

Definición

Las **ecuaciones bicuadradas** son de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, siendo a, b y c n° reales.

Ejemplos:

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \quad ; \quad x^4 - 4x^2 = 0 \quad ; \quad x^4 + 4 = 0 \quad ; \quad x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Resolución:

Sea la ecuación $ax^4 + bx^2 + c = 0$ [1]

Para resolverla basta fijarse que equivale a una ecuación de 2º grado, pero siendo la variable x^2 .

Para reducirnos a una ecuación de segundo grado, realizamos el cambio de variable: $t = x^2$

Si $t = x^2$, entonces $t^2 = (x^2)^2 = x^4$, quedando la ecuación [1] de la siguiente forma:

$$at^2 + bt + c = 0 \quad [2]$$

Una vez resuelta esta ecuación de variable t, deshacemos el cambio realizado para hallar las raíces de la ecuación [1]:

Sean t_1 y t_2 las soluciones de la ecuación [2]:

$$\text{Sean } t_1 \text{ y } t_2 \text{ las soluciones de la ecuación [2]:} \left[\begin{array}{l} x^2 = t_1 \rightarrow x = \pm \sqrt{t_1} \text{ , si } t_1 \geq 0 \\ x^2 = t_2 \rightarrow x = \pm \sqrt{t_2} \text{ , si } t_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Ejemplos:

1. Consideremos la ecuación $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

o Mediante la sustitución $z = x^2$, la ecuación se transforma en una de 2º grado:

$$\text{Si } z = x^2, \text{ entonces } z^2 = x^4 \rightarrow z^2 - 3z - 4 = 0 \rightarrow z = 4 ; z = -1$$

o Una vez resuelta la ecuación de 2º grado, se deshace el cambio:

➤ Si $z = 4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

➤ Si $z = -1 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow$ No tiene solución

2. Consideremos la ecuación $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

o Mediante la sustitución $z = x^2$, la ecuación se transforma en una de 2º grado:

$$\text{Si } z = x^2, \text{ entonces } z^2 = x^4 \rightarrow z^2 - 13z + 36 = 0 \rightarrow z = 4 ; z = 9$$

o Una vez resuelta la ecuación de 2º grado, se deshace el cambio:

➤ Si $z = 4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

➤ Si $z = 9 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$

Nº de soluciones:

o Cuatro soluciones si la ecuación cuadrática asociada tiene dos soluciones positivas.

o Dos soluciones si la ecuación cuadrática asociada tiene sólo una solución positiva.

o Ninguna si la ecuación cuadrática asociada tiene dos soluciones negativas ó no tiene solución.

□ **Ejemplos:**

3. Consideremos la ecuación $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

- Mediante la sustitución $z = x^2$, la ecuación se transforma en una de 2º grado:

$$\text{Si } z = x^2, \text{ entonces } z^2 = x^4 \rightarrow z^2 - 2z + 1 = 0 \rightarrow (z - 1)^2 = 0 \rightarrow z = 1$$

- Una vez resuelta la ecuación de 2º grado, se deshace el cambio:

$$z = 1 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

4. Consideremos la ecuación $x^4 + x^2 + 3 = 0$

- Mediante la sustitución $z = x^2$, la ecuación se transforma en una de 2º grado:

$$\text{Si } z = x^2, \text{ entonces } z^2 = x^4 \rightarrow z^2 + z + 3 = 0 \rightarrow \text{No tiene solución}$$

- Con lo cual, la ecuación bicuadrada tampoco tiene solución

5. Consideremos la ecuación $x^4 + x^2 = 0$

- Extraemos factor común x^2 : $x^2(x^2 + 1) = 0$

$$\text{○ } x^2(x^2 + 1) = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

$$\rightarrow x^2 + 1 = 0, \text{ no tiene solución.}$$