Matrices

1. Sean $A = (a_{ij})_{3X4}$ y $B = (b_{ij})_{3X4}$ donde $a_{ij} = i - j$ y $b_{ij} = (-1)^{i+j} + 2^{j-1}$. Calcular $A + B$.

2. Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \\ q \end{pmatrix}$, hallar AB y BA.

3. Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ hallar $A^2, A^3, \ldots, A^n$.

4. Sabiendo que $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y que $2M + 3X = -N$, hallar X.

5. Sabiendo que $3A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $-A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, hallar A y B.

6. Sean A y B dos matrices. Sacar factor común de las siguientes expresiones:
$$A^4 - 4A^2 + 3A \qquad ; \qquad A^2B - 5AB + 2AB^2$$

7. Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ 3 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y que $A + B = C$, hallar B.

8. Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ hallar A^n.

9. Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ y que $3X - 2A = 5B$, hallar X.

10. Sabiendo que $2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, hallar A y B.

11. Sabiendo que $2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, hallar X e Y.

12. Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, demuestra que $(A - I)^2 = O$ y calcula $A^2, A^3, \ldots, A^n$.

13. Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hallar A^n.

14. Sea A un matriz cuadrada tal que $A^2 + A + I = O$. Demostrar que A es inversible y calcular su inversa en función de A.

15. Sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hallar AB, AC, $A^t B^t$ y $C^t A^t$.

16. Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ comprueba que $A^3 + I = O$ y calcula A^{10}.

17. Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ calcular el valor de a para que $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$. ¿Existe algún valor de a para que la matriz A sea simétrica?

18. Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ hallar $A^2 - 2A$.

Soluciones

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 7 \\ 4 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

2. $AB = \begin{pmatrix} am + bn + cp + dq \end{pmatrix} \quad ; \quad BA = \begin{pmatrix} ma & mb & mc & md \\ na & nb & nc & nd \\ pa & pb & pc & pd \\ qa & qb & qc & qd \end{pmatrix}$

3. $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & 0 \\ 0 & 0 & c^3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & -3 \\ -\frac{8}{3} & -1 & -\frac{10}{3} \\ -2 & -\frac{4}{3} & -4 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

6. $A^4 - 4A^2 + 3A = A\left(A^3 - 4A + 3I\right) \quad ; \quad A^2B - 5AB + 2AB^2 = A\left(A - 5I + 2B\right)B$

7. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \\ -3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 5 & -\frac{17}{3} \end{pmatrix}$

10. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

11. $X = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix} \quad ; \quad Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

12. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \dots \quad ; \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{(n+1)n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

14. $A^{-1} = -A - I$

15. $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad AC = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^tB^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad C^tA^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

16. $A^{10} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

17. $a = 4$. Para ningún valor de a la matriz es simétrica.

18. $\begin{pmatrix} -2 & 1-\lambda \\ \lambda - 1 & \lambda^2 - 2\lambda - 1 \end{pmatrix}$