MATRICES

1. Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular A^2, A^3 y A^{428}.

Solución: $A^2=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, A^3=I, A^{428}=A^2$

2. Dada la matrices

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- **a)** Calcular la matriz $(A-I)^2$.
- **b)** Haciendo uso del apartado anterior hallar A^4.

Solución:

3. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, ¿qué relación deben guardar las constantes a y b para que se verifique la igualdad $A^2=A$?

Solución: a=0, b=1 / a=1, b=0

4. Hallar X^2+Y^2, siendo X e Y las soluciones del sistema matricial siguiente:

$$2X+Y=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X-Y=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $X^2+Y^2=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

5. Dadas las matrices A y B de orden 3x3, decir si el siguiente razonamiento es correcto o incorrecto. Si es correcto indicar en cada paso la propiedad utilizada y si es incorrecto señalar el error cometido:

$$(A+B)\cdot(A-B)=A\cdot A-A\cdot B+B\cdot A-B\cdot B=A^2-A\cdot B+B\cdot A+B^2=A^2-B^2$$

6. Siendo A y B dos matrices 2x2, resolver el sistema matricial

$$3A-5B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 8 & 1\end{pmatrix}$$
$$-A+3B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 0\end{pmatrix}$$

Solución: $A=\begin{pmatrix}\frac{13}{4} & \frac{14}{4}\\ \frac{39}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}\frac{7}{4} & \frac{10}{4}\\ \frac{17}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$

7. Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, se pide:

a) **Demostrar que $A^2 = 2A-I$, donde I es la matriz identidad 2x2.**
b) **Expresar A^3 y A^4 en función de A.**
c) **Calcular A^{100}.**

Solución:
$$A^3=3A-I$$
$$A^4=4A-I$$
$$A^{100}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -100 & 1\end{pmatrix}$$

8. Sean P y Q matrices cuadradas de orden n, ¿Es cierta la siguiente igualdad?

$$(P+Q)\cdot(P-Q)=P^2-Q^2.$$

9. Calcula las matrices cuadradas X que verifiquen PX=XP, siendo $P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Solución: $X=\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & x\end{pmatrix}$