3{,}05 = 2{,}5 + v_0 \cdot 0{,}6 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2$$

Si despejamos t en la primera ecuación y lo sustituimos en la segunda, se obtiene:

$$t = \frac{6{,}25}{v_0 \cdot 0{,}8} \rightarrow 3{,}05 = 2{,}5 + v_0 \cdot 0{,}6 \cdot \frac{6{,}25}{v_0 \cdot 0{,}8} - 4{,}9 \cdot \left(\frac{6{,}25}{v_0 \cdot 0{,}8}\right)^2$$

Desarrollando esta expresión y despejando la velocidad del lanzamiento, resulta:

$$0{,}55 = \frac{0{,}6 \cdot 6{,}25}{0{,}8} - \frac{4{,}9 \cdot 6{,}25^2}{v_0^2 \cdot 0{,}64} \rightarrow 0{,}55 = 4{,}69 - \frac{299{,}07}{v_0^2} \rightarrow v_0 = 8{,}5 \text{ m/s}$$

El jugador lanza el balón con una velocidad de 8,5 m/s.

18. Una pelota que desliza por un tejado, de 45° de inclinación, lleva una velocidad de 12 m/s cuando llega al borde, que se encuentra a una altura de 18 m. Calcula: a) La distancia a la que cae del edificio. b) Su velocidad en ese instante.

Cuando abandona el tejado, la pelota sigue una trayectoria parabólica correspondiete a un tiro oblicuo hacia abajo. Situando el origen de coordenadas en el pie de la vertical del punto en que abandona el tejado y el semieje Y positivo hacia arriba, las ecuaciones de su movimiento son:

$$x = v_0 \cdot cos\,\alpha \cdot t = 12 \cdot 0{,}7 \cdot t = 8{,}4 \cdot t \quad ; \quad v_x = 8{,}4 \text{ m/s}$$

$$y = H + v_0 \cdot sen\,\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = 18 - 8{,}4 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 \quad ; \quad v_y = -8{,}4 - 9{,}8 \cdot t$$

a) Cuando la pelota llega al suelo, $y = 0$; luego:

$$y = 0 \rightarrow 4{,}9 \cdot t^2 + 8{,}4 \cdot t - 18 = 0$$

Al resolver esta ecuación de segundo grado, tenemos:

$$t = \frac{-8{,}4 \pm \sqrt{8{,}4^2 - 4 \cdot 4{,}9 \cdot (-18)}}{2 \cdot 4{,}9} = \frac{-8{,}4 \pm 20{,}57}{9{,}8} \left\langle \begin{array}{l} t_1 = +1{,}24 \\ t_2 = -2{,}96 \end{array} \right.$$

La solución correcta es la positiva, pues un tiempo negativo no tiene sentido físico; luego, la pelota tarda en caer del tejado a la calle 1,24 s, y cae a una distancia:

$$x = 8{,}4 \cdot 1{,}24 = 10{,}42 \text{ m}$$

b) Cuando la pelota llega al suelo, las componentes de su velocidad son:

$$v_x = 8{,}4 \text{ m/s} \quad ; \quad v_y = -8{,}4 - 9{,}8 \cdot 1{,}24 = -20{,}55 \text{ m/s}$$

y, por tanto, su módulo es:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{8{,}4^2 + (-20{,}55)^2} = \sqrt{70{,}56 + 422{,}3} = 22{,}2 \text{ m/s}$$

19. Calcula la velocidad con que se ha lanzado un balón para que choque a 3 m de altura con una pared situada a 9 m, si sale con una elevación de 30°. El balón ¿está ascendiendo o descendiendo cuando choca con la pared?

El balón es lanzado siguiendo un tiro oblicuo hacia arriba. Las ecuaciones de su movimiento son:

$$x = v_0 \cdot cos\ 30° \cdot t = v_0 \cdot 0{,}866 \cdot t \quad ; \quad v_x = v_0 \cdot 0{,}866$$

$$y = v_0 \cdot sen\ 30° \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_0 \cdot 0{,}5 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 \quad ; \quad v_y = v_0 \cdot 0{,}5 - 9{,}8 \cdot t$$

Cuando el balón choca con la pared, su posición viene dada por las coordenadas $x = 9$ m e $y = 3$ m. Sustituyendo estos valores en las correspondientes ecuaciones, tenemos:

$$9 = v_0 \cdot 0{,}866 \cdot t \quad ; \quad 3 = v_0 \cdot 0{,}5 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2$$

De la primera ecuación:

$$v_0 \cdot t = \frac{9}{0{,}866} = 10{,}39$$

Y sustituyendo en la segunda:

$$3 = 10{,}39 \cdot 0{,}5 - 4{,}9 \cdot t^2$$

De donde obtenemos el tiempo que tarda el balón en llegar a la pared:

$$t = 0{,}67 \text{ s}$$

La velocidad inicial vale:

$$v_0 = \frac{10{,}39}{0{,}67} = 15{,}51 \text{ m/s}$$

Cuando el balón llega a la pared, la componente vertical de la velocidad vale:

$$v_y = 15{,}51 \cdot 0{,}5 - 9{,}8 \cdot 0{,}67 = 1{,}19 \text{ m/s}$$

Como la componente vertical de la velocidad es positiva, el balón todavía está subiendo.

20. Para cada una de las manecillas de un reloj (segundero, minutero y horario), calcula: a) El período. b) La frecuencia. c) La velocidad angular, en rad/s.

Recordando que el período, *T*, es el tiempo que tarda en dar una vuelta, y las relaciones entre este y la frecuencia y la velocidad angular:

$$f = \frac{1}{T} \quad ; \quad \omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot f$$

tenemos:

– El segundero tarda 60 s en completar una vuelta; por tanto:

$$T = 60 \text{ s} \quad ; \quad f = \frac{1}{60} = 1{,}67 \cdot 10^{-2} \text{ Hz} \quad ; \quad \omega = \frac{2 \cdot \pi}{60} = 0{,}105 \text{ rad/s}$$

– El minutero pasa por la misma posición cada 60 minutos. Por tanto:

$$T = 3\,600 \text{ s} \quad ; \quad f = 2{,}78 \cdot 10^{-4} \text{ Hz} \quad ; \quad \omega = 1{,}75 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$$

– El horario recorre una vuelta cada 12 horas, con lo que resulta:

$$T = 43\,200 \text{ s} \quad ; \quad f = 2{,}31 \cdot 10^{-5} \text{ Hz} \quad ; \quad \omega = 1{,}45 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$$

21. Un taladro eléctrico puede trabajar en dos modos: 1 000 r.p.m. y 2 500 r.p.m. Expresa en rad/s la velocidad angular con que gira la broca en cada situación y calcula la velocidad lineal de un punto de su periferia si tiene un diámetro de 1 cm.

En el primer modo tenemos:

$$\omega_1 = 1\,000 \text{ r.p.m.} = \frac{1\,000 \text{ rev}}{1 \text{ min}} = \frac{1\,000 \cdot 2 \cdot \pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 104{,}72 \text{ rad/s}$$

Y en el segundo:

$$\omega_2 = 2\,500 \text{ r.p.m.} = \frac{2\,500 \text{ rev}}{1 \text{ min}} = \frac{2\,500 \cdot 2 \cdot \pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 261{,}80 \text{ rad/s}$$

Teniendo en cuenta que $v = \omega \cdot R$ y que el radio de la broca vale 0,5 cm = $5 \cdot 10^{-3}$ m:

$$v_1 = \omega_1 \cdot R = 104{,}72 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 0{,}52 \text{ m/s} \quad ; \quad v_2 = \omega_2 \cdot R = 261{,}8 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 1{,}31 \text{ m/s}$$

22. Un cuerpo recorre una circunferencia de 20 m de radio con una velocidad lineal de 15 m/s. Calcula: a) El período y la frecuencia. b) Su velocidad angular. c) Su aceleración. d) El número de vueltas que da en 10 minutos.

a) y b) Teniendo en cuenta la relación $v = \omega \cdot R$, y que la frecuencia es la inversa del período, tenemos:

$$v = \omega \cdot R \rightarrow \omega = \frac{v}{R} = \frac{15}{20} = 0{,}75 \text{ rad/s}$$

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} \rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{0{,}75} = 8{,}38 \text{ s} \rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{8{,}38} = 0{,}12 \text{ Hz}$$

c) La aceleración del cuerpo, al describir un m.c.u., es únicamente aceleración normal:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{15^2}{20} = 11{,}25 \text{ m/s}^2$$

d) El ángulo girado en 10 minutos es:

$$\phi = \omega \cdot t = 0{,}75 \cdot 600 = 450 \text{ rad}$$

Por tanto, el número de vueltas que ha dado es:

$$n.^o \textit{ de vueltas} = \frac{450 \text{ rad}}{2 \cdot \pi \dfrac{\text{rad}}{\text{vuelta}}} = 71{,}62 \text{ vueltas}$$

23. La Tierra gira alrededor de sí misma empleando 24 horas en dar una vuelta. Calcula: a) Su velocidad angular, en rad/s y en r.p.m. b) La velocidad lineal de un punto del ecuador. c) La aceleración de este punto. Dato: R_T = 6 370 km.

El período de la Tierra en su giro alrededor de sí misma es:

$$T = 1 \text{ día} = 24 \text{ h} = 24 \cdot 60 \text{ min} = 1440 \text{ min} = 24 \cdot 60 \cdot 60 = 86\,400 \text{ s}$$

a) La velocidad angular de la Tierra en el giro alrededor de sí misma es, en rad/s y en r.p.m.:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{86\,400 \text{ s}} = 7{,}27 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

$$\omega = \frac{1 \text{ vuelta}}{1440 \text{ min}} = 6{,}94 \cdot 10^{-4} \text{ r.p.m.}$$

b) La velocidad lineal de un punto del ecuador es:

$$v = \omega \cdot R = 7{,}27 \cdot 10^{-5} \cdot 6{,}37 \cdot 10^{6} = 463{,}09 \text{ m/s}$$

c) La aceleración de este punto es aceleración normal, y vale:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R = (7{,}27 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 = 0{,}03 \text{ m/s}^2$$

24. Un disco de 30 cm de diámetro, inicialmente en reposo, empieza a girar alrededor de un eje perpendicular y que pasa por su centro con una aceleración angular de 5 rad/s². Calcula, a los 20 s: a) Su velocidad angular y el número de vueltas que ha dado. b) La velocidad lineal y el espacio recorrido por un punto del borde del disco.

El disco realiza un m.c.u.a. sin velocidad angular inicial, cuyas ecuaciones son:

$$\phi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \quad ; \quad \omega = \alpha \cdot t$$

a) La velocidad angular a los 20 s es:

$$\omega = \alpha \cdot t = 5 \cdot 20 = 100 \text{ rad/s}$$

y el ángulo girado en ese tiempo vale:

$$\phi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 20^2 = 1\,000 \text{ rad}$$

Por tanto, ha dado:

$$n.^o \textit{ de vueltas} = \frac{1\,000}{2 \cdot \pi} = 159{,}15 \text{ vueltas}$$

b) Un punto del borde del disco se encuentra a 15 cm = 0,15 m del centro de giro; por tanto, su velocidad lineal es:

$$v = \omega \cdot R = 100 \cdot 0{,}15 = 15 \text{ m/s}$$

y el espacio que recorre:

$$s = \phi \cdot R = 1\,000 \cdot 0{,}15 = 150 \text{ m}$$

25. El velocímetro de una bicicleta estática indica la velocidad lineal de un punto de la periferia de la rueda. Si inicialmente marca 36 km/h y a los 40 s marca 72 km/h, y la rueda tiene un diámetro de 50 cm, calcula: a) La velocidad angular inicial y final. b) La aceleración angular. c) Las vueltas que ha dado la rueda en ese tiempo.

a) La velocidad lineal inicial es v_0 = 36 km/h = 10 m/s, y el radio, 50 cm = 0,5 m; entonces, la velocidad angular inicial vale:

$$v_0 = \omega_0 \cdot R \rightarrow \omega_0 = \frac{v_0}{R} = \frac{10}{0{,}5} = 20 \text{ rad/s}$$

A los 40 s, la velocidad lineal vale v_f = 72 km/h = 20 m/s; entonces, la velocidad angular en ese instante vale:

$$\omega = \frac{v_f}{R} = \frac{20}{0{,}5} = 40 \text{ rad/s}$$

b) La aceleración angular, supuesta constante, vale:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{40 - 20}{40} = 0{,}5 \text{ rad/s}^2$$

c) El ángulo girado en ese tiempo vale:

$$\phi = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 = 20 \cdot 40 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 40^2 = 1\,200 \text{ rad}$$

Por tanto, el número de vueltas que ha dado la rueda es:

$$n.^o \textit{ de vueltas} = \frac{1\,200 \text{ rad}}{2 \cdot \pi \text{ rad/vuelta}} = 191 \text{ vueltas}$$

26. Un volante de 20 cm de radio pasa de 200 r.p.m. a 500 r.p.m. en 30 s. Calcula: a) Su aceleración angular. b) El ángulo girado en ese tiempo, en radianes y en vueltas. c) La velocidad lineal y el espacio recorrido por un punto de su periferia a los 10 s. d) La aceleración tangencial y la normal de ese punto en ese instante.

En primer lugar, pasamos los datos al Sistema Internacional:

$$\omega_0 = 200 \text{ r.p.m.} = \frac{200 \cdot 2 \cdot \pi}{60} = 20{,}94 \text{ rad/s}$$

$$\omega_f = 500 \text{ r.p.m.} = \frac{500 \cdot 2 \cdot \pi}{60} = 52{,}36 \text{ rad/s}$$

a) La aceleración angular del volante vale:

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{t} = \frac{52{,}36 - 20{,}94}{30} = 1{,}05 \text{ rad/s}^2$$

b) El ángulo girado y el número de vueltas a que equivale es:

$$\phi = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 = 20{,}94 \cdot 30 + \frac{1}{2} \cdot 1{,}05 \cdot 30^2 = 1\,100{,}7 \text{ rad}$$

$$n.^o \textit{ de vueltas} = \frac{1\,100{,}7 \text{ rad}}{2 \cdot \pi \text{ rad/vuelta}} = 175{,}18 \text{ vueltas}$$

c) A los 10 s, la velocidad angular vale:

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t = 20{,}94 + 1{,}05 \cdot 10 = 31{,}44 \text{ rad/s}$$

Luego, la velocidad lineal de un punto de la periferia del volante es:

$$v = \omega \cdot R = 31{,}44 \cdot 0{,}2 = 6{,}29 \text{ m/s}$$

El espacio recorrido por un punto de la periferia lo obtenemos a partir del ángulo girado por el volante en 10 s:

$$\phi = 20{,}94 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 1{,}05 \cdot 10^2 = 261{,}9 \text{ rad}$$

Por tanto, un punto de la periferia del volante ha recorrido:

$$s = \phi \cdot R = 261{,}9 \cdot 0{,}2 = 52{,}38 \text{ m}$$

d) La aceleración tangencial de un punto de la periferia del volante vale:

$$a_t = \alpha \cdot R = 1{,}05 \cdot 0{,}2 = 0{,}21 \text{ m/s}^2$$

Y la aceleración normal en ese instante es:

$$a_n = \omega^2 \cdot R = 31{,}44^2 \cdot 0{,}2 = 197{,}69 \text{ m/s}^2$$