Problemas de Cinemática 1º Bachillerato

Caída libre y tiro horizontal

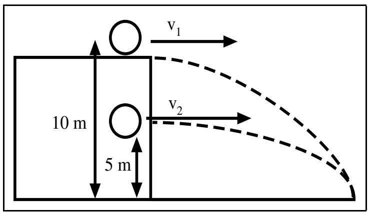
1. Desde un puente se tira hacia arriba una piedra con una velocidad inicial de 6 m/s. Calcula: a) Hasta qué altura se eleva la piedra; b) Cuánto tarda en volver a pasar hacia abajo al nivel del puente desde el que fue lanzada y cuál será entonces su velocidad; c) Si la piedra cae al río 1,94 s después de haber sido lanzada, ¿qué altura hay desde el puente hasta el río; d) Con qué velocidad llega la piedra a la superficie del agua.

2. Desde el suelo lanzamos hacia arriba un objeto a una determinada velocidad, llegando a cierta altura. Calcular por cuánto hemos de multiplicar su velocidad para que llegue al doble de altura.

3. Una pelota se lanza desde el suelo hacia arriba. En un segundo llega hasta una altura de 25 m. ¿Cuál será la máxima altura alcanzada?

4. Un avión vuela horizontalmente a 1200 m de altura, con una velocidad de 500 km/h y deja caer un paquete. Determina: a) El tiempo que le cuesta llegar al suelo el paquete; b) Qué distancia antes de llegar al suelo tiene que soltar la carga el avión para que llegue al punto correcto; c) Calcular la velocidad del paquete en el momento de llegar al suelo.

5. En los tiros horizontales mostrados en la figura, $v_1 = 4\ m/s$ y las alturas de lanzamiento son las que se indican, 10 y 5 m. Hallar cual debe ser la velocidad v_2 para que el alcance de ambos tiros sea el mismo.



6. Un surtidor de agua de una fuente se halla situado a 3 m del suelo. Si el agua sale horizontalmente, hallar qué velocidad debe tener para que alcance una distancia de 2 m. Con la velocidad calculada antes, determinar ahora a qué altura ha de ponerse el surtidor para que el alcance sea de 4 m.

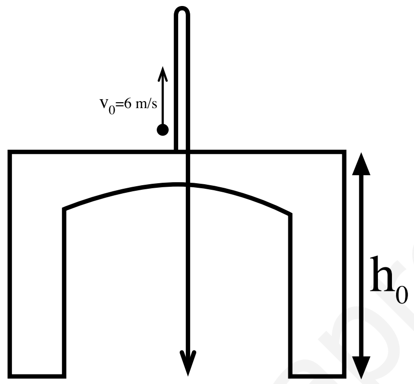
Resolución de los problemas

Problema 1

Se trata de una caída libre por lo tanto vamos a usar las fórmulas del MRUA que en este caso ya sabemos que son

$$h = h_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$
$$v = v_0 + g \cdot t$$
$$v^2 = {v_0}^2 + 2 \cdot g \cdot (h - h_0)$$

a) La siguiente figura esboza la situación de nuestro problema.



Como no sabemos desde qué altura se lanza la piedra sino resolvemos antes el apartado (c), vamos a calcular la altura máxima desde el propio puente. Tomando como origen pues el puente, h_0=0 m, y sabiendo según los datos del problema que v_0=6 m/s y g=−9,8 m/s^2, despejando de la tercera ecuación

$$v^2 = {v_0}^2 + 2 \cdot g \cdot (h - h_0), \qquad h - h_0 = \frac{v^2 - {v_0}^2}{2g}, \qquad h = h_0 + \frac{v^2 - {v_0}^2}{2g}$$

y sustituyendo

$$h = 0 + \frac{0 - 6^2}{2 \cdot (-9,8)} = \frac{-36}{-19,6} = 1,836 \ \text{ m}$$

b) El tiempo que le cuesta volver al punto de lanzamiento desde el puente lo podemos saber con la primera ecuación. Como el origen de alturas lo hemos tomado sobre él, h_0=0, y como vuelve al mismo punto, la altura final también será cero, luego h=0.

$$h = h_0 + v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$0 = 0 + 6 \cdot t + \tfrac{1}{2} \cdot (-9,8) \cdot t^2, \qquad 0 = 6t - 4,9t^2$$

$$0 = t \cdot (6 - 4,9t) \qquad \text{cuyas soluciones son}$$

$$t = 0 \ \text{ y } \ 0 = 6 - 4,9t, \qquad t = \frac{6}{4,9} = 1,224 \ \text{ s}$$

Su velocidad en ese instante vendrá dada por

$$v = v_0 + gt, \quad v = 6 - 9,8 \cdot 1,224 = -6 \ \text{ m/s}$$

(Nótese que esta velocidad es la misma con la que se lanzó pero con el signo cambiado).
c) Para saber la altura a la que se encuentra el puente, la que hemos llamado h_0 en la figura, vamos a tomar como origen de alturas el propio río, con lo que la altura final será nula, h=0, y la altura inicial h_0 será la altura a la que está el puente. El tiempo de vuelo en este caso nos lo dan en el problema, 1,94 s, por lo que de la primera ecuación podremos despejar la altura inicial

$$h = h_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} g t^2, \qquad h_0 = h - v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$h_0 = 0 - 6 \cdot 1,94 + 4,9 \cdot 1,94^2 = 6,8 \ \text{ m}$$

d) Por fin para la velocidad al llegar al agua la obtenemos con la segunda de las ecuaciones, $v = v_0 + gt$. Como sabemos el tiempo total de vuelo, la velocidad final se halla directamente

$$v = v_0 + g \cdot t \qquad v = 6 - 9,8 \cdot 1,94 = -13,01 \ \text{ m/s}$$

Notemos el signo negativo que tiene la velocidad lo cual indica que la piedra se mueve hacia abajo.

Problema 2

En este problema, a diferencia de los demás, no se dan valores numéricos, así que vamos a plantearlo de manera algebraica y lo más general posible. Se trata de dos lanzamientos de un cuerpo desde el suelo. En el primero de ellos vamos a suponer que se lanza a una velocidad inicial v_0 y llega a una altura final h. Al lanzarlo desde el suelo tenemos pues h_0=0, y en el punto más alto v=0 m/s. Despejando de $v^2 = {v_0}^2 + 2 \cdot g \cdot (h - h_0)$ tenemos

$$h = h_0 + \frac{v^2 - {v_0}^2}{2g}, \qquad \text{y sustituyendo} \qquad h = \frac{-{v_0}^2}{2g} \tag{1}$$

Ahora lanzamos el cuerpo con otra velocidad, llamémosla v_1, y llegará a una altura que llamaremos h_1. Igual que antes tendremos ahora

$$h_1 = \frac{-{v_1}^2}{2g} \tag{2}$$

Como la altura en el segundo caso ha de ser doble que la primera h_1=2h, sustituyendo los valores de h y h_1 de las ecuaciones (1) y (2) anteriores se llega a

$$\frac{-{v_1}^2}{2g} = 2 \cdot \frac{-{v_0}^2}{2g}$$

Podemos cancelar los términos $2g$ que aparecen y los signos negativos, quedando

$$v_1{}^2 = 2v_0{}^2, \text{ y sacando raíces cuadradas en ambos miembros,}$$

$$v_1 = \sqrt{2}\; v_0$$

Notemos pues que al multiplicar la altura por 2, las velocidades no se multiplican por 2, sino por $\sqrt{2}$.

$\boxed{\text{Problema 3}}$

Para obtener la altura máxima alcanzada a partir de $v^2 = v_0{}^2 + 2 \cdot g \cdot (h - h_0)$ hay que saber la velocidad inicial v_0. No nos la da directamente el problema, pero podemos calcularla con lo que nos dice. Como en t=1 s la altura final a la que llega es h=25 m podemos sustituir todo en

$$h = h_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

y calcular v_0. Como se lanza desde el suelo, h_0=0, entonces

$$25 = 0 + v_0 \cdot 1 - 4,9 \cdot 1^2 \qquad v_0 = 25 + 4,9 = 29,9 \ \text{ m/s}$$

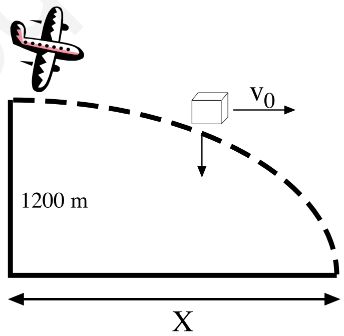
Despejando de $v^2 = v_0{}^2 + 2 \cdot g \cdot (h - h_0)$ tenemos

$$h = h_0 + \frac{v^2 - v_0{}^2}{2g}, \qquad \text{y sustituyendo} \qquad h = 0 + \frac{0 - 29,9^2}{2 \cdot (-9,8)} = 45,61 \ \text{ m}$$

La altura máxima alcanzada por el cuerpo será entonces de 45,61 m.

$\boxed{\text{Problema 4}}$

Al caer el paquete desde el avión, visto desde tierra el movimiento que realiza es un tiro horizontal, tal como se representa en la figura.



Recordemos las ecuaciones de este movimiento

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \vec{g} \cdot t^2 \\ \vec{v} &= \vec{v}_0 + \vec{g} \cdot t \end{aligned} \tag{3}$$

a) Si desglosamos la primera de las ecuaciones en sus componentes

$$(x, y) = (0, h_0) + (v_0, 0) \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (0, g) \cdot t^2$$

de donde

$$\begin{aligned} x &= v_0 \cdot t \\ y &= h_0 + \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \tag{4}$$

La altura es 1200 m y pasando los 500 km/h a m/s tenemos 500/3,6=138,8 m/s y las ecuaciones anteriores pasan a ser

$$\begin{aligned} x &= 138,8t \\ y &= 1200 - 4,9t^2 \end{aligned}$$

igualando la segunda a cero determinamos el tiempo que le cuesta caer al paquete

$$0 = 1200 - 4,9t^2, \quad t = \sqrt{\frac{1200}{4,9}} = 15,64 \ \text{ s}$$

b) La distancia a la que hay que soltar el paquete antes de que el avión llegue a la vertical vendrá dada por el alcance que tendría el tiro horizontal, que lo podemos saber con la primera de las ecuaciones (4) y empleando el tiempo del apartado (a)

$$x = 138,8t = 138,8 \cdot 15,64 = 2170,83 \ \text{ m}$$

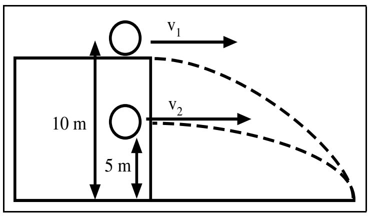
c) Para la velocidad en el suelo usamos la segunda de las ecuaciones (3) y con el tiempo que hemos hallado en el apartado (a)

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} \cdot t, \quad \vec{v} = (138,8,0) + (0, -9,8) \cdot 15,64 = (138,8, -153,27) \text{ m/s}$$

y su módulo será $v = \sqrt{138,8^2 + (-153,27)^2} = 206,77$ m/s.

$\boxed{\text{Problema 5}}$

Se trata ahora de dos tiros horizontales. En el primero de ellos podemos averiguar el alcance. El segundo de ellos se realiza desde una altura de 5 m, con lo que a partir del tiempo de vuelo y el alcance, que ha de ser el mismo que el del primero, hallar su velocidad inicial, véase la figura.



Las ecuaciones desglosadas, obtenidas con las ecuaciones (4), para el cuerpo que se lanza desde los 10 m de altura son

$$\begin{aligned} x &= 4t \\ y &= 10 - 4,9t^2 \end{aligned}$$

igualando la segunda a cero determinamos el tiempo de vuelo del primer cuerpo

$$0 = 10 - 4,9t^2, \qquad t = \sqrt{\frac{10}{4,9}} = 1,428 \ \ \text{s}$$

y su alcance

$$x = 4t = 4 \cdot 1,428 = 5,712 \ \ \text{m}$$

Para el cuerpo que lanzamos desde una altura de 5 m sus ecuaciones son

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \\ y &= 5 - 4,9t^2 \end{aligned} \tag{5}$$

El problema consiste en determinar el valor de v_0. De la segunda de las ecuaciones (5) calculamos el tiempo de vuelo para el segundo cuerpo, que resulta ser

$$0 = 5 - 4,9t^2, \qquad t = \sqrt{\frac{5}{4,9}} = 1,01 \ \ \text{s}$$

Como el alcance del segundo tiro ha de ser igual que el del primero, de la primera de las ecuaciones (5) podemos averiguar la velocidad inicial, ya que el alcance es igual al del primer cuerpo

$$x = v_0 t, \qquad 5,712 = v_0 \cdot 1,01, \qquad v_0 = \frac{5,712}{1,01} = 5,65 \ \ \text{m/s}$$

Así pues la velocidad inicial del segundo cuerpo ha de ser 5,65 m/s.

Problema 6

Las ecuaciones de movimiento para este tiro horizontal, teniendo en cuenta que h_0=3 m y que desconocemos la velocidad inicial v_0, son ahora

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \\ y &= 3 - 4,9t^2 \end{aligned} \tag{6}$$

De la segunda calculamos, como siempre, el tiempo de vuelo haciendo nula la altura final

$$0 = 3 - 4,9t^2, \qquad t = \sqrt{\frac{3}{4,9}} = 0,782 \ \ \text{s}$$

Como el alcance ha de ser de 2 m, de la primera de las ecuaciones (6) hallamos la velocidad inicial de lanzamiento

$$x = v_0 t, \quad 2 = v_0 \cdot 0,782, \quad v_0 = \frac{2}{0,782} = 2,55 \ \ \text{m/s}$$

Lo que buscamos es que el alcance sea de 4 m con la velocidad que acabamos de obtener, con lo que podremos hallar el tiempo de vuelo usando una vez más la primera de las ecuaciones (6)

$$x = v_0 t, \quad 4 = 2,55 \cdot t, \quad t = \frac{4}{2,55} = 1,568 \ \ \text{s}$$

La ecuación de la altura en el tiro horizontal es $y = h_0 + \frac{1}{2}gt^2$. Sabemos ahora que el tiempo de vuelo ha de ser 1,568 s, sustituyendo pues en esta última expresión podemos averiguar cual debe ser la altura inicial

$$y = h_0 + \frac{1}{2}gt^2, \quad 0 = h_0 - 4,9 \cdot 1,568^2, \quad h_0 = 4,9 \cdot 1,568^2 = 12,04 \ \ \text{m}$$

Por tanto el surtidor de la fuente ha de colocarse ahora a 12,04 m de altura.

FÓRMULAS USADAS EN LOS PROBLEMAS

Caída libre (movimiento rectilíneo uniformemente acelerado).

$$h = h_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$v = v_0 + g \cdot t$$

$$v^2 = {v_0}^2 + 2 \cdot g \cdot (h - h_0)$$

Tiro horizontal

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \vec{g} \cdot t^2$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} \cdot t$$