Actividades del final de la unidad

1. Dibuja las gráficas *x*-*t* y *v*-*t* de los movimientos que corresponden a las siguientes ecuaciones:

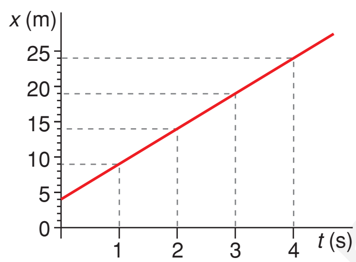
a) $x = 4 + 5 \cdot t$. b) $x = 8 - 4 \cdot t$. c) $x = -4 + 2 \cdot t$.

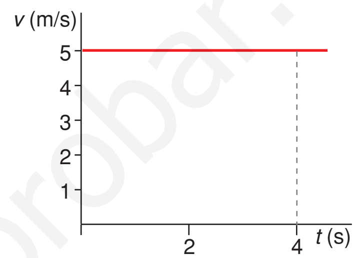
Calcula la posición inicial, la velocidad inicial y la distancia al origen al cabo de 2 s correspondiente a cada uno de ellos.

Para dibujar las gráficas construiremos, en cada caso, una tabla de valores.

a) Para el movimiento de ecuación $x = 4 + 5 \cdot t$, tenemos:

t	x	v
0	4	5
1	9	5
2	14	5
3	19	5
4	24	5



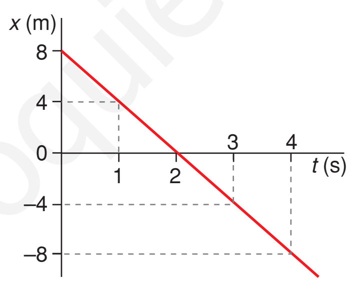


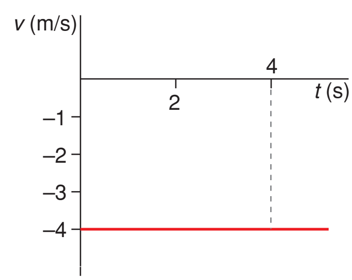
Por tanto:

$$x_0 = 4 \text{ m} \quad ; \quad v_0 = v = 5 \text{ m/s} \quad ; \quad x\,(t = 2 \text{ s}) = 14 \text{ m}$$

b) Para el movimiento de ecuación $x = 8 - 4 \cdot t$, tenemos:

t	x	v
0	8	–4
1	–4	–4
2	0	–4
3	4	–4
4	8	–4



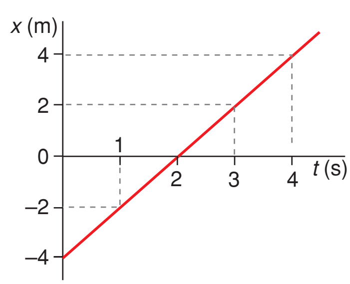


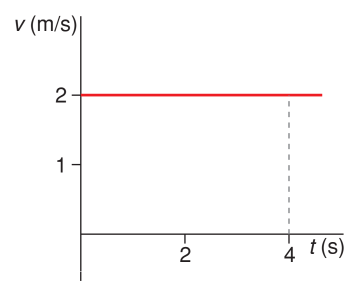
Entonces:

$$x_0 = 8 \text{ m} \quad ; \quad v_0 = v = -4 \text{ m/s} \quad ; \quad x\,(t = 2 \text{ s}) = 0 \text{ m}$$

c) Para el movimiento de ecuación $x = -4 + 2 \cdot t$, tenemos:

t	x	v
0	–4	2
1	–2	2
2	0	2
3	2	2
4	4	2

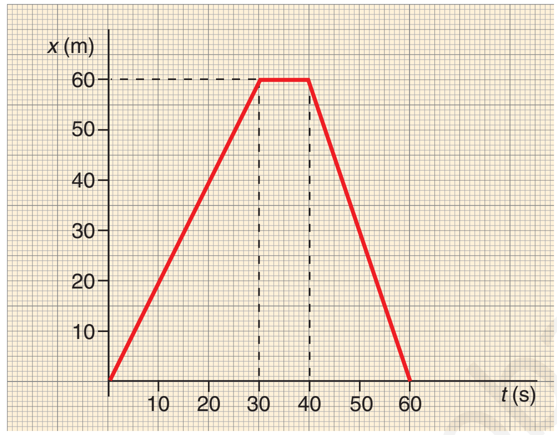




Finalmente, en este caso tenemos:

$$x_0 = -4 \text{ m} \quad ; \quad v_0 = v = 2 \text{ m/s} \quad ; \quad x\,(t = 2 \text{ s}) = 0 \text{ m}$$

2. **La gráfica *x*-*t* del movimiento de un cuerpo es la representada en la figura adjunta:**



Calcula: a) La velocidad del cuerpo en cada etapa. b) Su distancia al origen en *t* = 20 s y *t* = 50 s. c) Su velocidad media entre *t* = 20 s y *t* = 50 s. ¿Cómo está el cuerpo en *t* = 35 s?

a) La velocidad media en la primera etapa es:

$$v_1 = \frac{60 - 0}{30 - 0} = 2 \text{ m/s}$$

La velocidad media en la segunda etapa es:

$$v_2 = \frac{60 - 60}{40 - 30} = 0 \text{ m/s}$$

La velocidad media en la tercera etapa es:

$$v_3 = \frac{0 - 60}{60 - 40} = -3 \text{ m/s}$$

b) La ecuación del movimiento para la primera etapa es $x = 2 \cdot t$; luego:

$$x(20) = 2 \cdot 20 = 40 \text{ m}$$

La ecuación del movimiento para la tercera etapa es $x = 60 - 3 \cdot (t - 40)$; luego:

$$x(50) = 60 - 3 \cdot (50 - 40) = 30 \text{ m}$$

c) La velocidad media entre 20 s y 50 s es:

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{30 - 40}{50 - 20} = -\frac{10}{30} = -\frac{1}{3} = -0{,}33 \text{ m/s}$$

El cuerpo está en reposo para $t = 35$ s.

3. **Desde el pueblo *A* sale, hacia el pueblo *B*, que dista 40 km, un automóvil con una velocidad de 90 km/h. En el mismo instante, desde *B*, sale a su encuentro un motorista con una velocidad de 80 km/h. a) Obtén las ecuaciones y las gráficas de ambos movimientos situando el origen de coordenadas en *A*. b) Calcula el punto y el instante en que se produce el encuentro.**

Tomando el origen en *A* y el sentido positivo de *A* hacia *B*, tenemos:

– Para el automóvil, que se mueve con una velocidad v_1 = 90 km/h = 25 m/s, tenemos:

$$x_1 = 25 \cdot t$$

– Y para el motorista, que se mueve con una velocidad v_2 = 80 km/h = 22,22 m/s:

$$x_2 = 40\,000 - 22{,}22 \cdot t$$

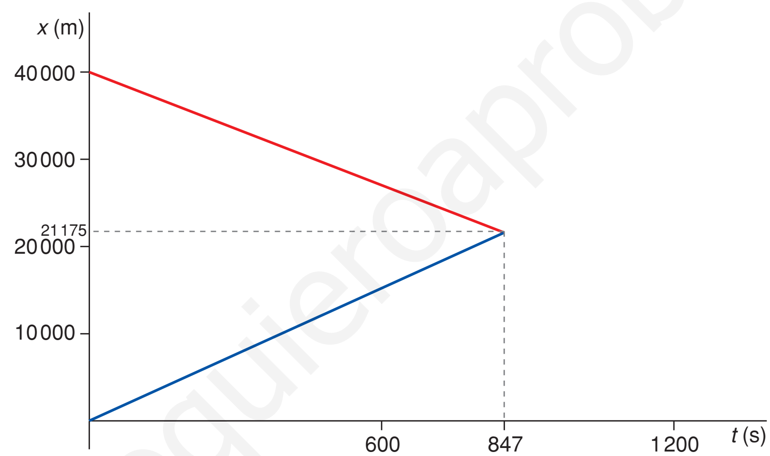
Como hemos tomado el mismo origen para los dos cuerpos, cuando se encuentran se hallan a la misma distancia del origen; luego:

$$x_1 = x_2 \rightarrow 25 \cdot t = 40\,000 - 22{,}22 \cdot t$$

$$47{,}22 \cdot t = 40\,000 \rightarrow t = 847 \text{ s}$$

El encuentro se produce a los 847 s, es decir, a los 14 minutos y 7 segundos, y, como se muestra en la gráfica, a una distancia de *A:*

$$x = 25 \cdot 847 = 21\,175 \text{ m}$$



4. Desde un mismo punto, pero con una diferencia de 20 segundos, parten dos móviles en la misma dirección y sentido.

Si el primero circula a 25 m/s, ¿qué velocidad debe tener el segundo para que lo alcance al cabo de 100 s?

Como los dos móviles tienen distintos origenes de tiempos, sus ecuaciones son:

$$x_1 = 25 \cdot t_1 \quad ; \quad x_2 = v_2 \cdot t_2$$

pero ambos tiempos están relacionados en la forma: $t_1 = t_2 + 20$; luego:

$$x_1 = 25 \cdot (t_2 + 20) \quad ; \quad x_2 = v_2 \cdot t_2$$

Como el segundo móvil adelanta al primero cuando han transcurrido 100 s para él, entonces:

$$x_1 = x_2 \rightarrow 25 \cdot (t_2 + 20) = v_2 \cdot t_2 \rightarrow 25 \cdot (100 + 20) = v_2 \cdot 100 \rightarrow v_2 = 30 \text{ m/s}$$

Y, por tanto:

$$x = x_1 = x_2 = v_2 \cdot t_2 \rightarrow x = 30 \cdot 100 = 3\,000 \text{ m}$$

La velocidad del segundo móvil ha de ser de 30 m/s, y alcanza al primero a una distancia de 3 000 m.

5. Un cuerpo parte del reposo desde el origen de coordenadas y alcanza una velocidad de 40 m/s en 10 s. Calcula su aceleración, supuesta constante. Escribe las ecuaciones de este movimiento y dibuja las gráficas *x-t* y *v-t*. Calcula su velocidad y el espacio recorrido a los 7 s.

El cuerpo realiza un m.r.u.a. desde la posición inicial $x_0 = 0$ y con velocidad inicial $v_0 = 0$; luego, sus ecuaciones son:

$$x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad ; \quad v = a \cdot t$$

Sabiendo que para $t = 10$ s su velocidad es $v = 40$ m/s, podemos calcular la aceleración:

$$a = \frac{v}{t} = \frac{40}{10} = 4 \text{ m/s}^2$$

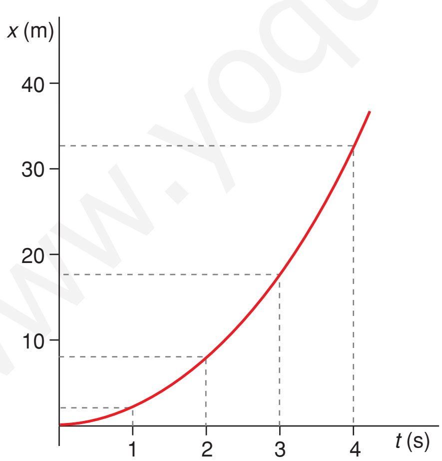
y sus ecuaciones particulares son:

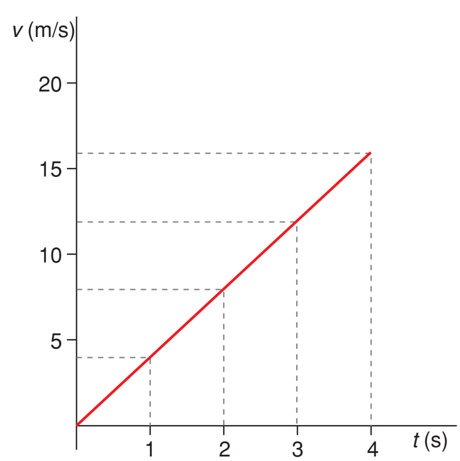
$$x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 2 \cdot t^2 \quad ; \quad v = 4 \cdot t$$

Para dibujar las gráficas que nos piden, damos valores al tiempo en las ecuaciones del movimiento y construimos la siguiente tabla:

t	0	1	2	3	4
x	0	2	8	18	32
v	0	4	8	12	16

Con estos valores, las gráficas posición-tiempo, *x-t*, y velocidad-tiempo, *v-t*, son las que se muestran a continuación:





Como el móvil parte desde el origen de coordenadas, el espacio recorrido en el instante $t = 7$ s es:

$$x(t) = 2 \cdot t^2 \rightarrow x(7) = 2 \cdot 7^2 = 98 \text{ m}$$

Y su velocidad en ese momento:

$$v(t) = 4 \cdot t \rightarrow v(7) = 4 \cdot 7 = 28 \text{ m/s}$$

6. Un vehículo que circula a 110 km/h frena, deteniéndose después de recorrer 100 m. a) Calcula su aceleración. b) Dibuja las gráficas *v-t* y *x-t*.

a) El cuerpo realiza un m.r.u.a., cuya velocidad inicial es v_0 = 110 km/h = 30,6 m/s. Tomando el origen en el punto donde empieza a frenar, las ecuaciones del movimiento son:

$$x = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad ; \quad v = v_0 + a \cdot t$$

Cuando se detiene, su velocidad es cero (v = 0) y ha recorrido 100 m (x = 100 m); luego:

$$100 = 30{,}6 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad ; \quad 0 = 30{,}6 + a \cdot t$$

Despejando $a \cdot t$ de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera, obtenemos el tiempo que tarda en detenerse:

$$a \cdot t = -30{,}6 \ \rightarrow \ 100 = 30{,}6 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 30{,}6 \cdot t = 15{,}3 \cdot t \ \rightarrow \ t = 6{,}5 \text{ s}$$

Por tanto, su aceleración es:

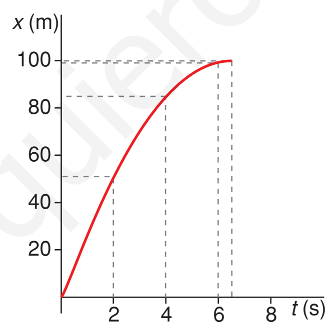
$$a = \frac{-30{,}6}{6{,}5} = -4{,}7 \text{ m/s}^2$$

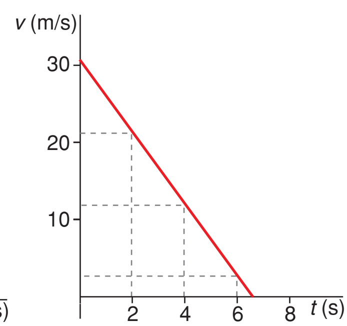
b) Las ecuaciones del movimiento del vehículo son:

$$x = 30{,}6 \cdot t - 2{,}35 \cdot t^2 \quad ; \quad v = 30{,}6 - 4{,}7 \cdot t$$

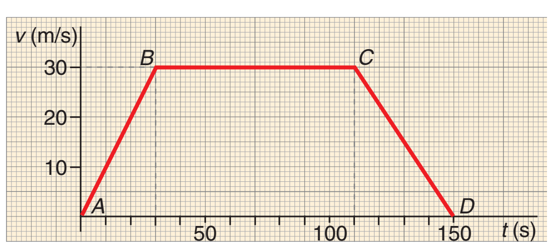
Dando valores al tiempo construimos la tabla de datos con la que dibujamos las gráficas correspondientes a estas ecuaciones:

t	*x*	*v*
0	0	30,6
2	51,8	21,2
4	84,8	11,8
6	99	2,4
6,5	100	0





7. La gráfica *v-t* del movimiento de un cuerpo es:



Calcula: a) La aceleración en cada etapa. b) Su velocidad a los 20 s, a los 50 s y a los 120 s. c) El espacio total recorrido por el cuerpo.

a) y b) Durante la etapa *AB,* el cuerpo realiza un m.r.u.a., pues su velocidad aumenta linealmente con el tiempo.

Su aceleración vale:

$$a = \frac{v_B - v_A}{t} = \frac{30 - 0}{30} = 1 \text{ m/s}^2$$

Las ecuaciones del movimiento en esta etapa son:

$$x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot t^2 \quad ; \quad v = a \cdot t = t$$

Luego, la velocidad a los 20 s y el espacio recorrido en esta etapa valen:

$$v = 20 \text{ m/s} \quad ; \quad \Delta x = x_B = \frac{1}{2} \cdot 30^2 = 450 \text{ m}$$

Durante la etapa *BC*, el cuerpo realiza un m.r.u., pues su velocidad permanece constante: $v = 30$ m/s. Luego, su aceleración es nula, con lo que las ecuaciones de esta etapa son:

$$x = x_B + v \cdot (t - t_0) = 450 + 30 \cdot (t - 30) \quad ; \quad v = 30 \text{ m/s}$$

La velocidad para $t = 50$ s vale 30 m/s.

Al final de esta etapa, el cuerpo se encuentra en la posición:

$$x_C = 450 + 30 \cdot (110 - 30) = 450 + 2\,400 = 2\,850 \text{ m}$$

Por tanto, durante este etapa recorre un espacio:

$$\Delta x = x_C - x_B = 2\,850 - 450 = 2\,400 \text{ m}$$

Durante la etapa *CD*, el cuerpo realiza un m.r.u.a., pues su velocidad disminuye linealmente con el tiempo. Su aceleración vale:

$$a = \frac{v_D - v_C}{t} = \frac{0 - 30}{40} = -0{,}75 \text{ m/s}^2$$

Las ecuaciones del movimiento en esta etapa son:

$$x = x_C + v_C \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 2\,850 + 30 \cdot (t - 110) + \frac{1}{2} \cdot (-0{,}75) \cdot (t - 110)^2$$

$$v = v_C + a \cdot t = 30 + (-0{,}75) \cdot (t - 110)$$

Luego, la velocidad para $t = 120$ s vale:

$$v = 30 + (-0{,}75) \cdot (120 - 110) = 30 - 7{,}5 = 22{,}5 \text{ m/s}$$

Cuando finaliza esta etapa, el cuerpo se encuentra en la posición:

$$x_D = 2\,880 + 30 \cdot 40 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}75 \cdot 40^2 = 3\,450 \text{ m}$$

Por lo que el espacio recorrido en esta etapa es:

$$\Delta x = x_D - x_C = 3\,450 - 2\,850 = 600 \text{ m}$$

c) El espacio total recorrido por el cuerpo es de 3 450 m.

8. Un cuerpo, que se mueve con aceleración constante, a los 5 s de iniciado el movimiento ha recorrido 90 m y lleva una velocidad de 25 m/s. Calcula su velocidad inicial y su aceleración.

El cuerpo realiza un m.r.u.a. Si situamos el origen del sistema de referencia en el punto en que se encuentra el cuerpo en el instante inicial, es decir, $x_0 = 0$, las ecuaciones del movimiento del cuerpo son:

$$x = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \quad ; \quad v = v_0 + a \cdot t$$

El enunciado nos asegura que para t = 5 s el cuerpo se encuentra en x = 90 m y se mueve con v = 25 m/s; entonces:

$$90 = v_0 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot 5^2 = 5 \cdot v_0 + \frac{25}{2} \cdot a \quad ; \quad 25 = v_0 + 5 \cdot a$$

Despejando en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera:

$$v_0 = 25 - 5 \cdot a$$

$$90 = 5 \cdot (25 - 5 \cdot a) + \frac{25}{2} \cdot a = 125 - \frac{25}{2} \cdot a$$

Despejando, obtenemos la aceleración del cuerpo y, con ella, su velocidad inicial:

$$a = (125 - 90) \cdot \frac{2}{25} = 2{,}8 \text{ m/s}^2 \rightarrow v_0 = 25 - 5 \cdot 2{,}8 = 25 - 14 = 11 \text{ m/s}$$

9. Un móvil se encuentra, en el instante inicial, a 12 m del origen y tiene una velocidad de 20 m/s. Cuando se encuentra a 76 m del origen lleva una velocidad de 12 m/s. Calcula su aceleración y el tiempo empleado en ir de una posición a otra.

El cuerpo realiza un m.r.u.a. cuyas ecuaciones, considerando los datos del enunciado, son:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 12 + 20 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad ; \quad v = v_0 + a \cdot t = 20 + a \cdot t$$

Teniendo en cuenta que para x = 76 m la velocidad es v = 12 m/s, tenemos:

$$76 = 12 + 20 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad ; \quad 12 = 20 + a \cdot t \rightarrow a \cdot t = -8$$

Sustituyendo la última expresión en la primera:

$$76 = 12 + 20 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-8) \cdot t = 12 + 16 \cdot t \rightarrow t = \frac{64}{16} = 4 \text{ s} \rightarrow a = -2 \text{ m/s}^2$$

También podíamos haber resuelto el ejercicio utilizando la ecuación:

$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot (x - x_0)$$

$$12^2 - 20^2 = 2 \cdot a \cdot (76 - 12) \rightarrow -256 = 2 \cdot a \cdot 64 \rightarrow a = -2 \text{ m/s}^2$$

10. Un autobús circula a 108 km/h. Al pasar por delante de un motorista, este arranca con una aceleración de 5 m/s².

¿Qué distancia hay entre ambos al cabo de 5 s? ¿Cuánto tarda el motorista en alcanzarlo? ¿Cuál es su velocidad en ese instante?

Situamos el origen del sistema de referencia en el punto en que arranca el motorista. El movimiento del autobús es un m.r.u., cuya velocidad es v_1 = 108 km/h = 30 m/s. Por tanto, su ecuación es:

$$x_1 = 30 \cdot t$$

El movimiento del motorista es un m.r.u.a. sin velocidad inicial y con aceleración 5 m/s²; luego, sus ecuaciones son:

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot t^2 = 2{,}5 \cdot t^2 \quad ; \quad v_2 = 5 \cdot t$$

Al cabo de 5 s, el autobús ha recorrido una distancia $x_1 = 30 \cdot 5 = 150$ m, y el motorista, $x_2 = 2{,}5 \cdot t^2 = 62{,}5$ m; luego, el camión se encuentra 87,5 m por delante del motorista.

Cuando el motorista alcance al camión, ambos se encontrarán a la misma distancia del origen; luego:

$$x_1 = x_2 \rightarrow 30 \cdot t = 2{,}5 \cdot t^2$$

ecuación que tiene dos soluciones: $t = 0$ (el instante inicial) y $t = 12$ s, que es cuando lo alcanza.

Por tanto, el motorista adelanta al camión al cabo de 12 segundos, y su velocidad en ese instante es:

$$v = 5 \cdot 12 = 60 \text{ m/s}$$

11. Un camión y un automóvil circulan por una carretera recta a 90 km/h, estando situado el automóvil, inicialmente, 20 m detrás del camión. El automóvil ve espacio libre para adelantar y se decide a hacerlo, empleando 8 s y colocándose 20 m delante del camión. Calcula la aceleración del automóvil y el espacio que recorre cada vehículo durante el adelantamiento.

Expresamos la velocidad inicial de ambos vehículos en unidades del S.I.:

$$v_{0,1} = v_{0,2} = 25 \text{ m/s}$$

Situando el origen, para ambos móviles, en la posición inicial del automóvil, las ecuaciones de cada uno son:

- Para el camión:

$$x_1 = 20 + 25 \cdot t \quad ; \quad v_1 = 25 \text{ m/s}$$

- Para el automóvil:

$$x_2 = 25 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad ; \quad v_2 = 25 + a \cdot t$$

Cuando termina el adelantamiento, el automóvil se encuentra 20 m por delante del camión; esto es:

$$x_2 = x_1 + 20$$

Por tanto:

$$25 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 20 + 20 + 25 \cdot t \rightarrow \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 40$$

Como el adelantamiento se produce en 8 s:

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot 8^2 = 40 \rightarrow 32 \cdot a = 40 \rightarrow a = 1{,}25 \text{ m/s}^2$$

la distancia que recorre cada vehículo es:

$$x_1 = 25 \cdot 8 = 200 \text{ m}$$

$$x_2 = 25 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot 8^2 = 240 \text{ m}$$

Este adelantamiento requiere una distancia libre de otros vehículos de 240 m, y la velocidad final del automóvil es $v_2 = 25 + 1{,}25 \cdot 8 = 25 + 10 = 35$ m/s $= 126$ km/h. Observa que la velocidad alcanzada supera la máxima permitida en autovías y autopistas, de 120 km/h.

12. El sistema de lanzamiento de un portaaviones acelera un avión desde el reposo hasta la velocidad de despegue, 270 km/h, en 100 m. Calcula la aceleración y el tiempo de despegue.

El avión realiza un m.r.u.a. durante el despegue. Si suponemos la aceleración constante y expresamos su velocidad de despegue en unidades del S.I., v = 270 km/h = 75 m/s, podemos obtener la aceleración aplicando la ecuación:

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot x \;\rightarrow\; 75^2 = 2 \cdot a \cdot 100 \;\rightarrow\; a = 28{,}125 \text{ m/s}^2$$

El piloto se encuentra sometido a una aceleración 2,87 · g; es decir, casi tres veces la aceleración de la gravedad.

El tiempo de despegue es:

$$v = a \cdot t \rightarrow t = \frac{v}{a} = \frac{75}{28{,}125} = 2{,}67 \text{ s}$$

13. Sabiendo que el tiempo de reacción de un conductor es 0,8 s y que la aceleración de frenado del vehículo vale –7 m/s², calcula la distancia que recorre hasta detenerse cuando circula a: a) 60 km/h. b) 90 km/h. c) 126 km/h.

El tiempo de reacción del conductor es el tiempo que transcurre entre el instante en que se produce el suceso que obliga al conductor a frenar y el momento en que empiezan a actuar los frenos. Durante este tiempo, el vehículo continúa circulando a la misma velocidad y recorre una distancia:

$$\Delta x_R = v_0 \cdot t_R$$

a) La velocidad inicial, en unidades del S.I., es:

$$v_0 = 60 \text{ km/h} = 16{,}67 \text{ m/s}$$

y la distancia que recorre durante el tiempo de reacción:

$$\Delta x_R = 16{,}67 \cdot 0{,}8 = 13{,}34 \text{ m}$$

Mientras frena, el vehículo recorre una distancia:

$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot \Delta x_F \rightarrow \Delta x_F = \frac{-v_0^2}{2 \cdot a} = \frac{-16{,}67^2}{2 \cdot (-7)} = 19{,}85 \text{ m}$$

Por tanto, la distancia recorrida circulando a 60 km/h es:

$$\Delta x = \Delta x_R + \Delta x_F = 13{,}34 + 19{,}85 = 33{,}19 \text{ m}$$

b) Procediendo como en el caso anterior, ahora v_0 = 90 km/h = 25 m/s; entonces:

$$\Delta x_R = 25 \cdot 0{,}8 = 20 \text{ m} \quad ; \quad \Delta x_F = \frac{-25^2}{2 \cdot (-7)} = 44{,}64 \text{ m}$$

La distancia recorrida a esta velocidad es:

$$\Delta x = 20 + 44{,}64 = 64{,}64 \text{ m}$$

c) En este caso, la velocidad es v_0 = 126 km/h = 35 m/s; por tanto:

$$\Delta x_R = 35 \cdot 0{,}8 = 28 \text{ m} \quad ; \quad \Delta x_F = \frac{-35^2}{2 \cdot (-7)} = 87{,}5 \text{ m}$$

$$\Delta x = 28 + 87{,}5 = 115{,}5 \text{ m}$$

14. Calcula el valor de la aceleración de la gravedad en la Luna sabiendo que un cuerpo que se suelta desde una altura de 3,26 m tarda en llegar a la superficie 2 s.

El movimiento de caída libre es siempre un m.r.u.a. sin velocidad inicial; luego, su ecuación es:

$$y = H - \frac{1}{2} g_L \cdot t^2 \rightarrow 0 = 3{,}26 - \frac{1}{2} g_L \cdot 2^2 \rightarrow g_L = 1{,}63 \text{ m/s}^2$$

15. Desde el brocal de un pozo soltamos una piedra y tardamos 3 s en escuchar el impacto con el agua. Sabiendo que la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s y que la aceleración de la gravedad vale 9,8 m/s², calcula a qué profundidad se encuentra el agua.

Tomando el brocal del pozo como origen de coordenadas, la superficie del agua está en $y = -h$.

Por otra parte, los 3 segundos que tardamos en oír el impacto con el agua corresponden al tiempo que tarda la piedra en caer (t_1) más el tiempo que tarda el sonido en recorrer la distancia h (t_2); luego:

$$3 = t_1 + t_2 \rightarrow t_1 = 3 - t_2$$

– Caída libre de la piedra (m.r.u.a.):

$$y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \rightarrow -h = -\frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot t_1^2 \rightarrow h = 4{,}9 \cdot t_1^2$$

– Sonido (m.r.u.):

$$s = v \cdot t \rightarrow h = 340 \cdot t_2$$

Teniendo en cuenta que la piedra y el sonido recorren la misma distancia:

$$340 \cdot t_2 = 4{,}9 \cdot t_1^2 = 4{,}9 \cdot (3 - t_2)^2 \rightarrow 4{,}9 \cdot t_2^2 - 369{,}4 \cdot t_2 + 44{,}1 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación de segundo grado son 0,12 s y 75,26 s.

La segunda solución no es válida, pues, al ser mayor que 3, t_1 tendría que ser negativo, lo cual no tiene sentido; por tanto: $t_2 = 0{,}12$ s y $t_1 = 3 - 0{,}12 = 2{,}88$ s.

El agua está a una profundidad: $h = 4{,}9 \cdot 2{,}88^2 = 40{,}64$ m.

16. Si una nube de granizo se ha formado a una altura de 125 m, ¿con qué velocidad (en km/h) llegará el granizo al suelo? Toma g = 10 m/s² y considera despreciable la resistencia del aire.

Las ecuaciones de la caída libre son:

$$y = H - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 125 - 5 \cdot t^2$$

$$v = -g \cdot t = -10 \cdot t$$

Cuando el granizo llega al suelo, $y = 0$; luego:

$$0 = 125 - 5 \cdot t^2 \rightarrow 125 = 5 \cdot t^2 \rightarrow t = 5 \text{ s}$$

$$v = -10 \cdot 5 = -50 \text{ m/s} = -180 \text{ km/h}$$

17. Un cuerpo que se deja caer desde una altura *h* recorre 1/3 de *h* en el último segundo. Calcula el valor de *h*, el tiempo que tarda en caer y la velocidad con que llega al suelo.

Las ecuaciones de la caída libre son:

$$y = H - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = h - 4,9 \cdot t^2 \quad ; \quad v = -g \cdot t = -9,8 \cdot t$$

Si llamamos t_f al tiempo que tarda el cuerpo en caer, al cabo de t_f segundos llega al suelo; luego:

$$0 = h - 4,9 \cdot t_f^2 \qquad [1]$$

y como en el último segundo recorre un tercio de *h*, en el instante $t_f - 1$ su altura es $y = h/3$; por tanto:

$$\frac{h}{3} = h - 4,9 \cdot (t_f - 1)^2 \qquad [2]$$

Despejando en la ecuación [1] y sustituyendo en [2]:

$$h = 4,9 \cdot t_f^2 \rightarrow \frac{4,9 \cdot t_f^2}{3} = 4,9 \cdot t_f^2 - 4,9 \cdot (t_f - 1)^2 \rightarrow \frac{1}{3} \cdot t_f^2 = t_f^2 - (t_f - 1)^2$$

$$t_f^2 - 6 \cdot t_f + 3 = 0 \begin{cases} t_{f_1} = 0,55 \text{ s} \\ t_{f_2} = 5,45 \text{ s} \end{cases}$$

La primera solución no tiene sentido, ya que, según indica el enunciado, el tiempo de caída debe ser mayor que 1 s. Por tanto, la solución correcta es $t_f = 5,45$ s.

Con este valor del tiempo de caída calculamos la altura desde la que se soltó el cuerpo y la velocidad con que llega al suelo:

$$0 = h - 4,9 \cdot t_f^2 \rightarrow h = 4,9 \cdot t_f^2 = 4,9 \cdot 5,45^2 = 145,54 \text{ m}$$

$$v = -9,8 \cdot t_f = -9,8 \cdot 5,45 = -53,41 \text{ m/s}$$

El signo negativo de la velocidad corresponde a un movimiento de caída.

18. Se lanza desde el suelo verticalmente hacia arriba una pelota con una velocidad de 30 m/s:

a) ¿En qué instantes la altura de la pelota es de 20 m? b) ¿Cuándo tiene la pelota una velocidad de 20 m/s hacia arriba? c) ¿Y hacia abajo? d) Calcula la altura, la velocidad y la aceleración en el punto más alto.

La pelota sigue un lanzamiento vertical hacia arriba desde el suelo, cuyas ecuaciones, situando el origen en el punto de lanzamiento, son:

$$y = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 30 \cdot t - 4,9 \cdot t^2 \quad ; \quad v = v_0 - g \cdot t = 30 - 9,8 \cdot t$$

a) Si la altura de la pelota es de 20 m, entonces $y = 20$ m; luego:

$$20 = 30 \cdot t - 4,9 \cdot t^2 \rightarrow 4,9 \cdot t^2 - 30 \cdot t + 20 = 0 \begin{cases} t_1 = 0,76 \text{ s} \\ t_2 = 5,36 \text{ s} \end{cases}$$

Para $t_1 = 0,76$ s, el cuerpo se encuentra a una altura de 20 m cuando está subiendo, pues su velocidad es positiva:

$$v_1 = 30 - 9,8 \cdot 0,76 = 22,55 \text{ m/s}$$

Para $t_2 = 5,36$ s, el cuerpo se encuentra a una altura de 20 m cuando está bajando, pues su velocidad es negativa:

$$v_2 = 30 - 9,8 \cdot 5,36 = -22,55 \text{ m/s}$$

b) Si la pelota tiene una velocidad de 20 m/s hacia arriba:

$$v = 20 = 30 - 9{,}8 \cdot t \;\rightarrow\; t = 1{,}02 \text{ s}$$

c) Si la pelota tiene una velocidad de 20 m/s hacia abajo:

$$v = -20 = 30 - 9{,}8 \cdot t \;\rightarrow\; t = 5{,}10 \text{ s}$$

d) En el punto más alto, el cuerpo se detiene momentáneamente; luego, su velocidad es cero. La aceleración se debe a la fuerza de atracción gravitatoria, que no deja de actuar en ningún momento, y es la misma en la subida, en la bajada y en el punto más alto:

$$a = -g = -9{,}8 \text{ m/s}^2$$

El tiempo que tarda en subir es:

$$0 = 30 - 9{,}8 \cdot t \;\rightarrow\; t = 3{,}06 \text{ s}$$

Y la altura máxima:

$$y = 30 \cdot 3{,}06 - 4{,}9 \cdot 3{,}06^2 = 45{,}9 \text{ m}$$

19. El tripulante de un globo aerostático, que está subiendo con una velocidad de 4 m/s, suelta un saco de arena cuando se encuentra a una altura de 20 m. Calcula la altura del globo y la velocidad del saco cuando este llega al suelo.

El tripulante suelta el saco, pero tanto el tripulante como el saco tienen, en ese instante, la misma velocidad que el globo: 4 m/s hacia arriba. Por tanto, el saco, para un observador situado en el suelo, sigue la trayectoria de un tiro vertical hacia arriba, cuyas ecuaciones son:

$$y = H + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 20 + 4 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 \quad ; \quad v = v_0 - g \cdot t = 4 - 9{,}8 \cdot t$$

Observa que de estas ecuaciones se deduce fácilmente que el saco continúa subiendo durante 0,4 s hasta que comienza a caer:

$$v = 0 = 4 - 9{,}8 \cdot t_s \;\rightarrow\; t_s = \frac{4}{9{,}8} = 0{,}4 \text{ s}$$

El tiempo total que tarda en llegar al suelo se obtiene sustituyendo $y = 0$ en la ecuación para la altura:

$$y = 0 = 20 + 4 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 \;\rightarrow\; \begin{cases} t_1 = 2{,}47 \text{ s} \\ t_2 = -1{,}65 \text{ s} \end{cases}$$

La segunda solución no tiene sentido físico, por lo que el saco llega al suelo 2,47 s después de ser soltado. La velocidad con la que llega es:

$$v = 4 - 9{,}8 \cdot 2{,}47 = -20{,}2 \text{ m/s}$$

Por su parte, durante este tiempo, el globo sigue subiendo con velocidad constante, por lo que se encontrará a una altura:

$$y_g = 20 + 4 \cdot t \;\rightarrow\; y_g = 20 + 4 \cdot 2{,}47 = 29{,}9 \text{ m}$$

20. Calcula la velocidad con la que se lanzan verticalmente hacia arriba dos cuerpos si uno sube 20 m y el otro está en el aire 5 s.

Las ecuaciones para ambos movimientos son:

$$y = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_0 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 \quad ; \quad v = v_0 - g \cdot t = v_0 - 9{,}8 \cdot t$$

El primero alcanza una altura de 20 m; luego, cuando $y = 20$ m, altura máxima, $v = 0$.

Por tanto:

$$20 = v_0 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 \quad ; \quad 0 = v_0 - 9{,}8 \cdot t \rightarrow v_0 = 9{,}8 \cdot t$$

$$20 = 9{,}8 \cdot t \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 = 4{,}9 \cdot t^2 \rightarrow t = 2{,}02 \text{ s}$$

$$v_0 = 9{,}8 \cdot 2{,}02 = 19{,}8 \text{ m/s}$$

El segundo está en el aire 5 s; es decir, tarda 5 s en llegar al suelo, donde $y = 0$; luego:

$$0 = v_0 \cdot 5 - 4{,}9 \cdot 5^2 \rightarrow 5 \cdot v_0 = 122{,}5 \rightarrow v_0 = 24{,}5 \text{ m/s}$$

Por tanto, el segundo cuerpo fue lanzado con una velocidad de 24,5 m/s, mayor que la del primero, de 19,8 m/s.

21. Un cuerpo lanzado verticalmente hacia abajo desde una altura de 50 m tarda 2 s en llegar al suelo. Calcula la velocidad con que fue lanzado y la velocidad con que llegó al suelo.

El movimiento del cuerpo es el que corresponde a un tiro vertical hacia abajo, de ecuaciones:

$$y = H - v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 50 - v_0 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 \quad ; \quad v = -v_0 - g \cdot t = -v_0 - 9{,}8 \cdot t$$

Sabiendo que llega al suelo ($y = 0$) en el instante $t = 2$ s, obtenemos la velocidad inicial:

$$0 = 50 - v_0 \cdot 2 - 4{,}9 \cdot 2^2 \rightarrow 2 \cdot v_0 = 50 - 19{,}6 = 30{,}4 \rightarrow v_0 = 15{,}2 \text{ m/s}$$

La velocidad en ese instante es:

$$v = -v_0 - 9{,}8 \cdot t = -15{,}2 - 9{,}8 \cdot 2 = -34{,}8 \text{ m/s}$$

El cuerpo llega al suelo con una velocidad de 34,8 m/s, y fue lanzado con una velocidad de 15,2 m/s.

22. Desde una altura de 44 m soltamos una piedra. Por otro lado, lanzamos verticalmente hacia arriba una pelota y hacia abajo una moneda, ambas a 10 m/s. ¿Cuándo se ha de lanzar cada objeto para que lleguen todos a la vez al suelo?

La piedra realiza una caída libre; luego:

$$y = H - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \rightarrow 0 = 44 - 4{,}9 \cdot t^2 \rightarrow t = 3 \text{ s}$$

Por tanto, la piedra tarda en caer 3 s.

El movimiento de la pelota es el de un tiro vertical hacia arriba; luego:

$$y = H + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \rightarrow 0 = 44 + 10 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2$$

La solución válida de esta ecuación es $t = 4$ s; por tanto, la pelota tarda 4 s en llegar al suelo.

La moneda se mueve siguiendo un tiro vertical hacia abajo, de ecuación:

$$y = H - v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \rightarrow 0 = 44 - 10 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2$$

La solución válida de esta ecuación es $t = 2$ s; luego, la moneda tarda 2 s en llegar al suelo.

Por tanto, primero se ha de lanzar la pelota; 1 segundo más tarde se soltará la piedra, y 1 segundo después se lanzará hacia abajo la moneda.

23. Desde la azotea de un edificio de 75 m de altura se suelta una piedra. En el mismo instante, y desde el suelo, se lanza verticalmente hacia arriba una pelota con una velocidad de 25 m/s: a) ¿Cuánto tardan en cruzarse? b) Calcula la altura y la velocidad de ambos cuerpos en ese instante. ¿Dónde está la piedra cuando la pelota alcanza su máxima altura?

a) Desde la azotea se suelta la piedra, que cae realizando un movimiento de caída libre cuyas ecuaciones son:

$$y_1 = H - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 75 - 4{,}9 \cdot t^2 \quad ; \quad v_1 = -g \cdot t = -9{,}8 \cdot t$$

Desde el suelo se lanza la pelota, que sigue un movimiento descrito por las ecuaciones:

$$y_2 = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 25 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 \quad ; \quad v_2 = v_0 - g \cdot t = 25 - 9{,}8 \cdot t$$

Cuando los cuerpos se cruzan, se encuentran a la misma altura, $y = y_1 = y_2$; luego:

$$75 - 4{,}9 \cdot t^2 = 25 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 \rightarrow 75 = 25 \cdot t \rightarrow t = 3 \text{ s}$$

b) Los cuerpos se cruzan a una altura:

$$y = y_1 = 75 - 4{,}9 \cdot 3 = 60{,}3 \text{ m}$$

La velocidad de la piedra en el cruce es:

$$v_1 = -9{,}8 \cdot t = -9{,}8 \cdot 3 = -29{,}4 \text{ m/s}$$

y la velocidad de la pelota es:

$$v_2 = 25 - 9{,}8 \cdot t = 25 - 9{,}8 \cdot 3 = -4{,}4 \text{ m/s}$$

Por tanto, la pelota está bajando.

Cuando la pelota llega a su altura máxima:

$$v_2 = 0 \rightarrow 0 = 25 - 9{,}8 \cdot t \rightarrow t = 2{,}55 \text{ s}$$

y la altura máxima resulta:

$$y_{máx} = 25 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 = 31{,}87 \text{ m}$$

La pelota tarda 2,55 s en alcanzar su altura máxima; en ese instante, la piedra se encuentra a una altura:

$$y_1 = 75 - 4{,}9 \cdot 2{,}55^2 = 43{,}14 \text{ m}$$

24. La brújula de un avión indica que se mueve hacia el norte y su velocímetro marca 252 km/h. Si hay un viento de dirección este de 90 km/h, ¿cuál es la velocidad del avión respecto a la tierra? ¿Cuál tendría que ser la dirección del avión para que se moviese realmente hacia el norte?

La velocidad del avión debido a sus motores es:

$$v_a = 252 \text{ km/h} = 70 \text{ m/s}$$

La velocidad del viento es:

$$v_v = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}$$

El movimiento del avión respecto a la tierra es la composición de dos m.r.u.: uno en dirección norte, que tomaremos como eje *Y,* debido al motor del avión, y otro en dirección este, que tomaremos como eje *X,* debido al viento. Luego, la velocidad resultante es:

$$\vec{v} = v_v \cdot \vec{i} + v_a \cdot \vec{j} = 25 \cdot \vec{i} + 70 \cdot \vec{j}$$

El módulo de esta velocidad es la rapidez del avión respecto a la tierra:

$$v = (25^2 + 70^2)^{1/2} = 74{,}33 \text{ m/s} = 267{,}6 \text{ km/h}$$

Su dirección viene dada por el ángulo α:

$$tg\ \alpha = \frac{25}{70} = 0{,}36 \rightarrow \alpha = 19{,}65°$$

El avión, debido al viento, vuela más deprisa, pero se desvia de su rumbo 19,65° al este medido respecto a la dirección norte.

Para que el avión vuele en dirección norte respecto a la tierra, tiene que volar hacia el noroeste, de forma que la componente de su velocidad hacia el oeste contrarreste la velocidad del viento.

La velocidad del avión será:

$$\vec{v}_a = -v_a \cdot sen\ \beta \cdot \vec{i} + v_a \cdot cos\ \beta \cdot \vec{i} = -70 \cdot sen\ \beta \cdot \vec{i} + 70 \cdot cos\ \beta \cdot \vec{i}$$

$$v_x = v_{a,x} + v_{v,x} = 0 \rightarrow 70 \cdot sen\ \beta = 25 \rightarrow sen\ \beta = \frac{25}{70} \rightarrow \beta = 21°$$

El avión vuela en dirección noroeste, con una inclinación de 21° hacia el oeste medida respecto a la dirección norte, y su velocidad resultante respecto a la tierra es:

$$v = v_a \cdot cos\ \beta = 70 \cdot 0{,}93 = 65{,}4 \text{ m/s} = 235 \text{ km/h}$$

El avión, debido al viento, pierde velocidad al mantener rumbo norte.

25. Un nadador tarda 2 minutos en recorrer una distancia de 240 m en un río cuando nada a favor de la corriente, y 4 minutos si lo hace en contra de la corriente. Calcula la velocidad del nadador y la velocidad de la corriente del río. Sabiendo que si nada perpendicularmente a la corriente tarda 2 minutos en llegar a la otra orilla, calcula la anchura del río y cuánto se ha desplazado del punto de partida. Si desea cruzar perpendicularmente el río, ¿en qué dirección ha de nadar? ¿Cuánto tarda en cruzarlo?

Llamamos v_n a la velocidad del nadador y v_c a la de la corriente. Cuando nada a favor de la corriente, la velocidad resultante es la suma $v = v_n + v_c$, y cuando lo hace contra la corriente, la velocidad resultante es la diferencia $v = v_n - v_c$. Teniendo en cuenta que el movimiento resultante es siempre rectilíneo y uniforme, $x = v \cdot t$, tenemos:

A favor de la corriente:

$$240 = (v_n + v_c) \cdot 120 \rightarrow v_n + v_c = 2$$

En contra de la corriente:

$$240 = (v_n - v_c) \cdot 240 \rightarrow v_n - v_c = 1$$

Resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones, se obtiene:

$$v_n = v_c + 1 \rightarrow v_c + 1 + v_c = 2 \rightarrow v_c = 0{,}5 \text{ m/s} \rightarrow v_n = 1{,}5 \text{ m/s}$$

Cuando nada en dirección perpendicular a la corriente, su movimiento es la composición de dos m.r.u. perpendiculares:

Tomando el eje X perpendicular al río y el eje Y en el sentido de la corriente:

$$x = v_n \cdot t = 1{,}5 \cdot t \quad ; \quad y = v_c \cdot t = 0{,}5 \cdot t$$

Si tarda 2 minutos (120 s) en atravesar el río, la anchura de este es:

$$x = 1{,}5 \cdot 120 = 180 \text{ m}$$

Pero el nadador no llega frente al punto de partida, pues se ha desplazado en el sentido de la corriente una distancia:

$$y = v_c \cdot t = 0{,}5 \cdot 120 = 60 \text{ m}$$

En realidad, ha nadado una distancia:

$$d = (180^2 + 60^2)^{1/2} = 189{,}74 \text{ m}$$

Si el nadador desea cruzar perpendicularmente el río, ha de nadar formando un cierto ángulo con la corriente; es decir, su velocidad ha de tener, en el sistema de referencia definido anteriormente, una componente y tal que contrarreste la velocidad de la corriente:

$$\vec{v}_n = v_{n,x} \cdot \vec{i} + v_{n,y} \cdot \vec{j} = v_n \cdot \cos\alpha \cdot \vec{i} - v_n \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \vec{j} = 1{,}5 \cdot \cos\alpha \cdot \vec{i} - 1{,}5 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \vec{j}$$

La velocidad de la corriente está dirigida según el eje Y; luego:

$$\vec{v}_c = v_c \cdot \vec{j} = 0{,}5 \cdot \vec{j}$$

Para que la velocidad resultante esté dirigida según el eje X:

$$v_y = 0 \rightarrow 0{,}5 = 1{,}5 \cdot \operatorname{sen}\alpha \rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3} \rightarrow \alpha = 19{,}5°$$

Este ángulo es el que forma la dirección del nadador con el eje X, perpendicular a la corriente; luego, el ángulo medido con respecto a la corriente es de 109,5°.

La velocidad resultante es:

$$v_x = v_n \cdot \cos\alpha = 1{,}5 \cdot 0{,}94 = 1{,}41 \text{ m/s}$$

y teniendo en cuenta la anchura del río, obtenida anteriormente, tarda en cruzarlo:

$$x = v_x \cdot t \rightarrow 180 = 1{,}41 \cdot t \rightarrow t = 128 \text{ s} = 2 \text{ minutos y } 8 \text{ segundos}$$

26. El caño de una fuente consiste en un tubo cilíndrico de 6 cm de diámetro situado horizontalmente a una altura de 120 cm. El agua ocupa todo el cilindro y cae a una distancia de 1 m. Calcula la velocidad con que sale el agua y el caudal de la fuente, en litros por minuto.

Dato: Recuerda que el caudal (m^3/s) es igual a la sección (m^2) por la velocidad (m/s).

El agua realiza un tiro horizontal, cuyas ecuaciones son:

$$x = v_0 \cdot t \quad ; \quad y = H - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Sustituyendo en estas ecuaciones la posición del punto final, es decir, el punto en el que el agua llega al suelo, obtenemos el tiempo de vuelo y la velocidad inicial:

$$1 = v_0 \cdot t$$

$$0 = 1{,}2 - 4{,}9 \cdot t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{1{,}2}{4{,}9}} = 0{,}5 \text{ s} \rightarrow v_0 = 2 \text{ m/s}$$

El agua sale, por tanto, a una velocidad de 2 m/s.

La sección del caño de la fuente es el área de un círculo de radio R = 3 cm = 0,03 m, luego:

$$S = \pi \cdot R^2 = 2{,}83 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

El caudal, C, es:

$$C = S \cdot v = 2{,}83 \cdot 10^{-3} \cdot 2 = 5{,}66 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3\text{/s} = 5{,}66 \text{ L/s} = 339{,}6 \text{ L/min}$$

De la fuente manan, aproximadamente, 340 litros por minuto.

27. Desde lo alto del palo mayor de un velero que navega a 6 m/s, a una altura, *h*, de 19,6 m, se suelta una piedra. Calcula: a) El tiempo que tarda la piedra en llegar a la cubierta del barco. b) El punto de la cubierta donde cae la piedra. ¿Qué tipo de movimiento realiza la piedra para un observador situado en el velero? ¿Y para otro situado en la orilla?

Para un observador situado en el velero, la piedra realiza una caída libre, pero para un observador situado en tierra, como al soltarla lleva la misma velocidad que el velero, realiza un tiro horizontal.

La ecuación de la piedra para el observador situado en el velero es:

$$y = H - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 19{,}6 - 4{,}9 \cdot t^2$$

Mientras que para el observador de tierra:

$$y = H - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 19{,}6 - 4{,}9 \cdot t^2 \quad ; \quad x = v_0 \cdot t = 6 \cdot t$$

a) Tanto para uno como para el otro, la piedra tarda en llegar a la cubierta:

$$0 = 19{,}6 - 4{,}9 \cdot t^2 \rightarrow t = 2 \text{ s}$$

b) Para el observador situado en el velero, la piedra cae verticalmente; por tanto, cae en el pie del palo mayor.

Para el observador situado en la orilla, la piedra, como realiza un tiro horizontal, se desplaza horizontalmente una distancia:

$$x = 6 \cdot 2 = 12 \text{ m}$$

pero el velero, en ese tiempo, se ha desplazado la misma distancia ($x = 6 \cdot 2 = 12$ m), por lo que la piedra, para este observador, también cae en el pie del palo mayor.

28. Un atleta lanza un peso a 23 m de distancia. La trayectoria de lanzamiento se inicia a 2 m de altura y con una elevación de 45°. Calcula el tiempo que está el peso en el aire, la velocidad inicial del peso y la altura máxima que alcanza en su movimiento.

El atleta realiza un tiro oblicuo desde una altura de 2 m y con una elevación de 45°; luego, las ecuaciones del movimiento del peso son, para los ejes *X* e *Y*:

$$x = v_0 \cdot cos\ \alpha \cdot t = v_0 \cdot 0{,}71 \cdot t$$

$$v_x = v_0 \cdot cos\ \alpha = v_0 \cdot 0{,}71$$

$$y = h + v_0 \cdot sen\ \alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 2 + v_0 \cdot 0{,}71 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2$$

$$v_y = v_0 \cdot sen\ \alpha - g \cdot t = v_0 \cdot 0{,}71 - 9{,}8 \cdot t$$

– Cuando el peso llega al suelo, $y = 0$ y $x = 24$ m; luego:

$$24 = 0{,}71 \cdot v_0 \cdot t \quad ; \quad 0 = 2 + 0{,}71 \cdot v_0 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2$$

$$0 = 2 + 24 - 4{,}9 \cdot t^2 \rightarrow 26 = 4{,}9 \cdot t^2 \rightarrow t = 2{,}3 \text{ s}$$

La pelota está en el aire 2,3 segundos.

– La velocidad inicial del peso es:

$$24 = 0{,}71 \cdot 2{,}3 \cdot v_0 \rightarrow v_0 = 14{,}7 \text{ m/s}$$

– El peso alcanza su máxima altura cuando v_y = 0; luego:

$$0 = 14{,}7 \cdot 0{,}71 - 9{,}8 \cdot t \rightarrow 10{,}4 = 9{,}8 \cdot t \rightarrow t = 1{,}06 \text{ s}$$

$$y = 2 + 14{,}7 \cdot 0{,}71 \cdot 1{,}06 - 4{,}9 \cdot 1{,}06^2 = 7{,}56 \text{ m}$$

El peso alcanza una altura máxima de 7,56 m.

29. Desde la línea de 6,25 m, un jugador de baloncesto lanza el balón con una elevación de 35° y desde una altura de 2 m. ¿Con qué velocidad ha de lanzar el balón para que entre en la canasta, situada a 3,05 m de altura?

El jugador realiza un tiro oblicuo desde una altura de 2 m con una inclinación de 35°; luego, las ecuaciones del movimiento del balón son, para los ejes *X* e *Y*:

$$x = v_0 \cdot cos\ \alpha \cdot t = v_0 \cdot cos\ 35° \cdot t = 0{,}82 \cdot v_0 \cdot t$$

$$y = H + v_0 \cdot sen\ \alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 2 + v_0 \cdot sen\ 35° \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 = 2 + 0{,}57 \cdot v_0 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2$$

Para que el balón entre en la canasta cuando es lanzado desde la distancia de 6,25 m, se ha de cumplir que cuando x = 6,25 m entonces y = 3,05 m; por tanto:

$$6{,}25 = 0{,}82 \cdot v_0 \cdot t \quad ; \quad 3{,}05 = 2 + 0{,}57 \cdot v_0 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2$$

Despejando en la primera ecuación, $v_0 \cdot t = 7{,}62$, y sustituyendo en la segunda:

$$3{,}05 = 2 + 0{,}57 \cdot 7{,}62 - 4{,}9 \cdot t^2 \rightarrow 1{,}05 = 4{,}34 - 4{,}9 \cdot t^2 \rightarrow t = 0{,}82 \text{ s}$$

Este es el tiempo que tarda el balón en llegar a la canasta; luego, la velocidad de lanzamiento es:

$$v_0 = \frac{7{,}62}{0{,}82} = 9{,}29 \text{ m/s} = 33{,}4 \text{ km/h}$$

30. Dos alumnos están a la misma distancia de una papelera de 30 cm de altura, en la que intentan meter una bola de papel. Un alumno está de pie y lanza horizontalmente la bola con una velocidad de 10 m/s desde una altura de 2,10 m. El otro está sentado y lanza la bola con una elevación de 30° y una velocidad de 8 m/s desde una altura de 75 cm. Si el alumno que está de pie hace canasta, calcula la distancia entre la papelera y los alumnos. ¿Hace canasta el alumno que está sentado? Considera g = 10 m/s².

El alumno que está de pie lanza la bola de papel horizontalmente; luego, este realiza un tiro horizontal, cuyas ecuaciones, para los ejes *X* e *Y*, son:

$$x = v_0 \cdot t = 10 \cdot t$$

$$y = H - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 2{,}1 - 5 \cdot t^2$$

Cuando la pelota entra en la papelera, y = 0,3 m; luego:

$$0{,}3 = 2{,}1 - 5 \cdot t^2 \rightarrow 1{,}8 = 5 \cdot t^2 \rightarrow t = 0{,}6 \text{ s}$$

Y sustituyendo en la ecuación de x, la distancia de los alumnos a la papelera es:

$$x = 10 \cdot 0{,}6 = 6 \text{ m}$$

Para que el alumno que está de pie enceste, la papelera tiene que estar a 6 m de él.

El alumno que está sentado realiza un tiro oblicuo desde una altura de 0,75 m y con una elevación de 30°.

Luego, las ecuaciones del movimiento de la bola son, para los ejes X e Y:

$$x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t = 8 \cdot \cos 30° \cdot t = 6{,}93 \cdot t$$

$$y = H + v_0 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 0{,}75 + 8 \cdot \operatorname{sen} 30° \cdot t - 5 \cdot t^2 = 0{,}75 + 4 \cdot t - 5 \cdot t^2$$

Cuando la bola llega a la línea vertical donde está la papelera:

$$x = 6 = 6{,}93 \cdot t \rightarrow t = 0{,}87 \text{ s}$$

La altura de la bola de papel en ese instante es:

$$y = 0{,}75 + 4 \cdot 0{,}87 - 5 \cdot 0{,}87^2 = 0{,}44 \text{ m}$$

Por tanto, la bola pasa 14 cm (0,44 – 0,30 = 0,14 m) por encima de la papelera.

31. Calcula la elevación con la que hay que lanzar un penalti para que entre rozando el palo superior de la portería si el balón es lanzado con una velocidad de 90 km/h. La altura de la portería es de 2,44 m y la distancia entre ella y el punto de lanzamiento es de 11 m.

El balón realiza un movimiento correspondiente a un tiro oblicuo desde el suelo con una velocidad inicial v_0 = 90 km/h = 25 m/s, cuyas ecuaciones, para los ejes X e Y, son:

$$x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t = 25 \cdot \cos \alpha \cdot t$$

$$y = v_0 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 25 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2$$

Cuando el balón llega a la portería, x = 11 m e y = 2,44 m; por tanto, tenemos las siguientes ecuaciones:

$$11 = 25 \cdot \cos \alpha \cdot t \quad ; \quad 2{,}44 = 25 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2$$

Despejando t en la primera ecuación:

$$t = \frac{11}{25 \cdot \cos \alpha} = \frac{0{,}44}{\cos \alpha}$$

y sustituyendo en la segunda, tenemos:

$$2{,}44 = 25 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \frac{0{,}44}{\cos \alpha} - 4{,}9 \cdot \left(\frac{0{,}44}{\cos \alpha}\right)^2$$

$$2{,}44 = 11 \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} - \frac{0{,}95}{\cos^2 \alpha} \rightarrow 2{,}44 = 11 \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{0{,}95}{\cos^2 \alpha}$$

y teniendo en cuenta que $1/\cos^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$, entonces:

$$2{,}44 = 11 \cdot \operatorname{tg} \alpha - 0{,}95 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \rightarrow 0{,}95 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha - 11 \cdot \operatorname{tg} \alpha + 3{,}39 = 0$$

Las soluciones de la ecuación de segundo grado son:

$$\operatorname{tg} \alpha = 11{,}26 \quad ; \quad \operatorname{tg} \alpha = 0{,}32$$

La primera solución ($\operatorname{tg} \alpha$ = 11,26) significa que el balón fue lanzado con una elevación α = 84,92°, y, por tanto, tarda en llegar a la portería 5 segundos:

$$t = \frac{0{,}44}{\cos 85°} = 5 \text{ s}$$

La segunda solución ($tg\ \alpha = 0{,}32$) significa que el balón fue lanzado con una elevación $\alpha = 17{,}5°$, y, por tanto, tarda en llegar a la portería 0,46 segundos:

$$t = \frac{0{,}44}{cos\ 17{,}5°} = 0{,}46 \text{ s}$$

Ambas soluciones son correctas, pero la primera no tiene sentido, pues el portero tendría tiempo suficiente para detener el balón antes de que entrase en la portería; luego, la solución real es la segunda, cuando el ángulo de elevación es de 17,5°.

32. Un disco de 25 cm de radio ha dado 70 vueltas en 10 s, momento en el cual su velocidad angular es 64 rad/s. Calcula: a) Su aceleración angular y su velocidad angular inicial. b) La velocidad lineal y el espacio recorrido por un punto de su periferia a los 5 s.

El cuerpo gira con m.c.u.a., que viene descrito por las ecuaciones:

$$\phi = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \quad ; \quad \omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$$

a) Cuando han transcurrido 10 s, el cuerpo ha dado 70 vueltas y su velocidad angular es $\omega = 64$ rad/s; luego:

$$\phi = 70 \cdot 2 \cdot \pi = 440 \text{ rad}$$

$$440 = \omega_0 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot 10^2 \quad ; \quad 64 = \omega_0 + \alpha \cdot 10$$

En la segunda ecuación despejamos la velocidad angular inicial y sustituimos en la primera, con lo que tenemos:

$$\omega_0 = 64 - \alpha \cdot 10$$

$$440 = (64 - \alpha \cdot 10) \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot 10^2 = 640 - 50 \cdot \alpha \rightarrow 200 = 50 \cdot \alpha \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha = 4 \text{ rad/s}^2$$

$$\omega_0 = 64 - 4 \cdot 10 = 24 \text{ rad/s}$$

La aceleración angular es 4 rad/s², y la velocidad angular inicial vale 24 rad/s.

b) Calculamos, en primer lugar, el ángulo girado en 5 s y la velocidad angular en ese instante:

$$\phi = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 = 24 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5^2 = 170 \text{ rad}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t = 24 + 4 \cdot 5 = 44 \text{ rad/s}$$

A partir de la relación entre las magnitudes angulares y las lineales, tenemos:

$$s = \phi \cdot R = 170 \cdot 0{,}25 = 42{,}5 \text{ m} \quad ; \quad v = \omega \cdot R = 44 \cdot 0{,}25 = 11 \text{ m/s}$$

33. Las manecillas de un reloj, el minutero y el horario, coinciden a las 12 horas. ¿Qué hora es cuando vuelven a coincidir por primera vez? ¿Y por segunda vez?

El minutero de un reloj tarda 1 hora, es decir, 60 minutos, en dar una vuelta; por tanto, su velocidad angular es:

$$\omega_1 = \frac{2 \cdot \pi}{T_1} = \frac{2 \cdot \pi}{60} \text{ rad/min}$$

La ecuación que describe el ángulo descrito por el minutero en función del tiempo es:

$$\phi_1 = \omega_1 \cdot t = \frac{2 \cdot \pi}{60} \cdot t$$

con el tiempo expresado en minutos.

El horario de un reloj tarda 12 horas, es decir, 720 minutos, en dar una vuelta, por lo que su velocidad angular es:

$$\omega_2 = \frac{2 \cdot \pi}{T_2} = \frac{2 \cdot \pi}{720} \text{ rad/min}$$

y el ángulo descrito en este caso, en función del tiempo en minutos, es:

$$\phi_2 = \omega_2 \cdot t = \frac{2 \cdot \pi}{720} \cdot t$$

con el tiempo expresado en minutos.

Cuando vuelven a coincidir por primera vez, el horario ha girado un ángulo ϕ y el minutero ha dado una vuelta más ese ángulo ϕ; luego:

$$\phi_1 = \phi_2 + 2 \cdot \pi \rightarrow \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{60} = \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{720} + 2 \cdot \pi$$

$$\frac{t}{60} = \frac{t}{720} + 1 \rightarrow 12 \cdot t = t + 720 \rightarrow t = \frac{720}{11} = 65{,}45 \text{ min}$$

Por tanto, como han transcurrido 65,45 minutos, es decir, 1 hora, 5 minutos y 27 segundos, vuelven a coincidir por primera vez a la una y 5 minutos y 27 segundos.

Cuando coinciden por segunda vez, el minutero ha dado 2 vueltas más el ángulo girado por el horario; luego:

$$\phi_1 = \phi_2 + 2 \cdot \pi \rightarrow \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{60} = \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{720} + 4 \cdot \pi$$

$$\frac{t}{60} = \frac{t}{720} + 2 \rightarrow 12 \cdot t = t + 1\,440 \rightarrow t = \frac{1\,440}{11} = 130{,}91 \text{ min}$$

En este caso, han transcurrido 130,90 minutos, es decir, 2 horas, 10 minutos y 55 segundos, desde el instante inicial a las 12 horas, por lo que coinciden por segunda vez a las dos y 10 minutos y 54 segundos.

34. Dos cuerpos parten del mismo punto de una circunferencia de 20 m de radio y la recorren en sentidos contrarios. Uno tarda 40 s en dar una vuelta y el otro se mueve a 1 r.p.m. Calcula: a) El tiempo que tardan en cruzarse. b) El ángulo descrito y el espacio recorrido por cada uno.

Elegimos un sistema de referencia en el que el origen se encuentra en el centro de la circunferencia y el eje *X* está orientado de modo que para ambos cuerpos $\phi_0 = 0$.

Si el primer cuerpo tarda 40 s en dar una vuelta, su velocidad angular es:

$$\omega_1 = \frac{2 \cdot \pi}{T_1} = \frac{2 \cdot \pi}{40} \text{ rad/s}$$

Su posición angular viene descrita, en cada instante, por la ecuación:

$$\phi_1 = \omega_1 \cdot t = \frac{2 \cdot \pi}{40} \cdot t$$

El segundo cuerpo recorre la circunferencia en sentido contrario, moviéndose a 1 r.p.m. Por tanto, su velocidad angular es:

$$\omega_2 = -1 \text{ r.p.m.} = -\frac{2 \cdot \pi}{60} \text{ rad/s}$$

Y su posición viene determinada, en todo momento, por la expresión:

$$\phi_2 = \omega_2 \cdot t = -\frac{2 \cdot \pi}{60} \cdot t$$

a) Cuando los dos cuerpos se encuentran se cumple:

$$\phi_2 - \phi_1 = 2 \cdot \pi \rightarrow \frac{2 \cdot \pi}{40} \cdot t - \left(-\frac{2 \cdot \pi}{60} \cdot t\right) = 2 \cdot \pi$$

$$\frac{t}{40} + \frac{t}{60} = 1 \rightarrow 100 \cdot t = 2\,400 \rightarrow t = 24 \text{ s}$$

Como vemos, este tiempo es menor que el que emplea cada uno de los cuerpos en completar una vuelta, como es lógico, ya que recorren la circunferencia en sentidos opuestos.

b) El ángulo descrito por cada uno corresponde a su posición angular en ese instante:

$$\phi_1 = \frac{2 \cdot \pi}{40} \cdot 24 = 3{,}77 \text{ rad} \quad ; \quad \phi_2 = -\frac{2 \cdot \pi}{60} \cdot 24 = -2{,}51 \text{ rad}$$

El signo negativo indica que el segundo cuerpo recorre la circunferencia en sentido contrario, por lo que medimos, para él, ángulos negativos.

El espacio recorrido corresponde a la longitud del arco descrito por cada cuerpo:

$$s_1 = \phi_1 \cdot R = 3{,}77 \cdot 20 = 75{,}4 \text{ m} \quad ; \quad s_2 = |\phi_2| \cdot R = 2{,}51 \cdot 20 = 50{,}2 \text{ m}$$

35. Desde el mismo punto de una circunferencia de 50 m de radio salen dos móviles, *A* y *B*, en el mismo sentido. *A* se mueve con una rapidez constante de 40 m/s y *B* parte del reposo con una aceleración angular de 0,1 rad/s². ¿Cuánto tiempo tarda *B* en alcanzar a *A*? ¿Cuántas vueltas ha dado cada uno hasta ese instante?

Si *A* se mueve con una rapidez de 40 m/s, su velocidad angular es:

$$\omega_1 = \frac{v}{R} = \frac{40}{50} = 0{,}8 \text{ rad/s}$$

luego, la ecuación de su posición angular es:

$$\phi_1 = \omega_1 \cdot t = 0{,}8 \cdot t$$

Como *B* parte del reposo, la ecuación de su movimiento es:

$$\phi_2 = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 = 0{,}05 \cdot t^2$$

Cuando *B* alcanza a *A*, ambos han descrito el mismo ángulo; luego:

$$\phi_1 = \phi_2 \rightarrow 0{,}8 \cdot t = 0{,}05 \cdot t^2 \rightarrow t = \frac{0{,}8}{0{,}05} = 16 \text{ s}$$

Cuando se encuentran han recorrido:

$$\phi_1 = \phi_2 = \omega_1 \cdot t = 0{,}8 \cdot 16 = 12{,}8 \text{ rad} \rightarrow \phi_1 = \frac{12{,}8}{2 \cdot \pi} = 2{,}04 \text{ vueltas}$$