Cinemática: magnitudes cinemáticas

1. Halla la expresión del vector posición, y su módulo, para los siguientes puntos: a) $P_1(-2, 4)$. b) $P_2(2, 0)$. c) $P_3(0, 4)$. d) $P_4(0, -4)$.

Obtenemos el vector posición para cada punto empleando la expresión:

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = x \cdot \vec{u}_x + y \cdot \vec{u}_y$$

y, para el módulo:

$$|\vec{r}\,| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Por tanto resulta, para cada punto, lo siguiente:

a) $\overrightarrow{OP_1} = \vec{r}_1 = (-2 \cdot \vec{u}_x + 4 \cdot \vec{u}_y)$ m

$|\vec{r}_1| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 4{,}47$ m

b) $\overrightarrow{OP_2} = \vec{r}_2 = 2 \cdot \vec{u}_x + 0 \cdot \vec{u}_y = 2 \cdot \vec{u}_x$ m

$|\vec{r}_2| = \sqrt{2^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2$ m

c) $\overrightarrow{OP_3} = \vec{r}_3 = 0 \cdot \vec{u}_x + 4 \cdot \vec{u}_y = 4 \cdot \vec{u}_y$ m

$|\vec{r}_3| = \sqrt{0^2 + 4^2} = \sqrt{16} = 4$ m

d) $\overrightarrow{OP_4} = \vec{r}_4 = 0 \cdot \vec{u}_x + (-4) \cdot \vec{u}_y = -4 \cdot \vec{u}_y$ m

$|\vec{r}_4| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4$ m

2. El vector posición de un cuerpo viene dado por la ecuación:

$$\vec{r} = (t + 1) \cdot \vec{u}_x + \vec{u}_y$$

expresada en unidades del S.I. Calcula, para dicho cuerpo: a) Su posición inicial. b) Su distancia al origen en $t = 3$ s. c) La expresión del vector desplazamiento y su módulo, entre los instantes $t_1 = 1$ s y $t_2 = 4$ s.

a) Para el instante $t = 0$, se obtiene la posición inicial: $P_0 = (1, 1)$ m.

b) Para $t = 3$ s, el vector posición del cuerpo es:

$$\vec{r} = 4 \cdot \vec{u}_x + \vec{u}_y$$

Por tanto, el cuerpo se encuentra en el punto:

$$P = (4, 1) \text{ m}$$

Entonces, la distancia al origen en este instante es:

$$|\overrightarrow{OP}| = |\vec{r}\,| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17} = 4{,}12 \text{ m}$$

c) Para $t_1 = 1$ s $\rightarrow \vec{r}_1 = 2 \cdot \vec{u}_x + \vec{u}_y \;\; \rightarrow \;\; P_1 = (2, 1)$ m.

Para $t_2 = 4$ s $\rightarrow \vec{r}_2 = 5 \cdot \vec{u}_x + \vec{u}_y \;\; \rightarrow \;\; P_2 = (5, 1)$ m.

El vector desplazamiento entre las posiciones P_1 y P_2 es:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (5 - 2) \cdot \vec{u}_x + (1 - 1) \cdot \vec{u}_y = 3 \cdot \vec{u}_x \text{ m}$$

y su módulo:

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{3^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3 \text{ m}$$

3. Un móvil está en el instante t_1 = 1 s, en P_1(3, 5), y en t_2 = 5 s, en P_2(15, 21). Las coordenadas se miden en m. Calcula la velocidad media entre ambas posiciones.

Para $t_1 = 1$ s, el vector posición del móvil es $\vec{r}_1 = 3 \cdot \vec{u}_x + 5 \cdot \vec{u}_y$, y para $t_2 = 5$ s, el vector posición del móvil es $\vec{r}_2 = 15 \cdot \vec{u}_x + 21 \cdot \vec{u}_y$; luego, la velocidad media entre ambos instantes es:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{(15 - 3) \cdot \vec{u}_x + (21 - 5) \cdot \vec{u}_y}{5 - 1} =$$

$$= \frac{12 \cdot \vec{u}_x}{4} + \frac{16 \cdot \vec{u}_y}{4} = (3 \cdot \vec{u}_x + 4 \cdot \vec{u}_y) \text{ m/s}$$

Su módulo es:

$$|\vec{v}_m| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ m/s}$$

4. La Luna tarda 28 días en dar una vuelta alrededor de la Tierra. Considerando su trayectoria como una circunferencia de 384 000 km de radio, ¿cuál es la celeridad media con que se traslada la Luna? Calcula el módulo de la velocidad media de la Luna en media vuelta y en una vuelta completa.

Cuando la Luna ha dado una vuelta, el espacio recorrido es igual a la longitud de la circunferencia:

$$\Delta s = 2 \cdot \pi \cdot R = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}84 \cdot 10^8 \text{ m} = 24{,}12 \cdot 10^8 \text{ m}$$

y tarda en recorrer dicho espacio 28 días, es decir, 2 419 200 s; luego, la celeridad media es:

$$c_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{24{,}12 \cdot 10^8 \text{ m}}{2\,419\,200 \text{ s}} = 997{,}02 \text{ m/s}$$

El módulo del vector desplazamiento en media vuelta es igual al diámetro de la circunferencia:

$$|\Delta\vec{r}| = D = 2 \cdot 3{,}84 \cdot 10^8 \text{ m} = 7{,}68 \cdot 10^8 \text{ m}$$

y el tiempo empleado es de 14 días; esto es, 1 209 600 s.

Luego, el módulo de la velocidad media es v_m = 634,92 m/s.

En una vuelta completa, como la posición final coincide con la inicial, el vector desplazamiento es nulo y, por tanto, la velocidad media en este caso es nula.

5. Las ecuaciones de la trayectoria de un móvil son:

$$\boldsymbol{x = 2 + 3 \cdot t \quad ; \quad y = t^2}$$

en unidades del S.I. Calcula su velocidad media entre los instantes $t_1 = 1$ s y $t_2 = 3$ s.

Para $t = 1$ s, sustituyendo en las ecuaciones del movimiento, tenemos:

$$x_1 = 2 + 3 \cdot 1 = 5 \text{ m} \quad ; \quad y_1 = 1^2 = 1 \text{ m}$$

Luego, el vector posición es:

$$\vec{r}_1 = (5 \cdot \vec{u}_x + \vec{u}_y) \text{ m}$$

Para $t = 3$ s:

$$x_3 = 2 + 3 \cdot 3 = 11 \text{ m} \quad ; \quad y_3 = 3^2 = 9 \text{ m}$$

Luego, el vector posición es:

$$\vec{r}_3 = (11 \cdot \vec{u}_x + 9 \cdot \vec{u}_y) \text{ m}$$

El vector desplazamiento entre ambas posiciones es:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1 = (11 - 5) \cdot \vec{u}_x + (9 - 1) \cdot \vec{u}_y = (6 \cdot \vec{u}_x + 8 \cdot \vec{u}_y) \text{ m}$$

Por tanto, la velocidad media entre estas posiciones es:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{6 \cdot \vec{u}_x + 8 \cdot \vec{u}_y}{3 - 1} = (3 \cdot \vec{u}_x + 4 \cdot \vec{u}_y) \text{ m/s}$$

6. La ecuación del movimiento de un cuerpo es: $\vec{r} = (5 + 8 \cdot t) \cdot \vec{u}_x + t^2 \cdot \vec{u}_y$, en unidades del S.I. Calcula, para el intervalo comprendido entre $t_1 = 2$ s y $t_2 = 4$ s, la velocidad media del cuerpo.

La posición del móvil para $t_1 = 2$ s es un punto, P_1, cuyas coordenadas son:

$$x = 5 + 8 \cdot 2 = 21 \text{ m} \quad ; \quad y = 2^2 = 4 \text{ m}$$

Por tanto, el punto P_1 es:

$$P_1 = (21, 4) \text{ m}$$

La posición del móvil para $t_2 = 4$ s es un punto, P_2, cuyas coordenadas son:

$$x = 5 + 8 \cdot 4 = 37 \text{ m} \quad ; \quad y = 4^2 = 16 \text{ m}$$

Por tanto, el punto P_2 es:

$$P_2 = (37, 16) \text{ m}$$

El vector desplazamiento entre ambas posiciones resulta:

$$\Delta\vec{r} = \overrightarrow{P_1P_2} = (37 - 21) \cdot \vec{u}_x + (16 - 4) \cdot \vec{u}_y = (16 \cdot \vec{u}_x + 12 \cdot \vec{u}_y) \text{ m}$$

Entonces, la velocidad media entre ambas posiciones es:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{16 \cdot \vec{u}_x + 12 \cdot \vec{u}_y}{4 - 2} = (8 \cdot \vec{u}_x + 6 \cdot \vec{u}_y) \text{ m/s}$$

siendo su módulo:

$$|\vec{v}_m| = v_m = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ m/s}$$

7. El vector posición de un móvil es:

$$\vec{r}\,(t) = t^2 \cdot \vec{u}_x + 10 \cdot t \cdot \vec{u}_y$$

expresado en unidades del S.I. Calcula:

a) Su velocidad media entre t = 2 s y t = 6 s. b) Su velocidad media entre los instantes t y $t + \Delta t$. c) Su velocidad en el instante t. d) El módulo de su velocidad para t = 2 s y para t = 6 s.

a) Los vectores posición para t = 2 s, $\vec{r}_2$, y para t = 6 s, $\vec{r}_6$, son:

$$\vec{r}_2 = (4 \cdot \vec{u}_x + 20 \cdot \vec{u}_y)\ \text{m} \quad ; \quad \vec{r}_6 = (36 \cdot \vec{u}_x + 60 \cdot \vec{u}_y)\ \text{m}$$

Luego, el vector desplazamiento vale:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_6 - \vec{r}_2 = (36 - 4) \cdot \vec{u}_x + (60 - 20) \cdot \vec{u}_y = (32 \cdot \vec{u}_x + 40 \cdot \vec{u}_y)\ \text{m}$$

Entonces, la velocidad media entre estas posiciones es:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{32 \cdot \vec{u}_x + 40 \cdot \vec{u}_y}{6 - 2} = (8 \cdot \vec{u}_x + 10 \cdot \vec{u}_y)\ \text{m}$$

b) El vector posición para el instante t es:

$$\vec{r}(t) = t^2 \cdot \vec{u}_x + 10 \cdot t \cdot \vec{u}_y$$

y para $t + \Delta t$:

$$\vec{r}\,(t + \Delta t) = (t + \Delta t)^2 \cdot \vec{u}_x + 10 \cdot (t + \Delta t) \cdot \vec{u}_y =$$
$$= \left(t^2 + 2 \cdot t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2\right) \cdot \vec{u}_x + (10 \cdot t + 10 \cdot \Delta t) \cdot \vec{u}_y$$

Por tanto, el vector desplazamiento es:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}\,(t + \Delta t) - \vec{r}\,(t) = \left(2 \cdot t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2\right) \cdot \vec{u}_x + (10 \cdot t \cdot \Delta t) \cdot \vec{u}_y$$

y la velocidad media entre t y $t + \Delta t$ es:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\left(2 \cdot t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2\right) \cdot \vec{u}_x + 10 \cdot \Delta t \cdot \vec{u}_y}{\Delta t} = \left[(2 \cdot t + \Delta t) \cdot \vec{u}_x + 10 \cdot \vec{u}_y\right]\ \text{m/s}$$

c) La velocidad en el instante t es el límite de la velocidad media cuando Δt tiende a cero; luego:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[(2 \cdot t + \Delta t) \cdot \vec{u}_x + 10 \cdot \vec{u}_y\right] = (2 \cdot t \cdot \vec{u}_x + 10 \cdot \vec{u}_y)\ \text{m/s}$$

d) La velocidad para t = 2 s es:

$$\vec{v}_m = (4 \cdot \vec{u}_x + 10 \cdot \vec{u}_y)\ \text{m/s}$$

Luego, su módulo vale:

$$|\vec{v}_2| = \sqrt{4^2 + 10^2} = \sqrt{116} = 10{,}77\ \text{m/s}$$

La velocidad, y su módulo, para t = 6 s es:

$$\vec{v}_6 = (12 \cdot \vec{u}_x + 10 \cdot \vec{u}_y)\ \text{m/s}$$

$$|\vec{v}_6| = \sqrt{12^2 + 10^2} = \sqrt{244} = 15{,}62\ \text{m/s}$$

8. Un cuerpo se mueve de acuerdo con la siguiente ley horaria: $s = 5 + 10 \cdot t + t^2$, donde s se expresa en m, y t, en s. Calcula: a) El espacio inicial y el espacio a los 5 s. b) La celeridad media durante los cinco primeros segundos. c) Su celeridad media entre t y $t + \Delta t$. d) Su celeridad en cualquier instante.

a) El espacio inicial es el valor para $t = 0$ s; luego:

$$s_0 = 5 \text{ m}$$

y para $t = 5$ s:

$$s_5 = 5 + 10 \cdot 5 + 5^2 = 80 \text{ m}$$

b) La celeridad media en los 5 primeros segundos es:

$$c_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{80 - 5}{5 - 0} = \frac{75}{5} = 15 \text{ m/s}$$

c) Calculamos el espacio para el instante t:

$$s(t) = 5 + 10 \cdot t + t^2$$

y para $t + \Delta t$:

$$s(t + \Delta t) = 5 + 10 \cdot (t + \Delta t) + (t + \Delta t)^2 = 5 + 10 \cdot t + 10 \cdot \Delta t + t^2 + 2 \cdot t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2$$

Luego, el espacio recorrido es:

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) = 10 \cdot \Delta t + 2 \cdot t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2$$

La celeridad media resulta:

$$c_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2 \cdot t \cdot \Delta t + 10 \cdot \Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = (2 \cdot t + 10 + \Delta t) \text{ m/s}$$

d) La celeridad en cualquier instante se obtiene calculando el límite de c_m cuando Δt tiende a cero:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} c_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (2 \cdot t + 10 + \Delta t) = (2 \cdot t + 10) \text{ m/s}$$

9. Un automóvil que circula en línea recta a 90 km/h acelera y, al cabo de 10 s, alcanza 108 km/h; mantiene esa velocidad durante 20 s y luego frena, deteniéndose en 5 s. Calcula el módulo de su aceleración media, en m/s²: a) En los 10 primeros segundos. b) En los 20 primeros segundos. c) Durante los 5 últimos segundos.

Expresamos los datos en unidades del Sistema Internacional:

$$v_0 = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s} \quad ; \quad v = 108 \text{ km/h} = 30 \text{ m/s}$$

Si tomamos la línea recta en que se mueve el automóvil como eje X, tenemos que la velocidad inicial y a los 10 s es:

$$\vec{v}_0 = 25 \cdot \vec{u}_x \text{ m/s} \quad ; \quad \vec{v} = 30 \cdot \vec{u}_x \text{ m/s}$$

la cual permanece constante durante 20 s; luego:

a) En los 10 primeros segundos, la velocidad inicial es $\vec{v}_0$, y la velocidad final es $\vec{v}$; luego, la aceleración media es:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{\Delta t} = \frac{30 \cdot \vec{u}_x - 25 \cdot \vec{u}_x}{10} = 0{,}5 \cdot \vec{u}_x \text{ m/s}^2$$

y su módulo vale:

$$a_m = 0{,}5 \text{ m/s}^2$$

b) En los 20 primeros segundos, la velocidad inicial es $\vec{v}_0$, y la velocidad final a los 20 s vale lo mismo que a los 10 s, pues entre 10 s y 20 s permanece constante; luego: $\vec{v} = 30 \cdot \vec{u}_x$. Sin embargo, el tiempo considerado es el doble que en el apartado anterior, por lo que la aceleración media resulta, en este caso:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{30 \cdot \vec{u}_x - 25 \cdot \vec{u}_x}{20} = 0{,}25 \cdot \vec{u}_x \text{ m/s}^2$$

siendo su módulo:

$$a_m = 0{,}25 \text{ m/s}^2$$

c) En los 5 últimos segundos, la velocidad inicial es $\vec{v}$, y la velocidad final es cero, pues el automóvil se detiene en ese instante; luego:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{0 \cdot \vec{u}_x - 30 \cdot \vec{u}_x}{5} = -6 \cdot \vec{u}_x \text{ m/s}^2$$

y su módulo vale:

$$a_m = 6 \text{ m/s}^2$$

10. La velocidad de un cuerpo viene dada por la ecuación: $\vec{v} = 4 \cdot t \cdot \vec{u}_x + 3 \cdot \vec{u}_y$, en unidades del S.I. Calcula: a) Su velocidad inicial y su velocidad al cabo de 2 s. b) Su aceleración media entre ambos instantes. c) Su aceleración media entre t y $t + \Delta t$. d) Su aceleración instantánea para $t = 2$ s.

a) La velocidad inicial del cuerpo es:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}(0) = 4 \cdot 0 \cdot \vec{u}_x + 3 \cdot \vec{u}_y = 3 \cdot \vec{u}_y \text{ m/s}$$

La velocidad del cuerpo para $t = 2$ s es:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}(2) = 4 \cdot 2 \cdot \vec{u}_x + 3 \cdot \vec{u}_y = (8 \cdot \vec{u}_x + 3 \cdot \vec{u}_y) \text{ m/s}$$

b) La aceleración media entre ambos instantes es:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{\Delta t} = \frac{8 \cdot \vec{u}_x + 3 \cdot \vec{u}_y - 3 \cdot \vec{u}_y}{2 - 0} = 4 \cdot \vec{u}_x \text{ m/s}^2$$

c) La velocidad del cuerpo para el instante t es:

$$\vec{v}(t) = 4 \cdot t \cdot \vec{u}_x + 3 \cdot \vec{u}_y$$

y para $t + \Delta t$:

$$\vec{v}(t + \Delta t) = 4 \cdot (t + \Delta t) \cdot \vec{u}_x + 3 \cdot \vec{u}_y = (4 \cdot t + 4 \cdot \Delta t) \cdot \vec{u}_x + 3 \cdot \vec{u}_y$$

Por tanto, la aceleración media en ese intervalo de tiempo vale:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{\Delta t} = \frac{(4 \cdot t + 4 \cdot \Delta t) \cdot \vec{u}_x + 3 \cdot \vec{u}_y - (4 \cdot t \cdot \vec{u}_x + 3 \cdot \vec{u}_y)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{4 \cdot \Delta t \cdot \vec{u}_x}{\Delta t} = 4 \cdot \vec{u}_x \text{ m/s}^2$$

d) Como la aceleración media es constante, en cualquier instante, t, coincide con la aceleración instantánea; luego, para $t = 2$ s:

$$\vec{a} = 4 \cdot \vec{u}_x \text{ m/s}^2$$