OPTIMIZACIÓN

1.- Determina dos números cuya suma sea 24 y tales que el producto de uno de ellos por el cubo del otro sea máximo.

x = 1[er] número; y = 2º número

Relación: x + y = 24 $\Rightarrow$ x = 24 – y

Función: f(x,y) = $x \cdot y^3$ $\Rightarrow$ f(y) = $(24-y) \cdot y^3 = 24y^3 - y^4$

Calculemos ahora la derivada de dicha función: f´(y) = $72y^2 - 4y^3$

Igualando a cero dicha derivada para calcular los posibles máximos o mínimos de la función: f´(y) = 0 $\Rightarrow$ $72y^2 - 4y^3$ = 0 $\Rightarrow$ y = 0 ó 72 – 4y = 0 $\Rightarrow$ y = 0; y = 18 posibles máximos ó mínimos de la función.

Hallando la 2ª derivada para saber si es un máx. ó mín.: f´´(y) = $144y - 12y^2$

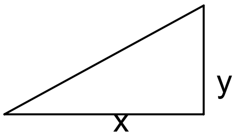
Sustituyamos los posibles máximos ó mínimos en dicha derivada:

f´´(0) = 0 duda $\Rightarrow$ f´´´(y) = 144 – 24y $\Rightarrow$ f´´´(0) = 144 ≠ 0 $\Rightarrow$ y = 0 es P.I. de f(x)

f´´(18) = 144·18 – 12·18^2 = - 1296 < 0 <u>máximo</u> : y = 18; x = 24 – 18 = 6

Solución: Los números pedidos son 6 y 18.

2. Calcula el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo tal que la suma de la longitudes de sus dos catetos vale 4 cm.



x = 1[er] cateto (base); y = 2º cateto (altura)

Relación: x + y = 4 $\Rightarrow$ y = 4 – x

Función: f(x,y) = $\frac{x \cdot y}{2}$ $\Rightarrow$ f(x) = $\frac{x \cdot (4-x)}{2} = \frac{4x - x^2}{2}$

Calculemos ahora la derivada de dicha función: f´(x) = $\frac{4-2x}{2}$

Igualando a cero dicha derivada para calcular los posibles máximos o mínimos de la función: f´(x) = 0 $\Rightarrow$ $\frac{4-2x}{2}$ = 0 $\Rightarrow$ 4 – 2x = 0 $\Rightarrow$ x = 2 posible máximo ó mínimo de la función.

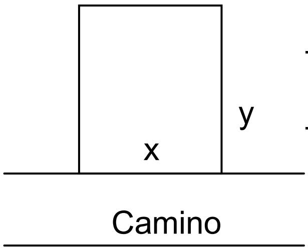
Hallando la 2ª derivada para saber si es un máx. ó mín.: f´´(x) = $\frac{-2}{2}$ = - 1

Sustituyamos el posible máx. ó mín. en dicha derivada:

f´´(2) = - 1 < 0 <u>máximo</u> : x = 2; y = 4 – 2 = 2 $\Rightarrow$ A = $\frac{2 \cdot 2}{2}$ = 2 cm^2

Solución: El área máxima que puede tener el triángulo rectángulo es de 2 cm^2

3.- Si se quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado del camino cuesta 80 Euros/m y la de los otros 10 Euro/m, halla el área del mayor campo que puede cercarse con 28800 Euros.



<u>Relación:</u> $90x + 20y = 28.800 \Rightarrow 9x+2y= 2880 \Rightarrow y = 1440 - 4'5x$

<u>Función (área)</u>: $f(x,y) = x \cdot y \Rightarrow f(x) = x \cdot (1440 - 4'5x) = 1440x - 4'5x^2$

Derivando: $f'(x) = 1440 - 9x$

Igualando a cero: $f'(x)=0 \Rightarrow 1440 - 9x = 0 \Rightarrow x = 160$ posible máx. ó mín.

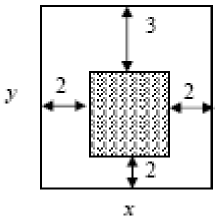
Hallando la segunda derivada: $f''(x) = -9$

Sustituyamos el posible máx. ó mín. en dicha derivada: $f''(160) = -9 < 0$ máximo.

Si $x = 160 \Rightarrow y = 1440 - 4'5 \cdot 160 = 720$

Solución: El área del mayor campo que se puede cercar con 28800 Euros es de 160 m. x 720 m. = 115.200 m^2.

4. Las páginas de un libro deben medir cada una 600 cm^2 de área. Sus márgenes laterales y el inferior miden 2 cm. y el superior mide 3 cm. Calcular las dimensiones de la página que permitan obtener la mayor área impresa posible.



Alto de la página impresa: y-5
Ancho de la página impresa: x-4
Área impresa = $(x-4)\cdot(y-5)$ (función objetivo)
Área páginas = $x \cdot y = 600$ (relación) $\Rightarrow y = \dfrac{600}{x}$

Función: $f(x, y) = (x-4)\cdot(y - 5) \Rightarrow f(x) = (x-4)\cdot\left(\dfrac{600}{x} - 5\right) = 600 - 5x - \dfrac{2400}{x} + 20$

Derivando: $f'(x) = -5 + \dfrac{2400}{x^2}$

Igualando a cero: $f'(x) = 0 \Rightarrow -5 + \dfrac{2400}{x^2} = 0 \Rightarrow \dfrac{2400}{x^2} = 5 \Rightarrow x^2 = \dfrac{2400}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{480} = \pm 21,91$

Como no pude ser – 21,91 ya que las longitudes no pueden ser negativas. El único punto posible máximo ó mínimo de f(x) es x= +21,91

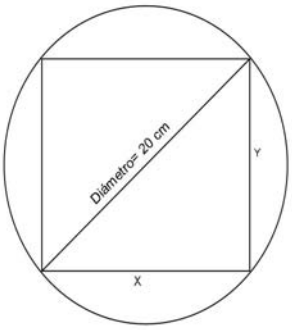
Hallando la segunda derivada: $f''(x) = \dfrac{0 - 2400 \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{-4800}{x^3}$

Sustituyamos el posible máx. ó mín. en dicha derivada: $f''(21,91) = (-) < 0$ máximo.

Si $x = 21,91 \Rightarrow y = \dfrac{600}{21,91} = 27,38$

Solución: La hoja debe tener de ancho 21,91 cm y 27,38 cm de alto..

5.- Entre todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio 10 cm, calcula las dimensiones del que tenga área máxima.



Relación: $x^2 + y^2 = 20^2 \Rightarrow y^2 = 400 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{400 - x^2}$

Función: $A(x, y) = x \cdot y \Rightarrow A(x) = x \cdot \sqrt{400 - x^2} = \sqrt{400x^2 - x^4}$

Como la función es positiva se puede elevar al cuadrado sin que varíen sus máximos y/o mínimos:

$$f(x) = (A(x))^2 = x^2 \cdot (400 - x^2) = 400x^2 - x^4$$

Derivando: $f'(x) = 800x - 4x^3$

Igualando a cero: $f'(x) = 0 \Rightarrow 800x - 4x^3 = 0 \Rightarrow x \cdot (800 - 4x^2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x = \pm\sqrt{200}$ $\Rightarrow$ $x = 14'14$ (las longitudes no pueden ser negativas o cero) posible máx. ó mín.

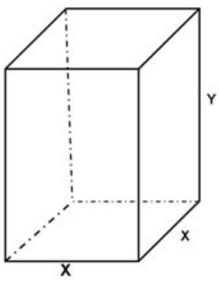
Hallando la segunda derivada: $f''(x) = 800 - 12x^2$

Sustituyamos el posible máximo ó mínimo en dicha derivada:

$f''(14'14) = 800 - 12 \cdot (14,14)^2 = -1600 < 0 \Rightarrow$ Máximo: $x = 14'14 \Rightarrow$
$y = \sqrt{400 - (14'14)^2} = \sqrt{200} = 14'14$

Solución: Tendrá área máxima un cuadrado de lado 14´14 cm.

6.- Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para 13,5 metros cúbicos. Para ello se dispone de una chapa de acero de grosor uniforme. Calcular las dimensiones del depósito para que el gasto en chapa sea el menor posible. **(PAU, SEPT´2001)**



Relación: $V = x \cdot x \cdot y = x^2 \cdot y = 13,5 \Rightarrow y = \frac{13,5}{x^2}$

Función: $f(x,y) = x^2 + 4 \cdot x \cdot y \Rightarrow f(x) = x^2 + 4 \cdot x \cdot \left(\frac{13,5}{x^2}\right) = x^2 + \frac{54}{x}$

Derivando: $f'(x) = 2x + \left(\frac{0-54}{x^2}\right) = \frac{2x^3 - 54}{x^2}$

Igualando a cero: $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^3 - 54}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 54 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3$, posible máximo ó mínimo.

Hallando la segunda derivada: $f''(x) = 2 + \frac{54 \cdot 2x}{x^4} = 2 + \frac{108}{x^3}$

Sustituyamos el posible máx. ó mín. en dicha derivada: $f''(3) = 2 + \frac{108}{27} = 6 > 0 \Rightarrow$ mínimo: $x = 3 \Rightarrow y = \frac{13,5}{3^2} = 1,5$

Solución: Para que precise la menor cantidad de chapa, la base debe ser un cuadrado de lado 3 m y la altura 1,5 m.

7. El propietario de un edificio tiene alquilados los 40 pisos del mismo a un precio de 600 € cada uno. Por cada 60€ que el propietario aumenta el precio observa que pierde un inquilino. ¿a qué precio le convienen alquilar los pisos para obtener la mayor ganancia posible?(Ayuda: llamar x = nº de 60 € que aumenta o lo que es lo mismo el **nº inquilinos perdidos**.)

Sea x = nº de inquilinos perdidos.

Entonces:
Función Beneficio: $B(x) = (40 – x)\cdot(600 + 60x) = 24000 + 1800x – 60x^2$

Derivando: $B'(x) = 1800 – 120x$
Igualando a cero: $B'(x) = 0 \Rightarrow 1800 – 120x = 0 \Rightarrow x = 1800/120 = 15$, posible máximo ó mínimo.
Hallando la segunda derivada: $B''(x) = - 120$
Sustituyamos el posible máx. ó mín. en dicha derivada:

$B''(15) = - 120 < 0 \Rightarrow$ Máximo: $x = 15 \Rightarrow$
Precio que debe aumentar a cada piso: $60\cdot15 = 900$ €

Solución: Le deberá aumentar 900 € el precio de cada piso.

8.- El consumo de un barco navegando a una velocidad de *x* nudos (millas/hora) viene dada por la expresión $C(x) = \frac{x^2}{60} + \frac{450}{x}$. Calcular la velocidad más económica y el coste equivalente. **(PAU, JUN´2006)**

La función será el consumo: $C(x) = \frac{x^2}{60} + \frac{450}{x}$

Derivando: $C'(x) = \frac{2x}{60} - \frac{450}{x^2}$

Igualando a cero: $C'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x}{60} - \frac{450}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{2x}{60} = \frac{450}{x^2} \Rightarrow 2x^3 = 27000 \Rightarrow$

$x = \sqrt[3]{13500} = 23,81$, posible máximo ó mínimo.

Hallando la segunda derivada: $C''(x) = \frac{2}{60} - \frac{0 - 450\cdot 2x}{x^4} = \frac{2}{60} + \frac{900}{x^3}$

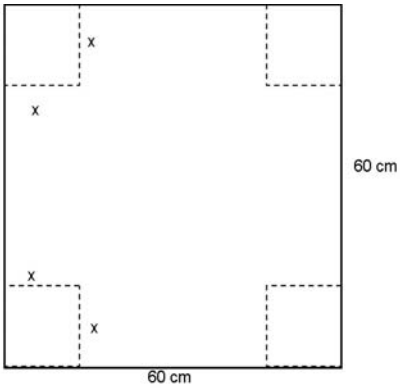
Sustituyamos el posible máximo ó mínimo en dicha derivada:

$C''(23,81) = \frac{2}{60} + \frac{900}{(23,81)^3} > 0$ **Mínimo**: $x = 23,81 \Rightarrow$

$C(23,81) = = \frac{(23,81)^2}{60} + \frac{450}{23,81} = 28,35$

Solución: Velocidad más económica es 23,81 nudos con un coste de 28,35.

9.- A partir de una cartulina cuadrada de 60 cms de lado se va a construir una caja de base cuadrada, sin tapa, a base de recortar cuatro cuadrados iguales en las esquinas de la cartulina y doblando después de la manera adecuada. Un observador indica que la caja de más capacidad se obtendrá si los cuadrados eliminados tienen 10 cm. de lado. Decidir si la observación es correcta o no. **(PAU, JUN´2001)**



Función: $f(x) = (60-2x)\cdot(60-2x)\cdot x = 4x^3 - 240x^2 + 3600x$
Derivando la función: $f'(x) = 12x^2 - 480x + 3600$

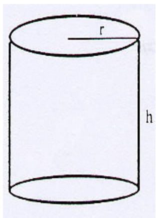
Igualando a cero: $f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 480x + 3600 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 40x + 300 = 0 \Rightarrow x = 10$ y $x = 30$ Posibles máx ó mín.

Hallando la segunda derivada: $f''(x) = 24x - 480$
Sustituyamos los posible máximos ó mínimos en dicha derivada:

$f''(30) = 720 - 480 = 240 > 0 \Rightarrow$ Mínimo
$f''(10) = 240 - 480 < 0 \Rightarrow$ Máximo: $x = 10$

Solución: La observación es correcta.

10.- Se quiere construir depósitos cilíndricos como el de la figura, con la condición de que la altura más el perímetro de la circunferencia valgan 100 m. Comprobar que el volumen de los depósitos viene dado por la expresión $V = 100\cdot\pi\cdot r^2 - 2\cdot\pi^2\cdot r^3$ y determinar las dimensiones del que tiene volumen máximo. **(PAU,Junio´97)**



Relación: $h + 2\cdot\pi\cdot r = 100 \Rightarrow h = 100 - 2\cdot\pi\cdot r$
Función: $V = \pi\cdot r^2\cdot h \Rightarrow V(r) = \pi\cdot r^2\cdot(100 - 2\cdot\pi\cdot r) = 100\cdot\pi\cdot r^2 - 2\cdot\pi^2\cdot r^3$

Derivando: $V'(r) = 200\cdot\pi\cdot r - 6\cdot\pi^2\cdot r^2$
Igualando a cero: $V'(r) = 0 \Rightarrow r\cdot(200\cdot\pi - 6\cdot\pi^2\cdot r) = 0 \Rightarrow$ **r = 0** ó $200\cdot\pi - 6\cdot\pi^2\cdot r = 0$
$\Rightarrow r = 0$; $r = \dfrac{200\cdot\pi}{6\cdot\pi^2} = \dfrac{100}{3\cdot\pi} = 10{,}61$, posibles máximos ó mínimos.

Hallando la segunda derivada: $V''(r) = 200\cdot\pi - 12\cdot\pi^2\cdot r$

Sustituyamos los posibles máximos ó mínimos en dicha derivada:

$V''(0) = 200\cdot\pi - 0 > 0 \Rightarrow$ Mínimo

$V''(10{,}61) = 200\cdot\pi - 12\cdot\pi^2\cdot 10{,}61 < 0 \Rightarrow$ Máximo: $r = 10{,}61 \Rightarrow$

$h = 100 - 2\cdot\pi\cdot 10{,}61 = 33{,}34$

Solución: El depósito cilíndrico de volumen máximo tendrá de radio: 10,61 m y de altura 33,34 m.