Ejercicios y problemas resueltos

Página 110

1. Discusión de sistemas aplicando el método de Gauss

Hazlo tú. Discute y resuelve, en función del parámetro, aplicando el método de Gauss.

a) $\begin{cases} -x + my + \ \ z = 2 \\ 2x - \ \ y + 2z = 0 \\ -x \qquad\ \ - 3z = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + \ \ y + \ \ z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + \ \ y + \ \ z = 3 \end{cases}$

a)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & m & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} (3.^a) \\ (2.^a) \\ (1.^a) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & m & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} (3.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & m & 4 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} (3.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & m-1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Si $m \neq 1$, el sistema es *compatible determinado*.

$$\left.\begin{array}{l} -x \qquad\qquad - 3z = -2 \\ \qquad\quad - y - 4z = -4 \\ (m-1)y \qquad\quad = 0 \end{array}\right\} \text{ Solución: } x = -1,\ y = 0,\ z = 1$$

- Si $m = 1$, el sistema es *compatible indeterminado*.

$$\left.\begin{array}{l} -x \quad - 3z = -2 \\ \ - y - 4z = -4 \\ \ 0y \qquad\ = 0 \end{array}\right\} \text{ Soluciones: } x = 2 - 3\lambda,\ y = 4 - 4\lambda,\ z = \lambda$$

b)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & a & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a-3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a-3 & 5 \\ 0 & 0 & 2-a & -2 \end{array}\right)$$

- Si $a \neq 2$, el sistema es *compatible determinado*.

$$\left.\begin{array}{l} x + \ \ y + \ \ z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + \ \ y + \ \ z = 3 \end{array}\right\} \text{ Solución: } x = 3,\ y = -\frac{3a-4}{a-2},\ z = \frac{2}{a-2}$$

  Los tres planos se cortan en un punto.

- Si $a = 2$, la matriz queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

  El sistema es *incompatible*. Los planos se cortan dos a dos.

2. Discusión de sistemas aplicando el teorema de Rouché

Hazlo tú. Discute los siguientes sistemas de ecuaciones y resuélvelos cuando sean compatibles:

a) $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + y + z = a - 1} \\ \boldsymbol{2x + y + az = a} \\ \boldsymbol{x + ay + z = 1} \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x - y + z = 2} \\ \boldsymbol{2x + y - z = 4} \\ \boldsymbol{mx + y + 3z = 6} \\ \boldsymbol{x - 2z = 0} \end{array}\right.$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right) \to |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 3a - 2 = 0 \begin{array}{l} a = 2 \\ a = 1 \end{array}$

- Si $a \neq 2$ y $a \neq -1 \to ran(A) = 3 = ran(A') \to$ el sistema es *compatible determinado*.

  Para cada valor de a distinto de –1 y 2, tenemos un sistema con solución única, que por la regla de Cramer es:

  $$x = \frac{\begin{vmatrix} a-1 & 1 & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}}{-a^2 + 3a - 2} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ 2 & a & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-a^2 + 3a - 2} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}}{-a^2 + 3a - 2}$$

  Solución: $x = a + 1, \; y = \dfrac{2-a}{a-1}, \; z = -\dfrac{a}{a-1}$

  Son tres planos que se cortan en un punto.

- Si $a = -1$:

  $$\left.\begin{array}{r} x + y + z = -2 \\ 2x + y - z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

  $$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \to ran(A) = 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \to ran(A') = 3 \end{array}\right\} \text{El sistema es } \textit{incompatible}.$$

  Son tres planos que se cortan dos a dos.

- Si $a = 2$:

  $$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \to ran(A) = 2$$

  Como la columna de términos independientes es igual a la columna de coeficientes de z, tenemos que $ran(A') = 2 = ran(A)$, el sistema es *compatible indeterminado*.

  Para resolverlo, tomamos las dos primeras ecuaciones y pasamos z al segundo miembro:

  $$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{array}\right\} \to x = 1 - \lambda, \; y = 0, \; z = \lambda$$

  Los planos se cortan en una recta.

b) Empezamos estudiando el rango de A', ya que puede ser 4:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ m & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 12 - 12m$$

- Si $m \neq 1 \rightarrow ran(A') = 4 \neq ran(A)$, el sistema es *incompatible*.
- Si $m = 1$, quitando la tercera ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 3 = ran(A'), \text{ el sistema es } \textit{compatible determinado}:$$

$$\left.\begin{array}{r} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \\ x - 2z = 0 \end{array}\right\} \text{ Aplicamos la regla de Cramer y obtenemos: } x = 2,\ y = 1,\ z = 1$$

Los planos se cortan en un punto: $P = (2, 1, 1)$.

Página 112

3. Sistemas que dependen de dos parámetros

Hazlo tú. Discute y resuelve según los valores de m y n el sistema siguiente:

$$\begin{cases} mx + y + z = n \\ x + y + mz = 2 \\ 2x + y + mz = n \end{cases}$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} = m - 1$$

- Si $m \neq 1 \rightarrow ran(A) = 3 = ran(A') \rightarrow$ el sistema es *compatible determinado*.

  Para cada valor de m distinto de 1, tenemos un sistema con solución única:

$$\left.\begin{array}{r} mx + y + z = n \\ x + y + mz = 2 \\ 2x + y + mz = n \end{array}\right\} \rightarrow x = n - 2,\ y = \frac{n - m^2 n + mn + 2m^2 - 4}{m - 1},\ z = -\frac{2m + 2n - mn - 4}{m - 1}$$

- Si $m = 1$ y $n = 2$:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = n \\ x + y + z = 2 \\ 2x + y + z = n \end{array}\right\}$$

  Las dos primeras ecuaciones son iguales. El sistema es *compatible indeterminado*.

  El sistema queda:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ 2x + y + z = 2 \end{array}\right\}$$

  Pasando z al segundo miembro obtenemos: $x = 0,\ y = 2 - \lambda,\ z = \lambda$

- Si $m = 1$ y $n \neq 2$, las dos primeras ecuaciones representan dos planos paralelos.

  El sistema es *incompatible*.

4. Sistemas homogéneos

Hazlo tú. Discute y resuelve este sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 3x + ay + 4z = 0 \end{array}\right.$$

Es un sistema homogéneo, luego siempre es compatible. Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & a & 4 \end{vmatrix} = 20 - 2a$$

- Si $a \neq 10 \rightarrow ran(A) = 3 = ran(A') \rightarrow$ el sistema es *compatible determinado*.

  Para cada valor de a distinto de 10, tenemos un sistema con solución única: (0, 0, 0), la solución trivial.

- Si $a = 10 \rightarrow ran(A) = 2 = ran(A') \rightarrow$ el sistema es *compatible indeterminado*.

  Para resolverlo, tomamos las dos primeras ecuaciones y pasamos z al segundo miembro como parámetro:

  $$\left.\begin{array}{l} x + y = z \\ x + 3y = -z \end{array}\right\} \quad \textit{Soluciones:}\ x = 2\lambda,\ y = -\lambda,\ z = \lambda$$

5. Sistemas con más incógnitas que ecuaciones

Hazlo tú. Discute este sistema de ecuaciones y resuélvelo en el caso $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} x - y + z - t = 2 \\ 3x + y - z = -1 \\ x - 5y + 5z - at = a + 5 \end{array}\right.$$

Como A no es cuadrada, vamos a calcular su rango:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & 5 & -a \end{pmatrix} \rightarrow \text{calculamos los siguientes determinantes:}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & -a \end{vmatrix} = 16 - 4a$$

- Si $a \neq 4 \rightarrow ran(A) = 3 = ran(A') <$ *n.º de incógnitas* $\rightarrow$ el sistema es *compatible indeterminado*.

  Pasamos z al segundo miembro como parámetro por no haber seleccionado la columna de coeficientes de z para el menor distinto de cero.

  $$\left.\begin{array}{l} x - y + z - t = 2 \\ 3x + y - z = -1 \\ x - 5y + 5z - at = a + 5 \end{array}\right\} \rightarrow x = 0,\ y = \lambda - 1,\ z = \lambda,\ t = -1$$

- Si $a = 4 \rightarrow ran(A) = 2$

  $$\left.\begin{array}{l} x - y + z - t = 2 \\ 3x + y - z = -1 \\ x - 5y + 5z - 4t = 9 \end{array}\right\} \text{ Si añadimos la columna de términos independientes:}$$

  $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 9 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran(A') = 2 = ran(A) \rightarrow \text{el sistema es } \textit{compatible indeterminado}.$$

  Para resolverlo, tomamos las dos primeras ecuaciones y pasamos z y t al segundo miembro como parámetros:

  $$\left.\begin{array}{l} x - y + z - t = 2 \\ 3x + y - z = -1 \end{array}\right\} \quad \textit{Soluciones:}\ x = \frac{1}{4}\mu + \frac{1}{4},\ y = \lambda - \frac{3}{4}\mu - \frac{7}{4},\ z = \lambda,\ t = \mu$$

Ejercicios y problemas guiados

Página 113

1. Sistema matricial

Dado este sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} x - y + mz = m \\ mx + y - \quad z = m \\ (m+1)x \quad + \quad z = m+2 \end{array}\right.$$

hallar la matriz $A^{-1}B$, sin calcular la matriz inversa de A, siendo A la matriz de coeficientes y B la de términos independientes.

a) $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B$

b) $AX = AA^{-1}B = B$

c) X es la solución del sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} x - y + mz = m \\ mx + y - \quad z = m \\ (m+1)x + \quad z = m+2 \end{array}\right.$$

Para que exista A^{-1} el sistema tiene que tener solución única.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 1 & -1 \\ m+1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -m^2 + m + 2 \neq 0$$

Luego $m \neq -1$ y $m \neq 2$.

En estos casos,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & -1 & m \\ m & 1 & -1 \\ m+2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-m^2+m+2} = \frac{-m^2+m+2}{-m^2+m+2} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & m \\ m & m & -1 \\ m+1 & m+2 & 1 \end{vmatrix}}{-m^2+m+2} = \frac{-m^2+m+2}{-m^2+m+2} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 1 & m \\ m+1 & 0 & m+2 \end{vmatrix}}{-m^2+m+2} = \frac{-m^2+m+2}{-m^2+m+2} = 1$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Sistemas con infinitas soluciones

Sean S y S' dos sistemas de ecuaciones con dos incógnitas que difieren solo en los términos independientes. Si S es compatible indeterminado, ¿lo será también S'?

Si S es compatible indeterminado significa que la columna de términos independientes es linealmente dependiente de las columnas de los coeficientes.

Al cambiar los términos independientes, cambiamos la columna correspondiente y puede que sera linealmente independiente con las anteriores, luego puede que el sistema resulte ser incompatible.

3. Sistema compatible para cualquier valor del parámetro

Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + \ \ y + \ \ z = a + 2 \\ 2x - ay + \ \ z = -2 \\ \ \ x - \ \ y + az = a \end{cases}$$

a) Comprobar que es compatible para cualquier valor de a.

b) Calcular su solución en forma matricial en el caso $a = 0$.

c) Resolver para $a = 1$ utilizando el método de Gauss.

a) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & -a & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = -a^3 - 1 = 0 \to a = -1$

- Si $a \neq -1 \to ran(A) = 3 = ran(A') \to$ el sistema es *compatible determinado*, tiene solución única.
- Si $a = -1$:

$$\begin{cases} -x + y + z = \ \ 1 \\ 2x + y + z = \ \ 2 \\ \ \ x - y - z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \to ran(A) = 2$$

Añadimos la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \to ran(A') = 2 = ran(A)$$

El sistema *compatible indeterminado*, tiene infinitas soluciones.

Es *compatible* para cualquier valor de a.

b) $a = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \to AX = B \to X = A^{-1}B$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

c) $a = 1$:

$$\begin{cases} \ \ x + y + z = \ \ 3 \\ 2x - y + z = -2 \\ \ \ x - y + z = \ \ 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^{a}) \\ (2.^{a}) - 2 \cdot (1.^{a}) \\ (3.^{a}) - (1.^{a}) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -8 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^{a}) \\ (2.^{a}) \\ 3 \cdot (3.^{a}) - 2 \cdot (2.^{a}) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right) \to x = -3, \ y = 1, \ z = 5$$

4. Añadir una ecuación a un sistema

Añadir una ecuación al sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$$

de modo que sea:

a) incompatible.

b) compatible determinado.

c) compatible indeterminado.

a) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$

Hacemos (1.ª) + (2.ª) $\rightarrow$ $3x + z = 4$

Cambiamos el término independiente $\rightarrow$ $3x + z = 5$

El sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ 3x + z = 5 \end{cases}$$

es *incompatible*.

b) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases} \rightarrow \; x = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\lambda, \; y = \frac{4}{3}\lambda + \frac{5}{3}, \; z = \lambda$

Una solución es: $x = \frac{4}{3}, \; y = \frac{5}{3}, \; z = 0$

Añadimos la ecuación $5x - 4y = 0$

El sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ 5x - 4y - \quad = 0 \end{cases}$$

es *compatible determinado*.

c) Hacemos (1.ª) + (2.ª) $\rightarrow$ $3x + z = 4$

Ponemos esta nueva ecuación que es combinación lineal de las anteriores.

El sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ 3x + z = 4 \end{cases}$$

es *compatible indeterminado*.

Ejercicios y problemas propuestos

Página 114

Para practicar

Método de Gauss

1 **Resuelve, si es posible, los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} x+2y+z=9\\ x-y-z=-10\\ 2x-y+z=5\end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y+z=3\\ 2x-y+z=-1\end{cases}$

c) $\begin{cases} -x+2y-z=1\\ 2x-4y+2z=3\\ x+y+z=2\end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x-3y+z=0\\ 3x-y=0\\ 4x+y-z=0\end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=9\\ x-y-z=-10\\ 2x-y+z=5\end{array}\right\}\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&9\\1&-1&-1&-10\\2&-1&1&5\end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\ -(2.^a)+(1.^a)\\ (3.^a)-2\cdot(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&9\\0&3&2&19\\0&-5&-1&-13\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\ (2.^a)\\ (2.^a)+2\cdot(3.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&9\\0&3&2&19\\0&-7&0&-7\end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x+2y+z=9\\ 3y+2z=19\\ -7y=-7\end{array}\right\} \to y=1;\ z=\frac{19-3y}{2}=8;\ x=9-2y-z=-1$$

Solución: $x=-1,\ y=1,\ z=8$

b) $$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=3\\ 2x-y+z=-1\end{array}\right\}\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&3\\2&-1&1&-1\end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\ -(2.^a)+2\cdot(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&3\\0&5&1&7\end{array}\right) \to$$

$$\to \left.\begin{array}{r} x+2y=3-z\\ 5y=7-z\end{array}\right\}\ \begin{array}{l} y=\dfrac{7}{5}-\dfrac{z}{5}\\ x=3-z-2y=3-z-\dfrac{14}{5}+\dfrac{2z}{5}=\dfrac{1}{5}-\dfrac{3z}{5}\end{array}$$

Si tomamos $z=5\lambda$, las soluciones son: $x=\frac{1}{5}-3\lambda,\ y=\frac{7}{5}-\lambda,\ z=5\lambda$

c) $$\left.\begin{array}{r} -x+2y-z=1\\ 2x-4y+2z=3\\ x+y+z=2\end{array}\right\}\ \left(\begin{array}{ccc|c}-1&2&-1&1\\2&-4&2&3\\1&1&1&2\end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(3.^a)\\ (2.^a)\\ (1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\2&-4&2&3\\-1&2&-1&1\end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\ (2.^a)-2\cdot(1.^a)\\ (3.^a)+(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&-6&0&-1\\0&3&0&3\end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\ (2.^a)+2\cdot(3.^a)\\ (3.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&0&0&5\\0&3&0&3\end{array}\right)$$

La segunda ecuación es imposible: $0x+0y+0z=5$

El sistema es *incompatible.*

d) $$\left.\begin{array}{r} 2x-3y+z=0\\ 3x-y=0\\ 4x+y-z=0\end{array}\right\}\ \left(\begin{array}{ccc|c}2&-3&1&0\\3&-1&0&0\\4&1&-1&0\end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\ (2.^a)\\ (3.^a)+(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c}2&-3&1&0\\3&-1&0&0\\6&-2&0&0\end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\ (2.^a)\\ (3.^a)-2\cdot(2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c}2&-3&1&0\\3&-1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} 2x-3y+z=0\\ 3x-y=0\end{array}\right\}$$

$y=3x;\ z=-2x+3y=-2x+9x=7x;\ x=\lambda$

Soluciones: $x=\lambda,\ y=3\lambda,\ z=7\lambda$

2 Estudia y resuelve por el método de Gauss.

a) $\left\{\begin{array}{l} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{l} y + z = -1 \\ x - y = 1 \\ x + 2y + 3z = -2 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{l} x - y + 3z - 14t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{array}\right.$

a) $$\left.\begin{array}{l} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -7 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) + 4\cdot(1.^a) \\ (3.^a) + 2\cdot(1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 6 & -1 & -3 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \end{array}\right) \to$$ Sistema *compatible determinado*.

Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} -x + y + 3z = -2 \\ 6y + 11z = -3 \\ z = 0 \end{array}\right\} \; y = -\frac{1}{2}; \; x = y + 3z + 2 = \frac{3}{2}$$

Solución: $x = \frac{3}{2}, \; y = -\frac{1}{2}, \; z = 0$

b) $$\left.\begin{array}{r} y + z = -1 \\ x - y \quad = 1 \\ x + 2y + 3z = -2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(2.^a) \\ (1.^a) \\ (3.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 3\cdot(2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} x - y \quad = 1 \\ y + z = -1 \end{array}\right\} \; x = 1 + y; \; z = -1 - y; \; y = \lambda$$

Soluciones: $x = 1 + \lambda, \; y = \lambda, \; z = -1 - \lambda$

c) $$\left.\begin{array}{r} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(3.^a) \\ (2.^a) \\ (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - 2\cdot(1.^a) \\ (3.^a) - 5\cdot(1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & -3 & 9 \\ 0 & 12 & -7 & 19 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) : 3 \\ (3.^a) - 2\cdot(2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Sistema *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y + 2z = -3 \\ 2y - z = 3 \\ -z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = -1 \\ y = 1 \\ x = -3 + 2y - 2z = 1 \end{array}$$

Solución: $x = 1, \; y = 1, \; z = -1$

d) $\left.\begin{array}{l} x - y + 3z - 14t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -14 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2\cdot(1.^a) \\ (3.^a) - 3\cdot(1.^a) \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 48 & 0 \end{array}\right) \to$

$\to \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ -4\cdot(2.^a) + 3\cdot(3.^a) \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 28 & 0 \end{array}\right)$

Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z - 14t = 0 \\ -3z + 29t = 0 \\ 28t = 0 \end{array}\right\} \to t = 0;\ z = 0;\ x = y;\ y = \lambda$$

Soluciones: $x = \lambda,\ y = \lambda,\ z = 0,\ t = 0$

3 Resuelve por el método de Gauss.

a) $\begin{cases} x + 2z = 11 \\ x + y = 3 \\ y + z = 13 \\ x + y + z = 10 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z - t = 0 \\ x + y - z - t = -1 \\ x + y + z - t = 2 \end{cases}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) - (1.^a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \\ (4.^a) - (2.^a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \to$

$\to \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) - (1/3)\cdot(3.^a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$(3.^a) \to 3z = 21 \to z = 7$

$(2.^a) \to y - 2z = -8 \to y - 14 = -8 \to y = 6$

$(1.^a) \to x + 2z = 11 \to x + 14 = 11 \to x = -3$

Solución: $x = -3,\ y = 6,\ z = 7$

b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \\ (4.^a) - (1.^a) \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$(4.^a) \to -2t = 1 \to t = -\dfrac{1}{2}$

$(3.^a) \to -2z - 2t = -2 \to -2z + 1 = -2 \to z = \dfrac{3}{2}$

$(2.^a) \to -2y - 2z = -1 \to -2y - 3 = -1 \to y = 1$

$(1.^a) \to x + y + z + t = 1 \to x + 1 + \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2} = 1 \to x = -1$

Solución: $x = -1,\ y = 1,\ z = \dfrac{3}{2},\ t = -\dfrac{1}{2}$

4 **Discute los siguientes sistemas según los valores del parámetro m:**

a) $\begin{cases} x+2y=3\\ y=1\\ 2y=m-2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y+z=3\\ y+2z=0\\ 3y+7z=m \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y-z=1\\ -2y+8z=3\\ mz=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-y=0\\ 3x+z=0\\ (m-5)z=0 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{r} x+2y=3\\ y=1\\ 2y=m-2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 1&2&3\\ 0&1&1\\ 0&2&m-2 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^{\text{a}})\\ (2.^{\text{a}})\\ (3.^{\text{a}})-2\cdot(2.^{\text{a}}) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1&2&3\\ 0&1&1\\ 0&0&m-4 \end{array}\right)$$

- Si $m=4$ → Sistema *compatible determinado*.
- Si $m\neq 4$ → Sistema *incompatible*.

b) $$\left.\begin{array}{r} x-2y+z=3\\ y+2z=0\\ 3y+7z=m \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&-2&1&3\\ 0&1&2&0\\ 0&3&7&m \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^{\text{a}})\\ (2.^{\text{a}})\\ (3.^{\text{a}})-3\cdot(1.^{\text{a}}) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1&-2&1&3\\ 0&1&2&0\\ 0&0&1&m \end{array}\right)$$

Sistema *compatible determinado* para todo m.

c) $$\left.\begin{array}{r} x+y-z=1\\ -2y+8z=3\\ mz=1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&-1&1\\ 0&-2&8&3\\ 0&0&m&1 \end{array}\right)$$

- Si $m=0$ → Sistema *incompatible*.
- Si $m\neq 0$ → Sistema *compatible determinado*.

d) $$\left.\begin{array}{r} x-y=0\\ 3x+z=0\\ (m-5)z=0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&-1&0&0\\ 3&0&1&0\\ 0&0&m-5&0 \end{array}\right)$$

- Si $m=5$ → Sistema *compatible indeterminado*.
- Si $m\neq 5$ → Sistema *compatible determinado* con *solución* $x=0,\ y=0,\ z=0$.

5 **Discute los siguientes sistemas y resuélvelos cuando sea posible:**

a) $\begin{cases} 2x-y=4\\ -x+(y/2)=-2\\ x+my=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y-z=1\\ x-2y+z=3\\ 5x-5y+2z=m \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+2y=3\\ 2x-y=1\\ 4x+3y=m \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-y-2z=2\\ 2x+y+3z=1\\ 3x+z=3\\ x+2y+5z=m \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{r} 2x-y=4\\ -x+(y/2)=-2\\ x+my=2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 2&-1&4\\ -1&1/2&-2\\ 1&m&2 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^{\text{a}})\\ 2\cdot(2.^{\text{a}})+(1.^{\text{a}})\\ 2\cdot(3.^{\text{a}})-(1.^{\text{a}}) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2&-1&4\\ 0&0&0\\ 0&2m+1&0 \end{array}\right)$$

- Si $m=-\dfrac{1}{2}$ → Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$$2x-y=4 \longrightarrow \begin{cases} y=2x-4\\ x=\lambda \end{cases}$$

Soluciones: $x=\lambda,\ y=2\lambda-4$

- Si $m\neq -\dfrac{1}{2}$ → Sistema *compatible determinado*.

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y=4\\ (2m+1)y=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y=0\\ x=2 \end{array}$$

Solución: $x=2,\ y=0$

b) $$\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=1 \\ x-2y+z=3 \\ 5x-5y+2z=m \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array}\right) \begin{array}{l} (2.^a) \\ (1.^a) \\ (3.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a)-2\cdot(1.^a) \\ (3.^a)-5\cdot(1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & m-15 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-(2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & m-10 \end{array}\right)$$

- Si $m=10 \to$ Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

  $$\left.\begin{array}{r} x-2y+z=3 \\ 5y-3z=-5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y=\dfrac{-5+3z}{5}=-1+\dfrac{3z}{5} \\ x=3+2y-z=3-2+\dfrac{6z}{5}-z=1+\dfrac{z}{5} \end{array}$$

  Hacemos $z=5\lambda$

  Soluciones: $x=1+\lambda,\ y=-1+3\lambda,\ z=5\lambda$

- Si $m \neq 10 \to$ Sistema *incompatible*.

c) $$\left.\begin{array}{r} x+2y=3 \\ 2x-y=1 \\ 4x+3y=m \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & m \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a)-2\cdot(1.^a) \\ (3.^a)-4\cdot(1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & m-12 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a):(-5) \\ (3.^a)-(2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m-7 \end{array}\right)$$

- Si $m=7 \to$ Sistema *compatible determinado*.

  $$\left.\begin{array}{r} x+2y=3 \\ y=1 \end{array}\right\} \ x=3-2y=1$$

  Solución: $x=1,\ y=1$

- Si $m \neq 7 \to$ Sistema *incompatible*

d) $$\left.\begin{array}{r} x-y-2z=2 \\ 2x+y+3z=1 \\ 3x+z=3 \\ x+2y+5z=m \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & m \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a)-2\cdot(1.^a) \\ (3.^a)-3\cdot(1.^a) \\ (4.^a)-(1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & m-2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-(2.^a) \\ (4.^a)-(2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m+1 \end{array}\right)$$

- Si $m=-1 \to$ Sistema *compatible indeterminado*.

  $$\left.\begin{array}{r} x-y-2z=2 \\ 3y+7z=-3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y=\dfrac{-3-7z}{3}=-1-\dfrac{7z}{3} \\ x=2+y+2z=2-1-\dfrac{7z}{3}+2z=1-\dfrac{z}{3} \end{array}$$

  Haciendo $z=3\lambda$:

  Soluciones: $x=1-\lambda,\ y=-1-7\lambda,\ z=3\lambda$

- Si $m \neq -1 \to$ Sistema *incompatible*.

Teorema de Rouché. Regla de Cramer

6 **Aplica el teorema de Rouché para averiguar si los siguientes sistemas son compatibles o incompatibles:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x - y = 6\\ 4x + y = -1\\ 5x + 2y = -5\end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y - z = -2\\ 2x - y - 3z = -3\\ x - 2y - 2z = 0\end{array}\right.$ **c)** $\left\{\begin{array}{l} 2x + 3y - z = 3\\ -x - 5y + z = 0\\ 3x + y - z = 6\end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{l} x - y - 2z = 2\\ 2x + y + 3z = 1\\ 3x \quad + z = 5\end{array}\right.$ **e)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 2\\ x - 2y - 7z = 0\\ y + z = -1\\ 2x + 3y \quad = 0\end{array}\right.$ **f)** $\left\{\begin{array}{l} x + 3y + z = -1\\ x - y - z = -1\\ 2x + y + 3z = 5\end{array}\right.$

a) $$\left.\begin{array}{r} x - y = 6\\ 4x + y = -1\\ 5x + 2y = -5\end{array}\right\} A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1\\ 4 & 1\\ 5 & 2\end{matrix}}_{A}\middle|\begin{matrix} 6\\ -1\\ -5\end{matrix}\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix} = 5 \neq 0$ y $|A'| = 0$, tenemos que: $ran(A) = ran(A') = 2 =$ *n.º de incógnitas.*

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la tercera ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 6\\ 4x + y = -1\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \text{Sumando: } 5x = 5 \to x = 1\\ y = -1 - 4x = -1 - 4 = -5\end{array}\right\} \textit{Solución: } x = 1,\ y = -5$$

b) $$\left.\begin{array}{r} x + y - z = -2\\ 2x - y - 3z = -3\\ x - 2y - 2z = 0\end{array}\right\} A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & -3\\ 1 & -2 & -2\end{matrix}}_{A}\middle|\begin{matrix} -2\\ -3\\ 0\end{matrix}\right)$$

Tenemos que $|A| = 0$ y que $\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix} = -3 \neq 0 \to ran(A) = 2$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & -3\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix} = -3 \neq 0 \to ran(A') = 3 \neq ran(A) = 2$

Por tanto, el sistema es *incompatible.*

c) $$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - z = 3\\ -x - 5y + z = 0\\ 3x + y - z = 6\end{array}\right\} A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 2 & 3 & -1\\ -1 & -5 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{matrix}}_{A}\middle|\begin{matrix} 3\\ 0\\ 6\end{matrix}\right)$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 3\\ -1 & -5\end{vmatrix} = -7 \neq 0$, tenemos que $ran(A) = 2$.

Además, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3\\ -1 & -5 & 0\\ 3 & 1 & 6\end{vmatrix} = 0$. Luego $ran(A') = 2 = ran(A) <$ *n.º de incógnitas.*

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la tercera ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - z = 3\\ -x - 5y + z = 0\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x - z = 3 - 3y\\ -x + z = 5y\end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Sumando: } x = 3 + 2y\\ z = 5y + x = 5y + 3 + 2y = 3 + 7t\end{array}$$

Soluciones: $x = 3 + 2\lambda,\ y = \lambda,\ z = 3 + 7\lambda$

d) $$\left.\begin{array}{r} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x \quad\; + z = 5 \end{array}\right\} A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{matrix} \end{array}\right)$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, tenemos que $ran(A) = 2$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3 \neq ran(A) = 2$

Por tanto, el sistema es *incompatible*.

e) $$\left.\begin{array}{r} x + \;\; y + \;\; z = 2 \\ x - 2y - 7z = 0 \\ y + \;\; z = -1 \\ 2x + 3y \qquad = 0 \end{array}\right\} A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ y $|A'| = 0$, tenemos que $ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas*.

El sistema es *compatible determinado*.

Para resolverlo, podemos prescindir de la 4.ª ecuación. Aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{15}{5} = 3 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-10}{5} = -2 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Solución: $x = 3,\ y = -2,\ z = 1$

f) $$\left.\begin{array}{r} x + 3y + \;\; z = -1 \\ x - \;\; y - \;\; z = -1 \\ 2x + \;\; y + 3z = 5 \end{array}\right\} A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{matrix} \end{array}\right)$$

Como $|A| = -14 \neq 0$, tenemos que $ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas*.

El sistema es *compatible determinado*.

Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{0}{-14} = 0 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{14}{-14} = -1 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{-28}{-14} = 2$$

Solución: $x = 0,\ y = -1,\ z = 2$

7 **Resuelve los siguientes sistemas aplicando la regla de Cramer:**

a) $\begin{cases} 8x + 14y = 2 \\ 3x - \ \ 5y = 11 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ x - y \qquad - t = 2 \\ \qquad\quad z - t = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - \ \ y \qquad = 2 \\ 2x + \ \ y + \ \ z = 0 \\ \qquad 3y + 2z = -1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x - y - z + t = 4 \\ x + y + z - t = 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{matrix} 8x + 14y = 2 \\ 3x - \ \ 5y = 11 \end{matrix}\right\} \ A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 8 & 14 \\ 3 & -5 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \end{array}\right) \to |A| = -82 \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 14 \\ 11 & -5 \end{vmatrix}}{-82} = \frac{-164}{-82} = 2\,; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}}{-82} = \frac{82}{-82} = -1$$

Solución: $x = 2, \ y = -1$

b) $\left.\begin{matrix} x + y - z + t = 1 \\ x - y \qquad - t = 2 \\ \qquad\quad z - t = 0 \end{matrix}\right\} \ A' = \left(\begin{array}{c|c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right) \to$ Tenemos que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-t & 1 & -1 \\ 2+t & -1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3-t}{-2} = \frac{3+t}{2}\,; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-t & -1 \\ 1 & 2+t & 0 \\ 0 & t & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1+t}{-2} = \frac{-1-t}{2}\,;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1 & -1 & 2+t \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2t}{-2} = t$$

Soluciones: $x = \dfrac{3+\lambda}{2}, \ y = \dfrac{-1-\lambda}{2}, \ z = \lambda, \ t = \lambda$

c) $\left.\begin{matrix} 3x - \ \ y \qquad = 2 \\ 2x + \ \ y + \ \ z = 0 \\ \qquad 3y + 2z = -1 \end{matrix}\right\} \ A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{matrix} \end{array}\right) \to |A| = 1 \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-1}{1} = -1\,; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-5}{1} = -5\,; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{1} = \frac{7}{1} = 7$$

Solución: $x = -1, \ y = -5, \ z = 7$

d) $\left.\begin{matrix} x - y - z + t = 4 \\ x + y + z - t = 2 \end{matrix}\right\} \ \left.\begin{matrix} x - y = 4 + z - t \\ x + y = 2 - z + t \end{matrix}\right\} \ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4+z-t & -1 \\ 2-z+t & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3\,; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4+z-t \\ 1 & 2-z+t \end{vmatrix}}{2} = \frac{-2-2z+2t}{2} = -1 - z + t$$

Soluciones: $x = 3, \ y = -1 - \lambda + \mu, \ z = \lambda, \ t = \mu$

8 Estudia y resuelve estos sistemas, cuando sea posible:

a) $\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = -2 \\ x + y - 2z = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x - y = 1 \\ -y - z = -1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + z = 6 \\ y + z = 7 \\ 2x + y + z = 11 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{r} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y - z = 1 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right.\right)$$

Como $|A| = -6 \neq 0$, tenemos que: $ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas*.

El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}$$

Solución: $x = \frac{-1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = \frac{-1}{3}$

b) $$\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = -2 \\ x + y - 2z = -2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} -2 \\ -2 \\ -2 \end{array}\right.\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3$ y $|A| = 0$, tenemos que $ran(A) = 2$.

Además, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$. Luego $ran(A') = 3 \neq ran(A) = 2$.

Por tanto, el sistema es *incompatible*.

c) $$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 0 \\ -x - y = 1 \\ -y - z = -1 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ -1 \end{array}\right.\right)$$

Como $|A| = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, tenemos que:

$ran(A) = ran(A') = 2 <$ *n.º de incógnitas*. El sistema es *compatible indeterminado*.

Para hallar sus soluciones, podemos prescindir de la 1.ª ecuación y resolverlo en función de y:

$$\left.\begin{array}{r} -x - y = 1 \\ -y - z = -1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = -1 - y \\ z = 1 - y \end{array}\right\}$$

Soluciones: $x = -1 - \lambda$, $y = \lambda$, $z = 1 - \lambda$

d) $$\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ x + z = 6 \\ y + z = 7 \\ 2x + y + z = 11 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 11 \end{matrix} \end{array}\right)$$

Tenemos que $|A'| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

Luego $ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas*. El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 4.ª ecuación:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2\,; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3\,; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

Solución: $x = 2,\ y = 3,\ z = 4$

9 Resuelve los siguientes sistemas homogéneos:

a) $$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 9x + 3y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

a) $$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \end{array}\right\} \quad A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ \hline 12 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, entonces, $ran(A) = 2$.

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 3.ª ecuación y pasar la z al segundo miembro:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = z \\ x - 2y = -z \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} z & 1 \\ -z & z - 2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-z}{-3} = \frac{z}{3}\,; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z \\ 1 & -z \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-2z}{-3} = \frac{2z}{3}$$

Soluciones: $x = \frac{\lambda}{3},\ y = \frac{2\lambda}{3},\ z = \lambda$

b) $$\left.\begin{array}{r} 9x + 3y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -35 \neq 0$, entonces $ran(A) = 3 =$ *n.º de incógnitas*.

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

Discusión de sistemas mediante determinantes

10 **¿Existe algún valor de a para el cual estos sistemas tengan infinitas soluciones?:**

a) $\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 2 \\ 2x + ay - 5z = -4 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y - 3z = 2 \\ 2x + ay - 5z = -4 \\ x + y + 2z = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{matrix} \end{array}\right)$

$|A| = 9a + 27 = 0 \to a = -3$

- Si $a = -3$, queda:

  $$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

  Como $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5$ y $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20$, entonces $ran(A) = 2 \neq ran(A') = 3$

  El sistema es *incompatible*.

- Si $a = -3 \to ran(A) = ran(A') = 3 \to$ El sistema es *compatible determinado*.

  Por tanto, *no* existe ningún valor de a para el que el sistema tenga infinitas soluciones.

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} a - 1 \\ a \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right)$

$$|A| = -a^2 + 3a - 2 = 0 \to a = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

- Si $a = 1$, queda:

  $$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

  La 1.ª y la 3.ª ecuación son contradictorias, luego el sistema es *incompatible*.

- Si $a = 2$, queda:

  $A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right)$ Las columnas 1.ª, 3.ª y 4.ª son iguales, y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$;

  luego, $ran(A) = ran(A') = 2$. El sistema es *compatible indeterminado*.

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2 \to ran(A) = ran(A') = 3 \to$ El sistema es *compatible determinado*.

  Por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones para $a = 2$.

Página 115

11 **Discute los siguientes sistemas homogéneos en función del parámetro** $\boldsymbol{a}$**:**

$$\text{a)}\ \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{cases} \qquad \text{b)}\ \begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{cases} \qquad \text{c)}\ \begin{cases} ax + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{cases} \qquad \text{d)}\ \begin{cases} 3x + 3y - z = 0 \\ 4x + 2y - az = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$$

a) $$\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{array}\right\} \; A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & -a \end{pmatrix}$$

Como es homogéneo, sabemos que $ran(A) = ran(A')$.

$|A| = -5a - 25 = 0 \to a = -5$

- Si $a = -5 \to$ Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \to ran(A) = ran(A') = 2$

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- Si $a \neq -5 \to$ Solo tiene la solución trivial $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

b) $$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{array}\right\} \; A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$$

Como es homogéneo, sabemos que $ran(A) = ran(A')$.

$$|A| = -a^2 - a + 6 = 0 \to a = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{-2} = \frac{1 \pm 5}{-2} \begin{cases} a = -3 \\ a = 2 \end{cases}$$

- Si $a = -3$ o $a = 2 \to$ Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \to ran(A) = ran(A') = 2$

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- Si $a \neq -3$ y $a \neq 2 \to ran(A) = ran(A') = 3$. Solo existe la solución trivial $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

c) $$\left.\begin{array}{r} ax + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{array}\right\} \; A' = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

Como es homogéneo, sabemos que $ran(A) = ran(A')$.

$|A| = -2a - 5 = 0 \to a = \dfrac{-5}{2}$

- Si $a = -\dfrac{5}{2} \to$ Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \to ran(A) = ran(A') = 2$

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- Si $a \neq -\dfrac{5}{2} \to ran(A) = ran(A') = 3$. Solo existe la solución trivial $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

d) $$\left.\begin{array}{r} 3x + 3y - z = 0 \\ 4x + 2y - az = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{array}\right\} \; A' = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -a \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \to |A| = 3a - 46 = 0 \to a = \frac{46}{3}$$

- Si $a = \dfrac{46}{3} \to$ Como $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \to ran(A) = ran(A') = 2$

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- Si $a \neq \dfrac{46}{3} \to ran(A) = ran(A') = 3$. Solo existe la solución trivial $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

12 **Discute los siguientes sistemas según los valores del parámetro m:**

a) $\left\{\begin{array}{l} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = m-1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{array}\right.$ c) $\left\{\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{l} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{array}\right.$ e) $\left\{\begin{array}{l} x + 2z = 3 \\ 3x + y + z = -1 \\ 2y - z = -2 \\ x - y + mz = -5 \end{array}\right.$ f) $\left\{\begin{array}{l} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = m \\ x + y - 2z = 0 \\ x - y - z = m \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{array}\right\} A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 4 \\ m \\ 2 \end{matrix} \end{array}\right)$

$|A| = m^2 - 1 = 0 \begin{array}{l} \nearrow m = 1 \\ \searrow m = -1 \end{array}$

- Si $m = 1$, queda:

  $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$ Contradictorias → Sistema *incompatible*.

- Si $m = -1$, queda:

  $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$ Contradictorias → Sistema *incompatible*.

- Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$ → $ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas*.

  El sistema es *compatible determinado*.

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = m-1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{array}\right\} A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} m-1 \\ m \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right)$

$|A| = -m^2 + 3m - 2 = 0 \rightarrow m = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \dfrac{-3 \pm 1}{-2} \begin{array}{l} \nearrow m = 1 \\ \searrow m = 2 \end{array}$

- Si $m = 1$, queda:

  $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ Contradictorias → Sistema *incompatible*.

- Si $m = 2$, queda:

  $A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right)$. Las columnas 1.ª, 3.ª y 4.ª son iguales.

  Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow ran(A') = ran(A) = 2 <$ *n.º de incógnitas*.

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- Si $m \neq 1$ y $m \neq 2$ → $ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas*.

  El sistema es *compatible determinado*.

c) $$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & m & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 2 \end{array}\right.\right)$$

$|A| = -2m + 2 = 0 \;\rightarrow\; m = 1$

- Si $m = 1$, queda:

  $$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

  Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, entonces: $ran(A) = 2 \neq ran(A') = 3$

  El sistema es *incompatible*.

- Si $m \neq 1$, queda: $ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas*.

  El sistema es *compatible determinado*.

d) $$\left.\begin{array}{r} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 4 \end{array}\right.\right)$$

$$|A| = m^2 - 4m + 3 = 0 \;\rightarrow\; m = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} < \begin{array}{l} m = 3 \\ m = 1 \end{array}$$

- Si $m = 3$, queda:

  $$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$ Contradictorias → Sistema *incompatible*.

- Si $m = 1$, queda:

  $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$. La 1.ª y la 3.ª fila son iguales.

  Además, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Luego, $ran(A) = ran(A') = 2 <$ *n.º de incógnitas*.

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- Si $m \neq 3$ y $m \neq 1 \;\rightarrow\; ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas*.

  El sistema es *compatible determinado*.

e) $$\left.\begin{array}{rl} x + 2z &= 3 \\ 3x + y + z &= -1 \\ 2y - z &= -2 \\ x - y + mz &= -5 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & m \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ -5 \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & m & -5 \end{vmatrix} = \begin{array}{|l|} \hline \text{FILAS} \\ \hline (1.^a) \\ (2.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) - (1.^a) \\ \hline \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & m-2 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & m-2 & -8 \end{vmatrix} = \begin{array}{|l|} \hline \text{FILAS} \\ \hline (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \\ \hline \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & m-7 & -18 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 9 & 18 \\ m-7 & -18 \end{vmatrix} = 18 \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ m-7 & -1 \end{vmatrix} = 18(-9 - m + 7) = 18(-m-2) = 0 \;\rightarrow\; m = -2$$

Además, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A) = 3$

- Si $m = -2 \;\rightarrow\; ran(A) = ran(A') = 3$ = *n.º de incógnitas*. El sistema es *compatible indeterminado*.
- Si $m \neq -2 \;\rightarrow\; ran(A') = 4 \neq ran(A) = 3$. El sistema es *incompatible*.

f) $$\left.\begin{array}{rl} -2x + y + z &= 1 \\ x - 2y + z &= m \\ x + y - 2z &= 0 \\ x - y - z &= m \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 \\ m \\ 0 \\ m \end{matrix} \end{array}\right)$$

$|A'| = 3m + 3 = 0 \;\rightarrow\; m = -1$

Eliminando de A la 3.ª fila, $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

- Si $m = -1$, queda:

  $$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

  Entonces: $ran(A) = ran(A') = 3$ = *n.º de incógnitas*.

  El sistema es *compatible determinado*.
- Si $m \neq -1$, queda:

  $3 = ran(A) < ran(A') = 4 \;\rightarrow\;$ El sistema es *incompatible*.

13 Estudia los siguientes sistemas de ecuaciones. Resuélvelos cuando sean compatibles e interpreta geométricamente las soluciones obtenidas:

a) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + ay - z = 1 + a \\ x + y - az = a \\ x - y - z = a \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ mx + y + (m-1)z = 2 \\ x + my + z = m \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + z = 1 \\ y + (a-1)z = 0 \\ x + (a-1)y + az = a \end{cases}$

a) La matriz asociada al sistema, permutando las dos primeras filas entre sí, es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array}\right)$$

Usando el método de Gauss obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & m-10 \end{array}\right)$$

- Si $m \neq 10 \rightarrow$ El sistema es *incompatible*.
- Si $m = 10 \rightarrow$ El sistema es *compatible indeterminado*.

Tomamos las dos primeras ecuaciones y pasamos z al segundo miembro como parámetro.

Soluciones: $x = \frac{1}{5}\lambda + 1, \ y = \frac{3}{5}\lambda - 1, \ z = \lambda$

Interpetación geométrica:

- Si $m \neq 10$, tenemos tres planos que se cortan dos a dos.
- Si $m = 10$, tenemos tres planos que se cortan en una recta.

b) $\left.\begin{array}{l} x + ay - z = 1 + a \\ x + y - az = a \\ x - y - z = a \end{array}\right\} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - a^2$

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 1 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 \rightarrow$ El sistema es *compatible determinado*.

Lo resolvemos usando la regla de Cramer:

$$x = \frac{-a + a^2 + 1}{a - 1}, \ y = \frac{1}{a + 1}, \ z = \frac{2}{a^2 - 1}$$

- Si $a = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x + y + z = -1 \\ x - y - z = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

Añadimos la 4.ª columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \rightarrow ran(A') = 3$$

Luego, $ran(A) \neq ran(A') \rightarrow$ El sistema es *incompatible*.

- Si $a = 1$:

  $$\left.\begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

  Añadimos la 4.ª columna y la 2.ª fila:

  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \rightarrow ran(A') = 3$$

  Luego, $ran(A) \neq ran(A')$ → El sistema es *incompatible*.

Interpretación geométrica:

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$, tenemos tres planos que se cortan en un punto.
- Si $a = -1$, el primer y el tercer plano son paralelos.
- Si $a = 1$, el primer y el segundo plano son paralelos.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m-1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = m - 1$

- Si $m \neq 1 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3$ → El sistema es *compatible determinado.*

  Lo resolvemos usando la regla de Cramer y obtenemos: $x = 1$, $y = 1$, $z = -1$.

- Si $m = 1$:

  $$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + y \quad\;\; = 2 \\ x + y + z = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

  Añadimos la 4.ª columna:

  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran(A') = 2$$

  Luego, $ran(A) = ran(A') = 2$ → El sistema es *compatible indeterminado*.

  Tomamos las dos primeras ecuaciones y pasamos y al segundo miembro como parámetro.

  Soluciones: $x = -\lambda + 2$, $y = \lambda$, $z = -1$

Interpretación geométrica:

- Si $m \neq 1$, tenemos tres planos que se cortan en un punto.
- Si $m = 1$, los tres planos se cortan en una recta.

d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 1 & a-1 & a \end{vmatrix} = -a^2 + 3a - 2 = 0 \rightarrow a = 2,\ a = 1$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3$ → El sistema es *compatible determinado*.

  Usando la regla de Cramer:

  $$x = \frac{a-1}{a-2},\ y = \frac{a-1}{a-2},\ z = -\frac{1}{a-2}$$

- Si $a = 1$:

  $$\begin{cases} x + \quad z = 1 \\ \quad\; y \quad\;\, = 0 \\ x + \quad z = 1 \end{cases}$$

  Las ecuaciones 1.ª y 3.ª representan el mismo plano.

$$\begin{cases} x + \phantom{y+{}} z = 1 \\ \phantom{x+{}} y \phantom{{}+z} = 0 \end{cases}$$

Tomamos las dos primeras ecuaciones y pasamos z al segundo miembro como parámetro.

Soluciones: $x = 1 - \lambda,\ y = 0,\ z = \lambda$

- Si $a = 2$:

$$\begin{cases} x + \phantom{y+{}} z = 1 \\ \phantom{x+{}} y + z = 0 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to ran(A) = 2$$

Añadimos la 4.ª columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to ran(A') = 3$$

En este caso el sistema es *incompatible*.

Interpretación geométrica

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$, tenemos tres planos que se cortan en un punto.
- Si $a = 1$, dos planos son coincidentes y se cortan en una recta con el tercero.
- Si $a = 2$, los planos se cortan dos a dos.

Forma matricial de un sistema

14 **Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:**

a) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + y = -1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 3 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 3y + z = 4 \\ x + 2y + 2z = 4 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 2 \\ y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = 2 \end{array}\right\} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

$|A| = 2 \neq 0 \to$ Existe A^{-1}. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Luego:

$$A \cdot X = B \to A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \to X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $x = 1,\ y = 0,\ z = 0$

b) $$\left.\begin{array}{r} x+\ y-\ z=3 \\ 2x+\ y+\ z=-2 \\ x-2y-3z=1 \end{array}\right\} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

$|A| = 11 \neq 0 \rightarrow$ Existe A^{-1}. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -7 & -5 \\ -5 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 7 & -5 \\ 5 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 7 & -2 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 7 & -2 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Luego:

$$A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 7 & -2 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -11 \\ 22 \\ -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $x = -1$, $y = 2$, $z = -2$

c) $$\left.\begin{array}{l} x+y \qquad =-1 \\ \qquad y+z=-2 \\ x \qquad +z=3 \end{array}\right\} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{B}$$

$|A| = 2 \neq 0 \rightarrow$ Existe A^{-1}. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Luego:

$$A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $x = 2$, $y = -3$, $z = 1$

d) $$\left.\begin{array}{r} x+2y+\ z=3 \\ 3y+\ z=4 \\ x+2y+2z=4 \end{array}\right\} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}}_{B}$$

$|A| = 3 \neq 0 \rightarrow$ Existe A^{-1}. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Luego:

$$A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$

15 **Escribe en la forma habitual estos sistemas y resuélvelos si es posible:**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + 3y + 2x = 4 \\ x - \;\; y - \;\; z = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + 3y = 4 - 2\lambda \\ x - \;\; y = \lambda \end{array}\right\}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4-2\lambda & 3 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-4-\lambda}{-4} = \frac{4+\lambda}{4}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4-2\lambda \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-4+3\lambda}{-4} = \frac{4-3\lambda}{4}$$

Soluciones: $x = \dfrac{4+\lambda}{4}$, $y = \dfrac{4-3\lambda}{4}$, $z = 1$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y = 4 \\ 3x - y = 0 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\}$ Comprobamos si tiene solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

Como $ran(A) \neq ran(A')$, el sistema es *incompatible*.

16 **Escribe las ecuaciones lineales del sistema $AX = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, y resuélvelo.**

$$AX = B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Multiplicando las matrices del primer término:

$$\left.\begin{array}{rl} x - y + 4z &= 11 \\ 3x + y \qquad &= \;\; 5 \\ -x + \qquad z &= \;\; 2 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 11 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{A} \quad \underbrace{}_{B}$$

$|A| = 8$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 11 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{8}{8} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 11 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{16}{8} = 2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 11 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

Solución: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

17 **Resuelve el siguiente sistema:**

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

Calculamos A^{-1} $(|A| = 16 \neq 0 \rightarrow$ existe $A^{-1})$:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -5 & 7 & 2 \\ -5 & -9 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \\ -5 & 9 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto:

$$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 16 \\ -16 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; es decir: $x = 1$, $y = -1$, $z = 1$

Para resolver

18 **Una panadería utiliza tres ingredientes A, B y C para elaborar tres tipos de tarta. La tarta T_1 se hace con 1 unidad de A, 2 de B y 2 de C. La tarta T_2 lleva 4 unidades de A, 1 de B y 1 de C. Y la T_3 necesita 2 unidades de A, 1 de B y 2 de C. Los precios de venta al público son 7,50 € la T_1; 6,50 € la T_2 y 7 € la T_3. Sabiendo que el beneficio que se obtiene con la venta de cada tarta es de 2 €, calcula cuánto le cuesta a la panadería cada unidad de A, B y C.**

Llamamos $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ a la matriz de precios por unidad de A, B y C, respectivamente.

La matriz que indica los ingredientes en relación con el tipo de tarta es:

$$\begin{array}{c|ccc} & \text{A} & \text{B} & \text{C} \\ \hline T_1 & 1 & 2 & 2 \\ T_2 & 4 & 1 & 1 \\ T_3 & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

El gasto para cada tipo de tarta es:

$$\begin{pmatrix} 7,50 \\ 6,50 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,50 \\ 4,50 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Podemos calcular la solución mediante la resolución del siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,50 \\ 4,50 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \text{La solución es: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,50 \\ 1 \\ 1,50 \end{pmatrix}$$

La unidad A cuesta 0,50 €, la unidad B cuesta 1 € y la unidad C cuesta 1,50 €.

19 **a) Halla un número de tres cifras tal que la suma de las centenas y las unidades con el doble de las decenas es 23; la diferencia entre el doble de las centenas y la suma de las decenas más las unidades es 9 y la media de las centenas y decenas más el doble de las unidades es 15.**

b) ¿Es posible encontrar un número de tres cifras si cambiamos la tercera condición por "el triple de las centenas más las decenas es 25"?

a) El número buscado es xyz.

El sistema que expresa las condiciones del problema es:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=23 \\ 2x-(y+z)=9 \\ \dfrac{x+y}{2}+2z=15 \end{array}\right\} \rightarrow x=9,\ \ y=5,\ \ z=4$$

El número es 954.

b) El sistema resultante es:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=23 \\ 2x-(y+z)=9 \\ 3x+y=25 \end{array}\right\}$$

Este sistema no tiene solución, luego no hay ningún número que verifique esas condiciones.

20 **Un automóvil sube las cuestas a 54 km/h, las baja a 90 km/h y en llano marcha a 80 km/h. Para ir de A a B tarda 2 horas y 30 minutos, y para volver de B a A, 2 horas y 45 minutos. ¿Cuál es la longitud de camino llano entre A y B si sabemos que la distancia entre A y B es de 192 km?**

Llamamos x a la longitud de camino llano entre A y B, y a la longitud de cuesta arriba yendo de A a B y z a la longitud de cuesta abajo yendo de A a B.

Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=192 \text{ km} \\ \dfrac{x}{80}+\dfrac{y}{54}+\dfrac{z}{90}=2{,}5 \text{ horas} \\ \dfrac{x}{80}+\dfrac{y}{90}+\dfrac{z}{54}=2{,}75 \text{ horas} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y+z=192 \\ 27x+40y+24z=5\,400 \\ 27x+24y+40z=5\,940 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&192\\ 27&40&24&5\,400\\ 27&24&40&5\,940 \end{array}\right) \begin{array}{l}(1.^{a})\\ (2.^{a})-27\cdot(1.^{a})\\ (3.^{a})-27\cdot(1.^{a})\end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&192\\ 0&13&-3&216\\ 0&-3&13&756 \end{array}\right) \begin{array}{l}(1.^{a})\\ (2.^{a})\\ (3.^{a})\cdot 3+(2.^{a})\cdot 13\end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&192\\ 0&13&-3&216\\ 0&160&0&5\,076 \end{array}\right) \left.\begin{array}{r} x+y+z=192 \\ 13y-3z=216 \\ 160y=5\,076 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y=31{,}725 \text{ km} \\ z=65{,}475 \text{ km} \\ x=94{,}800 \text{ km} \end{array}$$

Solución: La longitud de camino llano entre A y B es de 94,8 km.

21 **Una persona ha obtenido 6 000 € de beneficio por invertir un total de 60 000 € en tres empresas: A, B y C. La suma del dinero invertido en A y B fue m veces el invertido en C, y los beneficios fueron el 5 % en A, el 10 % en B y el 20 % en C.**

a) Plantea un sistema de ecuaciones para averiguar la cantidad invertida en cada empresa.

b) Prueba que si $m > 0$, el sistema es compatible determinado.

c) Halla la solución para $m = 5$.

a) Sean x, y, z las cantidades invertidas en A, B y C, respectivamente. Planteamos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 60\,000 \\ x + y = mz \\ 0,05x + 0,1y + 0,2z = 6\,000 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + y + z = 60\,000 \\ x + y - mz = 0 \\ 0,05x + 0,1y + 0,2z = 6\,000 \end{array}\right\}$$

b) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60\,000 \\ 1 & 1 & -m & 0 \\ 0,05 & 0,1 & 0,2 & 6\,000 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-(1.^a)\\(3.^a)-0,05\cdot(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60\,000 \\ 0 & 0 & -m-1 & -60\,000 \\ 0 & 0,05 & 0,15 & 3\,000 \end{array}\right)$$

- Si $m = -1$: El sistema es *incompatible*.
- Si $m \neq -1$: El sistema es *compatible determinado*.

  Por tanto, si $m > 0$, el sistema es *compatible determinado*.

c) $m = 5$, *solución:* $x = 20\,000$ €, $y = 30\,000$ €, $z = 10\,000$ €.

Página 116

22 **Tres comerciantes invierten en la compra de ordenadores de los modelos A, B y C de la siguiente forma. El primero invierte 50 000 € en los de tipo A, 25 000 € en los de tipo B y 25 000 € en los de tipo C. El segundo dedica 12 500 € a los de tipo A, 25 000 € a los de tipo B y 12 500 € a los de tipo C y el tercero 10 000 €, 10 000 € y 20 000 €, respectivamente, en los modelos A, B y C. Después de venderlos todos, la rentabilidad que obtiene el primero es el 15 %, el segundo el 12 % y el tercero el 10 %. Determina la rentabilidad de cada uno de los modelos vendidos.**

Llamamos $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ a la matriz de rentabilidad por modelo: A, B y C, respectivamente.

La matriz que indica la inversión en relación con el comerciante es:

$$\begin{array}{c} \\ 1.^o \\ 2.^o \\ 3.^o \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 50\,000 & 25\,000 & 25\,000 \\ 12\,500 & 25\,000 & 12\,500 \\ 10\,000 & 10\,000 & 20\,000 \end{pmatrix} \end{array}$$

La rentabilidad para cada comerciante es:

$$\begin{pmatrix} 0,15 \cdot 100\,000 \\ 0,12 \cdot 50\,000 \\ 0,1 \cdot 40\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15\,000 \\ 6\,000 \\ 4\,000 \end{pmatrix}$$

Podemos calcular la rentabilidad por modelo mediante la resolución del siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 50\,000 & 25\,000 & 25\,000 \\ 12\,500 & 25\,000 & 12\,500 \\ 10\,000 & 10\,000 & 20\,000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15\,000 \\ 6\,000 \\ 4\,000 \end{pmatrix}$$

cuya solución es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,23 \\ 0,11 \\ 0,03 \end{pmatrix}$$

La rentabilidad del modelo A es del 23 %, la rentabilidad del modelo B es del 11 %, y la rentabilidad del modelo C es del 3 %.

23 **Un cajero automático contiene 95 billetes de 10, 20 y m euros. Se sabe que tiene almacenados 2 000 € y que el número de billetes de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.**

a) Plantea un sistema de ecuaciones que refleje las condiciones del problema. Prueba que si $m \in [5, 50, 100]$, el sistema es compatible determinado.

b) ¿Puede haber billetes de 5 o 100 euros en el cajero?

c) Resuelve el sistema para $m = 50$.

a) Llamamos x al número de billetes de 10 €, y al número de billetes de 20 € y z al número de billetes de m €.

El sistema que expresa las condiciones del problema es:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 95 \\ 10x + 20y + mz = 2\,000 \\ x = 2y \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{r} x + y + z = 95 \\ 10x + 20y + mz = 2\,000 \\ x - 2y = 0 \end{array}\right.$$

Para $m = 5$, la matriz de coeficientes es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 20 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Su determinante resulta: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 20 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -25 \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3$

Luego el sistema es *compatible determinado*.

Para $m = 50$, la matriz de coeficientes es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 20 & 50 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Su determinante es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 20 & 50 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 110 \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3$$

Luego el sistema es *compatible determinado*.

Para $m = 500$, la matriz de coeficientes es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 20 & 500 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Su determinante es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 20 & 500 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1\,460 \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3$$

Luego el sistema es *compatible determinado*.

b) Para $m = 5$, el sistema es:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 95 \\ 10x + 20y + 5z = 2\,000 \\ x - 2y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = 122,\ y = 61,\ z = -88$$

La solución no es posible porque el número de billetes no puede ser negativo.

Para $m = 100$, la matriz de coeficientes es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 20 & 100 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Su determinante es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 20 & 100 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 260 \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3$$

Luego el sistema es *compatible determinado*.

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 95 \\ 10x + 20y + 100z &= 2\,000 \\ x - 2y &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = \frac{750}{13},\ y = \frac{375}{13},\ z = \frac{110}{13}$$

La solución no es posible porque el número de billetes no puede ser un número fraccionario.

Para cualquiera de los dos casos el sistema tiene solución, pero no son soluciones reales.

c) Para $m = 50$, el sistema es:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 95 \\ 10x + 20y + 50z &= 2\,000 \\ x - 2y &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 50,\ y = 25,\ z = 20$$

Hay 50 billetes de 10 €, 25 billetes de 20 € y 20 billetes de 50 €.

24 Discute y resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \lambda x + 2z = 0 \\ \lambda y - z = \lambda \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (m+2)x + (m-1)y - z = 3 \\ mx - y + z = 2 \\ x + my - z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \lambda x + 3y + z = \lambda \\ x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} mx + y + z = 2 \\ 2x + my + m^2 z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{aligned} \lambda x + 2z &= 0 \\ \lambda y - z &= \lambda \\ x + 3y + z &= 5 \end{aligned}\right\} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = -1,\ \lambda = 0$$

Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 \rightarrow$ El sistema es *compatible determinado*.

Usando la regla de Cramer:

$$x = -\frac{4}{\lambda+1},\ y = \frac{\lambda+3}{\lambda+1},\ z = \frac{2\lambda}{\lambda+1}$$

Si $\lambda = 0$:

$$\left.\begin{aligned} 2z &= 0 \\ -z &= 0 \\ x + 3y + z &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Las dos primeras ecuaciones son equivalentes.

$$\left.\begin{aligned} -z &= 0 \\ x + 3y + z &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Sistema *compatible indeterminado*.

Pasamos y al segundo miembro como parámetro.

Soluciones: $x = -3\lambda + 5,\ y = \lambda,\ z = 0$

Si $\lambda = -1$:

$$\left.\begin{array}{r} -x + \quad 2z = 0 \\ -y - \quad z = -1 \\ x + 3y + \quad z = 5 \end{array}\right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

Añadimos la cuarta columna.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3 \rightarrow \text{Sistema } \textit{incompatible}.$$

b) $$\left.\begin{array}{r} (m+2)x + (m-1)y - z = 3 \\ mx - \quad y + z = 2 \\ x + \quad my - z = 1 \end{array}\right\} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = -m^2 - m = 0 \rightarrow m = 0,\ m = -1$$

Si $m \neq 0$ y $m \neq -1 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 \rightarrow$ Sistema *compatible determinado*.

Usando la regla de Cramer: $x = \dfrac{2m+1}{m^2+m},\ y = \dfrac{1}{m},\ z = \dfrac{2m+1}{m^2+m}$

Si $m = 0$:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 3 \\ -y + z = 2 \\ x - \quad z = 1 \end{array}\right\} \rightarrow ran(A) < 3, \text{ pero } ran(A') = 3 \rightarrow \text{Sistema } \textit{incompatible}.$$

Si $m = -1$:

$$\left.\begin{array}{r} x - \quad z = 3 \\ -x - y + z = 2 \\ x - y - z = 1 \end{array}\right\} \rightarrow ran(A) < 3, \text{ pero } ran(A') = 3 \rightarrow \text{Sistema } \textit{incompatible}.$$

c) $$\left.\begin{array}{r} \lambda x + 3y + \quad z = \lambda \\ x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ x + \quad y - \quad z = 1 \end{array}\right\} \text{ Estudiamos el determinante de la matriz de coeficientes:}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 3 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0 \rightarrow \lambda = 2,\ \lambda = -1$$

Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 2 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 \rightarrow$ Sistema *compatible determinado*.

Usando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 3 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2\lambda^2 + 2\lambda + 4} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2\lambda^2 + 2\lambda + 4} = 0, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 3 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2\lambda^2 + 2\lambda + 4} = 0$$

Si $\lambda = 2$:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y + \quad z = 2 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ x + \quad y - \quad z = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \rightarrow ran(A) = 2$$

Añadimos la cuarta columna.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran(A') = 2 \rightarrow \text{Sistema } \textit{compatible indeterminado}.$$

Tomamos las dos primeras ecuaciones y pasamos z al segundo miembro como parámetro.

$$\begin{cases} 2x + 3y + \quad z = 2 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

Soluciones: $x = 4\mu + 1,\ y = -3\mu,\ z = \mu$

Si $\lambda = -1$:

$$\left.\begin{aligned} -x + 3y + z &= -1 \\ x - y - z &= 1 \\ x + y - z &= 1 \end{aligned}\right\} \to \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \to ran(A) = 2$$

Añadimos la cuarta columna.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \to ran(A') = 2 \to \text{Sistema } \textit{compatible indeterminado}.$$

Tomamos las dos primeras ecuaciones y pasamos z al segundo miembro como parámetro.

$$\left.\begin{aligned} -x + 3y + z &= -1 \\ x - y - z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Soluciones: $x = \mu + 1,\ y = 0,\ z = \mu$

d) $$\left.\begin{aligned} mx + y + z &= 2 \\ 2x + my + m^2 z &= 1 \\ 2x + y + z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

La matriz de coeficientes es:

$$\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 2 & m & m^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ cuyo determinante es } \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 2 & m & m^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -m^3 + 3m^2 - 2m = 0 \begin{cases} m = 1 \\ m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

Si $m \neq 0,\ m \neq 1$ y $m \neq 2 \to ran(A) = ran(A') = 3$

Luego el sistema es *compatible determinado*.

Usamos la regla de Cramer.

Solución: $x = 0,\ y = -\dfrac{2m^2 - 1}{m - m^2},\ z = \dfrac{2m - 1}{m - m^2}$

Para $m = 0$, la matriz de coeficientes es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \to ran(A) = 2$$

Añadimos la última columna.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \to ran(A') = 3 \to \text{Sistema } \textit{incompatible}.$$

Para $m = 1$, la matriz de coeficientes es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \to ran(A) = 2$$

Añadimos la última columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \to ran(A') = 3 \to \text{Sistema } \textit{incompatible}.$$

Para $m = 2$, la matriz de coeficientes es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \to ran(A) = 2$$

Añadimos la última columna.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; ran\,(A') = 2 \;\rightarrow\; \text{Sistema } \textit{compatible indeterminado.}$$

Tomamos las dos primeras filas y pasamos z al segundo miembro como parámetro.

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 1 \end{array}\right\}$$

Soluciones: $x = \lambda + \dfrac{3}{2}, \; y = -3\lambda - 1, \; z = \lambda$

25 **Discute los siguientes sistemas en función del parámetro y resuélvelos cuando sean compatibles:**

a) $\begin{cases} ax + y = 0 \\ -y + 2az = 0 \\ -x + ay = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x - my - z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} kx + ky - z = 2 \\ 3x - ky = 0 \\ 5x + ky = 0 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ mx + 2z = 0 \\ my - z = m \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} ax + y = 0 \\ -y + 2az = 0 \\ -x + ay = 0 \end{array}\right\}$ Este sistema es *compatible* por ser homogéneo.

La matriz de coeficientes es:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2a \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Su determinante es: $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2a \\ -1 & a & 0 \end{vmatrix} = -2a^3 - 2a = 0 \;\rightarrow\; a = 0$

Si $a \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = ran\,(A') = 3 \;\rightarrow$ Sistema *compatible determinado.*

Solución: $x = 0, \; y = 0, \; z = 0$

Si $a = 0$:

$$\left.\begin{array}{r} y = 0 \\ -y = 0 \\ -x = 0 \end{array}\right\}$$

Las dos primeras ecuaciones son equivalentes $\rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado.*

El sistema queda:

$\left.\begin{array}{r} y = 0 \\ -x = 0 \end{array}\right\}$ *Soluciones:* $x = 0, \; y = 0, \; z = \lambda$

b) $\left.\begin{array}{l} mx + y + z = 0 \\ x - my - z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{array}\right\}$

La matriz de coeficientes es:

$$\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & -m & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Su determinante es:

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & -m & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -m^2 + 3m - 2 = 0 \;\rightarrow\; m = 2, \; m = 1$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq 2$ $\rightarrow$ $ran(A) = ran(A') = 3$ $\rightarrow$ Sistema *compatible determinado*.

Utilizando la regla de Cramer: $x = 0,\ y = -\dfrac{1}{m-1},\ z = \dfrac{1}{m-1}$

Si $m = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

Añadimos la última columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3 \rightarrow \text{Sistema } \textit{incompatible}.$$

Si $m = 2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

Añadimos la última columna.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran(A') = 2 \rightarrow \text{Sistema } \textit{compatible indeterminado}.$$

Tomamos las dos primeras ecuaciones y pasamos z al segundo miembro como parámetro.

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 0 \\ x - 2y - z = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \textit{Soluciones: } x = \frac{1-\lambda}{5},\ y = -\frac{3\lambda - 2}{5},\ z = \lambda$$

c) $$\left.\begin{array}{l} kx + ky - z = 2 \\ 3x - ky = 0 \\ 5x + ky = 0 \\ x + 2z = 1 \end{array}\right\}$$

La matriz ampliada es:

$$\begin{pmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Su determinante es:

$$\begin{vmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -40k$$

Si $k \neq 0$ $\rightarrow$ $ran(A') = 4$ $\rightarrow$ Sistema *incompatible*.

Si $k = 0$:

$$\left.\begin{array}{r} -z = 2 \\ 3x = 0 \\ 5x = 0 \\ x + 2z = 1 \end{array}\right\} \text{ Las ecuaciones 2.ª y 3.ª son equivalentes, nos queda: } \left.\begin{array}{r} -z = 2 \\ 3x = 0 \\ x + 2z = 1 \end{array}\right\}$$

El determinante de la matriz ampliada es:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3$$

Como $ran(A) < 3$, el sistema es *incompatible.*

Este sistema no tiene solución para ningún valor de k.

d) $$\left.\begin{array}{r}x+3y+z=5\\mx\quad\quad+2z=0\\my-z=m\\x-y+z=0\end{array}\right\}$$

La matriz ampliada es:

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 5\\m & 0 & 2 & 0\\0 & m & -1 & m\\1 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Su determinante es:

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 1 & 5\\m & 0 & 2 & 0\\0 & m & -1 & m\\1 & -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=7m-m^2=0\ \rightarrow\ m=7,\ m=0$$

Si $m \neq 0$ y $m \neq 7 \rightarrow ran(A')=4 \rightarrow$ Sistema *incompatible*.

Si $m=0$:

$$\left.\begin{array}{r}x+3y+z=5\\2z=0\\-z=0\\x-y+z=0\end{array}\right\}$$

Las ecuaciones 2.ª y 3.ª son equivalentes, por tanto el sistema es equivalente a:

$$\left.\begin{array}{r}x+3y+z=5\\2z=0\\x-y+z=0\end{array}\right\}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\0 & 0 & 2\\1 & -1 & 1\end{vmatrix}=8\neq 0\ \rightarrow\ ran(A)=ran(A')=3\ \rightarrow$$ Sistema *compatible determinado*.

Usando la regla de Cramer: $x=\frac{5}{4},\ y=\frac{5}{4},\ z=0$

Si $m=7$:

$$\left.\begin{array}{r}x+3y+z=5\\7x+\quad\quad 2z=0\\7y-z=7\\x-y+z=0\end{array}\right\}$$

El menor formado por los coeficientes de las tres primeras ecuaciones es:

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\7 & 0 & 2\\0 & 7 & -1\end{vmatrix}=56\neq 0\ \rightarrow\ ran(A)=ran(A')=3\ \rightarrow$$ Sistema *compatible determinado*.

Tomamos las tres primeras ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r}x+3y+z=5\\7x+\quad\quad 2z=0\\7y-z=7\end{array}\right\}$$

Usando la regla de Cramer: $x=-\frac{1}{2},\ y=\frac{5}{4},\ z=\frac{7}{4}$

26 **Sea la matriz:** $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{m-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{m-1} & \boldsymbol{m+2} & \mathbf{2} \\ \boldsymbol{m-1} & \boldsymbol{m+2} & \boldsymbol{m+1} \end{pmatrix}$

a) Determina para qué valores de m la matriz es singular.

b) Resuelve, si es posible, el siguiente sistema para $m = 1$ y $m = -1$:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

a) $A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & 0 \\ m-1 & m+2 & 2 \\ m-1 & m+2 & m+1 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 0 \\ m-1 & m+2 & 2 \\ m-1 & m+2 & m+1 \end{vmatrix} = (m-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & m+2 & 2 \\ 1 & m+2 & m+1 \end{vmatrix} = (m-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m+1 & 2 \\ 1 & m+1 & m+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (m-1)(m+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = (m-1)(m+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = (m-1)^2(m+1)$$

A es singular para $m = -1$ y $m = 1$.

b) Si $m = -1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

El sistema queda:

$$\left.\begin{aligned} -2x + y &= 2 \\ -2x + y + 2z &= 8 \\ -2x + y &= 8 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

Añadimos la cuarta columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3 \rightarrow \text{Sistema } \textit{incompatible}.$$

Si $m = 1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

El sistema queda:

$$\left.\begin{aligned} y &= 2 \\ 3y + 2z &= 8 \\ 3y + 2z &= 8 \end{aligned}\right\} \text{ Las ecuaciones 2.ª y 3.ª son equivalentes.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

Añadimos la cuarta columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran(A') = 2 \rightarrow \text{Sistema } \textit{compatible indeterminado}.$$

Tomamos las dos primeras ecuaciones y pasamos x al segundo miembro como parámetro.

$$\left.\begin{aligned} y &= 2 \\ 3y + 2z &= 8 \end{aligned}\right\} \rightarrow \textit{Soluciones: } x = \lambda,\ y = 2,\ z = 1$$

27 **Sea el sistema de ecuaciones:** $\begin{cases} 2ax + by + z = 3c \\ 3x - 2by - 2cz = a \\ 5ax - 2y + cz = -4b \end{cases}$

a) Justifica que para los valores de los parámetros $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$ el sistema es compatible.

b) Determina los valores de los parámetros a, b y c para los que se verifica que $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ es solución del sistema.

c) Justifica si dicha solución es o no es única.

a) $$\left.\begin{aligned} 2ax + by + z &= 3c \\ 3x - 2by - 2cz &= a \\ 5ax - 2y + cz &= -4b \end{aligned}\right\}$$

Para $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$, el sistema queda:

$$\left.\begin{aligned} y + z &= 6 \\ 3x - 2y - 4z &= 0 \\ 2y + 2z &= -4 \end{aligned}\right\}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 48 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3$$

Como $ran(A) \neq ran(A')$, el sistema es *incompatible*.

b) Sustituimos las incógnitas por los datos y resolvemos las ecuaciones. Obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2a + 2b + 3 &= 3c \\ 3 - 4b - 6c &= a \\ 5a - 4 + 3c &= -4b \end{aligned}\right\}$$

Las nuevas incógnitas son a, b, c.

$$\left.\begin{aligned} 2a + 2b - 3c &= -3 \\ -a - 4b - 6c &= -3 \\ 5a + 4b + 3c &= 4 \end{aligned}\right\}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & -4 & -6 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -78 \rightarrow ran(A) = 3 \rightarrow \text{Sistema } \textit{compatible determinado}.$$

Solución: $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$

c) Como el sistema es compatible determinado, la solución es única.

28 **a) Demuestra que el siguiente sistema de ecuaciones tiene siempre solución para cualquier valor de α y β:**

$$\left\{\begin{array}{l} x - y + (\alpha+\beta)z = \alpha \\ x \quad + \quad z = \beta \\ x \quad - \quad z = \alpha - 3\beta \end{array}\right.$$

b) ¿Es posible que tenga infinitas soluciones para algún valor de α y β?

a) $$\left.\begin{array}{l} x - y + (\alpha+\beta)z = \alpha \\ x \quad + \quad z = \beta \\ x \quad - \quad z = \alpha - 3\beta \end{array}\right\} A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & \alpha+\beta \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha - 3\beta \end{matrix}\right.\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \alpha+\beta \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3$$

El sistema es *compatible determinado* para cualquier valor de α y β.

b) El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & \alpha+\beta \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \rightarrow ran(A) = 3 \rightarrow \text{El sistema será siempre } \textit{compatible determinado},$$

luego la solución siempre será única. No puede haber infinitas soluciones.

Cuestiones teóricas

29 **¿Verdadero o falso? Justifica tus respuestas y pon ejemplos.**

a) A un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas que es compatible indeterminado, podemos añadirle una ecuación que lo transforme en incompatible.

b) Si S y S' son dos sistemas equivalentes con solución única que tienen iguales los términos independientes, entonces los coeficientes de las incógnitas también son iguales.

c) Para $m = 1$, el sistema $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m \end{pmatrix}$ tiene infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

d) El sistema anterior es incompatible si $m = -2$.

e) El sistema $\left\{\begin{array}{l} ax + y + z = a + 2 \\ 2x - ay + z = 2 \\ x - y + az = a \end{array}\right.$ tiene siempre solución para cualquier valor de a.

f) El sistema $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ es compatible indeterminado para cualquier valor de a y b.

g) Si el determinante de la matriz ampliada de un sistema de cuatro ecuaciones y tres incógnitas es distinto de cero, el sistema tiene solución única.

h) Si el rango de la matriz de coeficientes de un sistema es menor que el número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

a) Verdadero.

Tenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 2 \\ 2x - 2yz = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \textit{Compatible indeterminado.}$$

Le añadimos la ecuación: $x - y = 3$.

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 2 \\ 2x - 2yz &= 4 \\ x - y &= 3 \end{aligned}\right\} \rightarrow \textit{Incompatible.}$$

b) Falso. Los siguientes sistemas son equivalentes, tienen iguales los términos independientes y no tienen los mismos coeficientes en las incógnitas.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - y &= 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 2,\ y = 1 \qquad \left.\begin{aligned} 3y &= 3 \\ \frac{x}{2} &= 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 2,\ y = 1$$

c) Falso.

Para $m = 1$ el sistema tiene infinitas soluciones, pero dependen de dos parámetros ya que:

$ran(A) = ran(A') = 1$

Podemos quedarnos con una sola ecuación y pasar dos incógnitas al segundo miembro como parámetros.

d) Verdadero.

El rango de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran(A) < 3$$

El menor tiene como rango:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -18 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3$$

Como los rangos no coinciden, el sistema es *incompatible*.

e) $$\left.\begin{aligned} ax + y + z &= a + 2 \\ 2x - ay + z &= 2 \\ x - y + az &= a \end{aligned}\right\}$$

Falso, para $a = 1$ el rango de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran(A) < 3$$

Añadimos la 4.ª columna al menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \rightarrow ran(A') = 3$$

Luego para $a = 1$, el sistema es *incompatible* y, por tanto, no tiene solución.

f) Verdadero, $ran(A) = 2$, y como solo hay dos filas, A' no tiene más rango. Es *compatible determinado* para cualquier valor de a y b.

g) Falso, puede ser también *incompatible*.

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2y + 2z &= 3 \\ 3y + 3z &= 1 \\ x - y \quad &= -1 \end{aligned}\right\}$$

Tiene $|A'| = 7 \neq 0$, pero $ran(A) = 3 \rightarrow$ El sistema es *incompatible*.

h) Falso, puede ser también *incompatible*.

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + 2y + 2z &= 4 \\ 3x + 3y + 3z &= 5 \end{aligned}\right\}$$

$ran(A) = 1, \; ran(A') = 2$

Página 117

30 En un sistema de igual número de ecuaciones que de incógnitas, el determinante de la matriz de coeficientes es igual a 0. Responde razonadamente a las siguientes preguntas:

a) ¿Puede ser compatible?

b) ¿Puede tener solución única?

c) ¿Se puede aplicar la regla de Cramer?

a) Sí, podría ser compatible indeterminado si $ran(A) = ran(A') <$ *n.º de incógnitas*.

b) No, pues al ser $ran(A) <$ *n.º de incógnitas*, el sistema no puede ser compatible determinado.

c) Sí, si es compatible, pasando al 2.° miembro las incógnitas que sea necesario.

31 Si dos sistemas de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas, $AX = B$ y $AX = B'$, tienen una misma matriz de coeficientes A, ¿puede ser incompatible uno de los dos sistemas mientras que el otro es compatible determinado?

No. Si uno de ellos es compatible determinado es porque $ran(A) = ran(A') = 4$. Por tanto, si A es la misma matriz en los dos sistemas, también en el otro será $ran(A) = 4$. Luego los dos serían compatibles determinados.

32 Determina una matriz A para que el sistema homogéneo $AX = 0$ sea equivalente a la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (0, 0)$$

La ecuación matricial dada la podemos escribir así:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ -2x + y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Si llamamos $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, entonces: $AX = 0$.

Por tanto, la matriz A que buscamos es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

33 Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} a+3 \\ b \\ c+3 \end{pmatrix}$.

Justifica que si el sistema $AX = B$ es compatible determinado, entonces el sistema $AX = C$ también lo es.

Si $AX = B$, es *compatible determinado* $\rightarrow ran(A) = ran(A') = 2$.

Para ello, el siguiente determinante debe ser igual a 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & c \end{vmatrix} = 3a - 3b - 3c = 0$$

Calculamos el determinante de la matriz ampliada correspondiente al sistema $AX = C$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a+3 \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & c+3 \end{vmatrix} = 3a - 3b - 3c$$

Los dos determinantes tienen el mismo valor, porque el segundo se obtiene sustituyendo la 3.ª columna por ella más la suma de las otras dos, luego valen cero para los mismos valores de a, b y c. Por tanto, el sistema $AX = C$ es *compatible determinado*.

Para profundizar

34 Estudia y resuelve cuando sea posible.

$$\text{a)}\ \begin{cases} x + y + 2t = 3 \\ 3x - y + z - t = 1 \\ 5x - 3y + 2z - 4t = a \\ 2x + y + z + t = 2 \end{cases} \qquad \text{b)}\ \begin{cases} ax + z + t = 1 \\ ay + z - t = 1 \\ ay + z - 2t = 2 \\ az - t = 0 \end{cases}$$

a)
$$\left.\begin{array}{r} x + y + 2t = 3 \\ 3x - y + z - t = 1 \\ 5x - 3y + 2z - 4t = a \\ 2x + y + z + t = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & -4 & a \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{A}$$

$$|A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 3$$

(La 4.ª columna depende linealmente de las tres primeras).

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & a \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} \text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \\ (4.^a) - 2 \cdot (2.^a) \end{array}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \boxed{0} & 3 \\ 3 & -1 & \boxed{1} & 1 \\ -1 & 2 & \boxed{0} & 1 \\ -1 & -1 & \boxed{0} & a-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & a-2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} \text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & a+1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(a + 1) = 0 \rightarrow a = -1$$

- Si $a = -1 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 <$ *n.º de incógnitas*. El sistema es *compatible indeterminado*.

  Para resolverlo, podemos prescindir de la 4.ª ecuación y pasar la t al 2.º miembro:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 3 - 2t \\ 3x - y + z = 1 + t \\ 2x + y + z = 2 - t \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-2t & 1 & 0 \\ 1+t & -1 & 1 \\ 2-t & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{2t-5}{-3} = \frac{5-2t}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-2t & 0 \\ 3 & 1+t & 1 \\ 1 & 2-t & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{4t-4}{-3} = \frac{4-4t}{3};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3-2t \\ 3 & -1 & 1+t \\ 2 & 1 & 2-t \end{vmatrix}}{-3} = \frac{8-5t}{-3} = \frac{-8+5t}{3}$$

Soluciones: $x = \dfrac{5-2\lambda}{3}$, $y = \dfrac{4-4\lambda}{3}$, $z = \dfrac{-8+5\lambda}{3}$, $t = \lambda$

- Si $a \neq -1 \rightarrow ran(A) = 3 \neq ran(A') = 4$. El sistema es *incompatible*.

b) $$\left.\begin{array}{r} ax \quad\ + z + \ t = 1 \\ ay + z - \ t = 1 \\ ay + z - 2t = 2 \\ az - \ t = 0 \end{array}\right\} A' = \underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & a & -1 & 0 \end{array}\right.}_{A}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\2\\0\end{array}}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & a & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a & -1 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ a & 1 & -2 \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = \xrightarrow{\begin{array}{c}\text{FILAS}\\ (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a)\end{array}} a\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad -1} \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} =$$

$$= a \cdot a^2 = a^3 = 0 \ \rightarrow \ a = 0$$

- Si $a = 0$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \rightarrow z = 1 \\ \rightarrow z = 2 \\ \rightarrow t = 0 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\end{array}}\right\} \textit{Incompatible}$$

- Si $a \neq 0 \ \rightarrow \ ran(A) = ran(A') =$ *n.º de incógnitas* $= 4$.

  El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a & -1 \end{vmatrix}}{a^3} = \frac{(2a+1)a}{a^3} = \frac{2a+1}{a^2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a & -1 \end{vmatrix}}{a^3} = \frac{a}{a^3} = \frac{1}{a^2};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & a & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{a^3} = \frac{-a^2}{a^3} = \frac{-1}{a}; \quad t = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{vmatrix}}{a^3} = \frac{-a^3}{a^3} = -1$$

Soluciones: $x = \dfrac{2a+1}{a^2}, \ y = \dfrac{1}{a^2}, \ z = \dfrac{-1}{a}, \ t = -1$

35 Discute los siguientes sistemas:

$$\text{a)} \begin{cases} x - \ y + \ z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = -8 \\ 4x + \ y + az = b \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} x + \ y + \ z = a - 1 \\ 2x + \ y + az = a \\ x + ay + \ z = b \end{cases} \quad \text{c)} \begin{cases} x - 3y + z = a \\ x \qquad\ - z = b \\ x \qquad\ + z = c \end{cases} \quad \text{d)} \begin{cases} ax + \ y - z = b - 1 \\ 2x + ay \qquad = b + 1 \\ -x \qquad\ + z = b \end{cases}$$

a) $$\left.\begin{array}{r} x - \ y + \ z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = -8 \\ 4x + \ y + az = b \end{array}\right\} A' = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -8 \\ 4 & 1 & a & b \end{array}\right.}_{A}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right)$$

$$|A| = 5a = 0 \ \rightarrow \ a = 0$$

- Si $a = 0$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -8 \\ 4 & 1 & 0 & b \end{array}\right); \ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0; \ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -8 \\ 4 & 1 & b \end{vmatrix} = 5b + 20 = 0 \ \rightarrow \ b = -4$$

- Si $a = 0$ y $b = -4 \ \rightarrow \ ran(A) = ran(A') = 2 <$ *n.º de incógnitas.*

  El sistema es *compatible indeterminado.*

- Si $a = 0$ y $b \neq -4 \rightarrow ran(A) = 2 \neq ran(A') = 3$. El sistema es *incompatible*.
- Si $a \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') =$ *n.º de incógnitas* $= 3$. El sistema es *compatible determinado*, cualquiera que sea el valor de b.

b) $$\left.\begin{array}{r} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = b \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} a-1 \\ a \\ b \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$|A| = -(a-1)(a-2) = 0 \; \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

- Si $a = 1$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{array}\right) \quad \text{Contradictorias, a no ser que } b = 0.$$

— Si $a = 1$ y $b \neq 0 \rightarrow$ Sistema *incompatible*.

— Si $a = 1$ y $b = 0$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \text{La 1.ª fila y la 3.ª son iguales.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 2 < \textit{n.º de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema } \textit{compatible indeterminado}.$$

- Si $a = 2$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & b \end{array}\right) \quad \text{La 1.ª columna y la 3.ª son iguales.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & b \end{vmatrix} = -(b-1) = 0 \rightarrow b = 1$$

— Si $a = 2$ y $b \neq 1 \rightarrow ran(A) = 2 \neq ran(A') = 3$.

El sistema es *incompatible*.

— Si $a = 2$ y $b = 1 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 2 <$ *n.º de incógnitas*.

El sistema es *compatible indeterminado*.

— Si $a \neq 1$ y $a \neq 2 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas*.

El sistema es *compatible determinado* para cualquier valor de b.

c) $$\left.\begin{array}{l} x - 3y + z = a \\ x \qquad - z = b \\ x \qquad + z = c \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \end{array}\right)$$

$|A| = 6 \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') =$ *n.º de incógnitas*.

El sistema es *compatible determinado* para cualquier valor de a, b y c.

d) $$\left.\begin{array}{l} ax + y - z = b - 1 \\ 2x + ay \qquad = b + 1 \\ -x \qquad + z = b \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} a & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} b-1 \\ b+1 \\ b \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$|A| = a^2 - a - 2 = 0 \left\langle \begin{array}{l} a = -1 \\ a = 2 \end{array} \right.$$

- Si $a = -1$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & b-1 \\ 2 & -1 & 0 & b+1 \\ -1 & 0 & 1 & b \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & b-1 \\ 2 & -1 & b+1 \\ -1 & 0 & b \end{vmatrix} = -3b = 0 \rightarrow b = 0$$

— Si $a = -1$ y $b \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2 \neq ran(A') = 3$. El sistema es *incompatible.*

— Si $a = -1$ y $b = 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 2 <$ *n.º de incógnitas.*

El sistema es *compatible indeterminado.*

- Si $a = 2$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & b-1 \\ 2 & 2 & 0 & b+1 \\ -1 & 0 & 1 & b \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & b-1 \\ 2 & 2 & b+1 \\ -1 & 0 & b \end{vmatrix} = 3b - 3 = 0 \rightarrow b = 1$$

— Si $a = 2$ y $b \neq 1 \rightarrow ran(A) = 2 \neq ran(A') = 3$. El sistema es *incompatible.*

— Si $a = 2$ y $b = 1 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 2 <$ *n.º de incógnitas.*

El sistema es *compatible indeterminado.*

— Si $a \neq -1$ y $a \neq 2 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas.*

El sistema es *compatible determinado* para cualquier valor de b.

36 Dado este sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{r} \boldsymbol{x - 1 = 3\alpha - \beta} \\ \boldsymbol{y + 2 = 2\alpha + \beta} \\ \boldsymbol{z = \alpha + 2\beta} \end{array} \right. \quad \textbf{donde } \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$$

transfórmalo en un sistema equivalente que no dependa de los parámetros α, β; es decir, transfórmalo en un sistema en el que sus ecuaciones se expresen solo en función de las incógnitas.

Interpretamos el sistema al revés, es decir:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3\alpha - \beta = x - 1 \\ 2\alpha + \beta = y + 2 \\ \alpha + 2\beta = z \end{array} \right.$$

Para que este sistema tenga solución, el siguiente determinante debe ser igual a 0:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & x-1 \\ 2 & 1 & y+2 \\ 1 & 2 & z \end{vmatrix} = 3x - 7y + 5z - 17 = 0$$

En este caso, para calcular α y β, tomamos las dos primeras ecuaciones y obtenemos un sistema compatible determinado:

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta = x - 1 \\ 2\alpha + \beta = y + 2 \end{cases}$$

Las soluciones son: $\alpha = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5},\ \beta = -\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{8}{5}$

Sustituimos α y β por sus valores en el sistema original y obtenemos:

$$\begin{cases} x - 1 = 3\left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}\right) - \left(-\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{8}{5}\right) \\ y + 2 = 2\left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{8}{5}\right) \\ z = \left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}\right) + 2\left(-\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{8}{5}\right) \end{cases}$$

Las ecuaciones de este sistema se expresan solo en función de las incógnitas.

Autoevaluación

Página 117

1 **Resuelve por el método de Gauss el siguiente sistema e interprétalo geométricamente:**

$$\left\{\begin{array}{r} x-3y-z=-1\\ x+5y+3z=3\\ x+y+z=1\\ 3x+7y+5z=5\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} x-3y-z=-1\\ x+5y+3z=3\\ x+y+z=1\\ 3x+7y+5z=5\end{array}\right\} \begin{pmatrix}\begin{array}{ccc|c}1&-3&-1&-1\\1&5&3&3\\1&1&1&1\\3&7&5&5\end{array}\end{pmatrix} \to \begin{array}{l}(3.^{a})\\(2.^{a})\\(1.^{a})\\(4.^{a})\end{array} \begin{pmatrix}\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&5&3&3\\1&-3&-1&-1\\3&7&5&5\end{array}\end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{array}{l}(1.^{a})\\(2.^{a})-(1.^{a})\\(3.^{a})-(1.^{a})\\(4.^{a})-3\cdot(1.^{a})\end{array} \begin{pmatrix}\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&4&2&2\\0&-4&-2&-2\\0&4&2&2\end{array}\end{pmatrix} \to \begin{array}{l}(1.^{a})\\(2.^{a}):2\\(3.^{a})+(2.^{a})\\(4.^{a})-(2.^{a})\end{array} \begin{pmatrix}\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&2&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\end{pmatrix} \to$$

$$\to \left.\begin{array}{r} x+y+z=1\\ 2y+z=1\end{array}\right\} \begin{array}{l} z=1-2y\\ x=1-y-z=y\\ y=\lambda\end{array}$$

Soluciones: $x=\lambda,\ y=\lambda,\ z=1-2\lambda$. Son cuatro planos con una recta en común.

2 **Un transportista tiene tres camiones P, Q y R en los que caben un cierto número de contenedores de tres tipos A, B y C. En el camión P caben 5 contenedores del tipo A, 3 del tipo B y 4 del C. En el camión Q, caben 2 contenedores del tipo A, 5 del B y 5 del C. Y en el camión R, caben 4 del A, 3 del B y 6 del C. Si se han de transportar 45 contenedores del tipo A, 44 del tipo B y 58 del tipo C, ¿cuántos viajes ha de hacer cada camión si todos los viajes los hacen totalmente llenos?**

Llamamos:

x = viajes del camión P

y = viajes del camión Q

z = viajes del camión R

$$\begin{array}{c} \\ \text{A}\\ \text{B}\\ \text{C}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{P}&\text{Q}&\text{R}\end{array}\\ \begin{pmatrix}5&2&4\\3&5&3\\4&5&6\end{pmatrix}\end{array}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}45\\44\\58\end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 5x+2y+4z=45\\ 3x+5y+3z=44\\ 4x+5y+6z=58\end{array}\right\} \to x=5,\ y=4,\ z=3$$

El camión P tiene que dar 5 viajes.

El camión Q tiene que dar 4 viajes.

El camión R, tiene que dar 3 viajes.

3 a) Discute, en función de a, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + ay + z = a + 2 \\ x + y + az = -2(a+1) \\ ax + y + z = a \end{cases}$$

b) Resuelve el sistema anterior para el caso $a = -1$.

a) $$\left.\begin{array}{r} x + ay + z = a + 2 \\ x + y + az = -2(a+1) \\ ax + y + z = a \end{array}\right\} A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a+2 \\ 1 & 1 & a & -2(a+1) \\ a & 1 & 1 & a \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{matrix}}_{A}$$

$$|A| = a^3 - 3a + 2 = 0 = (a-1)^2(a+2) = 0 \left\langle \begin{array}{l} a = 1 \\ a = -2 \end{array}\right.$$

- Si $a = 1$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to$$ El sistema es *incompatible*.

- Si $a = -2$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$, entonces $ran(A) = ran(A') = 2 <$ *n.º de incógnitas.*

El sistema es *compatible indeterminado*.

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$: $ran(A) = ran(A') = 3 \to$ El sistema es *compatible determinado*.

b) Para $a = -1$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$ y sabemos que $|A| = 4$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A}$$

El sistema en este caso es *compatible determinado*. Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

Solución: $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = 0$

4 Demuestra que no hay valores de m para los que este sistema no tenga solución. Resuélvelo:

$$\begin{cases} x + 2y + \ \ z = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ x + my + 3z = 7 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + \ \ z = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ x + my + 3z = 7 \end{array}\right\} \ A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & m & 3 & 7 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{A}$$

$|A| = 4 - m = 0 \ \rightarrow \ m = 4$

- Si $m = 4$:

  $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \end{array}\right)$ La 4.ª columna se obtiene sumando la 2.ª y la 3.ª.

  Luego, $ran(A) = ran(A')$. El sistema es *compatible*. (En este caso sería *compatible indeterminado*, pues:

  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \ \rightarrow \ ran(A) = ran(A') = 2$).

  Lo resolvemos en este caso. Podemos prescindir de la 3.ª ecuación:

  $$\left.\begin{array}{l} x + 2y + \ \ z = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \end{array}\right\} \ \left.\begin{array}{l} x + 2y = 3 - z \\ x + 3y = 5 - 2z \end{array}\right\} \ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

  $$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 - z & 2 \\ 5 - 2z & 3 \end{vmatrix}}{1} = -1 + z\,; \ \ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 - z \\ 1 & 5 - 2z \end{vmatrix}}{1} = 2 - z$$

  Soluciones: $x = -1 + \lambda, \ y = 2 - \lambda, \ z = \lambda$

- Si $m \neq 4 \ \rightarrow \ ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas*. El sistema es *compatible determinado*.

  Lo resolvemos en este caso:

  $$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 7 & m & 3 \end{vmatrix}}{4 - m} = \frac{4 - m}{4 - m} = 1\,; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}}{4 - m} = \frac{0}{4 - m} = 0\,;$$

  $$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & m & 7 \end{vmatrix}}{4 - m} = \frac{8 - 2m}{4 - m} = \frac{2(4 - m)}{4 - m} = 2$$

  Solución: $x = 1, \ y = 0, \ z = 2$

  Por tanto, no hay ningún valor de m para el que el sistema no tenga solución.

5 El rango de la matriz de los coeficientes de un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas es 3. ¿Qué rango puede tener la matriz ampliada? En base a ello, ¿cuántas soluciones tendrá el sistema?

La matriz ampliada es una matriz cuadrada de orden 4.

Su rango puede ser 3 (si $|A'| = 0$) o 4 (si $|A'| \neq 0$).

- Si $ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas* $\rightarrow$ El sistema será *compatible determinado*.
- Si $ran(A) = 3 \neq ran(A') = 4 \ \rightarrow$ El sistema será *incompatible*.

6 **Discute y resuelve el siguiente sistema:**

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ y + z = a \\ x - 3z = -1 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

Según el teorema de Rouché, el sistema tendrá solución si el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada son iguales.

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

con A la parte formada por las tres primeras columnas: $\underbrace{}_{A}$

Como la matriz ampliada es de orden 4, buscamos los valores que anulan su determinante.

$$|A'| = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \\ (4.^a) \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 2a - 2 + 3a - 2 - 4 \rightarrow a = 14$$

- Si $a = 14$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 14 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \text{Como} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 = n.^o \text{ de incógnitas.}$$

$\underbrace{}_{A}$

El sistema es *compatible determinado*.

- Si $a \neq 14 \rightarrow ran(A) = 3 \neq ran(A') = 4$. El sistema es *incompatible*.
- Resolución si $a = 14$:

Tomamos las ecuaciones 2.ª, 3.ª y 4.ª:

$$\begin{cases} y + z = 14 \\ x - 3z = -1 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

De la 1.ª y la 3.ª ecuación obtenemos $2y = 16 \rightarrow y = 8$

$z = 14 - 8 = 6$

En la 2.ª $x = -1 + 3z = -1 + 18 = 17$

Solución: $x = 17$, $y = 8$, $z = 6$

Otra forma de resolver el problema

Si resolvemos el sistema formado por las ecuaciones 1.ª, 3.ª y 4.ª, obtendríamos la solución $x = 17$, $y = 8$, $z = 6$.

Llevando estos valores a la 2.ª ecuación, $y + z = a \rightarrow 8 + 6 = a \rightarrow a = 14$. Este es el valor de a que hace el sistema compatible. Para cualquier otro valor de a, el sistema no tiene solución.

7 **En un sistema homogéneo de tres ecuaciones y dos incógnitas, la matriz de los coeficientes tiene rango 2.**

Di, razonadamente, cuántas soluciones tendrá el sistema.

En un sistema homogéneo el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada siempre coincide ya que al añadir una columna de ceros no cambia el rango.

Por tanto, tenemos que $ran(A) = ran(A') = 2 = n.^o$ *de incógnitas.*

El sistema será *compatible determinado*. Solo tiene una solución que es la trivial: $x = 0$, $y = 0$.