

## Materia: Matemática de Tercer Año

### Tema: Sistemas de inecuaciones lineales

Dado el siguiente sistema de desigualdades lineales  $6x - 2y \geq 3$  y  $2y - 3x \leq 7$  ¿Cómo puede determinar su solución? Después de completar esta guía, serás capaz de encontrar la región solución de sistemas de desigualdades lineales como éste.

### Marco Teórico

En el último capítulo aprendiste cómo graficar una desigualdad lineal de dos variables. Para hacer eso, puedes graficar la ecuación de la línea recta en el plano de coordenadas. La línea era sólida  $\leq$  o  $\geq$  signos (donde el signo igual se incluye), y la línea punteada cuando los signos eran  $<$  o  $>$  (donde el signo igual no está incluido). A continuación, sombreada por encima de la línea (si la desigualdad se inició con  $y >$  o  $y \geq$ ) o por debajo de la línea (si se inició con  $y <$  o  $y \leq$ ).

En esta sección, veremos cómo representar gráficamente dos o más desigualdades lineales en el mismo plano de coordenadas. Las desigualdades se representan gráficamente por separado en el mismo gráfico, y la solución para el sistema es la región sombreada común entre todas las desigualdades. Una desigualdad lineal de dos variables divide el plano en dos **semiplanos**. Un **sistema** de dos o más desigualdades lineales puede dividir el plano en formas más complejas.

Vamos a empezar por resolver un sistema de dos desigualdades.

### Gráfico de un sistema de dos desigualdades lineales

#### Ejemplo A

Resuelve el siguiente sistema:

$$2x + 3y \leq 18$$

$$x - 4y \leq 12$$

#### Solución

Resolver sistemas de desigualdades lineales significa graficar y encontrar las intersecciones. Para esto grafique cada desigualdad y la solución será la intersección de las regiones de las desigualdades.

En primer lugar, vamos a reescribir cada ecuación en forma de pendiente-intersección (Recuerde que esta forma hace que sea más fácil saber qué región del plano de coordenadas abarca.) Nuestro sistema se vuelve

Texto traducido de: [www.ck12.org](http://www.ck12.org)

[www.guao.org](http://www.guao.org)

$$3y \leq -2x + 18$$

$$y \leq -\frac{2}{3}x + 6$$

$\Rightarrow$

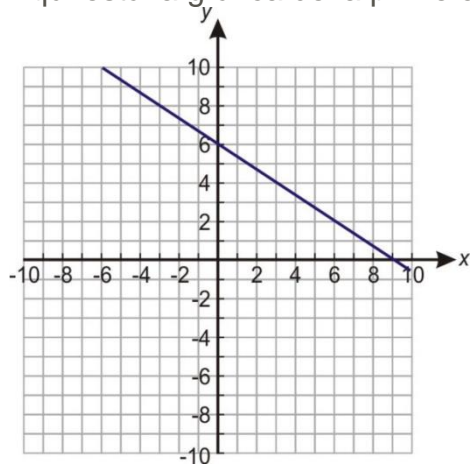
$$-4y \leq -x + 12$$

$$y \geq \frac{x}{4} - 3$$

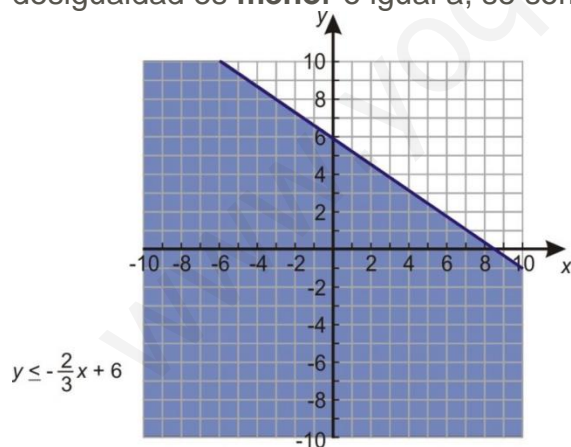
Observe que el signo de la desigualdad en la segunda ecuación cambió porque hemos dividido por un número negativo.

En este primer ejemplo, vamos a gráfica cada desigualdad por separado y luego combinar los resultados.

Aquí está la gráfica de la primera desigualdad:



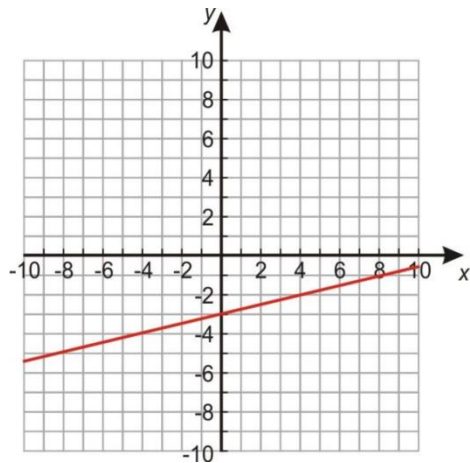
La línea es sólida porque el signo igual se incluye en la desigualdad. Dado que la desigualdad es **menor** o igual a, se sombrea **por debajo de** la línea.



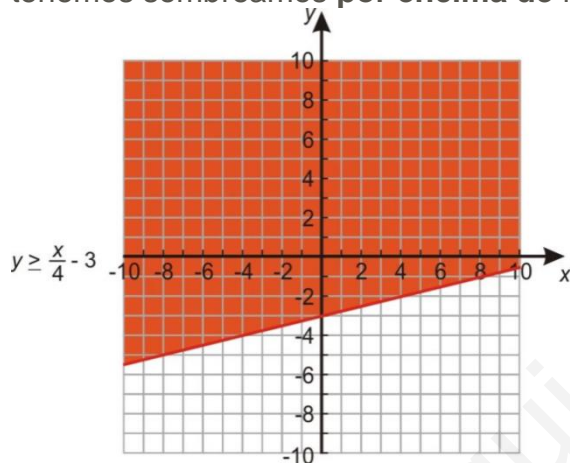
Y aquí está la gráfica de la segunda desigualdad:

Texto traducido de: [www.ck12.org](http://www.ck12.org)

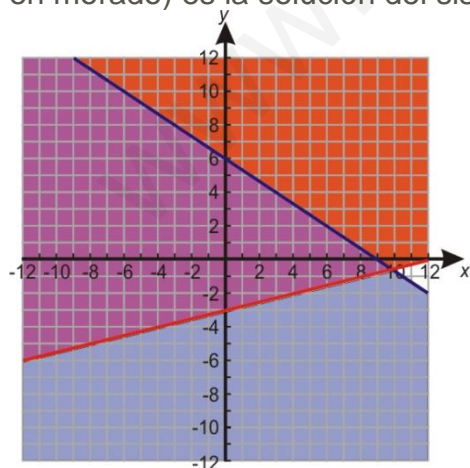
[www.guao.org](http://www.guao.org)



La línea es sólida de nuevo porque el signo igual se incluye en la desigualdad. Ahora tenemos sombreamos **por encima de** la línea porque  $y$  es **mayor** o igual a.



Cuando combinamos los gráficos, se observa que las regiones sombreadas de color azul y rojo se superponen. El área donde se superponen es la zona en la que ambas desigualdades son verdaderas. Por lo tanto esa zona (que se muestra a continuación en morado) es la solución del sistema.



Texto traducido de: [www.ck12.org](http://www.ck12.org)

El tipo de solución que se muestra en este ejemplo se llama **sin límites**, ya que continúa en al menos una dirección (en este caso, siempre hacia arriba y hacia la izquierda).

### Ejemplo B

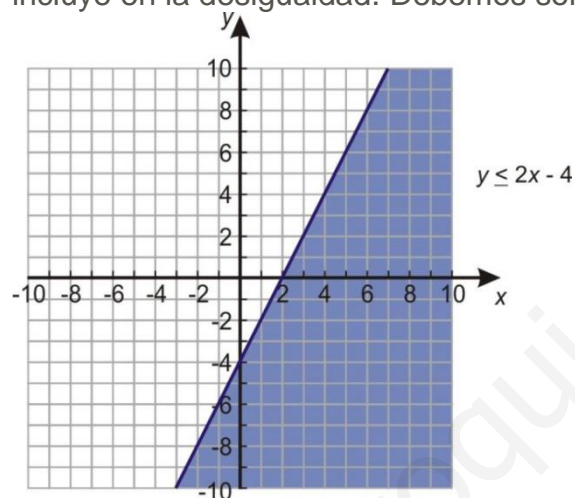
También hay situaciones en las que un sistema de desigualdades no tiene solución. Por ejemplo, resuelva este sistema.

$$y \leq 2x - 4$$

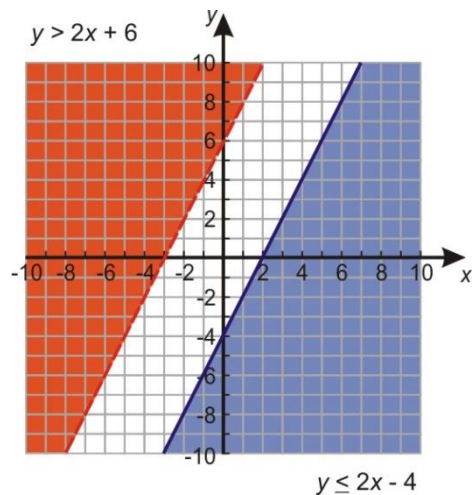
$$y > 2x + 6$$

#### Solución

Empezamos graficando la primera línea. La línea será sólida porque el signo igual se incluye en la desigualdad. Debemos sombrear hacia abajo porque  $y$  es menor.



A continuación se grafica la segunda línea en el mismo eje de coordenadas. Esta línea se puntea debido a que el signo igual no está incluido en la desigualdad. Debemos sombrear hacia arriba porque  $y$  es mayor que.



Las dos líneas tienen la misma pendiente, por lo que sabemos que son paralelas; que significa que las regiones de hecho no se superponen ya que las líneas no se cruzan nunca. Así que este sistema de desigualdades no tiene solución.

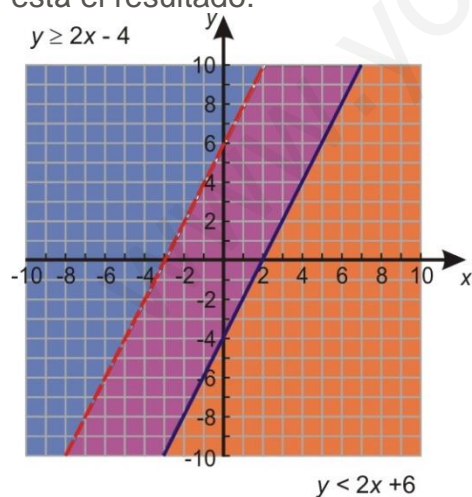
Sin embargo, un sistema de desigualdades a veces puede tener una solución, incluso si las líneas son paralelas. Por ejemplo, ¿qué ocurre si cambiamos las direcciones de los signos de desigualdad en el sistema que acabamos de graficar?

Para graficar el sistema

$$y \geq 2x - 4$$

$$y < 2x + 6$$

Obtendremos las mismas líneas que dibujó para el sistema anterior, pero sombrearemos *la parte superior* por la primera desigualdad y *la baja* de la segunda desigualdad. Aquí está el resultado:



Se puede ver que esta vez las regiones sombreadas se superponen. El área entre las dos líneas es la solución para el sistema.

Texto traducido de: [www.ck12.org](http://www.ck12.org)

## Gráfico de un sistema de más de dos desigualdades lineales

Cuando resolvemos un sistema de sólo dos desigualdades lineales, la solución es siempre una región **ilimitada** -que continúa infinitamente en al menos una dirección. Pero si ponemos juntos un sistema de más de dos desigualdades, a veces podemos obtener una solución que se **limita** -una región finita con tres o más lados.

Veamos un ejemplo sencillo.

### Ejemplo C

Encontrar la solución del siguiente sistema de desigualdades.

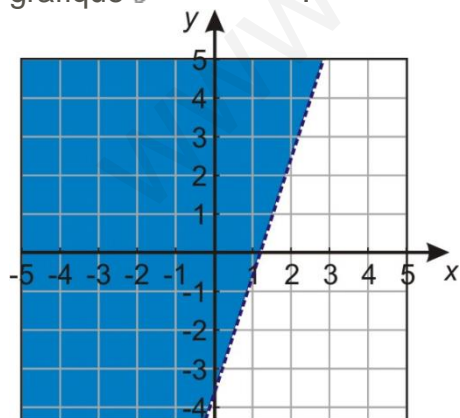
$$\begin{aligned}3x - y &< 4 \\4y + 9x &< 8 \\x &\geq 0 \\y &\geq 0\end{aligned}$$

### Solución

Empecemos por escribir nuestras desigualdades en la forma pendiente-intersección.

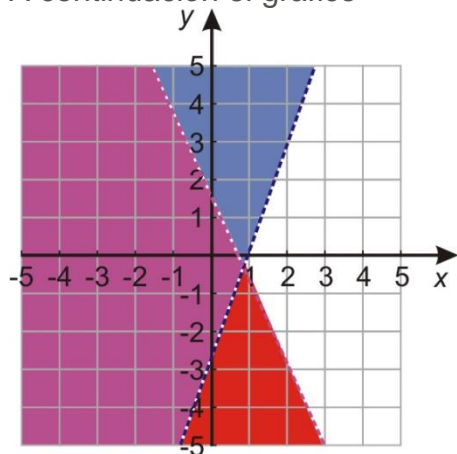
$$\begin{aligned}y &> 3x - 4 \\y &< -\frac{9}{4}x + 2 \\x &\geq 0 \\y &\geq 0\end{aligned}$$

Ahora podemos graficar cada línea y sombread el área adecuada. Primero grafique  $y > 3x - 4$ :

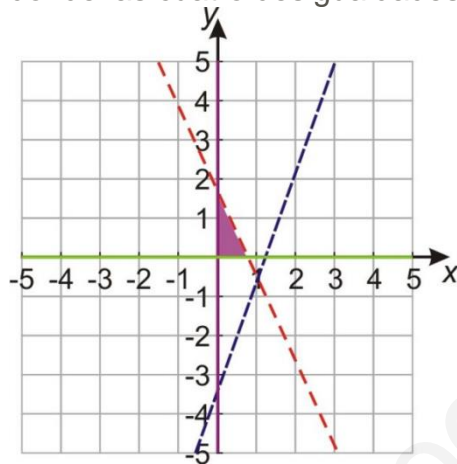


Texto traducido de: [www.ck12.org](http://www.ck12.org)

A continuación el gráfico  $y < -\frac{9}{4}x + 2$ .



Por último, el gráfico  $x \geq 0$  y  $y \geq 0$ , y nos quedamos con la región por debajo, que es donde las cuatro desigualdades se superponen.



La solución está **limitada** porque hay líneas en todos los lados de la región solución. En otras palabras, la región solución es una figura geométrica acotada, en este caso un triángulo.

Note que sólo tres de las líneas que graficamos forman los límites de la región. A veces, cuando graficamos múltiples desigualdades, resulta que algunas de ellas no afectan a la solución global, en este caso, la solución sería la misma incluso si nos hubiéramos graficado la desigualdad  $y > 3x - 4$ . Eso es porque la región solución del sistema formado por las otras tres desigualdades está completamente contenida dentro de la región solución de la cuarta desigualdad; en otras palabras, cualquier solución de las otras 3 desigualdades es automáticamente solución a la cuarta desigualdad, por lo que añadir la desigualdad no va a limitar el conjunto solución en absoluto.

Texto traducido de: [www.ck12.org](http://www.ck12.org)

[www.guao.org](http://www.guao.org)

---

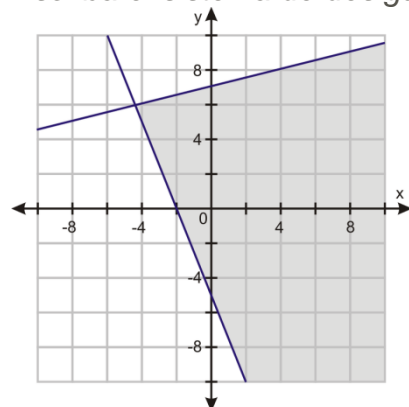
## Vocabulario

- **Solución para el sistema de desigualdades:** la *solución para el sistema de desigualdades* es la región común entre todas las desigualdades en el sistema.
- **Región factible:** La región común del sistema de las desigualdades se llama la *región factible*.

---

## Ejercicios Resueltos

Escriba el sistema de desigualdades que se muestran a continuación.



**Solución:**

Hay dos líneas de límite, por lo que hay dos desigualdades. Escriba cada uno en forma de pendiente-intersección.

$$y \leq \frac{1}{4}x + 7$$

$$y \geq -\frac{5}{2}x - 5$$

---

## Ejercicios

$$y < 3x - 5$$

1. Considere el sistema  $y > 3x - 5$ . ¿Es coherente o incoherente? ¿Por qué?

$$y \leq 2x + 3$$

2. Considere el sistema  $y \geq 2x + 3$ . ¿Es coherente o incoherente? ¿Por qué?

$$y \leq -x + 1$$

3. Considere el sistema  $y > -x + 1$ . ¿Es coherente o incoherente? ¿Por qué?

Texto traducido de: [www.ck12.org](http://www.ck12.org)



4. En el ejemplo 3 en esta lección, resolvimos un sistema de cuatro desigualdades y vimos que una de las desigualdades  $y > 3x - 4$ , no afectó el conjunto solución del sistema.
  - a. ¿Qué pasaría si cambiáramos de que la desigualdad a  $y < 3x - 4$ ?
  - b. ¿Cuál es otra desigualdad que se podría añadir al sistema original sin cambiarla? Grafique esta desigualdad junto con el resto del sistema.
  - c. ¿Cuál es otra desigualdad que se podría añadir al sistema original para que sea inconsistente? Grafique esta desigualdad junto con el resto del sistema.
5. Recordemos las desigualdades compuestas de una variable que hemos trabajado en el capítulo 6. Desigualdades compuestas con "y" son simplemente sistemas como los que estamos trabajando aquí, excepto con una variable en lugar de dos.
  - a. Grafique la desigualdad  $x > 3$  en dos dimensiones. ¿Cuál es otra desigualdad que se podría combinar con él para hacer un sistema inconsistente?
  - b. Grafique la desigualdad  $x \leq 4$  en una recta numérica. ¿Qué sistema de dos dimensiones tendría un gráfico que se ve como este?

Encontrar la región de solución de los siguientes sistemas de desigualdades.

- $$x - y < -6$$
6.
 
$$2y \geq 3x + 17$$

$$4y - 5x < 8$$
7.
 
$$-5x \geq 16 - 8y$$

$$5x - y \geq 5$$
8.
 
$$2y - x \geq -10$$

$$5x + 2y \geq -25$$

$$3x - 2y \leq 17$$
9.
 
$$x - 6y \geq 27$$

$$2x - 3y \leq 21$$

$$x + 4y \leq 6$$
10.
 
$$3x + y \geq -4$$

$$12x - 7y < 120$$

$$7x - 8y \geq 36$$
11.
 
$$5x + y \geq 12$$